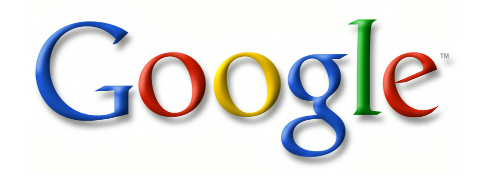
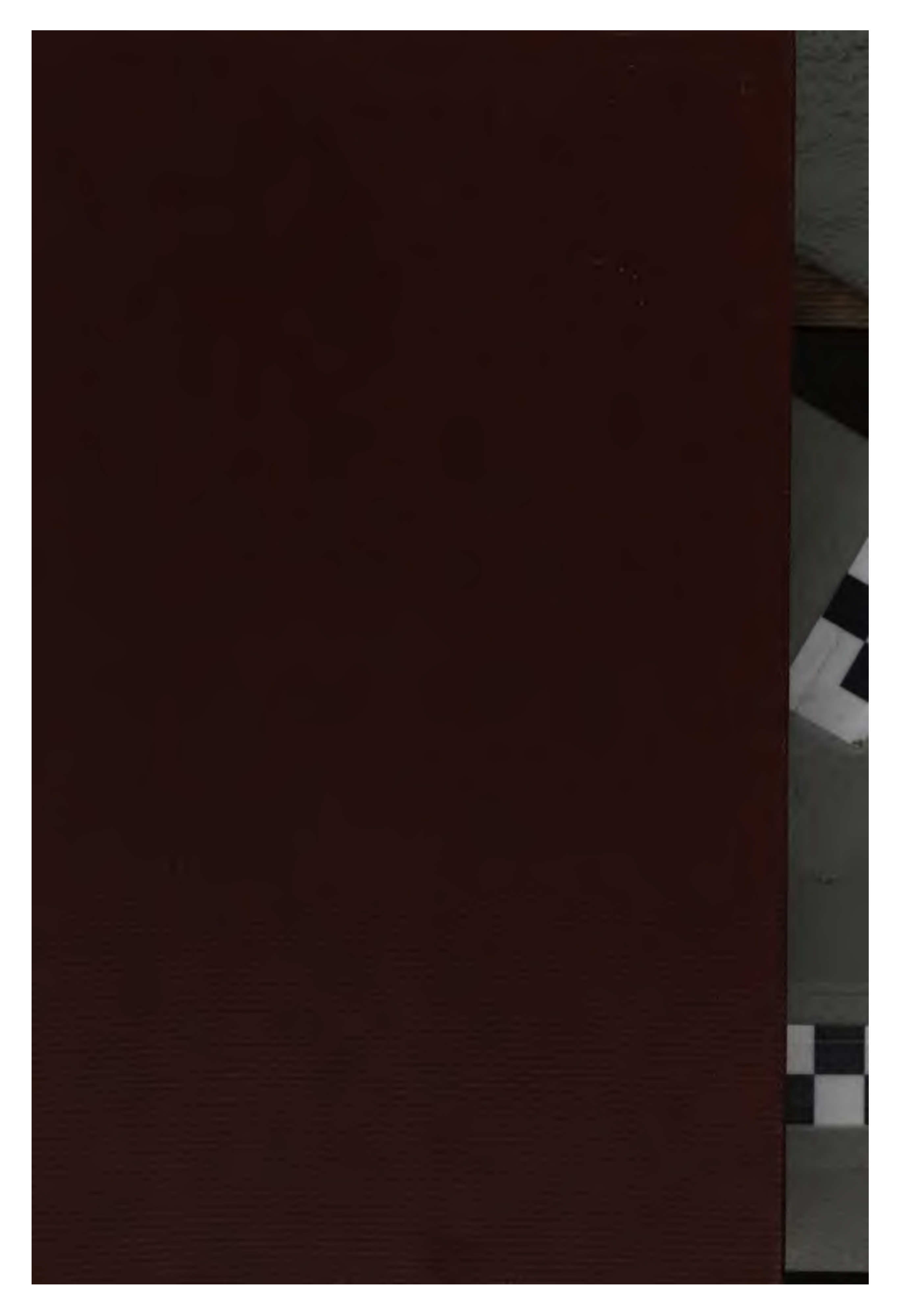
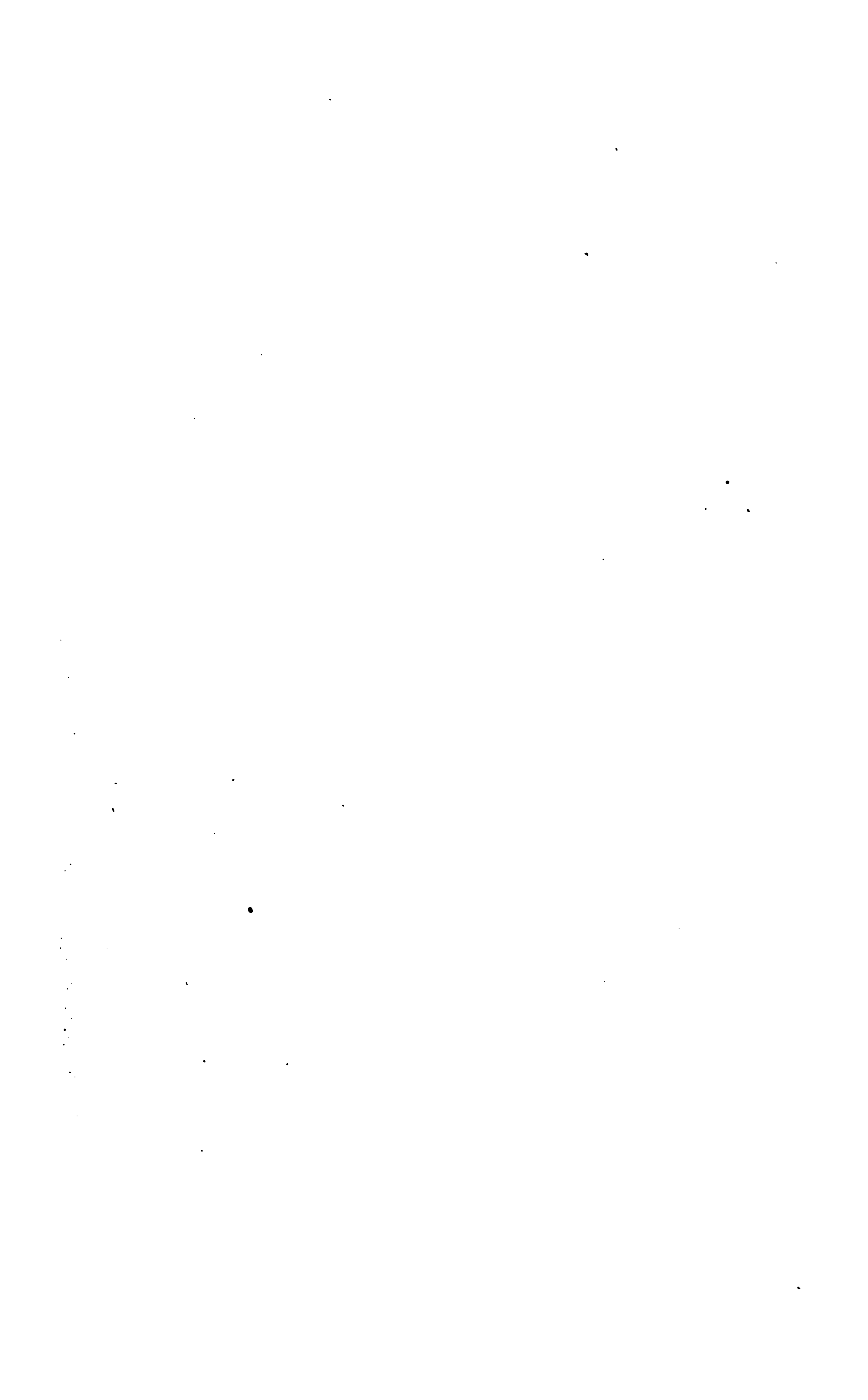
















HERMANN GRASSMANNS

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE UND PHYSIKALISCHE WERKE.

AUF VERANLASSUNG

DER

MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

UND UNTER MITWIRKUNG DER HERREN:

JAKOB LÜROTH, EDUARD STUDY, JUSTUS GRASSMANN,
HERMANN GRASSMANN DER JÜNGERE, GEORG SCHEFFERS

HERAUSGEGEBEN

VON

FRIEDRICH ENGEL.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1894.

HERMANN GRASSMANNS

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE UND PHYSIKALISCHE WERKE.

ERSTEN BANDES ERSTER THEIL:

DIE AUSDEHNUNGSLEHRE VON 1844 UND DIE GEOMETRISCHE ANALYSE.

UNTER DER MITWIRKUNG

VON

EDUARD STUDY

HERAUSGEGEBEN

VON

FRIEDRICH ENGEL.

MIT EINEM BILDE GRASSMANNS IN HOLZSCHNITT UND 35 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1894.

Vorbemerkungen.

Mit sehr wenigen Ausnahmen haben die deutschen Mathematiker Grassmann fast während seines ganzen Lebens die Anerkennung versagt, die er verdiente; eigentlich erst in dem letzten Jahrzehnt seines Lebens wurden einige Stimmen laut, die darauf hinwiesen, dass der Stettiner Gymnasiallehrer doch etwas geleistet habe, ja dass er in manchen Beziehungen seinen Zeitgenossen vorausgeeilt sei. Nach Grassmanns Tode ist es nicht viel anders geworden. Es giebt zwar jetzt eine ganze Reihe von Mathematikern, die nahezu ausschliesslich mit Grassmannschen Methoden arbeiten; aber der grossen Mehrheit aller Mathematiker ist er bis auf den heutigen Tag ganz fremd geblieben: man begnügt sich im günstigsten Falle, seinen Namen mit einer gewissen Hochachtung zu nennen, aber an seinen Werken geht man achselzuckend vorüber.

Allerdings ist es wahr, dass Grassmann nicht gerade leicht lesbar ist; seine Neigung zur Abstraktion, seine philosophische Darstellungsweise wirken auf uns alle, die wir so ganz anders gewöhnt sind, zunächst abschreckend ein. Wahr ist es auch, dass viele unter den Ergebnissen Grassmanns, die, als er sie veröffentlichte, neu waren, mittlerweile, unabhängig von ihm, auf andern Wegen wiedergefunden worden sind, und dass wir jetzt auf einem höheren Standpunkte stehen, von dem aus wir den Zusammenhang der Dinge ganz anders übersehen können, als es Grassmann möglich war. Aber andrerseits findet man doch bei Grassmann noch gar Manches, was auch heute noch neu ist und auf die Entwickelung der Wissenschaft Einfluss zu üben vermag. Ausserdem ist es aber eine einfache Pflicht der Gerechtigkeit, auch die andern Leistungen Grassmanns anzuerkennen und überhaupt Grassmann die ihm gebührende Stellung unter den Mathematikern des neunzehnten Jahrhunderts nicht länger vorzuenthalten.

Dieser Pflicht uns zu entziehen, haben wir heute gar keinen Vorwand mehr. Grassmanns Zeitgenossen nämlich wurde das Ver-

ständniss seiner Werke nicht blos durch deren eigenthümliche Darstellungsweise erschwert, sondern auch, und zwar in viel höherem Grade, durch die Fülle neuer, fremdartiger Begriffe, mit denen Grassmann sie förmlich überschüttete. Heutzutage dagegen sind wir in einer viel günstigeren Lage. Durch die Weiterentwickelung der Mathematik ist uns ein grosser Theil dieser Begriffe, die damals den Zeitgenossen Grassmanns so fremdartig erschienen, ganz geläufig, da sie eben seitdem von andern Mathematikern auf andern Wegen entwickelt worden sind, und deshalb ist es für uns viel leichter, Grassmann zu verstehen, und es bleibt eigentlich nur die Schwierigkeit übrig, die in seiner eigenthümlichen, halbphilosophischen Darstellungsweise liegt. Aber auch diese Schwierigkeit ist bei einiger Anspannung des Denkens zu überwinden und davor darf sich niemand scheuen; erfordert doch überhaupt jede ernste wissenschaftliche Leistung eine solche Anspannung des Denkens, wenn sie verstanden und gewürdigt werden soll.

Es sind eigentlich nur äussere Gründe, die es einigermassen entschuldigen können, dass Grassmann heutzutage noch so vernachlässigt wird. Seine Werke sind zum Theil nicht sehr leicht zugänglich. Eins seiner Hauptwerke, die Ausdehnungslehre von 1862, ist vergriffen und gar nicht mehr zu bezahlen. Seine Abhandlungen sind in Zeitschriften zerstreut. Der Bequemlichkeit der Mathematiker auch diesen letzten Vorwand zu entziehen, das ist der Zweck der Gesammtausgabe, von der jetzt der erste Theil des ersten Bandes vorliegt.

Den ersten Anstoss zur Veranstaltung dieser Ausgabe hat Felix Klein gegeben. Ueberzeugt, dass ein solches Unternehmen zeitgemäss sei, hatte er sich mit der Grassmannschen Familie in Verbindung gesetzt, um deren Einverständniss zu erlangen. Anfang Oktober 1892 fragte er dann bei mir an, ob ich etwa geneigt wäre, die Herausgabe zu übernehmen. Ich bin nie ein einseitiger Parteigänger Grassmanns gewesen und werde das auch nie werden, aber gerade deshalb durfte ich wenigstens den Anspruch erheben, unbefangen zu sein. Ausserdem hatte ich schon seit längerer Zeit Interesse für Grassmann gehabt und hatte wenigstens die beiden Ausdehnungslehren zum Theil gelesen, ich war also nicht ganz unvorbereitet. Endlich aber, ich gestehe es offen, reizte mich auch der Gedanke, etwas dazu beitragen zu können, dass der so verkannte Mann zu seinem Rechte käme. Ich antwortete daher, dass ich nicht abgeneigt sei, die Herausgabe zu übernehmen, vorausgesetzt, dass sich die geeigneten Mitarbeiter fänden.

Im weiteren Verlaufe des Oktobers 1892 hielt sich Klein einige Tage in Leipzig auf und wohnte am 17. Oktober einer Sitzung der

mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften bei. Klein benutzte diese Gelegenheit, um der Klasse darzulegen, wie wünschenswerth eine Gesammtausgabe der mathematischen und physikalischen Werke Grassmanns sei. Eine solche Ausgabe dürfe nicht blos die gedruckten Werke Grassmanns enthalten, sondern müsse auch aus dessen Nachlass Alles bringen, was der Veröffentlichung werth sei. Vielleicht könne die Klasse dieses Unternehmen in irgend einer Weise stützen, sei es auch nur, indem sie durch eine zu wählende Kommission eine Art Aufsicht über die Herausgabe führe, was dann auf dem Titel der Ausgabe zum Ausdruck zu bringen sei. Zugleich erwähnte er, dass er glaube, in mir eine geeignete Persönlichkeit zur Uebernahme der Herausgabe empfehlen zu können. Endlich erklärte er: für den Fall, dass die Klasse auf diesen Vorschlag eingehe, erachte er seine eigne Thätigkeit für das Zustandekommen der Ausgabe im Wesentlichen als beendet.

Diese von Klein gegebene Anregung fand bei den anwesenden Mitgliedern der Klasse beifällige Aufnahme, insbesondere äusserten sich die Mathematiker zustimmend und C. Ludwig, der damalige Sekretär der Klasse, sprach sich sogleich sehr wohlwollend über den Gedanken aus.

Ich suchte mir nunmehr ein genaueres Bild von dem Umfange des ganzen Unternehmens zu machen und warb Mitarbeiter. In sehr dankenswerther Weise erklärte sich Lüroth bereit, die Grassmannschen Arbeiten über Mechanik herauszugeben, und ebenso versprach mir Study seine Mitwirkung bei der Herausgabe der Ausdehnungslehre von 1844 sowie der geometrischen Analyse und anderer Abhandlungen. Ausserdem waren aber noch die Verlagsrechte klarzustellen, was durch Vermittelung der Grassmannschen Familie geschah. Die Verleger der Zeitschriften, in denen die einzelnen Abhandlungen Grassmanns erschienen waren, ertheilten ohne Weiteres ihre Zustimmung zu dem Wiederabdruck dieser Abhandlungen. Die Ausdehnungslehre von 1862 war bei Enslin überhaupt nur im Kommissionsverlage gewesen und überdies vollständig vergriffen, hier gab es also auch keine Schwierigkeit. Aehnlich verhielt es sich mit den beiden Lehrbüchern Grassmanns, mit der Arithmetik und der Trigonometrie. Die Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft zu Leipzig ertheilte mit der grössten Bereitwilligkeit die Erlaubniss zum Wiederabdruck der „geometrischen Analyse“. So blieb nur die Ausdehnungslehre von 1844 übrig, an der die Verlagsbuchhandlung von O. Wigand in Leipzig das Verlagsrecht besass und deren zweite Auflage noch nicht vergriffen war. Aber die Verlagsbuchhandlung von O. Wigand war bereit, gegen eine mässige

Abfindungssumme auch die Aufnahme dieses Werkes in die Gesammtausgabe zu gestatten.

Ueber alles dies erstattete ich der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in der Decembersitzung vom Jahre 1892 Bericht. Es wurde daraufhin eine Kommission gewählt, die aus dem Sekretär C. Ludwig als Vorsitzenden und aus den Herren Scheibner, Lie, A. Mayer und Bruns bestand und die darüber berathen sollte, in welcher Form die Klasse das Unternehmen fördern könne.

Auf Veranlassung der Kommission wurden zunächst mit der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner Verhandlungen angeknüpft, die zu einem günstigen Ergebnisse führten. Die genannte Verlagsbuchhandlung erklärte sich bereit, den Verlag zu übernehmen. Ausserdem beschloss die Kommission, der Klasse vorzuschlagen, sie möge erstens die Kosten für den Erwerb der Verlagsrechte an der Ausdehnungslehre von 1844 auf sich nehmen und sie möge zweitens dem Herausgeber und seinen Mitarbeitern für die Theile der Ausgabe, die Ungedrucktes aus dem Nachlasse Grassmanns oder Anmerkungen enthalten würden, einen Zuschuss zum Honorare gewähren, jedoch nur soweit, als diese Theile zusammen den Umfang von zwanzig Bogen nicht überstiegen. Diese Vorschläge der Kommission, zu denen die Anregung in erster Linie von Ludwig ausging, wurden dann in der Klassensitzung vom 8. Januar 1894 genehmigt und es wurde zugleich beschlossen, dass der Titel der Ausgabe die gegenwärtige Fassung erhalten solle.

Es ist daher zu einem sehr wesentlichen Theile der mathematisch-physischen Klasse der hiesigen Gesellschaft der Wissenschaften zu danken, dass die gegenwärtige Ausgabe überhaupt zu Stande kommt, und es sei mir gestattet, hierdurch auch öffentlich der Klasse meinen Dank auszusprechen für die Freigebigkeit, mit der sie das Unternehmen unterstützt. Andrerseits aber hat auch die Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner begründeten Anspruch auf den Dank aller Mathematiker. Endlich darf auch nicht unerwähnt bleiben, was die Grassmannsche Familie selbst zu dem Zustandekommen der Ausgabe beigetragen hat: sie hat nämlich auf jeden Antheil an dem Honorar verzichtet.

Ich werde jetzt noch über den vorliegenden Theil des ersten Bandes kurz berichten und dann angeben, in welcher Weise das Unternehmen fortgesetzt werden soll.

Ursprünglich wollte ich die beiden Ausdehnungslehren und die geometrische Analyse in einem Bande veröffentlichen. Um jedoch diesen Band nicht zu umfangreich werden zu lassen, habe ich ihn getheilt

und die Ausdehnungslehre von 1862 wird daher den zweiten Theil bilden. Man könnte ja auch diese beiden Theile als ersten und zweiten Band bezeichnen, ich thue das aber nicht, weil die darin enthaltenen Werke zusammengenommen ein abgeschlossenes Ganzes bilden.

Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse sind vor dem Druck zuerst von Study und dann von mir einer sorgfältigen Durchsicht unterzogen worden. Ich persönlich richtete bei dieser Durchsicht mein Augenmerk hauptsächlich darauf, wie es bei dem Wiederabdruck mit der typographischen Anordnung des Ganzen gehalten werden solle.

Grassmann hat die nicht sehr angenehme Eigenthümlichkeit, dass er im Texte seiner Arbeiten mit Absätzen äusserst sparsam ist. Der Druck geht zuweilen seitenlang fort, ohne dass ein Absatz gemacht wird, das Auge hat keine Ruhepunkte und die Gliederung der Gedankenentwickelung ist vollständig verhüllt. Schon dieser äussere Umstand ist beim Lesen der Originalausgaben sehr unbequem, auch abgesehen von den Schwierigkeiten, die der Inhalt an sich bietet. Ich habe daher rücksichtslos überall da Absätze angebracht, wo es mir nöthig schien, und das war fast auf jeder Seite mehrere Male. Auch Aenderungen der Interpunktion habe ich mir erlaubt, sobald die Uebersichtlichkeit dadurch erhöht wurde.

Von dem so nützlichen Verfahren, einzelne Wörter und ganze Sätze durch besonderen Druck hervorzuheben, macht Grassmann ebenfalls ziemlich selten Gebrauch. In der Ausdehnungslehre von 1844 waren nicht einmal die Formeln in cursiven Lettern gesetzt, nur ab und zu waren einzelne Wörter gesperrt gedruckt und die wichtigeren Sätze waren durch Einrücken der Zeilen ausgezeichnet. In der geometrischen Analyse wiederum waren die Sätze und einzelne Stichwörter cursiv gedruckt, dagegen nirgends gesperrter Druck angewendet. Ich habe nun in der Ausdehnungslehre Alles, was gesperrt gedruckt war, wieder so drucken lassen, die Sätze dagegen und einzelne Stichwörter, die auszuzeichnen mir nöthig schien, sind jetzt cursiv gedruckt. Dementsprechend ist in der geometrischen Analyse Alles, was schon vorher cursiv gedruckt war, wieder cursiv gedruckt, während dagegen bei solchen Wörtern, die ich auszeichnen lassen wollte, gesperrter Satz benutzt worden ist.

Die Ausdehnungslehre insbesondere war zwar schon in Paragraphen eingetheilt, aber auch diese Eintheilung bot dem Auge keine rechten Ruhepunkte, da sich die Anfänge der Paragraphen zu wenig abhoben. Zum Glück hatte Grassmann selbst am Schlusse ein sehr ausführliches Inhaltsverzeichniss beigegeben, das fast für jeden Paragraphen

eine Ueberschrift enthielt; ich brauchte also blos diese Ueberschriften in den Text zu nehmen und ich denke, dass auch dadurch das Aussehen des Ganzen sehr gewonnen hat. Die Kopfüberschriften auf der rechten Seite mussten natürlich zum Theil geändert werden, aber ich habe mich bestrebt sie noch eingehender zu machen, als sie im Original waren. Auf den Köpfen der linken Seiten habe ich jedesmal ein A_1 hinzufügen lassen, damit man gleich weiss, dass man die Ausdehnungslehre von 1844 vor sich hat, und ausserdem die Kapitelnummern, die im Original fehlten. Die Figuren, die sich im Original auf einer besonderen Tafel befanden, sind jetzt in den Text aufgenommen.

Die Originalausgabe der geometrischen Analyse war überhaupt gar nicht in Paragraphen eingetheilt und ebensowenig hatte sie Kopfüberschriften, die über den Inhalt der einzelnen Seiten Aufschluss gaben. Beides ist jetzt hinzugefügt, die Kopfüberschriften in der Hauptsache von Study, die Paragrapheneintheilung von mir. Die Figuren stehen wie bei der Originalausgabe im Text; einige, die unverhältnissmässig gross waren, sind hier auf die Hälfte oder auf zwei Drittel verkleinert.

Unbedingt erforderlich scheint es mir, dass man bei einer solchen Ausgabe, wie der gegenwärtigen, die Seitenzahlen der Originalausgaben mit angiebt, wenn das auch bisher bei den Mathematikern noch nicht üblich ist — mir ist augenblicklich nur ein Fall erinnerlich, wo es geschehen ist, nämlich in den gesammelten wissenschaftlichen Abhandlungen von Helmholtz. Deshalb sind bei der Ausdehnungslehre von 1844 überall am Rande die Seitenzahlen der Ausgabe von 1878 angegeben und da, wo diese Seitenanfänge von der Originalausgabe von 1844 merklich abweichen, auch die Seitenzahlen der Originalausgabe, diese in cursivem Druck. In entsprechender Weise ist bei der geometrischen Analyse verfahren worden. So kann es nicht vorkommen, dass man bei irgend einem Citate, das nach Seitenzahlen gemacht ist, von der gegenwärtigen Ausgabe im Stiche gelassen wird.

Die vorliegende Ausgabe der Ausdehnungslehre von 1844 enthält Alles, was in der Ausgabe von 1878 steht; für die Behandlung des Textes ist aber immer die Originalausgabe von 1844 zu Grunde gelegt worden; überall, wo die Ausgabe von 1878 davon abweicht, ohne dass ein triftiger Anlass vorliegt, ist der Text der Originalausgabe wieder hergestellt worden. Bei der geometrischen Analyse lag ja überhaupt nur eine Ausgabe vor. Zusätze, die ich im Texte gemacht habe, sind durch Einschliessen in eckige Klammern gekennzeichnet. Die ursprünglichen Lesarten der Stellen, an denen Aenderungen im Texte nothwendig schienen, findet man auf S. 400—403 zusammengestellt. Bei solchen Aenderungen galt es immer, entweder ein Versehen Grass-

manns zu berichtigen oder, soweit das möglich war, Unklarheiten zu beseitigen.

Während des Drucks habe ich sowohl die Ausdehnungslehre als die geometrische Analyse auf das Sorgfältigste geprüft und darf wohl sagen, dass kein Wort unerwogen geblieben ist. Study war durch einen längeren Aufenthalt im Auslande verhindert, die Korrektur der Ausdehnungslehre mit zu lesen, dagegen hat er mich bei der Korrektur der geometrischen Analyse unterstützt. Bei der Ausdehnungslehre hat seine Frau die erste Korrektur für ihn mit gelesen, ebenso mein Freund Dr. P. Domsch, jetzt Lehrer an den technischen Staatslehranstalten in Chemnitz i. S. Endlich hat mich F. Meyer in Klausthal bei dem ganzen jetzt vorliegenden Theile dadurch unterstützt, dass er die zweite Korrektur mit gelesen hat. Allen den Genannten bin ich hierfür zu besonderem Danke verpflichtet; ich wünsche jedoch nicht, dass man für die Korrektheit des Ganzen einen Anderen verantwortlich mache als mich.

Einzelne geschichtliche Anmerkungen waren unbedingt erforderlich, zum Beispiel über die Vorgeschichte der geometrischen Analyse. Ich habe aber auch Anmerkungen kritischen Inhalts beigefügt und ausserdem solche, in denen einzelne schwerer verständliche Stellen erläutert werden. Mir scheint es wenigstens naturgemäss, dass der Herausgeber da, wo er selbst Schwierigkeiten gefunden hat, andern die Mühe möglichst zu ersparen sucht. Ein Theil der Anmerkungen rührt von Study her; diese sind mit seinem Namen bezeichnet.

Das Sachregister wird hoffentlich Manchem willkommen sein. Ich habe es für die Ausdehnungslehre von 1844 und für die geometrische Analyse zusammen bearbeitet und werde für die Ausdehnungslehre von 1862 ein eignes machen. Diese beiden Sachregister zu vereinigen ging nicht wohl an, da die beiden Ausdehnungslehren in den einzelnen Kunstausdrücken zu sehr von einander abweichen.

Der zweite Theil des ersten Bandes wird womöglich zu Anfang des nächsten Jahres erscheinen und soll die Ausdehnungslehre von 1862 enthalten. Er wird von einem Sohne Grassmanns — Hermann Grassmann in Halle a. S. — und von mir herausgegeben werden. Der zweite Band soll die gedruckten Abhandlungen Grassmanns bringen und Einzelnes aus dem Nachlasse, was sich gut an die übrigen Abhandlungen anschliesst. Die Abhandlungen über Mechanik, auch die aus dem Nachlasse, hat Lüroth bereits für den Druck bearbeitet und diese Bearbeitung ist schon seit über Jahresfrist in meinen Händen. Die Arbeiten über Geometrie hat mein Leipziger Kollege Scheffers übernommen; in die übrigen werden sich Study

und ich theilen. Der dritte Band wird die Prüfungsarbeit Grassmanns über Ebbe und Fluth enthalten, die aus dem Jahre 1840 stammt und deren Veröffentlichung schon von verschiedenen Seiten gewünscht worden ist, namentlich von J. W. Gibbs. Dazu kommt dann der Rest des Nachlasses, soweit er zur Veröffentlichung geeignet ist. Die Arbeit über Ebbe und Fluth wird ein anderer Sohn Grassmanns herausgeben, Justus Grassmann in Brandenburg a. H. In dem dritten Bande denke ich überdies eine Lebensbeschreibung Grassmanns zu liefern und eine kurze zusammenhängende Darstellung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen. Wann diese beiden Theile erscheinen werden, darüber kann ich zur Zeit noch nichts Bestimmtes sagen. Uebereilt werden soll die Sache jedenfalls nicht.

Noch muss ich erwähnen, dass auch V. Schlegel und R. Mehmke, die ja besonders tief in Grassmanns Methoden eingedrungen sind, mir ihre Unterstützung zugesagt haben; insbesondere wird es mir durch ihre Hülfe möglich sein, dem dritten Band ein Verzeichniss aller Arbeiten, in denen an Grassmann angeknüpft worden ist, beizugeben. Auch bei dem jetzt erscheinenden Theile haben mich beide Herren schon unterstützt, indem sie mir über verschiedene Fragen Auskunft ertheilt haben. Ebenso hat mir der schon oben erwähnte Sohn Grassmanns — H. Grassmann — jederzeit mit Rath und That beigestanden.

Zum Schlusse möchte ich noch der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner meinen besonderen Dank aussprechen für die Bereitwilligkeit, mit der sie allen meinen Wünschen entgegengekommen ist. Die Ausstattung des Ganzen ist dieselbe wie bei Riemanns gesammelten Werken. Auch hat die Verlagsbuchhandlung diesen ersten Theil mit einem Bilde Grassmanns geschmückt, das nach dem Urtheile der Grassmannschen Familie ganz vortrefflich ist.

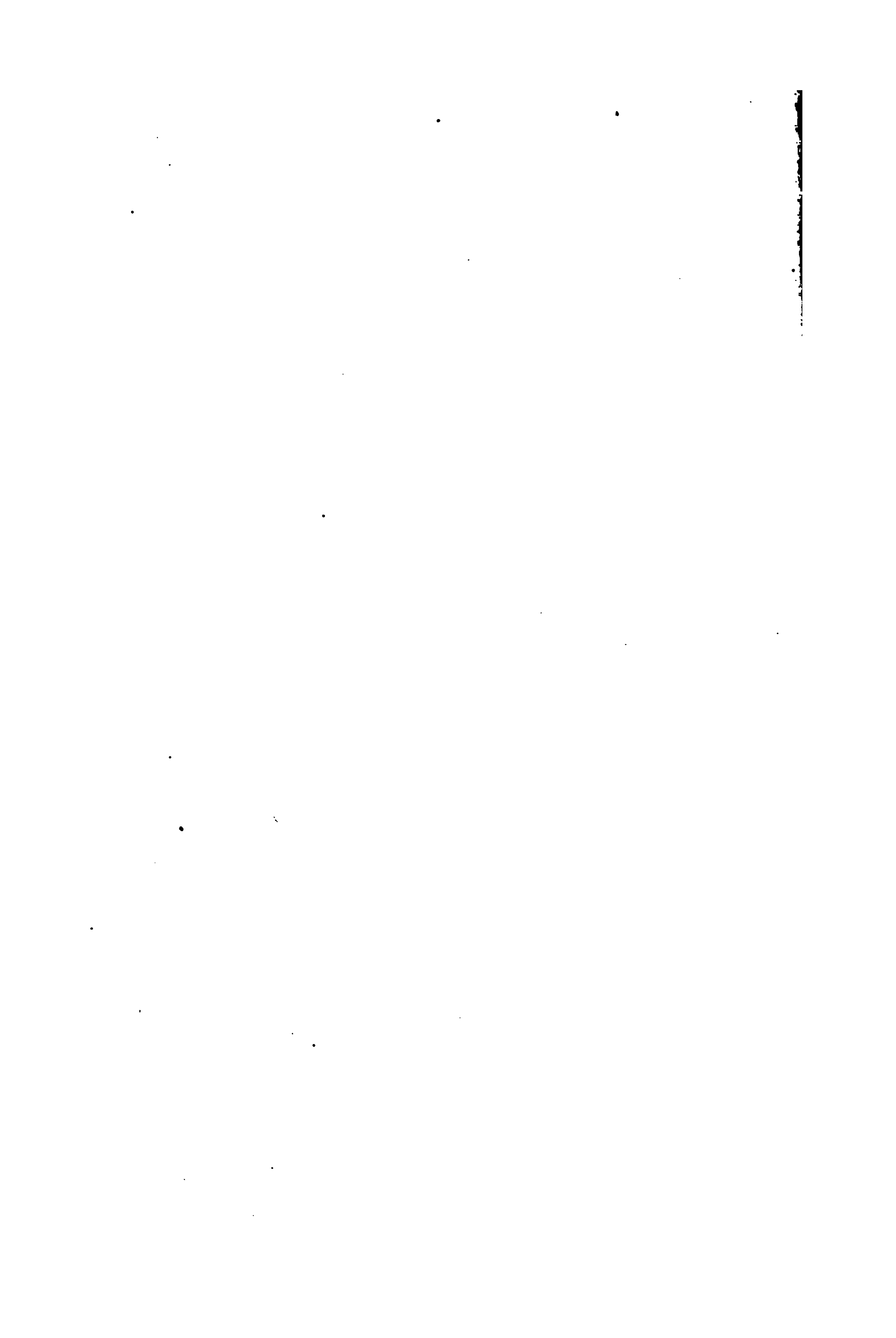
Fünfzig Jahre sind gerade vergangen, seit Grassmann seine erste Ausdehnungslehre in die Welt schickte. Möge sie jetzt, wo sie zum dritten Male, in neuem und schönerem Gewande erscheint, mehr Theilnahme finden als damals und möge überhaupt die hiermit begonnene Ausgabe dazu wirken, dass die Leistungen Grassmanns endlich nach Verdienst gewürdigt werden.

Leipzig, im Juli 1894.

Friedrich Engel.

Inhaltsverzeichniss

zum ersten Theile des ersten Bandes.



DIE AUSDEHNUNGSLEHRE VON 1844

UND DIE

GEOMETRISCHE ANALYSE.

Die Wissenschaft

der

extensiven Grösse

oder

die Ausdehnungslehre,

eine neue mathematische Disciplin

dargestellt und durch Anwendungen erläutert

von

Hermann Grassmann

Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.

Erster Theil,

die **lineale Ausdehnungslehre** enthaltend.

Leipzig, 1844.

Verlag von Otto Wigand.

Die

lineale Ausdehnungslehre

ein

neuer Zweig der Mathematik

dargestellt

und

durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik,

wie auch

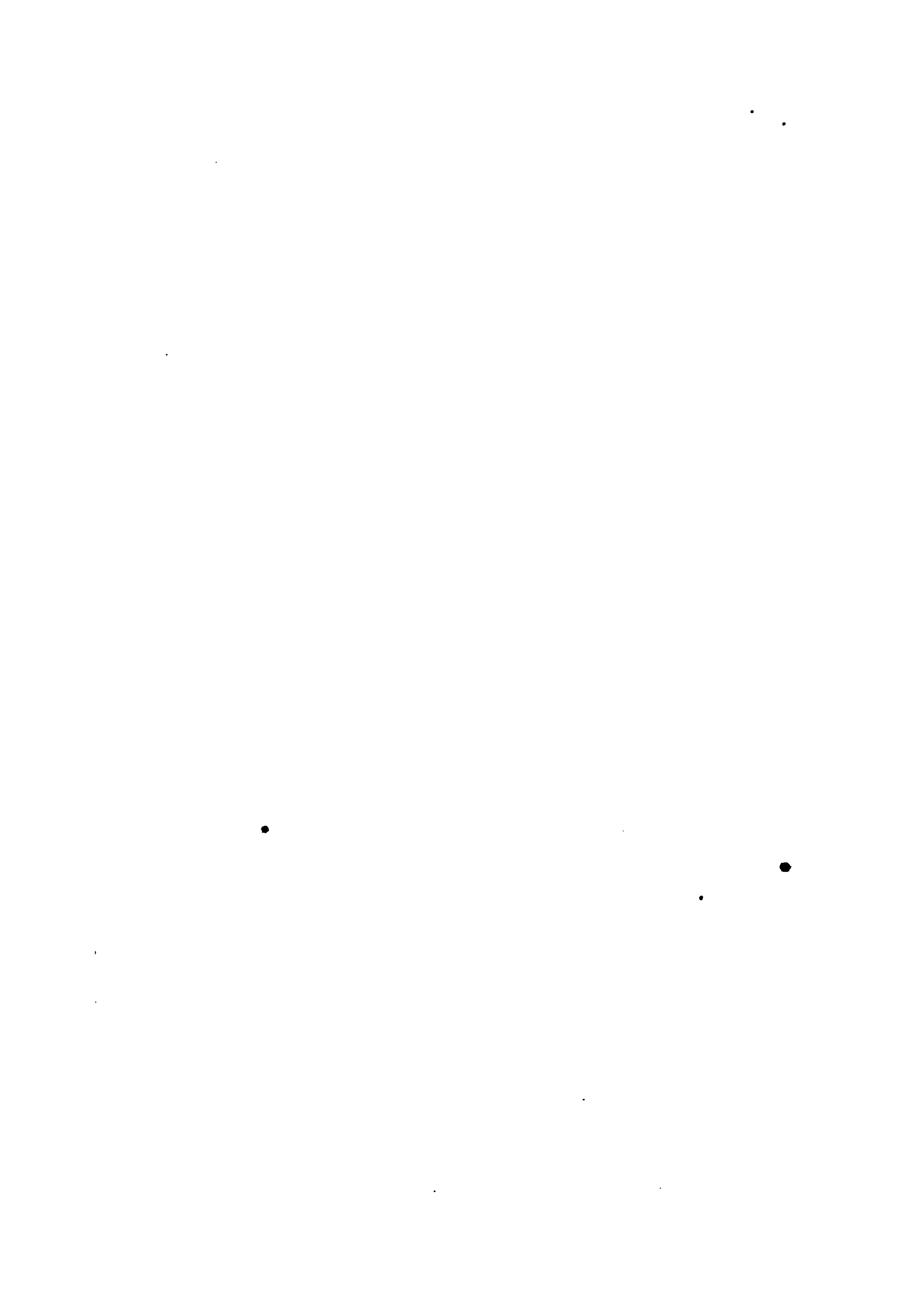
auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert

von

Hermann Grassmann
Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.

Mit 1 Tafel.

Leipzig, 1844.
Verlag von Otto Wigand.



Die Ausdehnungslehre von 1844

oder

Die lineale Ausdehnungslehre

ein

neuer Zweig der Mathematik

dargestellt

und

durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik,

wie auch

auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert

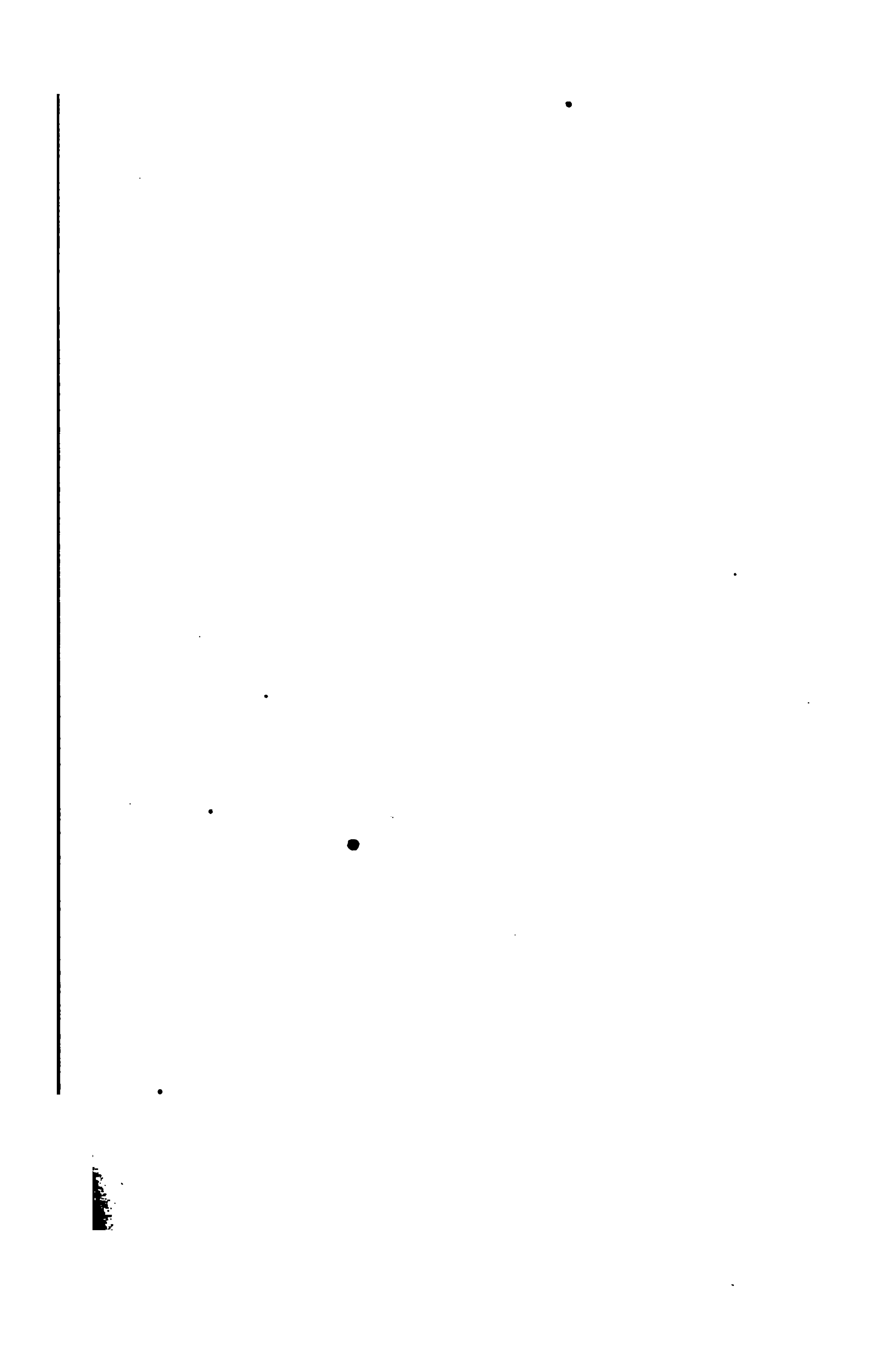
von

Hermann Grassmann.

Zweite, im Text unveränderte Auflage.

Mit 1 Tafel.

Leipzig
Verlag von Otto Wigand.
1878.



Vorrede zur ersten Auflage.

Wenn ich das Werk, dessen ersten Theil ich hiermit dem Publikum III übergebe, als Bearbeitung einer neuen mathematischen Disciplin bezeichne, so kann die Rechtfertigung einer solchen Behauptung nur durch das Werk selbst gegeben werden. Indem ich mich daher jeder anderweitigen Rechtfertigung entschlage, gehe ich sogleich dazu über, den Weg zu bezeichnen, auf welchem ich Schritt für Schritt zu den hier niedergelegten Resultaten gelangt bin, um damit zugleich den Umfang dieser neuen Disciplin, so weit es hier thunlich ist, zur Anschauung zu bringen.

Den ersten Anstoss gab mir die Betrachtung des Negativen in der Geometrie; ich gewöhnte mich, die Strecken AB und BA als entgegengesetzte Grössen aufzufassen; woraus denn hervorging, dass, wenn A, B, C Punkte einer geraden Linie sind, dann auch allemal $AB + BC = AC$ sei, sowohl wenn AB und BC gleichbezeichnet sind, als auch wenn entgegengesetzt bezeichnet, das heisst wenn C zwischen A und B liegt. In dem letzteren Falle waren nun AB und BC nicht als blosse Längen aufgefasst, sondern an ihnen zugleich ihre Richtung festgehalten, vermöge deren sie eben einander entgegengesetzt waren. So drängte sich der Unterschied auf zwischen der Summe der Längen und zwischen der Summe solcher Strecken, in denen zugleich die Richtung mit festgehalten war. Hieraus ergab sich die Forderung, den letzten Begriff der Summe nicht bloss für den Fall, dass die VI Strecken gleich- oder entgegengesetzt-gerichtet | waren, sondern auch IV für jeden andern Fall festzustellen. Dies konnte auf's Einfachste geschehen, indem das Gesetz, dass $AB + BC = AC$ sei, auch dann noch festgehalten wurde, wenn A, B, C nicht in einer geraden Linie lagen.

Hiermit war denn der erste Schritt zu einer Analyse gethan, welche in der Folge zu dem neuen Zweige der Mathematik führte, der hier vorliegt. Aber keinesweges ahnte ich, auf welch' ein fruchtbares und reiches Gebiet ich hier gelangt war; vielmehr schien mir jenes

Ergebniss wenig beachtenswerth, bis sich dasselbe mit einer verwandten Idee kombinirte.

Indem ich nämlich den Begriff des Produktes in der Geometrie verfolgte, wie er von meinem Vater*) aufgefasst wurde, so ergab sich mir, dass nicht nur das Rechteck, sondern auch das Parallelogramm überhaupt als Produkt zweier an einander stossender Seiten desselben zu betrachten sei, wenn man nämlich wiederum nicht das Produkt der Längen, sondern der beiden Strecken mit Festhaltung ihrer Richtungen auffasste. Indem ich nun diesen Begriff des Produktes mit dem vorher aufgestellten der Summe in Kombination brachte, so ergab sich die auffallendste Harmonie; wenn ich nämlich, statt die in dem vorher angegebenen Sinne genommene Summe zweier Strecken mit einer dritten in derselben Ebene liegenden Strecke in dem eben aufgestellten Sinne zu multipliciren, die Stücke einzeln mit derselben Strecke multiplicirte, und die Produkte mit gehöriger Beobachtung ihrer positiven oder negativen Geltung addirte, so zeigte sich, dass in beiden Fällen jedesmal dasselbe Resultat hervorging und hervorgehen musste.

Diese Harmonie liess mich nun allerdings ahnen, dass sich hiermit ein ganz neues Gebiet der Analyse aufschliessen würde, was zu *VII* wichtigen Resultaten führen könnte. Doch blieb diese Idee, da | mich mein Beruf in andere Kreise der Beschäftigung hineinzog, wieder eine ganze Zeit lang ruhen; auch machte mich das merkwürdige Resultat anfangs betroffen, dass für diese neue Art des Produktes zwar die V übrigen Gesetze der gewöhnlichen | Multiplikation und namentlich ihre Beziehung zur Addition bestehen blieb, dass man aber die Faktoren nur vertauschen konnte, wenn man zugleich die Vorzeichen umkehrte (+ in — verwandelte und umgekehrt).

Eine Arbeit über die Theorie der Ebbe und Fluth, welche ich späterhin vornahm, führte mich zu der Mécanique analytique des La Grange und dadurch wieder auf jene Ideen der Analyse zurück. Alle Entwickelungen in jenem Werke gestalteten sich nun durch die Principien dieser neuen Analyse auf eine so einfache Weise um, dass oft die Rechnung mehr als zehnmal kürzer ausfiel, als sie in jenem Werke geführt war.

Dies ermuthigte mich, auch auf die schwierige Theorie der Ebbe und Fluth die neue Analyse anzuwenden; es waren dazu mannigfache neue Begriffe zu entwickeln, und in die Analyse zu kleiden; namentlich führte mich der Begriff der Schwenkung zur geometrischen Ex-

---

*) Vergleiche: J. G. Grassmanns Raumlehre Theil II, p. 194 und dessen Trigonometrie p. 10. [Berlin bei G. Reimer, 1824 und 1835.]

ponentialgrösse, zu der Analyse der Winkel und der trigonometrischen Funktionen und so weiter*). Und ich hatte die Freude zu sehen, wie durch die so gestaltete und erweiterte Analyse nicht nur die oft sehr verwickelten und unsymmetrischen Formeln, welche dieser Theorie zu Grunde liegen**), sich in höchst einfache und symmetrische Formeln umsetzten, sondern auch die Art ihrer Entwickelung stets dem Begriffe zur Seite ging.

In der That konnte nicht nur jede Formel, welche im Gange der Entwickelung sich ergab, aufs leichteste in Worte gekleidet werden, und drückte dann jedesmal ein besonderes Gesetz aus; sondern auch jeder Fortschritt von einer Formel zur andern erschien unmittelbar nur als der symbolische Ausdruck einer parallel gehenden | begrifflichen *VIII* Beweisführung. Bei der sonst üblichen Methode zeigte sich durch die Einführung willkührlicher Koordinaten, die mit der Sache nichts zu schaffen haben, die Idee ganz verdunkelt, und die Rechnung bestand in einer mechanischen, dem Geiste nichts darbietenden und darum Geist tödtenden Formelentwickelung. Hingegen hier, wo die Idee, durch nichts fremdartiges getrübt, überall durch | die Formeln in voller Klar- VI heit hindurchstrahlte, war auch bei jeder Formelentwickelung der Geist in der Fortentwickelung der Idee begriffen.

Durch diesen Erfolg nun hielt ich mich zu der Hoffnung berechtigt, in dieser neuen Analyse die einzig naturgemässe Methode gefunden zu haben, nach welcher jede Anwendung der Mathematik auf die Natur fortschreiten müsse, und nach welcher gleichfalls die Geometrie zu behandeln sei, wenn sie zu allgemeinen und fruchtreichen Ergebnissen führen solle***). Es reifte daher in mir der Entschluss, aus der Darstellung, Erweiterung und Anwendung dieser Analyse eine Aufgabe meines Lebens zu machen. Indem ich nun meine freie Zeit diesem Gegenstande ungetheilt zuwandte, so füllten sich allmälig die Lücken aus, welche die frühere gelegentliche Bearbeitung gelassen hatte. Namentlich ergab sich auf die Weise und mit den Modifikationen, wie ich in dem Werke selbst dargestellt habe, dass als Summe mehrerer Punkte ihr Schwerpunkt, als Produkt zweier Punkte ihre Verbindungsstrecke, als das dreier der zwischen ihnen liegende Flächenraum und als das Produkt von vier Punkten der zwischen ihnen liegende Körperraum (die Pyramide) aufgefasst werden konnte.

*) Die nähere Nachweisung s. unten.

**) Vgl. La Place, Mécanique céleste, livre IV.

***) In der That zeigte sich bald, wie durch diese Analyse die Differenz zwischen der analytischen und synthetischen Behandlung der Geometrie gänzlich verschwand.

Die Auffassung des Schwerpunktes als Summe veranlasste mich, den barycentrischen Kalkül von Möbius zu vergleichen, ein Werk, das IX ich bis dahin nur dem Titel nach kannte; | und zu meiner nicht geringen Freude fand ich hier denselben Begriff der Summation der Punkte vor, zu dem mich der Gang der Entwickelung geführt hatte, und war somit zu dem ersten, aber wie die Folge lehrte, auch zu dem einzigen Berührungspunkte gelangt, welchen die neue Analyse mit dem schon anderweitig Bekannten darbot. Da indessen der Begriff eines Produktes von Punkten in jenem Werke gar nicht vorkommt, mit diesem Begriffe aber, indem er mit dem der Summe in Kombination tritt, erst die Entfaltung der neuen Analyse beginnt, so konnte ich auch von dorther keine weitere Förderung meiner Aufgabe erwarten.

VII Indem ich daher nun daran ging, | die so gefundenen Resultate zusammenhängend und von Anfang an zu bearbeiten, so dass ich mich auch auf keinen in irgend einem Zweige der Mathematik bewiesenen Satz zu berufen gedachte, so ergab sich, dass die von mir aufgefundene Analyse nicht, wie mir Anfangs schien, bloss auf dem Gebiete der Geometrie sich bewegte; sondern ich gewahrte bald, dass ich hier auf das Gebiet einer neuen Wissenschaft gelangt sei, von der die Geometrie selbst nur eine specielle Anwendung sei.

Schon lange war es mir nämlich einleuchtend geworden, dass die Geometrie keinesweges in dem Sinne wie die Arithmetik oder die Kombinationslehre als ein Zweig der Mathematik anzusehen sei, vielmehr die Geometrie schon auf ein in der Natur gegebenes (nämlich den Raum) sich beziehe, und dass es daher einen Zweig der Mathematik geben müsse, der in rein abstrakter Weise ähnliche Gesetze aus sich erzeuge, wie sie in der Geometrie an den Raum gebunden erscheinen. Durch die neue Analyse war die Möglichkeit, einen solchen rein abstrakten Zweig der Mathematik auszubilden, gegeben; ja diese Analyse, sobald sie, ohne irgend einen schon anderweitig erwiesenen Satz vorauszusetzen, entwickelt wurde, und sich rein in der Abstraktion bewegte, war diese Wissenschaft selbst.

Der wesentliche Vortheil, welcher durch diese Auffassung erreicht wurde, war der Form nach der, dass nun alle Grundsätze, welche X Raumesanschauungen | ausdrückten, gänzlich wegfielen, und somit der Anfang ein eben so unmittelbarer wurde, wie der der Arithmetik, dem Inhalte nach aber der, dass die Beschränkung auf drei Dimensionen wegfiel. Erst hierdurch traten die Gesetze in ihrer Unmittelbarkeit und Allgemeinheit ans Licht und stellten sich in ihrem wesentlichen Zusammenhange dar, und manche Gesetzmässigkeit, die bei drei Dimen-

sionen entweder noch gar nicht, oder nur verdeckt vorhanden war, entfaltete sich nun bei dieser Verallgemeinerung in ihrer ganzen Klarheit.

Uebrigens ergab sich im Verlauf, dass mit den gehörigen Bestimmungen, wie sie im Werke selbst zu finden sind, der Durchschnittspunkt zweier Linien, die Durchschnittslinie zweier Ebenen und der Durchschnittspunkt dreier Ebenen als Produkte jener | Linien oder dieser VIII Ebenen aufgefasst werden konnten *), woraus sich dann zugleich eine höchst einfache und allgemeine Kurventheorie ergab **).

Darauf ging ich nun zur Erweiterung und Begründung dessen über, was ich für den zweiten Theil dieses Werkes bestimmt habe, wohin ich nämlich alles dasjenige verwiesen habe, was irgendwie den Begriff der Schwenkung oder des Winkels voraussetzt. Da dieser zweite Theil, welcher das Werk schliessen wird, erst später im Druck erscheinen soll, so scheint es mir für die Uebersicht des Ganzen nöthig, die hierher gehörigen Ergebnisse etwas genauer zu bezeichnen. Zu diesem Ende habe ich zuerst die Resultate anzugeben, welche sich schon vor der zusammenhängenden Bearbeitung ergeben hatten.

Ich habe eben gezeigt, wie als Produkt zweier Strecken das Parallelogramm aufgefasst werden kann, wenn nämlich, wie hier überall geschieht, die Richtung der Strecken mit festgehalten wird; wie aber dies Produkt dadurch ausgezeichnet ist, dass die Faktoren nur mit Zeichenwechsel vertauscht werden können, während zugleich das zweier gleichgerichteter Strecken offenbar | null ist. Diesem Begriffe stellte *XI* sich ein anderer zur Seite, der sich gleichfalls auf Strecken mit festgehaltener Richtung bezieht.

Nämlich wenn ich die eine Strecke senkrecht auf die andere projicirte, so stellte sich das arithmetische Produkt dieser Projektion in die Strecke, worauf projicirt war, gleichfalls als Produkt jener Strecken dar, sofern auch hierfür die multiplikative Beziehung zur Addition galt. Aber das Produkt war von ganz anderer Art, wie jenes erstere, insofern die Faktoren desselben ohne Zeichenwechsel vertauschbar waren, und das Produkt zweier gegen einander senkrechter Strecken als null erschien. Ich nannte jenes erstere Produkt das äussere, dies letztere das innere Produkt, sofern jenes nur bei auseinander tretenden Richtungen, dieses nur bei Annäherung derselben, das heisst bei theilweisem Ineinandersein einen geltenden Werth hatte. Dieser Begriff des inneren Produktes, welcher sich mir schon bei der Durcharbeitung

*) Vgl. Kap. 3 des zweiten Abschnitts.

**) Vgl. dasselbe Kapitel.

IX der Mécanique | analytique als nothwendig herausgestellt hatte, führte zugleich zu dem Begriffe der absoluten Länge*).

Eben so hatte sich mir schon bei der Bearbeitung der Theorie der Ebbe und Fluth die geometrische Exponentialgrösse ergeben; nämlich wenn a eine Strecke (mit festgehaltener Richtung) und α einen Winkel (mit festgehaltener Schwenkungsebene) darstellt, so ergab sich aus rein inneren Gründen, deren Angabe mich jedoch zu weit führen würde, dass $a.e^{\alpha}$, wo e als die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems aufgefasst werden kann, die Strecke bedeutet, welche aus a durch eine Schwenkung hervorgeht, die den Winkel α erzeugt; das heisst es bedeutet $a.e^{\alpha}$ die Strecke a geschwenkt um den Winkel α. Wenn ferner $\operatorname{Cos}\alpha$, wo α einen Winkel ausdrückt im geometrischen Sinne, dieselbe Zahl vorstellt wie $\cos\bar{\alpha}$ wo $\bar{\alpha}$ den zu dem Winkel gehörigen, durch den Halbmesser gemessenen Bogen bedeuten soll: so folgt aus jenem XII Begriffe der Exponentialgrösse sogleich, dass

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

sei**). Ebenso wenn $\operatorname{Sin}\alpha$ die Grösse vorstellt, welche die Strecke, mit der sie multiplicirt ist, nach der Schwenkungsseite des Winkels α um 90^0 in ihrer Richtung ändert, und zugleich ihre absolute Länge auf gleiche Weise ändert wie $\sin\bar{\alpha}$, so ist

$$\operatorname{Sin}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2},$$

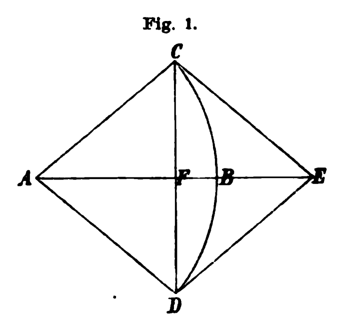
und es ergiebt sich daraus die Gleichung

$$\operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Sin}\alpha = e^{\alpha},$$

alles Gleichungen, welche die auffallendste Analogie mit den bekannten imaginären Ausdrücken verrathen.

X Soweit hatten sich diese Begriffe schon früher ergeben. | Als ich nun auch diese Begriffe zu verallgemeinern trachtete, so erweiterte sich zuerst der Begriff des inneren Produktes auf entsprechende Weise,

Fig. 1.



*) Auch dieser Begriff, da er die Schwenkung voraussetzt, gehört dem zweiten Theile an.

**) In der That wenn AB (Figur 1) die ursprüngliche Strecke ist, und dieselbe um den Winkel α in die Lage AC, um den Winkel $-\alpha$ aber in die Lage AD geschwenkt wird, und man das Parallelogramm $ACDE$ vollendet, so ist AE die Summe der Strecken $AC + AD$, und die Hälfte AF dieser Summe der Cosinus des Winkels α.

wie ich dies für das äussere Produkt in Bezug auf das Durchschneiden der Linien und Ebenen oben angedeutet habe; sodann kam ich zunächst auf den Begriff des Quotienten verschieden gerichteter Strecken, und verstand unter $\frac{a}{b}$, wo a und b verschieden gerichtete Strecken von gleicher Länge vorstellen, die Grösse, welche jede in derselben Ebene liegende Strecke um den Winkel ba (von b nach a gerechnet) ändert, so dass in der That, wie es sein muss, $\frac{a}{b}b = a$ ist; und hieraus ergab sich dann der Begriff für den Fall, dass a und b von ungleicher Länge sind, unmittelbar. Jener einfache Begriff wurde nun aber die Quelle für eine Reihe der interessantesten Beziehungen.

Zuerst ergab sich | hieraus sogleich eine neue Art der Multiplikation, welche dieser Division entsprach, und sich von allen früheren dadurch unterschied, dass das Produkt dieser neuen Art nur null werden konnte, wenn einer der Faktoren null wurde, während die Faktoren vertauschbar blieben, kurz eine Multiplikation, welche in allen ihren Gesetzen der gewöhnlichen arithmetischen analog blieb; und der Begriff derselben ging leicht hervor, wenn ich eine Strecke fortschreitend mit verschiedenen solchen Quotienten multiplicirte, und dann den einen Quotienten auffasste, welcher statt dieser fortschreitenden Faktoren gesetzt werden konnte. Da nun nach der Definition, wenn ab den Winkel beider Strecken, welche von gleicher Länge sind, bedeutet, XIII

$$e^{ab} = \frac{b}{a}$$

ist, so hat man auch

$$\log \frac{b}{a} = ab.$$

Ferner, wenn der Winkel ab der m-te Theil von ac ist, so hat man

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{c}{a},$$

weil nämlich, wenn eine Strecke m-mal fortschreitend die Schwenkung $\frac{b}{a}$ erleidet, sie dann im Ganzen die Schwenkung $\frac{c}{a}$ vollendet. Also auch, wenn der Winkel ab halb so gross ist als ac, so ist XI

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c}{a} \text{ also } \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Ist namentlich $\frac{b}{a}$ der Schwenkung um einen Rechten, also $\frac{c}{a}$ der um zwei Rechte gleich, so ist, da $c = -a$; also $\frac{c}{a} = -1$ ist, $\frac{b}{a} = \sqrt{-1}$, das heisst der Ausdruck $\sqrt{-1}$ mit einer Strecke multiplicirt ändert ihre

Richtung um 90° nach irgend einer, dann aber allemal nach derselben Seite hin.

Diese schöne Bedeutung der imaginären Grösse vervollständigte sich noch dadurch, dass sich ergab, dass

$$e^{\alpha} \text{ und } e^{(\alpha)\sqrt{-1}}$$

denselben Werth bezeichnen, wenn α den Winkel, (α) aber den dazu XIV gehörigen Bogen dividirt durch den Halbmesser bedeutet; in | der That fand sich dann

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

wie gehörig, und ebenso

$$\sqrt{-1}\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

Formeln, welche also eine rein geometrische Bedeutung haben, indem $e^{x\sqrt{-1}}$ die Schwenkung um einen Winkel bedeutet, dessen Bogen durch den Halbmesser gemessen x giebt.

Hiernach nun gewannen alle imaginären Ausdrücke eine rein geometrische Bedeutung, und liessen sich durch geometrische Konstruktionen darstellen. Zugleich war der Winkel als Logarithmus des Quotienten $\frac{b}{a}$ bestimmt, daher auch die unendliche Menge seiner Werthe bei derselben Schenkellage. Ebenso nun zeigte sich auch umgekehrt, wie XII man vermittelst | der so gefundenen Bedeutung des Imaginären auch die Gesetze der Analyse innerhalb der Ebene ableiten kann, hingegen ist es nicht mehr möglich, vermittelst des Imaginären auch die Gesetze für den Raum abzuleiten. Auch stellen sich überhaupt der Betrachtung der Winkel im Raume Schwierigkeiten entgegen, zu deren allseitiger Lösung mir noch nicht hinreichende Musse geworden ist.

Dies etwa sind die Gegenstände, welche ich mir für den zweiten und letzten Theil vorbehalten habe, wenigstens so weit sie bis jetzt von mir bearbeitet sind, mit ihm wird das Werk geschlossen sein. Die Zeit, wann dieser zweite Theil erscheinen wird, kann ich noch nicht bestimmen, indem es mir bei den mannigfachen Arbeiten, in welche mich mein jetziges Amt verwickelt, unmöglich wird, diejenige Ruhe zu finden, welche für die Bearbeitung desselben nothwendig ist. Doch bildet auch dieser erste Theil ein für sich bestehendes, in sich abgeschlossenes Ganze, und ich hielt es für zweckmässiger, diesen ersten Theil mit den zugehörigen Anwendungen zusammen erscheinen zu lassen, als beide Theile zusammen und von den Anwendungen gesondert.

In der That ist es bei der Darstellung einer neuen Wissenschaft, *XV* damit ihre Stellung und ihre Bedeutung recht erkannt werde, unumgänglich nothwendig, sogleich ihre Anwendung und ihre Beziehung zu verwandten Gegenständen zu zeigen. Hierzu soll auch zugleich die Einleitung dienen. Diese ist der Natur der Sache nach mehr philosophischer Natur, und, wenn ich dieselbe aus dem Zusammenhange des ganzen Werkes heraussonderte, so geschah dies, um die Mathematiker nicht sogleich durch die philosophische Form zurückzuschrecken.

Es herrscht nämlich noch immer unter den Mathematikern und zum Theil nicht mit Unrecht eine gewisse Scheu vor philosophischen Erörterungen mathematischer und physikalischer Gegenstände; und in der That leiden die meisten Untersuchungen dieser Art, wie sie namentlich von Hegel und seiner Schule geführt sind, an einer Unklarheit und Willkühr, welche alle Frucht solcher Untersuchungen vernichtet. Dessen ungeachtet glaubte ich es der Sache schuldig zu sein, der neuen Wissenschaft | ihre Stelle im Gebiete des Wissens anweisen zu müssen, XIII und stellte daher, um beiden Forderungen zu genügen, eine Einleitung voran, welche ohne dem Verständniss des Ganzen wesentlich zu schaden, überschlagen werden kann. Auch bemerke ich, dass unter den Anwendungen gleichfalls die, welche sich auf Gegenstände der Natur (Physik, Krystallonomie) beziehen, überschlagen werden können, ohne dass dadurch der Gang der ganzen Entwickelung gestört wird.

Durch diese Anwendungen auf die Physik glaubte ich besonders die Wichtigkeit, ja die Unentbehrlichkeit der neuen Wissenschaft und der in ihr gebotenen Analyse dargethan zu haben. Dass dieselbe in ihrer konkreten Gestalt, das heisst in ihrer Uebertragung auf die Geometrie, einen vortrefflichen Unterrichtsgegenstand liefern würde, welcher einer durchaus elementaren Behandlung fähig ist, hoffe ich gelegentlich einmal nachweisen zu können, indem zu einer solchen Nachweisung in dem Werke selbst, seiner Bestimmung gemäss, kein Platz gefunden werden konnte. Namentlich ist es bei einer | elemen- *XVI* taren Behandlung der Statik, wenn in derselben anschauliche und allgemeine (auch durch Konstruktion darstellbare) Resultate hervorgehen sollen, unumgänglich nothwendig, den Begriff der Summe und des Produktes von Strecken aufzunehmen, und die Hauptgesetze dafür zu entwickeln, und ich bin gewiss, dass, wer das Aufnehmen dieser Begriffe einmal versucht hat, es nie wieder aufgeben wird.

Wenn ich so der neuen Wissenschaft, deren Bearbeitung hier wenigstens theilweise vorliegt, ganz ihr Recht zuerkannt habe, und ihr die Ansprüche, die sie im Gebiete des Wissens machen kann, auf

keine Weise verkürzen will, so glaube ich dadurch mir nicht den Vorwurf der Anmassung zuzuziehen; denn die Wahrheit verlangt ihr Recht; sie ist nicht das Werk dessen, der sie zum Bewusstsein oder zur Anerkennung bringt; sie hat ihr Wesen und Dasein in sich selbst; und ihr aus falscher Bescheidenheit ihr Recht verkürzen ist ein Verrath an der Wahrheit. Aber desto mehr Nachsicht muss ich in Anspruch nehmen für alles das, was mein Werk an der Wissenschaft XIV ist. Denn ich bin mir, ungeachtet aller auf die | Form verwandten Mühe, dennoch der grossen Unvollkommenheit derselben bewusst.

Zwar habe ich das Ganze mehrere Male durchgearbeitet in verschiedenen Formen, bald in Euklidischer Form von Erklärungen und Lehrsätzen in möglichster Strenge, bald in Form einer zusammenhängenden Entwickelung mit möglichster Uebersichtlichkeit, bald beides mit einander verflechtend, indem ich die Uebersicht-gebende Darstellung vorangehen, und dann die Entwickelung nach Euklidischer Form folgen liess. Zwar bin ich mir dessen wohl bewusst, dass bei abermaliger Umarbeitung manches in besserer, das heisst theils strengerer, theils übersichtlicherer Form hervortreten würde. Aber von der Ueberzeugung durchdrungen, dass ich doch keine volle Befriedigung hoffen könne, und der Einfachheit, der Wahrheit gegenüber, die Darstellung doch immer nur dürftig bleiben müsse, entschloss ich mich, mit der Form hervorzutreten, welche mir zur Zeit als die beste erschien.

XVII Einen besonderen Grund der | Nachsicht hoffe ich auch darin zu finden, dass mir die Zeit für die Bearbeitung vermöge meiner amtlichen Thätigkeit nur äusserst kärglich und stückweise zugemessen war, auch mir mein Amt keine Gelegenheit darbot, durch Mittheilungen aus dem Gebiete dieser Wissenschaft, oder auch nur verwandter Gegenstände, die lebendige Frische zu gewinnen, welche wie ein belebender Hauch das Ganze durchwehen muss, wenn es als ein lebendiges Glied an dem Organismus des Wissens erscheinen soll. Doch wenn auch eine Berufsthätigkeit, in welcher solche Mittheilungen aus dem Gebiete der Wissenschaft meine eigentliche Aufgabe sein würden, als das Ziel meiner Wünsche und Bestrebungen mir vor Augen steht, so glaubte ich doch die Bearbeitung dieser Wissenschaft nicht bis zur Erreichung dieses Zieles aufschieben zu dürfen, zumal da ich hoffen konnte, durch die Bearbeitung dieses Theiles selbst mir den Weg zu jenem Ziele bahnen zu können.

Stettin, den 28. Juni 1844.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Das Werk, dessen zweite Auflage ich hiermit der Oeffentlichkeit XV übergebe, hat in den ersten dreiundzwanzig Jahren nach seinem ersten Erscheinen nur eine geringe und meist nur gelegentliche Beachtung gefunden.

Diesen Mangel an Erfolg konnte ich nicht der behandelten Wissenschaft als solcher zur Last legen; denn ich kannte deren fundamentale Wichtigkeit, ja deren Nothwendigkeit vollkommen; sondern ich konnte die Ursache davon nur in der streng wissenschaftlichen, auf die ursprünglichen Begriffe zurückgehenden Behandlungsweise finden. Eine solche Behandlungsweise erforderte aber ein nicht bloss gelegentliches Auffassen dieser oder jener Resultate, sondern ein sich versenken in die zu Grunde liegenden Ideen und eine zusammenhängende Auffassung des ganzen auf dies Fundament aufgeführten Baues, dessen einzelne Theile erst durch das Ueberschauen des Ganzen ihr volles Verständniss erhalten konnten. Bei dem gewaltigen Fortschritt der Mathematik in der neueren Zeit, bei dem Hervortreten immer neuer Gebiete mathematischer Forschung, deren Durchdringung die angestrengteste Arbeit erforderte, bei dem Ringen nach neuen, dem Forschungsgeiste sich darbietenden und ihn anlockenden Resultaten, fanden die Mathematiker nicht die Ruhe und Musse, sich in ein so in sich zusammenhängendes Gebäude hineinzuversetzen.

Meine Hoffnung, einen akademischen Lehrstuhl zu gewinnen, und dadurch jüngere Kräfte in die Wissenschaft einzuführen und sie zum weiteren Ausbau derselben anzuregen, schlug fehl. Zwar konnte es nicht ausbleiben, dass | späterhin verschiedene Mathematiker auf andern XVI Wegen zu vereinzelten Resultaten gelangten, die schon in meiner Ausdehnungslehre von 1844 behandelt waren; aber fast nie geschah dabei meines Werkes Erwähnung; vielmehr zeigte sich, dass dasselbe ihnen fast allen ganz unbekannt geblieben war, da sonst die Resultate durch den inneren Zusammenhang, den sie dort fanden, sich viel einfacher und fruchtreicher hätten gestalten müssen.

Bei einer solchen Lage der Sache wird es Niemand einem Verleger verargen, wenn er in jener Zeit einen Theil der Exemplare meines Werkes makuliren liess, noch mir, wenn ich den verheissenen zweiten Theil meines Werkes nicht auf derselben Grundlage weiter baute, sondern im Jahre 1862 die ganze Ausdehnungslehre auf einer neuen Grundlage, die, wie ich hoffte, den Mathematikern mehr zusagen würde, aufbaute und bis zu Ende durchführte*). Aber auch dies neue Werk fand zuerst eben so wenig Beachtung als das erste. Erst seit dem Jahre 1867 gestaltete sich die Sache ganz anders.

Es war zuerst Hermann Hankel, welcher in seiner „Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867“ die fundamentale Bedeutung meiner Ausdehnungslehre betonte (S. 16, S. 112, S. 119—140, S. 140). Noch entschiedener geschah dies durch Clebsch, welcher kurz vor seinem Tode in seiner Abhandlung „zum Gedächtniss an Julius Plücker, Göttingen 1872“ auf S. 8 und 28 in Anmerkungen, die er unter den Text setzte, die Bedeutsamkeit meiner Ausdehnungslehre von 1844 in sehr rühmender Weise hervorhebt, und namentlich an der zweiten Stelle sagt: „In gewissem Sinne sind die Coordinaten der geraden Linie, wie überhaupt ein grosser Theil der Grundvorstellungen der neueren Algebra, bereits in Grassmanns „Ausdehnungslehre“ (1844) enthalten; die genauere Darlegung dieser Verhältnisse würde indessen hier zu weit führen“. Bei dem liebevollen und stets so fruchtreichen Eingehen auf die Arbeiten Anderer, welches diesen hervorragendsten XVII der neueren Mathematiker | auszeichnete, würde Clebsch gewiss späterhin Raum gefunden haben, um diese Verhältnisse darzulegen, und nach seiner Weise auch die Ausdehnungslehre mit neuen, weitgreifenden Ideen zu befruchten, wenn er nicht mitten in seinem kräftigsten Wirken der Wissenschaft so plötzlich entrissen wäre.

Aber schon drei Jahre vorher (1869) hatte Victor Schlegel angefangen, den von Clebsch angedeuteten Gedanken auszuführen. In seinem „System der Raumlehre nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe dargestellt von Victor Schlegel, Leipzig bei Teubner“, dessen erster Theil 1872 und dessen zweiter Theil 1875 erschien, hat der Verfasser mit grosser Klarheit und zum grossen Theile in selbständiger, der Sache durchaus angemessener Methode die Bedeutung der Ausdehnungslehre auch für die neueste Geometrie und Algebra dargelegt. Es ist besonders hervorzuheben, dass dies Werk Schlegel's das erste ist, welches die wesent-

*) Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form bearbeitet. Berlin 1862 (Enslin).

lichen Ideen der Ausdehnungslehre in ihrem inneren Zusammenhange aufgefasst und zur Darstellung gebracht hat.

[Seit dieser Zeit ist nicht nur die Bedeutung der Ausdehnungslehre wiederholt hervorgehoben worden, sondern man hat auch begonnen, auf verschiedenen Gebieten erfolgreich mit ihren Methoden zu arbeiten. — H. Noth in Freiberg legte in seiner Abhandlung „Die vier Species in den Elementen der Geometrie" (Schulprogramm 1874) den Grund zu einer vereinfachenden Darstellung der Geometrie der Lage. — R. Sturm in Darmstadt wandte in dem Aufsatz „Sulle forze in equilibrio" (Annali di Matem.*) VII p. 217 ff. 1876) die Methoden der Ausdehnungslehre zur Lösung von Problemen der Mechanik an. — Endlich hat W. Preyer in Jena in seinen „Elementen der reinen Empfindungslehre" (Jena, bei Dufft. 1877) eine auf den Prinzipien der Ausdehnungslehre beruhende Darstellung dieser Wissenschaft gegeben, und dadurch der ersteren auch ein vom Begriff des Raumes unabhängiges Gebiet erobert.]

Es versteht sich von selbst, dass in der Ausdehnungslehre, als einer noch jungen Wissenschaft, mannigfache Keime verborgen liegen, welche einer weiteren Entwickelung fähig und bedürftig sind, und auch ich selbst habe mich seit 1872, | nach einer zehnjährigen Unterbrechung wieder jenen Studien zugewandt. Meine früher erschienenen Arbeiten auf diesem Gebiete sind in meiner Ausdehnungslehre von 1862 aufgeführt, und ich habe daher hier nur die neueren Arbeiten zu verzeichnen. Es sind dies erstens zwei Aufsätze in den Göttinger Nachrichten von 1872 „Zur Theorie der Curven dritter Ordnung" (S. 505) und „Ueber zusammengehörige Pole und ihre Darstellung durch Produkte" (S. 567), ferner in den mathematischen Annalen „die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre" Band VII S. 538, „die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre" Band XII S. 222, „der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre" Band XII S. 375. Endlich habe ich eine für Borchardts Journal bestimmte Abhandlung unter der Feder, in welcher ich die schönen Arbeiten Reye's über die Oberflächen durch weitere Ausführung der in meiner Ausdehnungslehre von 1862 Nr. 392 dargestellten Idee, nach welcher Funktionen als extensive Grössen behandelt werden, auf eine neue und einfache Weise zu begründen suche**).

XVIII

[So ist es denn gekommen, dass im Laufe der letzten Jahre das Interesse an der Ausdehnungslehre sich in immer weiteren Kreisen

*) [2. Serie.]

**) [Abgedruckt in Bd. 84, S. 273—283.]

verbreitete. Und da in demselben Maasse die Nachfrage nach der inzwischen selten gewordenen ersten Ausgabe des Werkes zunahm, so entschloss sich die Verlagshandlung mit dankenswerther Bereitwilligkeit zur Veranstaltung einer zweiten Auflage.]

Ich habe in dieser zweiten Auflage den Text der ersten Auflage (natürlich abgesehen von einzelnen Druckfehlern) unverändert gelassen, da die Darstellung in derselben die konsequente Durchführung einer einzigen Grundidee ist, und auch die Behandlungsweise eine solche ist, deren Berechtigung ich durchaus anerkenne, und die gewiss den mehr philosophisch gebildeten Lesern mehr zusagen wird, als die den Mathematikern mehr anbequemte Darstellungsweise der Ausdehnungslehre von 1862. Dagegen habe ich unter den Text, je nachdem es mir zweckmässig schien, neue Anmerkungen hinzugefügt, die ich mit der Jahreszahl 1877 versehen habe.

XIX Zwei | umfangreichere Anmerkungen habe ich, um die Uebereinstimmung mit den Seitenzahlen der ersten Auflage möglichst zu erhalten, als Anhänge an den Schluss gestellt. Dort findet sich auch noch ein Abdruck der Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre, welche ich in Grunerts Archiv Bd. VI gegeben habe, da dieselbe, wie mir von verschiedenen Seiten mitgetheilt ist, das Verständniss des Werkes sehr erleichtern soll. Endlich habe ich ein Verzeichniss der in dem Werke vorkommenden Kunstausdrücke hinzugefügt.

Um die Vergleichung mit der Ausdehnungslehre von 1862 zu erleichtern, gebe ich hier zuerst eine Uebersicht der in beiden der Hauptsache nach übereinstimmenden Resultate, bemerke jedoch, dass nicht nur die Ableitung derselben eine wesentlich verschiedene ist, sondern auch in der einen Resultate abgeleitet sind, die in der andern entweder übergangen oder mit andern Resultaten zusammengefasst sind, so dass es also unmöglich wird, jedes mit jedem zusammenzustellen. Ich bezeichne hier die Ausdehnungslehre von 1844 mit A_1, die von 1862 mit A_2:

A_1 § 13— 20. — A_2 Nr. 1— 9, 14— 24,
A_1 § 24 . — A_2 Nr. 216—223,
A_1 § 28— 36. — A_2 Nr. 52— 61, 66— 68,
A_1 § 37— 40. — A_2 Nr. 254, 262,
A_1 § 45, 46. — A_2 Nr. 134, 135,
A_1 § 47— 55. — A_2 Nr. 69— 85,
A_1 § 60— 73. — A_2 Nr. 10— 13, vgl. 377,
A_1 § 80— 90. — A_2 Nr. 27— 36,
A_1 § 93 . — A_2 Nr. 136,
A_1 § 94—119. — A_2 Nr. 224—286.

Die Gesetze der Elementargrössen sind in A_2 mit denen der Ausdehnungsgrössen zusammengefasst und nur in der Anwendung auf die Geometrie von ihnen gesondert.

A_1 § 126 . — A_2 Nr. 25, 26,
A_1 § 128—142. — A_2 Nr. 94—132.

Die §§ 127 und 143 sind als unfruchtbar aufgegeben.

A_1 § 144 . — A_2 Nr. 287—305,
A_1 § 145—148. — A_2 Nr. 306—329,
A_1 § 149—165. — A_2 Nr. 401—409.

Die Anmerkung über offene Produkte am Schlusse der A_1 ist XX weiter ausgeführt A_2 Nr. 353—363.

Die neuen Gegenstände, welche in der Ausdehnungslehre von 1862 bearbeitet werden sollten, sind in der Vorrede zur Ausdehnungslehre von 1844, S. X—XIV*) nur theilweise erwähnt. Ganz neu hinzugekommen ist der zweite Abschnitt (Nr. 348—527), welcher die Funktionenlehre, und die ihr zu Grunde liegende algebraische Multiplikation, nebst der Differenzialrechnung, den unendlichen Reihen und der Integralrechnung, behandelt und besonders tief in die verwandten Gebiete der gewöhnlichen Analysis, namentlich auch in die neuere Geometrie und Algebra eingreift, und in einzelnen Abschnitten, wie zum Beispiel in der Behandlung des Quotienten (Nr. 377—391), in der Auffassung der Funktionen als extensiver Grössen (392—400), sowie in der Integration der Differenzialgleichungen (491—527) Keime zu Entwickelungen enthält, welche noch zukünftiger Bearbeitung harren.

Stettin, im Sommer 1877.

Hermann Grassmann.

*) [S. 11—14 dieser Ausgabe.]

Einleitung.

XIX
XXI

A. Ableitung des Begriffs der reinen Mathematik.

1. Die oberste Theilung aller Wissenschaften ist die in reale und formale, von denen die ersteren das Sein, als das dem Denken selbstständig gegenübertretende, im Denken abbilden, und ihre Wahrheit haben in der Uebereinstimmung des Denkens mit jenem Sein; die letzteren hingegen das durch das Denken selbst gesetzte zum Gegenstande haben, und ihre Wahrheit haben in der Uebereinstimmung der Denkprocesse unter sich.

Denken ist nur in Bezug auf ein Sein, was ihm gegenübertritt und durch das Denken abgebildet wird; aber dies Sein ist bei den realen Wissenschaften ein selbstständiges, ausserhalb des Denkens für sich bestehendes, bei den formalen hingegen ein durch das Denken selbst gesetztes, was nun wieder einem zweiten Denkakte als Sein sich gegenüberstellt. Wenn nun die Wahrheit überhaupt in der Uebereinstimmung des Denkens mit dem Sein beruht, so beruht sie insbesondere bei den formalen Wissenschaften in der Uebereinstimmung des zweiten Denkaktes mit dem durch den ersten gesetzten Sein, also in der Uebereinstimmung beider Denkakte. Der Beweis in den formalen Wissenschaften geht daher nicht über das Denken selbst hinaus in eine andere Sphäre über, sondern verharrt rein in der Kombination der verschiedenen Denkakte. Daher dürfen auch die formalen Wissenschaften nicht von Grundsätzen ausgehen, wie die realen; sondern ihre Grundlage bilden die Definitionen*).

XX
XXII

2. Die formalen Wissenschaften betrachten entweder die allgemeinen Gesetze des Denkens, oder sie betrachten das Besondere

*) Wenn man in die formalen Wissenschaften, wie zum Beispiel in die Arithmetik, dennoch Grundsätze eingeführt hat, so ist dies als ein Missbrauch anzusehen, der nur aus der entsprechenden Behandlung der Geometrie zu erklären ist. Ich werde hierauf später noch einmal ausführlicher zurückkommen. Hier genüge es, das Fehlen der Grundsätze in den formalen Wissenschaften als nothwendig dargethan zu haben.

durch das Denken gesetzte, ersteres die Dialektik (Logik)*), letzteres die reine **Mathematik.**

Der Gegensatz zwischen Allgemeinem und Besonderem bedingt also die Theilung der formalen Wissenschaften in Dialektik und Mathematik. Die erstere ist eine philosophische Wissenschaft, indem sie die Einheit in allem Denken aufsucht, die Mathematik hingegen hat die entgegengesetzte Richtung, indem sie jedes Gedachte einzeln als ein Besonderes auffasst.

3. Die reine Mathematik ist daher die Wissenschaft des besonderen Seins als eines durch das Denken gewordenen. Das besondere Sein, in diesem Sinne aufgefasst, nennen wir eine Denkform oder schlechtweg eine Form. Daher ist reine Mathematik Formenlehre.

Der Name Grössenlehre eignet nicht der gesammten Mathematik, indem derselbe auf einen wesentlichen Zweig derselben, auf die Kombinationslehre, keine Anwendung findet, und auf die Arithmetik auch nur im uneigentlichen Sinne**). Dagegen scheint der Ausdruck Form wieder zu weit zu sein, und der Name Denkform angemessener; allein die Form in ihrer reinen Bedeutung, abstrahirt von allem realen Inhalte, ist eben nichts anderes, als die Denkform, und somit der Ausdruck entsprechend.

Ehe wir zur Theilung der Formenlehre übergehen, haben wir einen Zweig auszusondern, den man bisher mit Unrecht ihr zugerechnet hat, nämlich die Geometrie. Schon aus dem oben aufgestellten Begriffe leuchtet ein, dass die Geometrie, eben so wie die Mechanik, auf ein reales | Sein zurückgeht; nämlich dies ist für die Geometrie der Raum; XXIII und es ist klar, wie der Begriff des Raumes keinesweges durch das Denken erzeugt werden kann, sondern demselben | stets als ein gegebenes *XXI* gegenübertritt. Wer das Gegentheil behaupten wollte, müsste sich der Aufgabe unterziehen, die Nothwendigkeit der drei Dimensionen des Raumes aus den reinen Denkgesetzen abzuleiten, eine Aufgabe, deren Lösung sich sogleich als unmöglich darstellt.

Wollte nun jemand, obgleich er dies zugeben müsste, dennoch der Geometrie zu Liebe den Namen der Mathematik auch auf sie ausdehnen; so könnten wir uns dies zwar gefallen lassen, wenn er uns auch auf der andern Seite unsern Namen der Formenlehre oder irgend einen gleichgeltenden will stehen lassen; doch aber müssten wir ihn im Voraus

*) Die Logik bietet eine rein mathematische Seite dar, die man als formale Logik bezeichnen kann, und die ihrem Inhalte nach von meinem Bruder Robert und mir gemeinschaftlich bearbeitet und von dem ersteren in seinem zweiten Buche der Formenlehre, Stettin 1872, in eigenthümlicher Form dargestellt ist. (1877.) [Neue Auflage in 2 Bd.: Logik u. Formenlehre, Stettin 1890 u. 91.]

**) Der Begriff der Grösse wird in der Arithmetik durch den der Anzahl vertreten; die Sprache unterscheidet daher sehr wohl vermehren und vermindern, was der Zahl angehört, von vergrössern und verkleinern, was der Grösse.

darauf hinweisen, dass dann jener Name, weil er das differenteste in sich schliesst, auch nothwendig mit der Zeit als überflüssig werde verworfen werden.

Die Stellung der Geometrie zur Formenlehre hängt von dem Verhältniss ab, in welchem die Anschauung des Raumes zum reinen Denken steht. Wenngleich wir nun sagten, es trete jene Anschauung dem Denken als selbstständig gegebenes gegenüber, so ist damit doch nicht behauptet, dass die Anschauung des Raumes uns erst aus der Betrachtung der räumlichen Dinge würde; sondern sie ist eine Grundanschauung, die mit dem Geöffnetsein unseres Sinnes für die sinnliche Welt uns mitgegeben ist, und die uns eben so ursprünglich anhaftet, wie der Leib der Seele. Auf gleiche Weise verhält es sich mit der Zeit und mit der auf die Anschauungen der Zeit und des Raumes gegründeten Bewegung, weshalb man auch die reine Bewegungslehre (Phorometrie) mit gleichem Rechte wie die Geometrie den mathematischen Wissenschaften beigezählt hat. Aus der Anschauung der Bewegung fliesst vermittelst des Gegensatzes von Ursache und Wirkung der Begriff der bewegenden Kraft, so dass also Geometrie, Phorometrie und Mechanik als Anwendungen der Formenlehre auf die Grundanschauungen der sinnlichen Welt erscheinen.

B. Ableitung des Begriffs der Ausdehnungslehre.

XXIV
XXII

4. Jedes durch das Denken gewordene (vgl. Nr. 3) kann auf zwiefache Weise geworden sein, entweder durch einen einfachen Akt des Erzeugens, oder durch einen zwiefachen Akt | des Setzens | und Verknüpfens. Das auf die erste Weise gewordene ist die stetige Form oder die Grösse im engeren Sinn, das auf die letztere Weise gewordene die diskrete oder Verknüpfungs-Form.

Der schlechthin einfache Begriff des Werdens giebt die stetige Form. Das bei der diskreten Form vor der Verknüpfung gesetzte ist zwar auch durch das Denken gesetzt, erscheint aber für den Akt des Verknüpfens als Gegebenes, und die Art, wie aus dem Gegebenen die diskrete Form wird, ist ein blosses Zusammendenken. Der Begriff des stetigen Werdens ist am leichtesten aufzufassen, wenn man ihn zuerst nach der Analogie der geläufigeren, diskreten Entstehungsweise betrachtet. Nämlich da bei der stetigen Erzeugung das jedesmal gewordene festgehalten, und das neu entstehende sogleich in dem Momente seines Entstehens mit jenem zusammengedacht wird: so kann man der Analogie wegen auch für die stetige Form dem Begriffe nach einen zwiefachen Akt des Setzens und Verknüpfens unterscheiden, aber beides hier zu Einem Akte vereinigt, und somit in eine unzertrennliche Einheit zusammengehend; nämlich von den beiden Gliedern der Verknüpfung (wenn wir diesen Ausdruck der Analogie wegen für einen Augenblick festhalten) ist das eine das schon

gewordene, das andere hingegen das in dem Momente des Verknüpfens selbst neu entstehende, also nicht ein vor dem Verknüpfen schon fertiges. Beide Akte also, nämlich des Setzens und Verknüpfens, gehen ganz in einander auf, so dass nicht eher verknüpft werden kann, als gesetzt ist, und nicht eher gesetzt werden darf, als verknüpft ist; oder wieder in der dem Stetigen zukommenden Ausdrucksweise gesprochen: das was neu entsteht, entsteht eben nur an dem schon gewordenen, ist also ein Moment des Werdens selbst, was hier in seinem weiteren Verlauf als Wachsen erscheint.

Der Gegensatz des Diskreten und Stetigen ist (wie alle wahren Gegensätze) ein fliessender, indem das Diskrete auch kann als stetig betrachtet werden, und umgekehrt das Stetige als diskret. Das Diskrete wird als Stetiges betrachtet, wenn das Verknüpfte selbst wieder als Gewordenes und der Akt des Verknüpfens als ein Moment des Werdens aufgefasst wird. Und das Stetige wird als diskret betrachtet, wenn einzelne Momente des Werdens als blosse || Verknüpfungsakte aufgefasst, und das so verknüpfte für die Verknüpfung als Gegebenes betrachtet wird. *XXIII* XXV

5. Jedes Besondere (Nr. 3) wird ein solches durch den Begriff des Verschiedenen, wodurch es einem anderen Besonderen nebengeordnet, und durch den des Gleichen, wodurch es mit anderem Besonderen demselben Allgemeinen untergeordnet wird. Das aus dem Gleichen gewordene können wir die algebraische Form, das aus dem Verschiedenen gewordene die kombinatorische Form nennen.

Der Gegensatz des Gleichen und Verschiedenen ist gleichfalls ein fliessender. Das Gleiche ist verschieden, schon sofern das eine und das andere ihm Gleiche irgend wie gesondert ist (und ohne diese Sonderung wäre es nur Eins, also nicht Gleiches), das Verschiedene ist gleich, schon sofern beides durch die auf beides sich beziehende Thätigkeit verknüpft ist, also beides ein Verknüpftes ist. Darum verschwimmen aber nun beide Glieder keineswegs in einander, so dass man einen Massstab anzulegen hätte, durch den bestimmt würde, wie viel Gleiches gesetzt sei zwischen beiden Vorstellungen und wie viel Verschiedenes; sondern wenn auch dem Gleichen immer schon irgend wie das Verschiedene anhaftet und umgekehrt, so bildet doch nur jedesmal das Eine das Moment der Betrachtung, während das andere nur als die vorauszusetzende Grundlage des ersteren erscheint.

Unter der algebraischen Form ist hier nicht bloss die Zahl sondern auch das der Zahl im Gebiete des Stetigen entsprechende, und unter der kombinatorischen Form nicht nur die Kombination sondern auch das ihr im Stetigen entsprechende verstanden.

6. Aus der Durchkreuzung dieser beiden Gegensätze, von denen der erste auf die Art der Erzeugung, der letztere auf die Elemente der Erzeugung sich bezieht, gehen die vier Gattungen der Formen

und die ihnen entsprechenden Zweige der Formenlehre hervor. Und
XXIV zwar sondert sich zuerst die diskrete Form danach in | Zahl und Kombination (Gebinde). Zahl ist die algebraisch diskrete Form, das heisst sie ist die Zusammenfassung des als gleich gesetzten; die Kombination ist die kombinatorisch diskrete Form, das heisst sie ist die Zu-
XXVI sammenfassung | des als verschieden gesetzten. Die Wissenschaften des Diskreten sind also Zahlenlehre und Kombinationslehre (Verbindungslehre).

Dass hierdurch der Begriff der Zahl vollständig erschöpft und genau umgränzt ist, und ebenso der der Kombination, bedarf wohl kaum eines weiteren Nachweises. Und da die Gegensätze, durch welche diese Definitionen hervorgegangen sind, die einfachsten, in dem Begriffe der mathematischen Form unmittelbar mit gegebenen sind, so ist hierdurch die obige Ableitung wohl hinlänglich gerechtfertigt*). Ich bemerke nur noch, wie dieser Gegensatz zwischen beiden Formen auf eine sehr reine Weise durch die differente Bezeichnung ihrer Elemente ausgedrückt ist, indem das zur Zahl verknüpfte mit einem und demselben Zeichen (1) bezeichnet wird, das zur Kombination verknüpfte mit verschiedenen, im Uebrigen ganz willkührlichen Zeichen (den Buchstaben). — Wie nun hiernach jede Menge von Dingen (Besonderheiten) als Zahl so gut, wie als Kombination aufgefasst werden kann, je nach der verschiedenen Betrachtungsweise, bedarf wohl kaum einer Erwähnung.

7. Eben so sondert sich die stetige Form oder die Grösse danach in die algebraisch-stetige Form oder die intensive Grösse, und in die kombinatorisch-stetige Form oder die extensive Grösse. Die intensive Grösse ist also das durch Erzeugung des Gleichen gewordene, die extensive Grösse oder die Ausdehnung ist das durch Erzeugung des Verschiedenen gewordene. Jene bildet als veränderliche Grösse
XXV die Grundlage der Funktionenlehre, der | Differenzial- und Integral-Rechnung, diese die Grundlage der Ausdehnungslehre.

Da von diesen beiden Zweigen der erstere der Zahlenlehre als höherer Zweig untergeordnet zu werden pflegt, der letztere aber noch als ein bisher unbekannter Zweig erscheint, so ist es nothwendig, diese ohnehin
XXVII durch den Begriff des stetigen Fliessens | schwierige Betrachtung näher zu erläutern.

Wie in der Zahl die Einigung hervortritt, in der Kombination die Sonderung des Zusammengedachten, so auch in der intensiven Grösse die

---

*) Der Begriff der Zahl und der Kombination ist schon vor siebzehn Jahren in einer von meinem Vater verfassten Abhandlung, über den Begriff der reinen Zahlenlehre, welche in dem Programme des Stettiner Gymnasiums von 1827 abgedruckt ist, auf ganz ähnliche Weise entwickelt worden, ohne aber zur Kenntniss eines grösseren Publikum gelangt zu sein.

Einigung der Elemente, welche ihrem Begriff nach zwar noch gesondert sind, aber nur in ihrem wesentlichen sich gleich sein die intensive Grösse bilden, hingegen in der extensiven Grösse die Sonderung der Elemente, welche zwar, sofern sie Eine Grösse bilden, vereinigt sind, aber welche eben nur in ihrer Trennung von einander die Grösse konstituiren. Es ist also die intensive Grösse gleichsam die flüssig gewordene Zahl, die extensive Grösse die flüssig gewordene Kombination. Der letzteren ist wesentlich ein Auseinandertreten der Elemente und ein Festhalten derselben als aus einander seiender; das erzeugende Element erscheint bei ihr als ein sich änderndes, das heisst durch eine Verschiedenheit der Zustände hindurchgehendes, und die Gesammtheit dieser verschiedenen Zustände bildet eben das Gebiet der Ausdehnungsgrösse. Bei der intensiven Grösse hingegen liefert die Erzeugung derselben eine stetige Reihe sich selbst gleicher Zustände, deren Quantität eben die intensive Grösse ist. Als Beispiel für die extensive Grösse können wir am besten die begränzte Linie (Strecke) wählen, deren Elemente wesentlich aus einander treten und dadurch eben die Linie als Ausdehnung konstituiren; hingegen als Beispiel der intensiven Grösse etwa einen mit bestimmter Kraft begabten Punkt, indem hier die Elemente nicht sich entäussern, sondern nur in der Steigerung sich darstellen, also eine bestimmte Stufe der Steigerung bilden.

Auch hier zeigt sich die aufgestellte Differenz auf eine schöne Weise in der Bezeichnung; nämlich bei der intensiven Grösse, welche den Gegenstand der Funktionenlehre ausmacht, unterscheidet man nicht die Elemente durch besondere Zeichen, sondern wo | besondere Zeichen hervortreten, *XXVI* da ist dadurch die ganze veränderliche Grösse bezeichnet. Hingegen bei der Ausdehnungsgrösse, oder deren konkreter Darstellung, der Linie, werden die verschiedenen Elemente auch mit verschiedenen Zeichen (den Buchstaben) bezeichnet, grade wie in der Kombinationslehre. Auch ist klar, wie jede reale Grösse auf zwiefache Weise kann angeschaut werden, als intensive und extensive; nämlich auch die Linie wird als intensive Grösse angeschaut, wenn man von der Art, wie ihre | Elemente aus einander sind, absieht, und bloss die Quantität der Elemente auffasst, und XXVIII eben so kann der mit einer Kraft begabte Punkt als extensive Grösse gedacht werden, indem man sich die Kraft in Form einer Linie vorstellt.

Historisch hat sich unter den vier Zweigen der Mathematik das Diskrete eher entwickelt als das Stetige (da jenes dem zergliedernden Verstande näher liegt als dieses), das Algebraische eher als das Kombinatorische (da das Gleiche leichter zusammengefasst wird als das Verschiedene). Daher ist die Zahlenlehre die früheste, Kombinationslehre und Differenzialrechnung sind gleichzeitig entstanden, und von ihnen allen musste die Ausdehnungslehre in ihrer abstrakten Form die späteste sein, während auf der andern Seite ihr konkretes (obwohl beschränktes) Abbild, die Raumlehre, schon der frühesten Zeit angehört.

8. Es kann der Zerspaltung der Formenlehre in die vier Zweige ein allgemeiner Theil vorangeschickt werden, welcher die allgemeinen, das heisst für alle Zweige gleich anwendbaren Verknüpfungsgesetze darstellt, und welchen wir die allgemeine Formenlehre nennen können.

Diesen Theil dem Ganzen vorauszuschicken, ist wesentlich, sofern dadurch nicht bloss die Wiederholung derselben Schlussreihen in allen vier Zweigen und selbst in den verschiedenen Abtheilungen desselben Zweiges erspart, und somit die Entwickelung bedeutend abgekürzt wird, sondern auch das dem Wesen nach zusammengehörige zusammen erscheint, und als Grundlage des Ganzen auftritt.

XXVII

C. Darlegung des Begriffs der Ausdehnungslehre.

9. Das stetige Werden, in seine Momente zerlegt, erscheint als ein stetiges Entstehen mit Festhaltung des schon gewordenen. Bei der Ausdehnungsform ist das jedesmal neu entstehende als ein verschiedenes gesetzt; halten wir hierbei nun das jedesmal gewordene nicht fest, so gelangen wir zu dem Begriffe der stetigen Aenderung. Was diese Aenderung erfährt, nennen wir das erzeugende Element, und das erzeugende Element in irgend einem der Zustände, den es | bei seiner Aenderung annimmt, ein Element der stetigen Form. Hiernach ist also die Ausdehnungsform die Gesammtheit aller Elemente, in die das erzeugende Element bei stetiger Aenderung übergeht.

XXIX

Der Begriff der stetigen Aenderung des Elements kann nur bei der Ausdehnungsgrösse hervortreten; bei der intensiven Grösse würde bei Aufgebung des jedesmal gewordenen nur der stetige Ansatz zum Werden als ein vollkommen leeres zurückbleiben.

In der Raumlehre erscheint als das Element der Punkt, als seine stetige Aenderung die Ortsänderung oder Bewegung, als seine verschiedenen Zustände die verschiedenen Lagen des Punktes im Raume.

10. Das Verschiedene muss nach einem Gesetze sich entwickeln, wenn das Erzeugniss ein bestimmtes sein soll. Dies Gesetz muss bei der einfachen Form dasselbe sein für alle Momente des Werdens. Die einfache Ausdehnungsform ist also die Form, welche durch eine nach demselben Gesetze erfolgende Aenderung des erzeugenden Elements entsteht; die Gesammtheit aller nach demselben Gesetz erzeugbaren Elemente nennen wir ein System oder ein Gebiet.

Die Verschiedenheit würde, da das von einem Gegebenen verschiedene unendlich mannigfach sein kann, sich gänzlich ins Unbestimmte verlaufen, wenn sie nicht einem festen Gesetze unterworfen wäre. Dies Gesetz ist nun aber in der reinen Formenlehre nicht durch irgend welchen Inhalt

bestimmt; sondern durch die rein | abstrakte Ideè des Gesetzmässigen *XXVIII* ist der Begriff der Ausdehnung und durch die desselben Gesetzes für alle Momente der Aenderung der Begriff der einfachen Ausdehnung bestimmt. Hiernach hat nun die einfache Ausdehnung die Beschaffenheit, dass, wenn aus einem Elemente derselben a durch einen Akt der Aenderung ein anderes Element b derselben Ausdehnung hervorgeht, dann aus b durch denselben Akt der Aenderung ein drittes Element c derselben hervorgeht.

In der Raumlehre ist die Gleichheit der Richtung das die einzelnen Aenderungen umfassende Gesetz, die Strecke in der Raumlehre entspricht also der einfachen Ausdehnung, die unendliche gerade Linie dem ganzen System.

11. Wendet man zwei verschiedenene Gesetze der Aenderung an, XXX so bildet die Gesammtheit der vermöge beider Gesetze erzeugbaren Elemente ein System zweiter Stufe. Die Gesetze der Aenderung, durch welche die Elemente dieses Systems aus einander hervorgehen können, sind von jenen beiden ersten abhängig; nimmt man noch ein drittes unabhängiges Gesetz hinzu, so gelangt man zu einem Systeme dritter Stufe und so fort.

Als Beispiel möge hier wieder die Raumlehre dienen. In derselben werden bei zwei verschiedenen Richtungen aus einem Elemente die sämmtlichen Elemente einer Ebene erzeugt, indem nämlich das erzeugende Element beliebig viel nach beiden Richtungen nach einander fortschreitet, und die Gesammtheit der so erzeugbaren Punkte (Elemente) in eins zusammengefasst wird. Die Ebene ist also das System zweiter Stufe; in ihr ist eine unendliche Menge von Richtungen enthalten, welche von jenen beiden ersten abhängen. Nimmt man eine dritte unabhängige Richtung hinzu, so wird vermittelst ihrer der ganze unendliche Raum (als System dritter Stufe) erzeugt; und weiter als bis zu drei unabhängigen Richtungen (Aenderungsgesetzen) kann man hier nicht kommen, während sich in der reinen Ausdehnungslehre die Anzahl derselben bis ins Unendliche steigern kann.

12. Die Verschiedenheit der Gesetze erfordert wieder zu ihrer genaueren Bestimmung eine Erzeugungsweise, vermöge deren das eine System in das andere übergeht. Dieser Uebergang der verschiedenen *XXIX* Systeme in einander bildet daher eine zweite natürliche Stufe in dem Gebiete der Ausdehnungslehre, und mit ihr ist dann das Gebiet der elementaren Darstellung dieser Wissenschaft beschlossen.

Es entspricht dieser Uebergang der Systeme in einander der Schwenkungsbewegung in der Raumlehre, und mit dieser hängt zusammen die Winkelgrösse, die absolute Länge, der senkrechte Stand und so weiter; was alles seine Erledigung erst in dem zweiten Theile der Ausdehnungslehre finden wird.

XXXI

D. Form der Darstellung.

13. Das Eigenthümliche der philosophischen Methode ist, dass sie in Gegensätzen fortschreitet, und so vom Allgemeinen zum Besonderen gelangt; die mathematische Methode hingegen schreitet von den einfachsten Begriffen zu den zusammengesetzteren fort, und gewinnt so durch Verknüpfung des Besonderen neue und allgemeinere Begriffe.

Während also dort die Uebersicht über das Ganze vorwaltet, und die Entwickelung eben in der allmäligen Verzweigung und Gliederung des Ganzen besteht, so herrscht hier die Aneinanderkettung des Besonderen vor, und jede in sich geschlossene Entwickelungsreihe bildet zusammen wieder nur ein Glied für die folgende Verkettung, und diese Differenz der Methode liegt in dem Begriffe; denn in der Philosophie ist eben die Einheit der Idee das ursprüngliche, die Besonderheit das abgeleitete, in der Mathematik hingegen die Besonderheit das ursprüngliche, hingegen die Idee das letzte, angestrebte; wodurch die entgegengesetzte Fortschreitung bedingt ist.

14. Da sowohl die Mathematik als die Philosophie Wissenschaften im strengsten Sinne sind, so muss die Methode in beiden etwas gemeinschaftliches haben, was sie eben zur wissenschaftlichen macht. Nun legen wir einer Behandlungsweise Wissenschaftlichkeit bei, wenn der Leser durch sie einestheils mit Nothwendigkeit zur Anerkennung XXX jeder einzelnen Wahrheit geführt wird, andrerseits in | den Stand gesetzt wird, auf jedem Punkte der Entwickelung die Richtung des weiteren Fortschreitens zu übersehen.

Die Unerlässlichkeit der ersten Forderung, nämlich der wissenschaftlichen Strenge, wird jeder zugeben. Was das zweite betrifft, so ist dies noch immer ein Punkt, der von den meisten Mathematikern noch nicht gehörig beachtet wird. Es kommen oft Beweise vor, bei denen man zuerst, wenn nicht der Satz obenan stände, gar nicht wissen könnte, wohin sie führen sollen, und durch die man dann, nachdem man eine ganze Zeitlang blind und aufs Gerathewohl hin jeden Schritt nachgemacht hat, endlich, ehe man es | sich versieht, plötzlich zu der zu erweisenden Wahrheit gelangt. (XXXII) Ein solcher Beweis kann vielleicht an Strenge nichts zu wünschen übrig lassen, aber wissenschaftlich ist er nicht; es fehlt ihm das zweite Erforderniss, die Uebersichtlichkeit. Wer daher einem solchen Beweise nachgeht, gelangt nicht zu einer freien Erkenntniss der Wahrheit, sondern bleibt, wenn er sich nicht nachher jenen Ueberblick selbst schafft, in gänzlicher Abhängigkeit von der besonderen Weise, in der die Wahrheit gefunden war; und dies Gefühl der Unfreiheit, was in solchem Falle wenigstens während des Recipirens entsteht, ist für den, der gewohnt ist, frei und selbstständig zu denken, und alles

was er aufnimmt, selbstthätig und lebendig sich anzueignen, ein höchst drückendes. Ist hingegen der Leser in jedem Punkt der Entwickelung in den Stand gesetzt, zu sehen, wohin er geht, so bleibt er Herrscher über den Stoff, er ist an die besondere Form der Darstellung nicht mehr gebunden, und die Aneignung wird eine wahre Reproduktion.

15. Auf dem jedesmaligen Punkte der Entwickelung ist die Art der Weiterentwickelung wesentlich durch eine leitende Idee bestimmt, welche entweder nichts anderes ist, als eine vermuthete Analogie mit verwandten und schon bekannten Zweigen des Wissens, oder welche, und dies ist der beste Fall, eine direkte Ahnung der zunächst zu suchenden Wahrheit ist.

Die Analogie ist, da sie in verwandte Gebiete hineinspielt, nur ein Nothbehelf; wenn es nicht eben darauf ankommt, die Beziehung | zu *XXXI* einem verwandten Zweige durchweg hervorzuheben, und so eine fortlaufende Analogie mit diesem Zweige zu ziehen*). Die Ahnung scheint dem Gebiet der reinen Wissenschaft fremd zu sein und am allermeisten dem mathematischen. Allein ohne sie ist es unmöglich, irgend eine neue Wahrheit aufzufinden; durch blinde Kombination der gewonnenen Resultate gelangt man nicht dazu; sondern, was man zu kombiniren hat und auf welche Weise, muss durch die leitende Idee bestimmt sein, und diese Idee wiederum kann, | ehe sie sich durch die Wissenschaft selbst XXXIII verwirklicht hat, nur in der Form der Ahnung erscheinen. Es ist daher diese Ahnung auf dem wissenschaftlichen Gebiet etwas unentbehrliches. Sie ist nämlich, wenn sie von rechter Art ist, das in eins zusammenschauen der ganzen Entwickelungsreihe, die zu der neuen Wahrheit führt, aber mit noch nicht aus einander gelegten Momenten der Entwickelung und daher auch im Anfang nur erst als dunkles Vorgefühl; die Auseinanderlegung jener Momente enthält zugleich die Auffindung der Wahrheit und die Kritik jenes Vorgefühls.

16. Daher ist die wisssenschaftliche Darstellung ihrem Wesen nach ein Ineinandergreifen zweier Entwickelungsreihen, von denen die eine mit Konsequenz von einer Wahrheit zur andern führt, und den eigentlichen Inhalt bildet, die andere aber das Verfahren selbst beherrscht und die Form bestimmt. In der Mathematik treten diese beiden Entwickelungsreihen am schärfsten aus einander.

Es ist in der Mathematik schon lange, und Euklid selbst hat darin das Vorbild gegeben, Sitte gewesen, nur die eine Entwickelungsreihe, welche den eigentlichen Inhalt bildet, hervortreten zu lassen, in Bezug auf die andere aber es dem Leser zu überlassen, sie zwischen den Zeilen herauszulesen. Allein wie vollendet auch die Anordnung und Darstel-

*) Dieser Fall tritt bei der hier zu behandelnden Wissenschaft in Bezug auf die Geometrie ein, weshalb ich den Weg der Analogie meist vorgezogen habe.

lung jener Entwickelungsreihe sein mag: so ist es doch unmöglich, dadurch demjenigen, der die Wissenschaft erst kennen lernen soll, schon
XXXII auf jedem Punkte der Entwickelung | die Uebersicht gegenwärtig zu erhalten, und ihn in Stand zu setzen, selbstthätig und frei weiter fortzuschreiten. Dazu ist vielmehr nöthig, dass der Leser möglichst in denjenigen Zustand versetzt wird, in welchem der Entdecker der Wahrheit im günstigsten Falle sich befinden müsste. In demjenigen aber, der die Wahrheit auffindet, findet ein stetes sich besinnen über den Gang der Entwickelung statt; es bildet sich in ihm eine eigenthümliche Gedankenreihe über den Weg, den er einzuschlagen hat, und über die Idee, welche dem Ganzen zu Grunde liegt; und diese Gedankenreihe bildet den eigentlichen Kern und Geist seiner Thätigkeit, während die konsequente Auseinanderlegung der Wahrheiten nur die Verkörperung jener Idee ist.

Dem Leser nun zumuthen wollen, dass er, ohne zu solchen Gedanken-
XXXIV reihen angeleitet zu sein, dennoch auf | dem Wege der Entdeckung selbstständig fortschreiten sollte, heisst ihn über den Entdecker der Wahrheit selbst stellen, und somit das Verhältniss zwischen ihm und dem Verfasser umkehren, wobei dann die ganze Abfassung des Werkes als überflüssig erscheint. Daher haben denn auch neuere Mathematiker und namentlich die Franzosen angefangen, beide Entwickelungsreihen zu verweben. Das Anziehende, was dadurch ihre Werke bekommen haben, besteht eben darin, dass der Leser sich frei fühlt und nicht eingezwängt ist in Formen, denen er, weil er sie nicht beherrscht, knechtisch folgen muss.

Dass nun in der Mathematik diese Entwickelungsreihen am schärfsten aus einander treten, liegt in der Eigenthümlichkeit ihrer Methode (Nr. 13); da sie nämlich vom Besondern aus durch Verkettung fortschreitet, so ist die Einheit der Idee das letzte. Daher trägt die zweite Entwickelungsreihe einen ganz entgegengesetzten Charakter an sich wie die erste, und die Durchdringung beider erscheint schwieriger, wie in irgend einer andern Wissenschaft. Um dieser Schwierigkeit willen darf man aber doch nicht, wie es von den deutschen Mathematikern häufig geschieht, das ganze Verfahren aufgeben und verwerfen.

In dem vorliegenden Werke habe ich daher den angedeuteten Weg eingeschlagen, und es schien mir dies bei einer neuen Wissenschaft um so nothwendiger, als eben zugleich die Idee derselben zuerst ans Licht treten soll.

Uebersicht der allgemeinen Formenlehre.

§ 1. Begriff der Gleichheit.

Unter der allgemeinen Formenlehre verstehen wir diejenige Reihe 1 von Wahrheiten, welche sich auf alle Zweige der Mathematik auf gleiche Weise beziehen, und daher nur die allgemeinen Begriffe der Gleichheit und Verschiedenheit, der Verknüpfung und Sonderung voraussetzen. Es müsste daher die allgemeine Formenlehre allen speciellen Zweigen der Mathematik vorangehen *); da aber jener allgemeine Zweig noch nicht als solcher vorhanden ist, und wir ihn doch nicht, ohne uns in unnütze Weitläufigkeiten zu verwickeln, übergehen dürfen, so bleibt uns nichts übrig, als denselben hier so weit zu entwickeln, wie wir seiner für unsere Wissenschaft bedürfen.

Es ist hier zuerst der Begriff der Gleichheit und Verschiedenheit festzustellen.

Da das Gleiche nothwendig, auch schon damit nur die Zweiheit heraustritt, als Verschiedenes, und das Verschiedene auch als Gleiches erscheinen muss, nur in verschiedener Hinsicht **), so scheint es bei oberflächlicher Betrachtung nöthig, verschiedene Beziehungen der Gleichheit und Verschiedenheit aufzustellen; so würde zum Beispiel bei Vergleichung zweier begränzter Linien die Gleichheit der Richtung oder der Länge, oder der Richtung und Länge, oder der Richtung und Lage und so weiter ausgesagt werden können, und bei andern zu vergleichenden Dingen würden wieder andere Beziehungen der Gleichheit hervortreten. Aber schon dass diese Beziehungen | andere werden je nach *2* der Beschaffenheit der zu vergleichenden Dinge, liefert den Beweis dafür, dass diese Beziehungen nicht dem Begriff der Gleichheit selbst angehören, sondern den Gegenständen, auf welche derselbe Begriff der 2 Gleichheit angewandt wird. In der That von zwei gleich langen Strecken zum Beispiel können wir nicht sagen, dass sie an sich gleich sind, sondern nur, dass ihre Länge gleich sei, und diese Länge steht dann

*) S. Einl. Nr. 8.

**) Ebendas. Nr. 5.

eben auch in der vollkommenen Beziehung der Gleichheit. Somit haben wir dem Begriff der Gleichheit seine Einfachheit gerettet, und können denselben dahin bestimmen, *dass gleich dasjenige sei, von dem man stets dasselbe aussagen kann oder allgemeiner, was in jedem Urtheile sich gegenseitig substituirt werden kann*)*.

Wie hierin zugleich ausgesagt liegt, dass, wenn zwei Formen einer dritten gleich sind, sie auch selbst einander gleich sind, und dass das aus dem Gleichen auf dieselbe Weise erzeugte wieder gleich ist, liegt am Tage.

§ 2. **Begriff der Verknüpfung.**

Der zweite Gegensatz, den wir hier in Betracht zu ziehen haben, ist der der Verknüpfung und Sonderung. Wenn zwei Grössen oder Formen (welchen Namen wir als den allgemeineren vorziehen, s. Einl. 3) unter sich verknüpft sind, so heissen sie G l i e d e r der Verknüpfung, die Form, welche durch die Verknüpfung beider dargestellt wird, das E r g e b n i s s der Verknüpfung. Sollen beide Glieder unterschieden werden, so nennen wir das eine das V o r d e r g l i e d, das andere das H i n t e r g l i e d.

Als das allgemeine Zeichen der Verknüpfung wählen wir das Zeichen $\frown$; sind nun a und b die Glieder derselben, und zwar a das Vorderglied, b das Hinterglied, so bezeichnen wir das Ergebniss der Verknüpfung mit $(a \frown b)$; indem die Klammer hier ausdrücken soll, dass die Verknüpfung nicht mehr in der Trennung ihrer Glieder soll angeschaut werden, sondern als eine Einheit des Begriffs**). Das Ergebniss der Verknüpfung kann wieder mit andern Formen | verknüpft werden, und so gelangt man zu einer Verknüpfung mehrerer Glieder, welche aber zunächst immer nur als eine Verknüpfung je zweier erscheint. Der Bequemlichkeit wegen bedienen wir uns der üblichen abgekürzten Klammerbezeichnung, indem wir nämlich die zusammengehörigen Zeichen einer Klammer weglassen, wenn deren Oeffnungszeichen [(] entweder am Anfang des ganzen Ausdrucks steht, oder nach einem

---

*) Es soll dies keine philosophische Begriffsbestimmung sein, sondern nur eine Verständigung über das Wort, damit nicht etwa verschiedenes darunter verstanden werde. Die philosophische Begriffsbestimmung würde vielmehr den Gegensatz des Gleichen und Verschiedenen in seinem Fliessen und in seiner starren Abgränzung zu ergreifen haben, wozu noch ein nicht unbeträchtlicher Apparat von Begriffsbestimmungen erforderlich sein würde, der hier nicht hergehört.

**) Auf welche Weise nun diese Einheit bewirkt wird, und was dabei jedesmal an der Vorstellung des einzelnen Verknüpften aufgegeben wird, hängt von der Natur der jedesmaligen Verknüpfung ab.

andern Oeffnungszeichen folgen würde, zum Beispiel statt $((a \frown b) \frown c)$ schreiben wir $a \frown b \frown c$.

§ 3. Vereinbarkeit der Glieder.

Die besondere Art der Verknüpfung wird nun dadurch bestimmt, was bei derselben als Ergebniss festgehalten, das heisst unter welchen Umständen und in welcher Ausdehnung das Ergebniss als sich gleich bleibend gesetzt wird.

Die einzigen Veränderungen, welche man, ohne die einzelnen verknüpften Formen selbst zu ändern, vornehmen kann, ist Aenderung der Klammern und Umordnung der Glieder. Nehmen wir zuerst die Verknüpfung so an, dass bei drei Gliedern das Setzen der Klammern keinen realen Unterschied, das heisst keinen Unterschied des Ergebnisses begründet, also dass $a \frown (b \frown c) = a \frown b \frown c$ ist, so folgt zunächst, dass man auch in jeder mehrgliedrigen Verknüpfung dieser Art ohne ihr Ergebniss zu ändern, die Klammern weglassen kann. Denn jede Klammer schliesst vermöge der darüber festgesetzten Bestimmung zunächst einen zweigliedrigen Ausdruck ein, und dieser Ausdruck muss wieder als Glied verbunden sein mit einer andern Form, kurz es tritt eine Verbindung von drei Formen hervor, für welche wir voraussetzten, dass man die Klammer weglassen könne, ohne das Ergebniss ihrer Verknüpfung zu ändern; also wird auch, da man statt jeder Form die ihr gleiche setzen darf, das Gesammtergebniss durch das Weglassen jener Klammer nicht geändert. Also

Wenn eine Verknüpfung von der Art ist, dass bei drei Gliedern die Klammern weggelassen werden dürfen, so gilt dies auch bei beliebig vielen;

oder, da man in zwei Ausdrücken, welche sich nur durch das Setzen der Klammern unterscheiden, stets nach dem so eben | erwiesenen Satze die Klammern weglassen darf, so sind beide Ausdrücke, da sie demselben (klammerlosen) Ausdrucke gleich sind, auch unter sich gleich, und man hat den vorigen Satz in etwas allgemeinerer Form: 4

Wenn eine Verknüpfung von der Art ist, dass für drei Glieder die Art, wie die Klammern gesetzt werden, keinen realen Unterschied begründet, so gilt dasselbe auch für beliebig viele Glieder. 4

§ 4. Vertauschbarkeit der Glieder. Begriff der einfachen Verknüpfung.

Wäre auf der andern Seite für eine Verknüpfung nur die Vertauschbarkeit der beiden Glieder festgesetzt, so würde daraus keine andere Folgerung gezogen werden können. Kommt aber diese Bestim-

mung noch zu der im vorigen Paragraphen gemachten hinzu, so folgt, dass auch bei mehrgliedrigen Ausdrücken die Ordnung der Glieder für das Gesammtergebniss gleichgültig ist, indem man nämlich leicht zeigen kann, dass sich je zwei auf einander folgende Glieder vertauschen lassen.

In der That kann man nach dem zuletzt erwiesenen Satze (§ 3) zwei solche Glieder, deren Vertauschbarkeit man nachweisen will, in Klammern einschliessen ohne Aenderung des Gesammtergebnisses, ferner diese Glieder unter sich vertauschen, ohne das Ergebniss der aus ihnen gebildeten Verknüpfung zu ändern (wie wir soeben voraussetzten), also auch ohne das Ergebniss der ganzen Verknüpfung zu ändern (da man statt jeder Form die ihr gleiche setzen kann), und endlich können nun die Klammern wieder so gesetzt werden, wie sie zu Anfang waren. Somit ist die Vertauschbarkeit zweier einander folgender Glieder erwiesen. Da man nun aber durch Fortsetzung dieses Verfahrens jedes Glied auf jede beliebige Stelle bringen kann, so ist die Ordnung der Glieder überhaupt gleichgültig. Also dies Resultat zusammengefasst mit dem des vorigen Paragraphen:

Wenn eine Verknüpfung von der Art ist, dass man, ohne Aenderung des Ergebnisses, bei drei Gliedern die Klammern beliebig setzen, bei zweien die Ordnung verändern darf: so ist auch bei beliebig vielen Gliedern das Setzen der Klammern und die Ordnung der Glieder gleichgültig für das Ergebniss.

Wir werden der Kürze wegen eine solche Verknüpfung, für welche die angegebenen Bestimmungen gelten, eine einfache nennen. Eine noch
5 weiter gehende Bestimmung ist nun für die Art der | Verknüpfung, wenn man nicht auf die Natur der verknüpften Formen zurückgeht, nicht mehr möglich, und wir schreiten daher zur Auflösung der gewonnenen Verknüpfung, oder zum analytischen Verfahren.

§ 5. Die synthetische und die analytische Verknüpfung.

5 Das analytische Verfahren besteht darin, dass man zu dem Ergebniss der Verknüpfung und dem einen Gliede derselben das andere sucht. Es gehören daher zu einer Verknüpfung zwei analytische Verfahrungsarten, je nachdem nämlich deren Vorderglied oder Hinterglied gesucht wird; und beide Verfahrungsarten liefern nur dann ein gleiches Ergebniss, wenn die beiden Glieder der ursprünglichen Verknüpfung vertauschbar sind. Da auch dies analytische Verfahren als Verknüpfung kann aufgefasst werden, so unterscheiden wir die ursprüngliche oder *synthetische* Verknüpfung und die auflösende oder *analytische* Verknüpfung.

Im Folgenden werden wir nun zunächst die synthetische Verknüpfung in dem Sinne des vorigen Paragraphen als eine einfache voraussetzen und als Zeichen derselben das Zeichen $\frown$ beibehalten, für die entsprechende analytische Verknüpfung hingegen, da hier die beiden Arten derselben zusammenfallen, das umgekehrte Zeichen $\smile$ wählen, und zwar so, dass wir das Ergebniss der synthetischen Verknüpfung, was bei der analytischen gegeben ist, hier zum Vordergliede machen.

Sonach bezeichnet hier $a \smile b$ diejenige Form, welche mit b synthetisch verknüpft a giebt, so dass also allemal $a \smile b \frown b = a$ ist. Hierin liegt sogleich eingeschlossen, dass $a \smile b \smile c$ diejenige Form bedeutet, welche mit c und dann mit b synthetisch verknüpft a giebt, das heisst also auch nach § 4 diejenige Form, welche mit denselben Werthen in umgekehrter Folge, oder auch mit $b \frown c$ synthetisch verknüpft a giebt, das heisst

$$\begin{aligned} a \smile b \smile c &= a \smile c \smile b \\ &= a \smile (b \frown c); \end{aligned}$$

und da dieselbe Schlussfolge für beliebig viele Glieder gilt, so folgt, dass auch die Ordnung der Glieder, welche analytische Vorzeichen haben, gleichgültig ist, und [dass] man diese Glieder in eine Klammer schliessen darf, wenn man nur die in die Klammer rückenden Vorzeichen umkehrt. Hieraus nun folgt weiter, dass

$$a \smile (b \smile c) = a \smile b \frown c$$

sei. In der That hat man aus der Definition der analytischen Verknüpfung 6

$$a \smile (b \smile c) = a \smile (b \smile c) \smile c \frown c;$$

dieser Ausdruck ist wieder vermöge des soeben erwiesenen Gesetzes 6

$$= a \smile (b \smile c \frown c) \frown c,$$

und dies letztere ist endlich vermöge der Definition der analytischen Verknüpfung

$$= a \smile b \frown c,$$

also auch der erste Ausdruck dem letzten gleich. Drücken wir dies Resultat in Worten aus, und fassen wir es mit dem vorher gewonnenen Resultate zusammen, so erhalten wir den Satz:

Wenn die synthetische Verknüpfung eine einfache ist, so ist es für das Ergebniss gleichgültig, in welcher Ordnung man synthetisch oder analytisch verknüpft; auch darf man nach einem synthetischen Zeichen eine Klammer setzen oder weglassen, wenn dieselbe nur synthetische Glieder enthält, nach einem analytischen aber unter allen Umständen die Klammer setzen oder weglassen, sobald man nur in diesem Falle die Vorzeichen innerhalb der

Klammer umkehrt, das heisst das analytische Zeichen in ein synthetisches verwandelt und umgekehrt.

Dies ist das allgemeinste Resultat, zu dem wir bei den angenommenen Voraussetzungen gelangen können. Hingegen geht aus denselben nicht hervor, dass man eine Klammer, welche ein analytisches Zeichen einschliesst und ein synthetisches vor sich hat, weglassen könne. Vielmehr muss dazu erst eine neue Voraussetzung gemacht werden.

§ 6. Eindeutigkeit der Analyse; Addition und Subtraktion.

Die neue Voraussetzung, die wir hinzufügen, ist die, dass das Ergebniss der analytischen Verknüpfung eindeutig sei, oder mit andern Worten, dass, wenn das eine Glied der synthetischen Verknüpfung unverändert bleibt, das andere aber sich ändert, dann auch jedesmal das Ergebniss sich ändere. Hieraus ergiebt sich zunächst, dass

$$a \frown b \smile b = a$$

ist; denn $a \frown b \smile b$ bedeutet die Form, die mit b synthetisch verknüpft $a \frown b$ giebt. Nun ist a eine solche Form und vermöge der Eindeutig-
7 keit des Resultats die einzige, also die Geltung der | obigen Gleichung erwiesen. Hieraus wiederum geht hervor, dass

$$a \frown (b \smile c) = a \frown b \smile c$$

7 ist. Um nämlich den zweiten Ausdruck auf den ersten zu bringen, kann man in ihm statt b setzen $((b \smile c) \frown c)$ und erhält

$$a \frown b \smile c = a \frown ((b \smile c) \frown c) \smile c;$$

dies ist nach § 4

$$= a \frown (b \smile c) \frown c \smile c,$$

und dies wieder nach dem soeben erwiesenen Satze

$$= a \frown (b \smile c),$$

also ist auch der erste Ausdruck dem letzten gleich; da man nun diese Schlüsse wiederholen kann, wenn mehrere Glieder in der Klammer vorkommen, so hat man den Satz:

Wenn die synthetische Verknüpfung eine einfache, und die entsprechende analytische eine eindeutige ist, so kann man nach einem synthetischen Zeichen die Klammer beliebig setzen oder weglassen. Wir nennen dann (wenn jene Eindeutigkeit auf allgemeine Weise stattfindet) die synthetische Verknüpfung Addition, und die entsprechende analytische Subtraktion.

Was die Ordnung der Glieder betrifft, so folgt, dass $a \frown b \smile c = a \smile c \frown b$ ist; denn $a \frown b \smile c = b \frown a \smile c = b \frown (a \smile c) = a \smile c \frown b$; so dass wir also auch die Vertauschbarkeit zweier Glieder, deren eins ein synthetisches, das andere ein analytisches Vorzeichen hat, nachgewiesen haben, so-

bald die Eindeutigkeit des analytischen Ergebnisses vorausgesetzt ist. Und nur unter dieser Voraussetzung gelten die Sätze dieses Paragraphen, während die des vorigen auch dann noch gelten, wenn das Ergebniss der analytischen Verknüpfung vieldeutig ist*)**).

§ 7. Die indifferente und die analytische Form.

8
8

Durch das analytische Verfahren gelangt man zur indifferenten und zur analytischen Form.

Die erstere erhält man durch die analytische Verknüpfung zweier gleicher Formen, also $a \smile a$ stellt die *indifferente* Form dar, und zwar ist dieselbe unabhängig von dem Werthe a. In der That ist $a \smile a = b \smile b$; denn $b \smile b$ stellt die Form dar, welche mit b synthetisch verknüpft b giebt, eine solche Form ist $a \smile a$, da $b \frown (a \smile a) = b \frown a \smile a = b$ ist. In dem Umfange nun, in welchem zugleich das Ergebniss der analytischen Verknüpfung eindeutig ist, muss daher auch $a \smile a$ gleich $b \smile b$ gesetzt werden. Da somit die indifferente Form unter der gemachten Voraussetzung immer nur Einen Werth darstellt, so ergiebt sich daraus die Nothwendigkeit, sie durch ein eigenes Zeichen zu fixiren. Wir wählen dazu für den Augenblick das Zeichen $\backsim$, und bezeichnen die Form $(\backsim \smile a)$ mit $(\smile a)$, und nennen $(\smile a)$ die *rein analytische* Form, und zwar, wenn die synthetische Verknüpfung die Addition war, die *negative* Form. Dass $(a \frown \backsim)$ und $(a \smile \backsim)$ gleich a, dass ferner $\frown (\smile a)$ gleich $\smile a$, und $\smile (\smile a)$ gleich $\frown a$ ist, ergiebt sich direkt, indem man

---

*) Beispiele einer solchen Vieldeutigkeit liefert nicht bloss, wie sich später zeigen wird, die Ausdehnungslehre in reichlicher Menge, sondern auch die Arithmetik bietet sie dar, und es ist daher die festgesetzte Unterscheidung auch für sie wichtig. Nämlich als einfache Verknüpfungen zeigen sich Addition und Multiplikation; und während die Subtraktion immer eindeutig ist, so ist es die Division nur, so lange die Null nicht als Divisor erscheint; deshalb gelten für die Division nur die Sätze des vorigen Paragraphen allgemein, während die Sätze dieses Paragraphen nur mit der Beschränkung gelten, dass die Null nicht als Divisor erscheint. Aus der Nichtbeachtung dieses Umstandes müssen die ärgsten Widersprüche und Verwirrungen hervorgehen, wie es auch zum Theil geschehen ist.

**) Ein späterhin angestellter Versuch, die Gesetze für die Verknüpfung mehrdeutiger Grössen aufzustellen, hat mich zu der Ueberzeugung geführt, dass man überall die mehrdeutigen Grössen zuerst in eindeutige verwandeln muss, ehe man überhaupt auf sie irgend ein Verknüpfungsgesetz anwenden kann. Ich habe dieser Ueberzeugung in meiner Ausdehnungslehre von 1862 in den Anmerkungen zu Nr. 348 und zu Nr. 477 Ausdruck verliehen, und zugleich an ersterer Stelle gezeigt, wie man die mehrdeutigen Grössen in eindeutige verwandeln kann. Auch meiner Arithmetik (Stettin 1860. Druck und Verlag von R. Grassmann) [seit 1861 auch bei Enslin in Berlin] liegt diese Ueberzeugung zu Grunde. (1877.)

nur die soeben dargestellten vollständigen Ausdrücke diesen Formen zu substituiren hat, um sogleich die Richtigkeit dieser Gleichungen zu übersehen*). Die analytische Form zur Addition nannten wir 9 ins Besondere die negative | Form, und die indifferente in Bezug auf die Addition und Subtraktion nennen wir *Null*.

§ 8. Addition und Subtraktion gleichartiger Formen.

Wir haben bisher den Begriff der Addition rein formell gefasst, 9 indem wir ihn durch das Gelten gewisser Verknüpfungsgesetze | bestimmten. Dieser formelle Begriff bleibt auch immer der einzige allgemeine. Doch ist dies nicht die Art, wie wir in den einzelnen Zweigen der Mathematik zu diesem Begriffe gelangen. Vielmehr ergiebt sich in ihnen aus der Erzeugung der Grössen selbst eine eigenthümliche Verknüpfungsweise, welche sich dann dadurch, dass jene formellen Gesetze auf sie anwendbar sind, als Addition in dem eben angegebenen allgemeinen Sinne darstellt.

Betrachten wir nämlich zwei Grössen (Formen), welche durch Fortsetzung derselben Erzeugungsweise hervorgehen, und welche wir „in gleichem Sinne erzeugt" nennen, so ist klar, wie man beide so an einander reihen kann, dass beide Ein Ganzes ausmachen, indem ihr beiderseitiger Inhalt, das heisst die Theile, welche beide enthalten, in eins zusammengedacht werden, und dies Ganze dann mit jenen beiden Grössen gleichfalls in gleichem Sinne erzeugt gedacht wird. Nun ist leicht zu zeigen, dass diese Verknüpfung eine Addition ist, das heisst dass sie eine einfache, und ihre Analyse eine eindeutige ist. Zuerst kann ich beliebig zusammenfassen und beliebig vertauschen, weil die Theile, welche zusammengedacht werden, dabei dieselben bleiben, und ihre Folge nichts ändern kann, da sie alle gleich sind (als durch gleiche

*) Es ist ein vergebliches Unternehmen, wenn man zum Beispiel bei der Addition und Subtraktion in der Arithmetik, nachdem man die hierher gehörenden Gesetze für positive Zahlen nachgewiesen hat, sie hinterher noch besonders für negative Zahlen beweisen will. Indem man nämlich die negative Zahl als solche definirt, die zu a addirt Null giebt, so meint man hier mit dem Addiren (indem der Begriff desselben zunächst nur für positive Zahlen aufgestellt ist) entweder dieselbe Verknüpfungsweise, für welche die Grundgesetze, die den allgemeinen Begriff der Addition bestimmen, gelten, oder eine andere. Im ersteren Falle ist der Nachweis unnöthig, da die weiteren Gesetze dann für die negativen Zahlen schon mit bewiesen sind; im letzteren Falle ist er unmöglich, wenn der Begriff der Addition solcher Zahlen nicht etwa noch anderweitig bestimmt werden sollte. Eben so verhält es sich mit den Brüchen im Gegensatze gegen die ganzen Zahlen.

Erzeugungen entstanden); aber es ist auch ihre Analyse eindeutig; denn wäre dies nicht der Fall, so müsste bei der synthetischen Verknüpfung, während das eine Glied und das Ergebniss dasselbe bliebe, das andere Glied verschiedene Werthe annehmen können; von diesen Werthen müsste dann der eine grösser sein als der andere; also müssten dann zu dem letzteren noch Theile hinzukommen; aber dann würden auch zu dem Ergebnisse dieselben Theile hinzukommen, das Ergebniss also ein anderes werden, wider die Voraussetzung. Also da auch die entsprechende analytische Verknüpfung eindeutig ist, | so ist die syn- 10 thetische Verknüpfung als Addition aufzufassen, die entsprechende analytische als Subtraktion, und es gelten demnach für diese Verknüpfungen alle in §§ 3—7 aufgestellten Gesetze. Es ergab sich dort, dass die Gesetze dieser Verknüpfungen auch dann unverändert bestehen bleiben, wenn die Glieder negativ werden. Vergleichen wir die negativen Grössen mit den positiven, so können wir sagen, sie seien im entgegengesetzten Sinne erzeugt; und sowohl die in gleichem als die in entgegengesetztem | Sinne erzeugten Grössen können wir unter *10* dem Namen gleichartiger Grössen zusammenfassen, und also ist auf diese Weise der reale Begriff der Addition und Subtraktion für gleichartige Grössen überhaupt bestimmt.

§ 9. Verknüpfungen verschiedener Stufen, Multiplikation.

Wir haben bisher nur Eine synthetische Verknüpfungsart für sich und in ihrem Verhältnisse zur entsprechenden analytischen betrachtet. Es kommt jetzt darauf an, die Beziehung zweier verschiedener synthetischer Verknüpfungsarten darzulegen. Zu dem Ende muss die eine durch die andere ihrem Begriffe nach bestimmt sein. Diese Begriffsbestimmung hängt von der Art ab, wie ein Ausdruck, welcher beide Verknüpfungsweisen enthält, ohne Aenderung des Gesammtergebnisses umgestaltet werden kann.

Die einfachste Art, wie in einem Ausdrucke beide Verknüpfungen vorkommen können, ist die, dass das Ergebniss der einen Verknüpfung der zweiten unterworfen wird; also wenn $\frown$ und $\approx$ die Zeichen der beiden Verknüpfungen sind, so hängt das Verhältniss beider von den Umgestaltungen ab, welche mit dem Ausdruck $(a \frown b) \approx c$ vorgenommen werden dürfen. Wenn sich die zweite Verknüpfung auf beide Glieder der ersten gleichmässig beziehen soll, so bietet sich als die einfachste Umgestaltung die dar, dass man jedes Glied der ersten Verknüpfung der zweiten unterwerfen, und dann diese einzelnen Ergebnisse als Glieder der ersten Verknüpfungsweise setzen könne. Wenn diese Um-

gestaltung ohne Aenderung des Gesammtergebnisses vorgenommen werden kann, das heisst also

$$(a \frown b) \asymp c = (a \asymp c) \frown (b \asymp c)$$

ist, so nennen wir die zweite Verknüpfung die jener ersten entsprechende *Verknüpfung nächst höherer Stufe.*

Sind ins besondere bei dieser zweiten Verknüpfung beide Glieder auf gleiche Weise abhängig von der ersten, so dass also jene Bestimmung sowohl für das Hinterglied der neuen Verbindung gilt, wie für
11 deren Vorderglied, und ist ferner die erstere Verknüpfung eine einfache, und ihre entsprechende analytische eine eindeutige, so nennen wir die letztere *Multiplikation,* während wir für die erstere schon oben den Namen der *Addition* festgesetzt hatten. Es ist dies überhaupt die Art, wie von vorne herein, das heisst wenn noch keine Verknüpfungsart gegeben ist, eine solche nebst der sich daran anschliessenden höheren bestimmt werden kann. Daher betrachten wir auch die Addition als
11 die Verknüpfung erster Stufe, | die Multiplikation also als die Verknüpfung zweiter Stufe*).

Wir wählen von nun an statt der allgemeinen Verknüpfungszeichen die bestimmten für diese Verknüpfungsarten üblichen, und zwar wählen wir für die Multiplikation das blosse Aneinanderschreiben.

§ 10. Allgemeine Gesetze der Multiplikation.

Die Beziehung der Multiplikation zur Addition haben wir dahin bestimmt, dass

$$(a + b)\, c = ac + bc$$
$$c\, (a + b) = ca + cb$$

ist; und dadurch war uns der Begriff der Multiplikation festgestellt. Durch wiederholte Anwendung dieses Grundgesetzes gelangt man sogleich zu dem allgemeineren Satze, dass man, wenn beide Faktoren zerstückt sind, jedes Stück des einen mit jedem Stück des andern multipliciren und die Produkte addiren kann. Hieraus ergiebt sich für die Beziehung der Multiplikation zur Subtraktion ein entsprechendes Gesetz, nämlich zunächst, dass

$$(a - b)\, c = ac - bc$$

*) Als dritte Stufe würde sich nach demselben Prinzip das Potenziren darstellen, was wir hier aber der Kürze wegen übergehen. Dass übrigens die Begriffsbestimmung für diese Verknüpfungen hier nur eine formelle sein, und erst in den einzelnen Wissenschaften durch Realdefinitionen verkörpert werden kann, liegt in der Natur der Sache.

ist. Nämlich setzt man, um den zweiten Ausdruck auf den ersten zurückzuführen, in demselben statt a das ihm Gleiche $(a - b) + b$, so hat man

$$ac - bc = ((a - b) + b)\, c - bc;$$

der Ausdruck rechts ist hier nach dem soeben aufgestellten Gesetze

$$= (a - b)\, c + bc - bc,$$

und dieser Ausdruck nach § 6

$$= (a - b)\, c,$$

also der erste Ausdruck dem letzten gleich. Auf gleiche Weise folgt, 12 wenn der zweite Faktor eine Differenz ist, das entsprechende Gesetz. Durch wiederholte Anwendung dieser Gesetze gelangt man zu dem allgemeineren Satze:

Wenn die Faktoren eines Produktes durch Addition und Subtraktion gegliedert sind, so kann man ohne Aenderung des Gesammtergebnisses jedes Glied des einen mit jedem Gliede des andern multipliciren, und die so erhaltenen Produkte | durch vorgesetzte Additions- und Subtraktions- 12 *zeichen verknüpfen, je nachdem die Vorzeichen ihrer Faktoren gleich oder ungleich waren.*

§ 11. Gesetze der Division.

Für die Division gilt ganz allgemein, mag nun ihr Resultat eindeutig oder vieldeutig*) sein, das Gesetz der Zerstückung des Dividend, nämlich

$$\frac{a \mp b}{c} = \frac{a}{c} \mp \frac{b}{c},$$

wobei wir aber noch zu merken haben, dass, da für die Multiplikation im Allgemeinen nicht Vertauschbarkeit der Faktoren angenommen wurde, auch im Allgemeinen zwei Arten der Division unterschieden werden müssen, je nachdem nämlich das Vorderglied oder das Hinterglied der multiplikativen Verknüpfung gesucht wird. Da indessen beide Faktoren eine gleiche Beziehung zur Addition und Subtraktion haben, so wird dies auch von beiden Arten der Division gelten; und wenn das obige Gesetz für eine Art erwiesen ist, so wird es aus denselben Gründen auch für die andere erwiesen sein.

Wir wollen annehmen, es sei das Vorderglied gesucht; also wenn zum Beispiel

$$\frac{a}{.c} = x \text{ ist}^{**}), \text{ so sei } xc = a.$$

*) Vergleiche die Anmerkungen zu S. 39 und die Ausdehnungslehre von 1862 Nr. 377 bis 391. (1877.)

**) Wo der Punkt im Divisor die Stelle des gesuchten Faktors bezeichnet.

Es bedeutet $\frac{a+b}{.c}$ hiernach diejenige Form, die als Vorderglied mit c multiplicirt $a+b$ giebt. Ich kann zuerst jede Form in zwei Stücke 13 sondern, deren eins willkührlich angenommen werden kann. | Es sei daher die gesuchte mit $\frac{a+b}{.c}$ gleichgesetzte Form $=\frac{a}{.c}+x$. Diese nun als Vorderglied mit c multiplicirt, giebt nach dem vorigen Paragraphen $a+xc$; sie soll aber bei dieser Multiplikation $a+b$ geben, folglich ist

$$a+xc=a+b,$$

das heisst

$$xc=b, \quad x=\frac{b}{.c}$$

also die gesuchte Form, da sie gleich $\frac{a}{.c}+x$ gesetzt war, gleich

$$\frac{a}{.c}+\frac{b}{.c}.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich das Gesetz für die Differenz.

§ 12. Realer Begriff der Multiplikation.

13 Die in den vorigen Paragraphen dargestellten Gesetze drücken die allgemeine Beziehung der Multiplikation und Division zur Addition und Subtraktion aus. Hingegen die Gesetze der Multiplikation an sich, wie sie die Arithmetik aufstellt, und welche die Vertauschbarkeit und Vereinbarkeit der Faktoren aussagen, gehen nicht aus dieser allgemeinen Beziehung hervor, und sind daher auch nicht durch den allgemeinen Begriff der Multiplikation bestimmt. Vielmehr werden wir in unserer Wissenschaft Arten der Multiplikation kennen lernen, bei denen wenigstens die Vertauschbarkeit der Faktoren nicht stattfindet, bei denen aber dennoch alle bisher aufgestellten Sätze ihre volle Anwendung haben.

Auch den allgemeinen Begriff dieser Multiplikation haben wir somit formell bestimmt; diesem formellen Begriffe muss, wenn die Natur der zu verknüpfenden Grössen gegeben ist, ein realer Begriff entsprechen, welcher die Erzeugungsweise des Produktes vermittelst der Faktoren aussagt. Die Beziehung zur realen Addition liefert uns eine allgemeine Bestimmung dieser Erzeugungsweise; wird nämlich einer der Faktoren als Summe seiner Theile (nach § 8) aufgefasst, so muss man nach dem allgemeinen Beziehungsgesetz, statt die Summe der Produkt-bildenden Erzeugungsweise zu unterwerfen, die Theile derselben unterwerfen können, und die so gebildeten Produkte addiren,

das heisst, da diese Produkte wieder als in gleichem Sinne erzeugt sich darstellen, sie als Theile zu einem Ganzen verknüpfen können; das heisst die multiplikative Erzeugungsweise muss von der Art sein, dass die Theile der Faktoren auf gleiche Weise in sie eingehen, so nämlich, dass wenn ein Theil | des einen mit einem Theil des andern 14 multiplikativ verknüpft irgend eine Grösse erzeugt, dann bei der multiplikativen Verknüpfung der Ganzen, auch jeder Theil des ersten mit jedem Theil des andern eine solche Grösse und zwar dieselbe Grösse erzeugt, wenn diese Theile den zuerst angenommenen gleich sind. Und es leuchtet sogleich ein, dass wenn die Erzeugungsweise die angegebene Beschaffenheit hat, auch die ihr entsprechende Verknüpfungsweise zur Addition des Gleichartigen die multiplikative Beziehung hat, und für sie somit alle Gesetze dieser Beziehung gelten.

Wir nennen daher eine solche Verknüpfungsweise auch schon dann, wenn nur erst ihre multiplikative Beziehung zur Addition des Gleichartigen | nachgewiesen, oder mit andern Worten, das gleiche Eingehen aller Theile der Verknüpfungsglieder in die Verknüpfung in dem oben angegebenen Sinne festgestellt ist, eine *Multiplikation*. *14*

Die bisher dargestellten allgemeinen Verknüpfungsgesetze genügen im Wesentlichen für die Darstellung unserer Wissenschaft und wir gehen daher zu dieser über.

Erster Abschnitt.

Die Ausdehnungsgrösse.

Erstes Kapitel.

Addition und Subtraktion der einfachen Ausdehnungen erster Stufe oder der Strecken.

A. Theoretische Entwickelung.

§ 13, 14. Das Ausdehnungsgebilde, die Strecke und das System erster Stufe.

§ 13.

15
15
Der rein wissenschaftliche Weg, die Ausdehnungslehre zu behandeln, würde der sein, dass wir nach der Art, wie es in der Einleitung versucht ist, von den Begriffen aus, welche dieser Wissenschaft zu Grunde liegen, alles einzelne entwickelten. Allein um den Leser nicht durch fortgesetzte Abstraktionen zu ermüden, und um ihn zugleich dadurch, dass wir an Bekanntes anknüpfen, in den Stand zu setzen, sich mit grösserer Freiheit und Selbständigkeit zu bewegen, knüpfe ich überall bei der Ableitung neuer Begriffe an die Geometrie an, deren Basis unsere Wissenschaft bildet. Indem ich aber bei der Ableitung der Wahrheiten, welche den Inhalt dieser Wissenschaft bilden, jedesmal den abstrakten Begriff zu Grunde lege, ohne mich dabei je auf irgend eine in der Geometrie bewiesene Wahrheit zu stützen, so erhalte ich dennoch die Wissenschaft ihrem Inhalte nach gänzlich rein und unabhängig von der Geometrie*).

---

*) In der Einleitung (Nr. 16) habe ich gezeigt, wie bei der Darstellung einer jeden Wissenschaft und ins besondere der mathematischen, zwei Entwickelungsreihen in einander greifen, von denen die eine den Stoff liefert, das heisst die ganze Reihe der Wahrheiten, welche den eigentlichen Inhalt der Wissenschaft bildet,

Um die Ausdehnungsgrösse zu gewinnen, || knüpfe ich daher an *16* 16
die Erzeugung der Linie an. Hier ist es ein erzeugender Punkt, welcher verschiedene Lagen in stetiger Folge annimmt; und die Gesammtheit der Punkte, in welche der erzeugende Punkt bei dieser Veränderung übergeht, bildet die Linie. Die Punkte einer Linie erscheinen somit wesentlich als verschiedene, und werden auch als solche bezeichnet (mit verschiedenen Buchstaben); wie aber dem Verschiedenen immer zugleich das Gleiche (obwohl in einem untergeordneten Sinne) anhaftet, so erscheinen auch hier die verschiedenen Punkte als verschiedene Lagen eines und desselben erzeugenden Punktes. Auf gleiche Weise nun gelangen wir in unserer Wissenschaft zu der Ausdehnung, wenn wir nur statt der dort eintretenden räumlichen Beziehungen hier die entsprechenden begrifflichen setzen.

Zuerst statt des Punktes, das heisst des besonderen Ortes, setzen wir hier das *Element*, worunter wir das Besondere schlechthin, aufgefasst als verschiedenes von anderem Besonderen verstehen; und zwar legen wir dem Elemente in der abstrakten Wissenschaft gar keinen andern Inhalt bei; es kann daher hier gar nicht davon die Rede sein, was für ein Besonderes dies denn eigentlich sei — denn es ist eben das Besondere schlechthin, ohne allen realen Inhalt —, oder in welcher Beziehung das eine von dem andern verschieden sei — denn es ist eben schlechtweg als Verschiedenes bestimmt, ohne dass irgend ein realer Inhalt, in Bezug auf welchen es verschieden sei, gesetzt wäre. Dieser Begriff des Elementes ist unserer Wissenschaft gemeinschaftlich mit der Kombinationslehre, und daher auch die Bezeichnung der Elemente (durch verschiedene Buchstaben) beiden gemeinschaftlich*). Die verschiedenen Elemente können nun zugleich als verschiedene Zustände desselben erzeugenden Elementes aufgefasst werden, und diese abstrakte Verschiedenheit der Zustände ist es, welche der Ortsverschiedenheit entspricht.

Den Uebergang des erzeugenden Elementes aus | einem Zustande *17* 17
in einen andern nennen wir eine *Aenderung* desselben; und diese abstrakte Aenderung des erzeugenden Elementes entspricht also der Ortsänderung oder Bewegung des Punktes in der Geometrie. Wie nun in

während die andere dem Leser die Herrschaft über den Stoff geben soll. Jene erste Entwickelungsreihe nun ist es, welche ich gänzlich unabhängig von der Geometrie erhalten habe, während ich mir bei der letzten meinem Zwecke gemäss die grösste Freiheit gestattet habe.

*) Die Differenz liegt nur in der Art, wie in beiden Wissenschaften aus dem Elemente die Formen gewonnen werden, in der Kombinationslehre nämlich durch blosses Verknüpfen, also diskret, hier aber durch stetiges Erzeugen.

der Geometrie durch die Fortbewegung eines Punktes zunächst eine Linie entsteht, und erst, indem man das gewonnene Gebilde aufs neue der Bewegung unterwirft, räumliche Gebilde höherer Stufen entstehen können, so entsteht auch in unsrer Wissenschaft durch stetige Aenderung des erzeugenden Elementes zunächst das Ausdehnungsgebilde erster Stufe. Die Resultate der bisherigen Entwickelung zusammenfassend, können wir die Definition aufstellen:

Unter einem Ausdehnungsgebilde erster Stufe verstehen wir die Gesammtheit der Elemente, in die ein erzeugendes Element bei stetiger Aenderung übergeht,

und insbesondere nennen wir das erzeugende Element in seinem ersten Zustande das Anfangselement, in seinem letzten das Endelement.

Aus diesem Begriffe ergiebt sich sogleich, dass zu jedem Ausdehnungsgebilde ein entgegengesetztes gehört, welches dieselben Elemente enthält, aber in umgekehrter Entstehungsweise, so dass also namentlich das Anfangselement des einen das Endelement des andern wird. Oder, bestimmter ausgedrückt, wenn durch eine Aenderung aus a b wird, so ist die entgegengesetzte die, durch welche aus b a wird, und das einem Ausdehnungsgebilde entgegengesetzte ist dasjenige, welches durch die entgegengesetzten Aenderungen in umgekehrter Folge hervorgeht, worin zugleich liegt, dass das Entgegengesetztsein ein wechselseitiges ist.

§ 14.

Das Ausdehnungsgebilde wird nur dann als ein einfaches erscheinen, wenn die Aenderungen, die das erzeugende Element erleidet, stets einander gleich gesetzt werden; so dass also, wenn durch eine Aenderung aus einem Element a ein anderes b hervorgeht, welche beide jenem einfachen Ausdehnungsgebilde angehören, dann durch eine gleiche Aenderung aus b ein Element c desselben Ausdehnungsgebildes erzeugt wird, und zwar wird diese Gleichheit auch dann noch stattfinden müssen, wenn a und b als stetig aneinandergränzende Elemente aufgefasst werden, da diese Gleichheit durchweg bei der stetigen Er-
18 zeugung stattfinden | soll. Wir können eine solche Aenderung, durch
18 die aus einem Element | einer stetigen Form ein nächst angränzendes erzeugt wird, eine Grundänderung nennen, und werden dann sagen: „das einfache Ausdehnungsgebilde sei ein solches, das durch stetige Fortsetzung derselben Grundänderung hervorgeht."

In demselben Sinne nun, in welchem die Aenderungen einander **gleich** gesetzt werden, werden wir auch die dadurch erzeugten Gebilde **gleich** setzen können, und in diesem Sinne, dass nämlich das durch

gleiche Aenderungen auf dieselbe Weise Erzeugte selbst gleich gesetzt werde, nennen wir das einfache Ausdehnungsgebilde erster Stufe eine Ausdehnungsgrösse oder Ausdehnung erster Stufe oder eine Strecke*). Es wird also das einfache Ausdehnungsgebilde zur Ausdehnungsgrösse, wenn wir von den Elementen, die das erstere enthält, absehen, und nur die Art der Erzeugung festhalten; und während zwei Ausdehnungsgebilde nur dann einander gleich gesetzt werden können, wenn sie dieselben Elemente enthalten, so zwei Ausdehnungsgrössen schon dann, wenn sie, auch ohne dieselben Elemente zu enthalten, auf gleiche Weise (das heisst durch dieselben Aenderungen) erzeugt sind. Die Gesammtheit endlich aller Elemente, welche durch Fortsetzung derselben und der entgegengesetzten Grundänderung erzeugbar sind, nennen wir ein System**) (oder ein Gebiet) erster Stufe. Die demselben System erster Stufe angehörigen Strecken werden also alle durch Fortsetzung entweder derselben Grundänderung oder entgegengesetzter Grundänderungen erzeugt.

Ehe wir zur Verknüpfung der Strecken übergehen, wollen wir die im vorigen Paragraphen aufgestellten Begriffe durch Anwendung auf die Geometrie veranschaulichen. Die Gleichheit der Aenderungsweise wird hier durch Gleichheit der Richtung vertreten; als System erster Stufe stellt sich daher hier die unendliche gerade Linie dar, als einfache Ausdehnung erster Stufe die begränzte gerade Linie. Was dort gleichartig genannt wurde, erscheint hier als parallel, und der Parallelismus bietet gleichfalls seine zwei Seiten dar, als | Parallelismus in *19* demselben und in entgegengesetztem Sinne***). Den Namen der 19 Strecke können wir in entsprechendem Sinne für die Geometrie festhalten, und also unter gleichen Strecken hier solche begränzte Linien verstehen, welche gleiche Richtung und Länge haben.

§ 15. Addition und Subtraktion gleichartiger Strecken.

Wenn die stetige Erzeugung der Strecke mitten in ihrem Gange unterbrochen gedacht wird, um dann hernach wieder fortgesetzt zu

*) Die abstrakte Bedeutung dieser ursprünglich konkreten Benennung bedarf wohl keiner Rechtfertigung, da die Namen des Abstrakten ursprünglich alle konkrete Bedeutung haben.

**) Ich ziehe jetzt den Ausdruck „Gebiet“ dem Ausdruck „System“, welcher vielfach in anderem Sinne gebräuchlich ist, vor. (1877.)

***) Diese Unterscheidung ist für die Geometrie so wichtig, dass es nicht wenig zur Vereinfachung der geometrischen Sätze und Beweise beitragen würde, wenn man diesen Unterschied durch einfache Benennungen fixirte, wozu ich etwa die Ausdrücke „gleichläufig“ und „gegenläufig“ vorschlagen möchte.

werden, so erscheint die ganze Strecke als Verknüpfung zweier Strecken, welche sich stetig aneinanderschliessen, und von denen die eine als Fortsetzung der andern erscheint. Die beiden Strecken, welche die Glieder dieser Verknüpfung bilden, sind in demselben Sinne erzeugt (§ 8), und das Ergebniss der Verknüpfung ist die Strecke vom Anfangselemente der ersten zum Endelemente der letzten, wenn beide stetig an einander gelegt, das heisst so dargestellt sind, dass das Endelement der ersten zugleich das Anfangselement für die zweite ist. Bezeichnen wir vorläufig die Strecke vom Anfangselement α (vgl. Fig. 2) zum Endelement β mit $[\alpha\beta]$, und sind $[\alpha\beta]$ und $[\beta\gamma]$ in demselben Sinne erzeugt, so ist also $[\alpha\gamma]$ das Ergebniss der oben angezeigten Verknüpfung, wenn $[\alpha\beta]$ und $[\beta\gamma]$ die Glieder sind*)**).

Fig. 2.

α ——— β ——— γ

Wir haben schon oben (§ 8) nachgewiesen, dass diese Verknüpfung, da sie die Vereinigung der in gleichem Sinne erzeugten Grössen dar-
20 stellt, als Addition, ihre entsprechende analytische als | Subtraktion aufgefasst werden müsse, und daher alle Gesetze dieser Verknüpfungsarten für sie gelten. Wir haben hier nur noch die eigenthümliche Bedeutung nachzuweisen, welche die negative Grösse auf unserm Gebiete gewinnt.

Nämlich um zuerst die Bedeutung der Subtraktion uns anschaulicher zu machen, so können wir daraus, dass $[\alpha\beta] + [\beta\gamma] = [\alpha\gamma]$ ist,
20 sobald $[\alpha\beta]$ und $[\beta\gamma]$ in gleichem Sinne erzeugt sind, | den Schluss ziehen, dass eben so allgemein $[\alpha\beta] = [\alpha\gamma] - [\beta\gamma]$ ist (vgl. Fig. 2), das heisst also, wenn wir uns der in der Subtraktion üblichen Benennungen bedienen, „der Rest ist, wenn man Minuend und Subtrahend mit ihren Endelementen aufeinander legt, die Strecke vom Anfangselement des Minuend zu dem des Subtrahend.“

Setzt man in der letzten Formel α und β identisch, so erhält man

$$[\alpha\alpha] = [\alpha\gamma] - [\alpha\gamma]$$

---

*) Diese Bezeichnung der Strecke ist nur eine vorläufige, die wahre Bezeichnung derselben durch ihre Gränzelemente kann erst verstanden werden, wenn wir die Verknüpfung der Elemente werden kennen gelernt haben (siehe den zweiten Abschnitt § 99).

**) Die Bezeichnung $[\alpha\beta]$ ist in der Ausdehnungslehre von 1862 für das Produkt der beiden Elemente α und β gewählt, welches, wenn α und β Punkte sind, den Linientheil zwischen α und β darstellt, wovon sich die Strecke dadurch unterscheidet, dass in dieser nur Länge und Richtung, in jenem aber zugleich die Lage der unendlichen geraden Linie festgehalten wird, welcher der Linientheil angehört. Es ist also hier um so mehr daran festzuhalten, dass die Bezeichnung der Strecke durch $[\alpha\beta]$ nur ein vorläufiger Nothbehelf ist; die sachgemässe Bezeichnung $\beta - \alpha$ konnte nach dem Prinzip der Darstellung erst in § 99 gegeben werden. (1877.)

das heisst gleich Null. Ferner ist vermöge des Begriffs des Negativen*)

$$(-[\alpha\beta]) = 0 - [\alpha\beta] = [\beta\beta] - [\alpha\beta] = [\beta\alpha],$$

das heisst die Strecke $[\beta\alpha]$, welche einer andern $[\alpha\beta]$ ihrem Begriff nach (§ 13) entgegengesetzt ist, erscheint auch in ihrer Beziehung zur Addition und Subtraktion als die entgegengesetzte Grösse zu jener. Da nun endlich $a + (-b) = a - b$ ist, so hat man, wenn $\alpha\gamma$ und $\gamma\beta$ im entgegengesetzten Sinne erzeugt sind

$$[\alpha\gamma] + [\gamma\beta] = [\alpha\gamma] + (-[\beta\gamma]) = [\alpha\gamma] - [\beta\gamma] = [\alpha\beta],$$

das heisst, auch wenn die beiden Strecken im entgegengesetzten Sinne erzeugt sind, ist ihre Summe die Strecke vom Anfangselement der ersten zum Endelement der zweiten an sie stetig angelegten. Und wir können also, dies Resultat mit dem obigen zusammenfassend, sagen:

Wenn man zwei gleichartige Strecken stetig, das heisst so verknüpft, dass das Endelement der ersten Anfangselement der zweiten wird, so ist die Strecke vom Anfangselement der ersten zum Endelement der letzten die Summe beider;

und indem sie so als Summe bezeichnet ist, so soll darin ausgedrückt liegen, dass alle Gesetze der Addition und Subtraktion für diese Verknüpfungsweise gelten.

Noch will ich hieran eine Folgerung schliessen, die für die Weiterentwickelung fruchtreich ist, nämlich dass, wenn die Gränzelemente einer Strecke in demselben System sich beide um | eine gleiche Strecke ändern, dann die zwischen den neuen Gränzelementen liegende Strecke der ersteren gleich ist. In der That, es sei $[\alpha\beta]$ die ursprüngliche Strecke (vgl. Fig. 3) und $[\alpha\alpha'] = [\beta\beta']$, so ist zu zeigen, dass, wenn alle genannten Elemente demselben System angehören, $[\alpha'\beta'] = [\alpha\beta]$ sei. Es ist aber 21

Fig. 3.

$\alpha \quad \beta \quad \alpha' \quad \beta'$

$$[\alpha'\beta'] = [\alpha'\alpha] + [\alpha\beta] + [\beta\beta'],$$

nach der Definition | der Summe, und da 21

$$[\alpha'\alpha] = -[\alpha\alpha'] = -[\beta\beta']$$

ist, so heben sich $[\alpha'\alpha]$ und $[\beta\beta']$ bei der Addition, und es ist wirklich $[\alpha'\beta'] = [\alpha\beta]$.

§ 16. Systeme höherer Stufen.

Nehme ich nun, um zu den Verknüpfungen verschiedenartiger Strecken zu gelangen, zunächst zwei verschiedenartige Grundänderungen an, und lasse ein Element die erste Grundänderung (oder deren ent-

*) Vergleiche hier überall § 7.

gegengesetzte) beliebig fortsetzen und dann das so geänderte Element in der zweiten Aenderungsweise gleichfalls beliebig fortschreiten, so werde ich dadurch aus einem Element eine unendliche Menge neuer Elemente erzeugen können, und die Gesammtheit der so erzeugbaren Elemente nenne ich ein System zweiter Stufe. Nehme ich dann ferner eine dritte Grundänderung an, welche von jenem Anfangselemente aus nicht wieder zu einem Elemente dieses Systems zweiter Stufe führt, und welche ich deshalb als von jenen beiden ersten unabhängig bezeichne, und lasse ein beliebiges Element jenes Systems zweiter Stufe diese dritte Aenderung (oder deren entgegengesetzte) beliebig fortsetzen, so wird die Gesammtheit der so erzeugbaren Elemente ein System dritter Stufe bilden; und da dieser Erzeugungsweise dem Begriffe nach keine Schranke gesetzt ist, so werde ich auf diese Weise zu Systemen beliebig hoher Stufen fortschreiten können.

Hierbei ist es wichtig festzuhalten, dass alle auf diese Weise erzeugten Elemente nicht als anderweitig schon gegebene*) aufgefasst werden dürfen, sondern als ursprünglich erzeugt, und dass sie daher alle, sofern sie ursprünglich durch verschiedene Aenderungen erzeugt sind, auch ihrem Begriffe nach als verschiedene erscheinen. Dagegen ist wiederum klar, dass, nachdem die Elemente einmal erzeugt sind, sie von da ab als gegebene erscheinen, und [dass] über ihre Verschiedenheit oder Identität nicht anders entschieden werden kann, als wenn man auf die ursprüngliche Erzeugung zurückgeht.

22 Ehe ich nun zu unserer Aufgabe, nämlich zur Verknüpfung der verschiedenen Aenderungsweisen, übergehe, will ich der Anschauung durch geometrische Betrachtungen zu Hülfe kommen. Es ist nämlich klar, dass das System zweiter Stufe der Ebene entspricht, und die
22 Ebene dadurch erzeugt gedacht wird, dass alle | Punkte einer geraden Linie nach einer neuen in ihr nicht enthaltenen Richtung (oder nach der entgegengesetzten) sich fortbewegen, wobei dann eben die Gesammtheit der so erzeugbaren Punkte die unendliche Ebene bildet. Es erscheint somit die Ebene als eine Gesammtheit von Parallelen, welche alle eine gegebene Gerade durchschneiden; und es ist ersichtlich, dass, da diese Parallelen sich nicht schneiden, und auch die ursprüngliche Gerade nicht noch ein zweitesmal treffen, alle auf jene Weise erzeugten Punkte von einander verschieden sind und somit die Analogie eine vollständige ist. Ebenso gelangt man zu dem ganzen unendlichen Raume, als dem Systeme dritter Stufe, wenn man die Punkte der Ebene

*) Wie etwa in der Raumlehre alle Punkte schon durch den vorausgesetzten Raum ursprünglich gegeben sind.

nach einer neuen, nicht in der Ebene liegenden Richtung (oder der entgegengesetzten) fortbewegt; und weiter kann die Geometrie nicht fortschreiten, während die abstrakte Wissenschaft keine Gränze kennt.

§ 17—19. Addition und Subtraktion ungleichartiger Strecken.

§ 17.

Lasse ich nun, um zu unserer Aufgabe zurückzukehren, ein Element sich zuerst um eine Strecke a ändern, und dann das so geänderte Element um die Strecke b, so ist das Gesammtresultat beider Aenderungen zugleich als Resultat Einer Aenderung aufzufassen, welche die Verknüpfung jener beiden ersten ist, und welche, wenn beide Strecken gleichartig waren, als deren Summe erschien (§ 15). Hier können wir diese Verknüpfungsweise vorläufig mit dem allgemeinen Verknüpfungszeichen $\frown$ bezeichnen. Aus diesem Begriffe geht sogleich, da der Act des Zusammenfassens den Zustand des Elementes nicht ändert, das Gesetz hervor, dass

$$(a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c)$$

ist. Hingegen um auch zur Vertauschbarkeit der Glieder zu gelangen, ist noch eine Lücke in der Begriffsbestimmung auszufüllen.

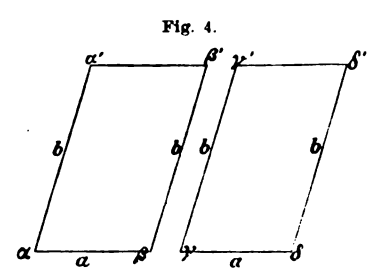
Betrachten wir nämlich die Erzeugungsweise eines Systems höherer (m-ter) Stufe, wie wir solche im vorigen Paragraphen dargestellt haben, so war dort eine bestimmte Reihenfolge der m Aenderungsweisen, durch die jenes System erzeugt wurde, angenommen, und die Elemente des Systems wurden erzeugt, wenn das Anfangselement die verschie- 23 denen Aenderungsweisen in der bestimmten Reihenfolge fortschreitend einging, so dass jedes Element, welches durch eine Reihe von Aenderungen entstanden war, nur entweder seine letzte Aenderung fortsetzte, oder eine der folgenden Aenderungsweisen, | aber keine der 23 früheren annahm. Sind daher a und b zwei Strecken, von denen a einer früheren, b einer späteren von den Aenderungsweisen angehört, so wird ein Element bei der Erzeugung des Systems zwar an die Aenderung a die Aenderung b anschliessen können, aber nicht umgekehrt; das heisst es wird dabei die Verknüpfung $a \frown b$ vorkommen, aber nicht die $b \frown a$. Aber obgleich die letztere Verknüpfung durch die Erzeugung des Systems nicht ihrem Begriffe nach bestimmt werden kann, so muss sie doch an sich möglich sein. Somit zeigt sich hier die besprochene Lücke.

Um dieselbe näher zu übersehen sei $[\alpha\beta]$ *) gleich a, $[\beta\beta'] = [\alpha\alpha'] = b$,

*) Zur Erläuterung kann Fig. 4 dienen [s. die nächste Seite].

so ist die Aenderung $[\alpha\beta']$ gleich $a \frown b$; es ist aber $[\alpha\beta']$ auch gleich $[\alpha\alpha'] \frown [\alpha'\beta']$, das heisst gleich $b \frown [\alpha'\beta']$. Sollten also die Glieder vertauschbar, das heisst $a \frown b = b \frown a$ sein, so müsste $[\alpha'\beta'] = [\alpha\beta]$ sein. Hierüber lässt sich nun aus dem Bisherigen nichts entscheiden; denn alles, was wir über das System und dessen Elemente aussagen können, muss, da das ganze System auf keine andere Weise, als nur durch seine Erzeugung gegeben ist, aus dieser Erzeugungsweise hervorgehen. Da nun aber in dieser nichts von einer solchen Aenderung $\alpha'\beta'$ vorkommt, so sind wir befugt und gedrungen, eine neue Begriffsbestimmung über solche Aenderungen zu geben, und die Analogie mit dem Früheren führt uns nothwendig dazu, in dem Umfange, in welchem wir zu einer neuen Begriffsbestimmung befugt sind, $\alpha'\beta'$ und $\alpha\beta$ gleich zu setzen. Diese Gleichsetzung vollziehen wir aber erst auf bestimmte Weise, wenn wir den Umfang jener Befugniss ausgemittelt haben.

Fig. 4.



Zu dem Ende betrachten wir zwei gleiche Strecken:

$$[\alpha\beta] = [\gamma\delta] = a,$$

deren Gränzelemente einer der späteren Aenderungen b, aber alle derselben unterworfen werden und dadurch in α', β', γ', δ' übergehen, so dass

$$[\alpha\alpha'] = [\beta\beta'] = [\gamma\gamma'] = [\delta\delta'] = b$$

24 ist. Da nun $[\alpha'\alpha] = [\gamma'\gamma] = (-b)$ ist, so hat man für die Aenderungen $[\alpha'\beta']$ und $[\gamma'\delta']$ die Gleichungen:

$$[\alpha'\beta'] = [\alpha'\alpha] \frown [\alpha\beta] \frown [\beta\beta'] = (-b) \frown a \frown b$$
$$[\gamma'\delta'] = [\gamma'\gamma] \frown [\gamma\delta] \frown [\delta\delta'] = (-b) \frown a \frown b;$$

24 also sind beide Aenderungen einander gleich. Also wenn zwei Elementenpaare durch gleiche Aenderung aus einander erzeugbar sind, und man unterwirft alle vier Elemente einer neuen, aber alle derselben Aenderung, so werden auch die daraus hervorgehenden Elementenpaare durch gleiche Aenderungen auseinander erzeugbar sein. Da nun dies Gesetz auch noch bestehen bleibt, wenn $[\alpha\beta]$ eine Grundänderung darstellt, so folgt hieraus nicht nur, dass eine Strecke, wenn sich ihre Elemente alle um gleich viel ändern, eine Strecke bleibt, sondern auch dass, wenn nur für die Grundänderung gezeigt ist, dass sie bei jener Fortschreitung der Strecke gleich bleibt, dasselbe dann auch für die ganze Strecke gilt.

Damit ist der Umfang der oben angedeuteten Befugniss gegeben,

und wir setzen daher fest, dass, wenn in einem Systeme m-ter Stufe eine Strecke, welche einer der früheren von den m Aenderungsweisen, die das System bestimmen, angehört, einer der späteren Aenderungsweisen unterworfen wird, und zwar alle Elemente derselben Aenderungsweise, dann die entsprechenden Grundänderungen in der ursprünglichen und der durch jene Aenderung entstandenen Strecke einander gleich genannt werden sollen, hingegen ungleich, wenn die Elemente verschiedenen Aenderungen unterworfen sind*). Daraus folgt dann, vermöge des vorhergehenden Satzes, dass diese Gleichheit (und Ungleichheit) unter denselben Umständen auch für die Strecken selbst fortbesteht; und wir gelangen also zu dem Satze: Wenn man eine Strecke, welche einer der m ursprünglichen Aenderungsweisen des Systems angehört, Aenderungen unterwirft, welche gleichfalls jenen Aenderungsweisen angehören, und zwar alle Elemente denselben Aenderungen, so ist die durch jene Aenderung entstandene Strecke der ursprünglichen | gleich. 25

Dass wir nämlich hier auch den Unterschied zwischen früheren und späteren Aenderungsweisen fallen lassen können, ergiebt sich leicht aus der Gegenseitigkeit der Beziehung; denn wenn vorausgesetzt wird, dass $[\alpha\beta]$ gleich oder ungleich $[\alpha'\beta']$ ist, je nachdem $[\alpha\alpha']$ gleich $[\beta\beta']$ ist oder nicht, so sind | auch umgekehrt die letzteren Ausdrücke gleich 25 oder ungleich, je nachdem die ersteren es sind, wie sogleich durch die Methode des indirekten Schlusses sich ergiebt. Wenn also die durch eine frühere Aenderung erzeugte Strecke, einer späteren Aenderung unterworfen, sich gleich bleibt, so bleibt auch die durch eine spätere erzeugte, der früheren unterworfen, sich gleich; und daraus folgt der Satz in der oben gegebenen Fassung.

Nun hatten wir schon oben gezeigt, dass unter Voraussetzung dieses Satzes $a \frown b = b \frown a$ sei; und wir haben somit für die m Aenderungsweisen, die das System bestimmen, allgemein die Gesetze

$$(a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c),$$

und

$$a \frown b = b \frown a;$$

also ist diese Verknüpfung eine einfache; aber auch die entsprechende analytische Verknüpfung eine eindeutige; denn, wenn ich das eine Glied der synthetischen Verknüpfung, etwa das erste, unverändert lasse, das andere aber verändere, indem ich entweder die Aenderungsweise, von der es erzeugt ist, durch eine neue ersetze, oder zwar die alte

*) Die Deduktion, durch die wir zu dieser Definition der gleichen Aenderung überleiteten, gehört derjenigen Entwickelungsreihe (Einleit. Nr. 16) an, die die Uebersicht geben soll. Für die rein mathematische Entwickelungsreihe erscheint dieselbe, wie überhaupt jede Definition, als rein willkührlich.

Aenderungsweise beibehalte, aber die Aenderung früher abbreche oder weiter fortführe als vorher, so verändert sich das zuletzt resultirende Element, welches zugleich das Endelement für das Ergebniss der Verknüpfung ist, also verändert sich dies Ergebniss; und hieraus folgt dann nach der bekannten Schlussweise (vgl. § 6) die Eindeutigkeit der analytischen Verknüpfung. Daraus ergiebt sich nach § 6, dass die angezeigten Verknüpfungen als Addition und Subtraktion zu bezeichnen sind, und [dass] alle Gesetze der Addition und Subtraktion für sie gelten. Da nun endlich dieselben Verknüpfungsgesetze, welche für die m ursprünglichen Aenderungsarten gelten, auch nach den Gesetzen der Addition und Subtraktion für deren Verknüpfungen bestehen bleiben, so können wir die Resultate der bisherigen Entwickelung in dem folgenden höchst einfachen Satze zusammenfassen:

Wenn $[\alpha\beta]$ und $[\beta\gamma]$ beliebige Aenderungen darstellen, so ist

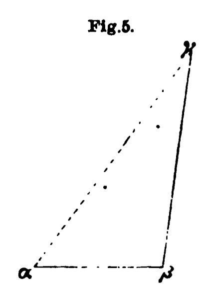
$$[\alpha\gamma] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma].$$

Indem wir nämlich diese Verknüpfung als Addition bezeichnen, so
26 sagen wir damit die Geltung aller | Additions- und Subtraktionsgesetze, wie wir sie in § 3—7 dargestellt haben, aus*).

§ 18.

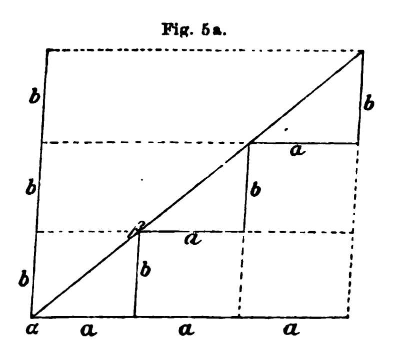
26 In der Entwickelung des letzten Paragraphen hatten wir die durch Verknüpfung hervorgehenden Aenderungen nur betrachtet in Bezug auf ihr Anfangs- und End-Element, ohne die Strecke zu betrachten, welche beide verbindet; vielmehr traten als Strecken nur diejenigen hervor, welche den ursprünglichen Aenderungsarten des Systems angehören. Um nun das Fehlende zu ergänzen, haben wir zu zeigen, auf welche Weise durch zwei Elemente in einem höheren Systeme die sämmtlichen übrigen Elemente bestimmt sind, welche mit diesen beiden in Einem Systeme erster Stufe liegen.

Zu dem Ende haben wir nur auf den Begriff des Systemes erster Stufe zurückzugehen, dass es nämlich durch Fortsetzung einer sich



*) Ich kann es nicht dringend genug anempfehlen, dass man die Entwickelung überall, und namentlich die hier geführte, welche zu den schwierigsten in unserer Wissenschaft gehört, durch die entsprechenden geometrischen Konstruktionen sich veranschauliche. Um den Gang der Entwickelung nicht zu unterbrechen, habe ich diese Uebertragung auf die Geometrie hier nicht vornehmen mögen; überdies liegt sie überall auf der Hand (s. Fig. 5).

selbst gleich bleibenden Aenderung erzeugt sei. Entsteht nun dadurch, dass ein Element nach der Reihe und fortschreitend den Aenderungen a, b, c ... unterworfen wird, welche den ursprünglichen Aenderungsweisen angehören, aus einem Elemente α zuletzt ein anderes β*), so wird nach dem Begriffe des Systemes erster Stufe auch dasjenige Element demselben Systeme erster Stufe angehören müssen, welches aus β durch dieselben Aenderungen a, b, c ... hervorgeht und so fort; ja auch rückwärts wird man von α aus durch die entgegengesetzten Aenderungen fortschreiten können und immer noch zu Elementen gelangen, die demselben System erster Stufe angehören, aber nach der negativen Seite hin liegen, wenn die erstere als die positive gefasst wird. Es entstehen also die Elemente der positiven Seite aus dem Element α dadurch, dass dies wiederholt und fortschreitend derselben Reihe der Aenderungen a, b, c ... unterworfen wird. Da wir nun, wie im vorigen Paragraphen bewiesen wurde, die fortschreitenden Aenderungen beliebig vertauschen und zusammenfassen können, so können wir auch hier die gleichen Aenderungen zusammenordnen und zusammenfassen, und gelangen so | zu einer neuen Konstruktion jener Elementenreihe, | die wir jetzt anschaulicher darlegen wollen. 27 27



Wenn man nämlich das Element α einzeln den m Aenderungen a, b, c ... unterwirft, so entstehen m Elemente, die wir einander entsprechend setzen können; wenn man jedes von diesen wieder derselben Aenderung unterwirft, die es vorher erfuhr, so erhält man m neue einander entsprechende Elemente, und so fort. Betrachten wir nun die entsprechenden Elemente einer jeden solchen Gruppe von m Elementen als Endelemente von m Strecken, welche alle α zum Anfangselemente haben, und welche wir gleichfalls einander entsprechend setzen, so erhalten wir dieselben Elemente, die wir vorher gewannen, wenn wir α um die entsprechenden Strecken einer jeden Gruppe fortschreitend ändern, und es entspricht auf diese Weise jeder solchen Gruppe von einander entsprechenden Elementen in dem neuen System erster Stufe ein Element, welches durch eine Aenderung hervorgeht, die die Summe ist aus den durch jene Strecken dargestellten Aenderungen. Sind nun

*) Vergleiche Fig. 5a, wo es für zwei Aenderungen a, b bildlich dargestellt ist.

bei den angegebenen Konstruktionen die Aenderungen a, b, c ... Grundänderungen, welche also unmittelbar von einem Elemente zum angränzenden überführen, so erhält man auch (wenn man dasselbe Verfahren zugleich nach der negativen Seite hin anwendet) das ganze System erster Stufe vollständig.

Es ist nun zu zeigen, dass man auf diese Weise durch zwei Elemente des höheren Systems allemal ein System erster Stufe legen kann, aber auch jedesmal nur eins.

Es seien α und β die beiden Elemente des Systems, so ist schon bei der Erzeugungsweise des Systems gezeigt, dass β aus α immer durch die m Aenderungsweisen des Systems und zwar bei gegebener Folge nur auf Eine Art erzeugbar ist; es seien a, b, c ... diese Aenderungen, so kommt es zunächst darauf an, zu zeigen, dass man für diese Strecken stets solche einander entsprechende Grundänderungen annehmen kann, dass a, b, c ... entsprechende Strecken werden, und also nach der soeben angegebenen Konstruktion β ein Element des durch diese entsprechenden Grundänderungen erzeugten Systems erster Stufe wird. Betrachte ich zuerst zwei Strecken a und b, deren jede durch Fortsetzung derselben Grundänderung entstanden ist, so können zuerst, da die Grundänderungen nach dem Begriff des Stetigen keine an sich fixirte Grösse haben, beliebige Grundänderungen in beiden als
28 entsprechende angenommen werden. Lässt man nun, während die eine Grundänderung und die dadurch erzeugte Strecke a dieselbe bleibt, die andere Grundänderung wachsen oder abnehmen, so wird auch die dadurch erzeugte und der Strecke a entsprechende Strecke b wachsen oder abnehmen, und zwar wenn die Grundänderung stetig wächst oder abnimmt, so wird auch die Strecke b stetig wachsen oder abnehmen, wie dies unmittelbar im Begriff des Stetigen liegt. Somit wird, da die Grundänderung für b beliebig angenommen werden kann, auch die der Strecke a entsprechende b jede gegebene Grösse annehmen können; und dasselbe gilt von jeder andern Strecke c und so weiter, so dass also in der That auch für die oben gegebenen Strecken a, b, c ... solche Grundänderungen angenommen werden können, dass jene Strecken als entsprechende erscheinen, und also das Element β als ein Element des durch diese Grundänderungen erzeugten Systemes erster Stufe dargestellt ist.

Dass nun auch durch α und β nur Ein System erster Stufe gelegt werden kann, liegt schon in dem obigen Beweise. Ein anderes System erster Stufe könnte nämlich nur entstehen, wenn die der Grundänderung in a entsprechenden Grundänderungen der andern Strecken b, c ... anders angenommen würden, allein dann würden auch die der

Strecke a entsprechenden andern Strecken, wie wir vorher zeigten, anders ausfallen, also würde auch nicht mehr von α aus das Element β erzeugt werden.

Nachdem wir nun gezeigt haben, wie in der That durch je zwei Elemente ein, aber auch nur Ein System erster Stufe gelegt werden kann, so ist nun der im Anfange dieses Paragraphen angedeutete Mangel aufgehoben, indem jetzt für die Strecke, die als Summe zweier Strecken erscheinen soll, nicht mehr bloss Anfangs- und Endelement bestimmt ist, sondern die ganze Strecke in allen ihren Elementen. Der Begriff der Summe ist daher nicht nur für die Aenderungen, sondern auch für die Strecken selbst bestimmt; sind nämlich $[\alpha\beta]$, $[\beta\gamma]$, $[\alpha\gamma]$ die nach dem soeben entwickelten Princip erzeugten Strecken, so hat man noch immer allgemein

$$[\alpha\gamma] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma]$$

das heisst

Wenn man zwei oder mehrere Strecken stetig aneinander anschliesst, so ist die Strecke vom Anfangselement der ersten zum Endelement der letzten die Summe derselben.

Wenden wir auf den Begriff der Abhängigkeit, wie wir ihn in § 16 darstellten, diesen Begriff der Summe an, so ergiebt sich, dass eine Aenderungsweise von andern abhängig sei, wenn sich die der ersteren angehörigen Strecken als Summen von Strecken darstellen lassen, welche den letzteren angehören, [dass] hingegen, wenn dies nicht möglich ist, sie von ihnen unabhängig sei. 29

§ 19.

Wir haben bisher den Begriff der Summe der Strecken abhängig gemacht von der besonderen Erzeugungsweise des ganzen Systems, indem, wenn Anfangs- und Endelement der Summe durch stetiges Aneinanderschliessen der Strecken gegeben war, nun die zwischen beiden liegende Strecke, als Theil eines Systems erster Stufe, durch die m ursprünglichen Aenderungsweisen des ganzen Systemes konstruirt wurde. Diese Abhängigkeit haben wir noch schliesslich aufzuheben.

Wir haben schon oben (§ 18) gezeigt, dass, wenn mehrere Strecken auf entsprechende Weise erzeugt sind, dann nicht nur jedem Element und jedem Theil der einen ein Element und ein Theil in jeder der andern entspricht, sondern auch die Summe auf dieselbe Weise entsprechend erzeugt ist, nämlich so, dass die Summe der entsprechenden Theile jedesmal diesen Theilen entspricht. Hat man nun zwei beliebige Strecken des Systemes, nämlich p_1 und p_2, und es sind beide als Summen von

Strecken dargestellt, welche den ursprünglichen Aenderungsarten des ganzen Systemes angehören, nämlich

$$p_1 = a_1 + b_1 + \cdots$$
$$p_2 = a_2 + b_2 + \cdots,$$

so dass man hat

$$p_1 + p_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + \cdots,$$

und sind ferner α_1, α_2, β_1, β_2, $\cdots$ entsprechende Theile der Strecken a_1, a_2, b_1, b_2 $\cdots$, also auch $(\alpha_1 + \alpha_2)$, $(\beta_1 + \beta_2)$, $\cdots$ in demselben Sinne entsprechende Theile von $(a_1 + a_2)$, $(b_1 + b_2)$, $\cdots$, so wird nach dem vorigen Paragraphen jeder Theil der Summe $(p_1 + p_2)$ als Summe der entsprechenden Theile gewonnen, das heisst also ein solcher ist jedesmal gleich

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) + \cdots$$

das heisst

$$= (\alpha_1 + \beta_1 + \cdots) + (\alpha_2 + \beta_2 + \cdots),$$

wo das erste Glied einen Theil von p_1, das zweite den entsprechenden von p_2 darstellt. Also wird jedes Element der Summe $(p_1 + p_2)$ 30 dadurch erzeugt, dass man das Anfangselement derselben um jeden beliebigen Theil von p_1 und dann um den entsprechenden von p_2 ändert. Somit können wir das allgemeine Resultat aufstellen: „Wenn zwei Strecken gegeben sind, und man ändert ein beliebiges Element um einen Theil der ersten, und dann (fortschreitend) um den entsprechenden Theil der zweiten, so bildet die Gesammtheit der so erzeugbaren Elemente die Summe jener beiden Strecken."

Nachdem wir nun den Begriff der Summe der Strecken in seiner Allgemeinheit und Unabhängigkeit aufgestellt haben, wollen wir noch einen Satz, den wir früher in specieller Form erwiesen hatten, jetzt in allgemeinerer Form darstellen, nämlich

Wenn alle Elemente einer Strecke sich um gleich viel ändern, so bleibt die so hervorgehende Strecke der ersteren gleich.

Dass dadurch wieder eine Strecke entsteht, ist schon in § 18 gezeigt, dass sie der ersteren gleich sei, folgt durch dieselben Formeln wie in § 15 am Schlusse. Nämlich ist $[\alpha\beta]$ die ursprüngliche Strecke, und $[\alpha\alpha'] = [\beta\beta']$, so ist

$$[\alpha'\beta'] = [\alpha'\alpha] + [\alpha\beta] + [\beta\beta'] = [\alpha\beta],$$

da sich nämlich $[\alpha'\alpha]$ und $[\beta\beta']$ als entgegengesetzte Grössen bei der Addition aufheben.

§ 20. Selbständigkeit der Systeme höherer Stufen.

Durch die im vorigen Paragraphen geführte Entwickelung ist die selbständige Darstellung der Systeme höherer Stufen vorbereitet. Nämlich es waren diese bisher als abhängig von gewissen zu Grunde gelegten Aenderungsweisen dargestellt, durch welche sie eben erzeugt wurden. Diese Abhängigkeit können wir in so fern aufheben, als wir zeigen können, dass dasselbe System m-ter Stufe durch je m Aenderungsweisen erzeugbar sei, welche demselben angehören, und welche von einander unabhängig sind (in dem Sinne von § 16), das heisst von keinem System niederer Stufe (als der m-ten) umfasst werden.

Ich will zuerst zeigen, dass, wenn das System durch irgend welche m Aenderungsweisen erzeugbar ist, ich dann statt jeder beliebigen derselben eine neue von den $(m-1)$ übrigen unabhängige, demselben System m-ter Stufe angehörige Aenderungsweise (p) einführen, und durch diese in Verbindung mit den $(m-1)$ übrigen das gegebene System erzeugen kann.

Da nach der Voraussetzung p dem gegebenen Systeme m-ter Stufe angehört, so | wird es sich (§ 18) darstellen lassen als Summe 31 von Strecken, die den ursprünglichen Aenderungsweisen angehören, das heisst [es wird]

$$p = a + b + c + \cdots$$

gesetzt werden können, wenn a, b, c ... den ursprünglichen Aenderungsweisen angehören. Wenn nun a die Aenderungsweise darstellt, für welche p eingeführt werden soll, so muss p von den übrigen $b, c \ldots$, wie wir voraussetzten, unabhängig sein, das heisst a darf nicht gleich Null sein, während hingegen von den übrigen Stücken jedes null sein darf. Ich habe nun zu zeigen, dass jedes Element des durch p, b, c ... erzeugten Systems auch dem durch a, b, c ... erzeugten angehöre und umgekehrt, sobald beide von demselben Anfangselemente aus erzeugt sind. Das erste ist unmittelbar klar, da p dem durch a, b, c ... erzeugten Systeme angehört, das zweite bedarf eines ausführlicheren Beweises.

Ein jedes Element des durch a, b, c ... von irgend einem Anfangselement aus erzeugten Systemes kann durch eine Aenderung

$$q = a_1 + b_2 + c_2 + \cdots,$$

wo a_1, b_2, c_2 ... mit a, b, c ... beziehlich gleichartig sind, aus dem Anfangselemente erzeugt werden. Um nun hierin statt a_1 die Grösse p oder eine ihr gleichartige einführen zu können, nehme man für den Augenblick die Grössen p, a, b, c ... als entsprechende an, und in

demselben Sinne mögen p_1, a_1, b_1, c_1 ... einander entsprechen, so wird, da

$$p = a + b + c + \cdots$$

ist, auch nach § 18 dieselbe Gleichung für die entsprechenden Strecken gelten, also

$$p_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \cdots$$

sein, somit auch

$$a_1 = p_1 - b_1 - c_1 - \cdots.$$

Wird dies statt a_1 substituirt, so hat man

$$q = p_1 + (b_2 - b_1) + (c_2 - c_1) + \cdots,$$

das heisst das fragliche Element ist aus dem Anfangselement durch Aenderungen, die mit p, b, c ... gleichartig sind, erzeugbar, das heisst [es] gehört dem durch p, b, c ... aus demselben Anfangselement erzeugten Systeme an. Es ist also die Identität beider Systeme bewiesen, und gezeigt, dass man statt jeder beliebigen der m das System ursprüng-
82 lich erzeugenden Aenderungsweisen jede beliebige | neue einführen kann, sobald sie nur dem gegebenen Systeme angehört und von den übrigen (beibehaltenen) unabhängig ist. Und da man dies Verfahren fortsetzen kann, so folgt, dass man dasselbe System durch je m unabhängige Aenderungsweisen desselben erzeugen kann oder

Jede Strecke eines Systems m-ter Stufe kann als Summe von m Strecken, welche m gegebenen unabhängigen Aenderungsweisen des Systems angehören, dargestellt werden, aber auch jedesmal nur auf eine Art.

Es ist somit das System unabhängig gemacht von der Auswahl der m unabhängigen Aenderungsweisen, wir haben es noch vom Anfangselemente unabhängig zu machen.

Es sei das ursprünglich angenommene Anfangselement α, man mache statt dessen ein anderes Element β des Systems zum Anfangselement. Ist nun γ irgend ein drittes Element, so hat man

$$[\beta\gamma] = [\beta\alpha] + [\alpha\gamma].$$

Sind nun $[\beta\alpha]$ und $[\alpha\gamma]$ durch die angenommenen Aenderungsweisen darstellbar, so wird es auch $[\beta\gamma]$ als ihre Summe sein, das heisst jedes Element, was durch die angenommenen Aenderungsweisen aus α erzeugbar ist, ist auch durch dieselben aus jedem andern Elemente erzeugbar; also:

Jedes System m-ter Stufe kann erzeugt gedacht werden durch je m unabhängige Aenderungsweisen desselben aus jedem beliebigen Element desselben, das heisst aus Einem solchen Elemente können alle übrigen durch jene Aenderungsweisen erzeugt werden.

Hierdurch ist nun das System höherer Stufe als für sich bestehendes eigenthümliches Gebilde dargelegt.

B. Anwendungen.

§ 21—23. **Unhaltbarkeit der bisherigen Grundlage der Geometrie und Versuch einer neuen Grundlegung.**

§ 21.

Ich schreite nun zu den Anwendungen und zwar zunächst auf die Geometrie, will jedoch zuvor versuchen, einen rein wissenschaftlichen Anfang für die Geometrie selbst und zwar unabhängig von unserer Wissenschaft wenigstens andeutungsweise zu entwerfen, um so die Uebereinstimmung und Abweichung in dem Gange beider Disciplinen desto besser zu übersehen. Ich behaupte nämlich, dass die Geometrie noch immer eines wissenschaftlichen Anfangs entbehre, und dass die Grundlage für das ganze Gebäude der Geometrie bisher an einem Gebrechen leide, welches einen | gänzlichen Umbau desselben 33 nothwendig mache. Wenn ich eine solche Behauptung aufstelle, welche den durch Jahrtausende geheiligten Bau umzustürzen droht, so darf ich das nicht, ohne dieselbe durch die entscheidendsten Gründe zu belegen.

Das Gebrechen, dessen Vorhandensein ich nachweisen will, ist am leichtesten am Begriffe der Ebene zu erkennen. Wie dieselbe in den mir bekannt gewordenen Bearbeitungen der Geometrie definirt wird, so liegt dabei die Voraussetzung zu Grunde, dass eine gerade Linie, welche zwei Punkte mit der Ebene gemeinschaftlich habe, ganz in dieselbe falle; sei es nun, dass man dies stillschweigend annehme (so Euklid), oder in die Definition der Ebene hineinlege, oder endlich als besonderen Grundsatz aufstelle. Das erstere zeigt sich sogleich als unwissenschaftlich, das zweite kann aber, wie ich sogleich zeigen werde, eben so wenig auf Wissenschaftlichkeit Anspruch machen. Denn es ist klar, dass die Ebene schon bestimmt ist, sei es als Gesammtheit der Parallelen, welche von einer Geraden nach einer nicht in derselben enthaltenen Richtung gezogen werden können, sei es als Gesammtheit der Geraden, welche von einem Punkt an eine Gerade gezogen werden können.

Bleiben wir nun zum Beispiel bei der ersten Bestimmung stehen, so ist klar, wie nun erst erwiesen werden muss, dass jede gerade Linie, welche zwei dieser Parallelen schneidet, auch die sämmtlichen übrigen schneiden müsse, ein Satz, welcher nicht ohne eine Reihe von Hülfssätzen erwiesen werden kann. Definirt man nun die Ebene etwa als Fläche, welche alle geraden Linien, die zwei Punkte mit ihr gemein-

schaftlich haben, vollständig enthält, so leuchtet ein, wie man dadurch den vorher ausgesprochenen Satz, unter dieser Definition versteckt, in das Gebiet der Geometrie einschmuggelt; und eben so wenig, als es sich irgend ein Mathematiker gefallen lassen würde, wenn man den Beweis des Satzes, dass in Parallelogrammen die gegenüberstehenden Seiten gleich lang sind, dadurch vermeiden wollte, dass man das Parallelogramm als Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten gleich und parallel sind, definirte; eben so wenig darf man es sich gefallen lassen, wenn der oben angeführte Satz durch eine solche Definition 34 der Ebene unrechtmässiger Weise in die Geometrie | eingeführt wird. Es bliebe also, wenn man bei dem bisherigen Gange der Geometrie verharren wollte, nur übrig, jenen Satz zu einem Grundsatze umzustempeln. Allein wenn ein Grundsatz vermieden werden kann, ohne dass ein neuer eingeführt zu werden braucht, so muss dies geschehen, und wenn es eine gänzliche Umgestaltung der ganzen Wissenschaft herbeiführen sollte; weil durch ein solches Vermeiden die Wissenschaft nothwendig ihrem Wesen nach an Einfachheit gewinnt.

Gehen wir nun von diesem Gebrechen aus, was wir nachgewiesen zu haben hoffen*), weiter zurück, um die Ursachen desselben aufzufinden, so liegen diese in der mangelhaften Auffassung der geometrischen Grundsätze.

Zuerst muss es auffallen, wie neben wirklichen Grundsätzen, welche geometrische Anschauungen aussagen, häufig unter demselben Namen ganz abstrakte Sätze aufgeführt werden, wie: „sind zwei Grössen einer dritten gleich, so sind sie selbst einander gleich", und welche, wenn man einmal unter Grundsätzen vorausgesetzte Wahrheiten versteht, gar nicht diesen Namen verdienen. In der That glaube ich oben (§ 1) nachgewiesen zu haben, dass der soeben angeführte abstrakte Satz nur den Begriff des Gleichen ausdrücke, und dasselbe gilt auch von den übrigen abstrakten Sätzen, welche im wesentlichen darauf hinauslaufen, dass das aus dem Gleichen auf dieselbe Weise Erzeugte selbst gleich sei. Von diesem Vorwurfe der Vermischung von Grundsätzen mit vorausgesetzten Begriffen bleibt indessen Euklid selbst frei, welcher die erstern mit unter seine Forderungen (αἰτήματα) aufnahm, während er die letzteren als allgemeine Begriffe (κοιναὶ ἔννοιαι) aussonderte, ein Verfahren, welches schon von seinen Kommentatoren nicht mehr

*) Es könnte freilich sein, dass es eine Darstellung gebe, die den gerügten Mangel vermieden hätte, ohne mir bekannt geworden zu sein. Da indessen mit einer solchen Darstellung zugleich die Parallelentheorie, dies Kreuz der Mathematiker, müsste ins Reine gebracht sein, so konnte ich mit ziemlicher Gewissheit annehmen, dass es eine solche Darstellung noch nicht gebe.

verstanden wurde, und auch bei neueren Mathematikern zum Schaden der Wissenschaft wenig Nachahmung gefunden hat. In der That kennen die abstrakten Disciplinen der Mathematik gar keine Grundsätze; sondern der erste Beweis geschieht in ihnen durch Aneinanderketten von Erklärungen, indem von keinem andern | Fortschreitungsgesetze Gebrauch gemacht wird, als von dem allgemein logischen, dass nämlich, was von einer Reihe von Dingen in dem Sinne ausgesagt ist, dass es von jedem einzelnen derselben gelten soll, auch wirklich von jedem einzelnen, was jener Reihe angehört, ausgesagt werden kann. Und dies Fortschreitungsgesetz, was, wie man sieht, nur ein sich besinnen über das, was man mit dem allgemeinen Satze hat sagen wollen, enthält, als Grundsatz aufzustellen, wie es in der Logik missbrauchsweise geschieht, wenn es nicht gar erst in ihr bewiesen wird, kann keinem Mathematiker einfallen. 35

§ 22.

In der Geometrie bleiben daher als Grundsätze nur übrig diejenigen Wahrheiten, welche der Anschauung des Raumes entnommen sind. Diese Grundsätze werden daher richtig gefasst sein, wenn sie in ihrer Gesammtheit die vollständige Anschauung des Raumes geben, und auch keiner aufgestellt wird, der nicht diese Anschauung vollenden hülfe.

Hier zeigt sich nun die wahre Ursache des mangelhaften Anfanges der Geometrie in ihrer bisherigen Bearbeitung; nämlich theils werden Grundsätze übergangen, welche ursprüngliche Raumesanschauungen ausdrücken, und die dann nachher, wo ihre Anwendung erfordert wird, stillschweigend vorausgesetzt werden müssen, theils werden Grundsätze aufgestellt, die keine Grundanschauung des Raumes ausdrücken, und sich daher bei genauerer Betrachtung als überflüssig ergeben, und überall gewähren die Grundsätze in ihrer Gesammtheit den Eindruck eines Aggregats von möglichst klaren Sätzen, welche behufs möglichst bequemer Beweisführung zusammengestellt sind. — Die Grundsätze der Geometrie, wie wir sie voraussetzen müssen, sagen vielmehr die Grundeigenschaften des Raumes aus, wie sie unserer Vorstellung ursprünglich mitgegeben sind, nämlich dessen Einfachheit und relative Beschränktheit.

Die Einfachheit des Raumes wird ausgesagt in dem Grundsatze:

Der Raum ist an allen Orten und nach allen Richtungen gleich beschaffen, das heisst an allen Orten und nach allen Richtungen können gleiche Konstruktionen vollzogen werden.

Dieser Grundsatz zerfällt schon seinem Ausdruck nach in zwei

Grundsätze, von denen der eine die Möglichkeit der Fortbewegung, der andere die Möglichkeit der Schwenkung setzt, nämlich:

36 1) *dass eine Gleichheit denkbar ist bei Verschiedenheit des Ortes.*

2) *dass eine Gleichheit denkbar ist bei Verschiedenheit der Richtung, und namentlich auch bei entgegengesetzter Richtung.*

Nennen wir Konstruktionen, welche an verschiedenen Orten ganz auf dieselbe Weise erfolgen, sich also nur dem Orte nach unterscheiden, gleich und gleichläufig*), die, welche sich nur dem Orte und der Richtung nach unterscheiden, absolut gleich, und insbesondere die, welche nach entgegengesetzter Richtung auf dieselbe Weise, wenn auch an verschiedenen Orten, erfolgen, gleich und gegenläufig oder kurzweg entgegengesetzt, und halten [wir] dieselben Benennungen auch für die Resultate der Konstruktion fest, so können wir jene beiden Grundsätze, wenn wir aus dem zweiten noch den partiellen Satz herausheben, bestimmter so ausdrücken:

1) *Was durch gleiche und gleichläufige Konstruktionen erfolgt, ist wieder gleich und gleichläufig.*

2) *Was durch entgegengesetzte Konstruktionen erfolgt, ist wieder entgegengesetzt.*

3) *Was durch absolut gleiche Konstruktionen (wenn auch an verschiedenen Orten und nach verschiedenen Anfangsrichtungen) erfolgt, ist wieder absolut gleich.*

Die beiden ersten von diesen drei Grundsätzen bilden die positive Voraussetzung für den Theil der Geometrie, der dem ersten unserer Wissenschaft entspricht. Die relative Beschränktheit des Raumes wird dargestellt durch den Grundsatz:

Der Raum ist ein System dritter Stufe.

Dem Verständniss desselben müssen Erklärungen und Bestimmungen vorangehen, wie wir sie oben in der abstrakten Wissenschaft gegeben haben.

§ 23.

Die unmittelbare Evidenz dieser Grundsätze und ihre Unentbehr-
37 lichkeit bietet sich wohl einem jeden sogleich dar: ohne | den ersten
37 ist keine gerade Linie, ohne den zweiten keine Ebene (s. unten), ohne den

*) Wir schliessen uns hier mehr an die gewöhnliche Auffassungsweise an, indem wir nur dem Begriffe des Parallelen die bestimmteren des Gleichläufigen und Gegenläufigen (s. S. 49 Anm.) substituiren; sonst wäre es angemessener gewesen, hierfür einen einfacheren Ausdruck, wie etwa „vollkommen gleich" einzuführen.

dritten kein Winkel möglich, während der letzte den Raum selbst in seiner dreifachen Ausdehnung darstellt, und obgleich dieselben in den gewöhnlichen Darstellungen meist übergangen werden, so hält es doch nicht schwer, die Stellen nachzuweisen, wo von denselben stillschweigend Gebrauch gemacht wird. Dass dieselben ausreichen für die Geometrie, kann nur vollständig aus einander gelegt werden durch Entfaltung der Geometrie selbst aus diesem Keime heraus. Wir fahren jedoch hier fort in unserm mehr andeutenden als ausführenden Verfahren.

Den Satz, dass zwischen zwei Punkten nur Eine gerade Linie möglich ist, oder, wie ihn Euklid ausdrückt, dass zwei gerade Linien nicht einen Raum (χωρίον) umschliessen können, hier als Grundsatz übergangen zu sehen, mag auffallen; doch liegt derselbe in dem richtig aufgefassten ersten Grundsatze. Nämlich, sollten zwei gerade Linien, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben, noch einen zweiten Punkt gemeinschaftlich haben, so würde der Raum an diesem zweiten Punkt anders beschaffen sein, als an den andern, wenn die Linien nicht zugleich auch alle andern Punkte gemeinschaftlich hätten, also ganz in einander fielen. Sollte dieser Beweis, der sich übrigens bei einer wirklichen Ausführung der Wissenschaft viel strenger ausnehmen würde, zu sehr ein philosophisches Gepräge zu haben scheinen, so mag man den Satz für die mathematische Darstellung immerhin als partiellen Grundsatz aufstellen, wenn man sich nur seiner Zusammengehörigkeit mit jenem ersten Grundsatze bewusst bleibt*).

Für die weitere Entwickelung bedienen wir uns hier, um zwei Grössen als gleich und gleichläufig zu bezeichnen, eines Zeichens (⋕), welches aus dem des Gleichen (=) und des Parallelen (‖) kombinirt ist.

Fig. 6.

Wenn nun zwei Strecken AB und BC entgegengesetzt sind mit zwei andern DE und EF (vgl. Fig. 6), so dass also

$$AB \# ED, \quad BC \# FE$$

ist, so muss nach dem zweiten Grundsatze auch AC entgegengesetzt mit DF, das heisst 38

$$CA \# DF$$ 38

sein. Fällt also C auf D, so muss auch CA auf DF, also A auf F fallen, und die vier Strecken bilden ein Viereck $ABCE$. Also „wenn

*) Ueberhaupt ist die Zerspaltung in möglichst besondere Grundsätze der mathematischen Methode eigenthümlich und förderlich, vgl. auch Einleitung Nr. 13.

von den vier stetig nach einander beschriebenen Seiten eines Vierecks zwei einander entgegengesetzt sind, so sind es auch die beiden andern*)“. Oder wenn ein beliebiges räumliches Gebilde, sich selbst parallel bleibend, so fortschreitet, dass Ein Punkt eine gerade Linie beschreibt, so beschreiben auch alle übrigen Punkte gerade Linien, welche mit der ersteren gleichläufig und gleich sind.

Hieraus ergiebt sich leicht, dass, wenn zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, und man mit dieser dritten eine Parallele zieht, welche die eine jener parallelen Linien schneidet, sie auch die andere schneiden muss (und auf diese Weise ein Viereck bildet, in welchem die gegenüberstehenden Seiten gleich lang sind), oder allgemeiner: wenn man eine Ebene dadurch erzeugt, dass man von allen Punkten einer zu Grunde gelegten geraden Linie Parallele zieht, so wird jede gerade Linie, welche von einem Punkte der Ebene mit der zu Grunde gelegten Linie parallel gezogen wird, ganz in die Ebene fallen. Nennen wir die Richtung der zu Grunde gelegten Linie und die der von ihr aus gezogenen Parallelen die Grundrichtungen der Ebene, so können wir sagen, dass jede gerade Linie, welche von einem Punkte der Ebene nach einer ihrer Grundrichtungen gezogen wird, ganz in dieselbe falle.

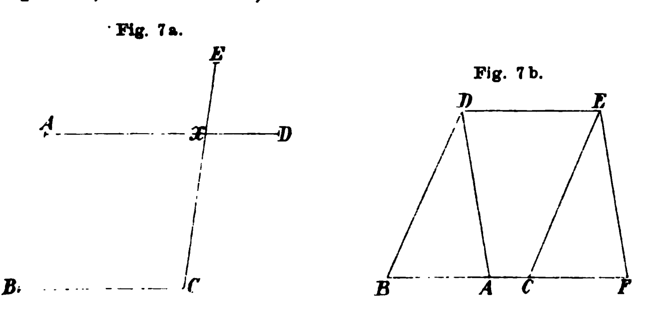
Hieraus lässt sich endlich folgern, dass jede gerade Linie, welche zwei Punkte der Ebene verbindet, ganz in dieselbe fällt. Der Beweis kann ganz analog der Darstellung in der abstrakten Wissenschaft, wie sie in § 18 gegeben ist, geführt werden. Wenn nämlich auch hier aus einem Punkt der Ebene α ein anderer β derselben Ebene, durch die
39 Fortbewegungen a und b, welche den | Grundrichtungen angehören, erzeugt wird, so kann man durch Wiederholung dieser und der ent-
39 gegengesetzten Fortbewegungen, | ganz eben so wie es in § 18 gezeigt war, eine unendliche Reihe von Punkten erzeugen, welche alle in Einer geraden Linie liegen und der gegebenen Ebene angehören; indem man dann β an α sich stetig anschliessen lässt, erhält man jene gerade Linie in ihrer Vollständigkeit, und indem man endlich den Begriff des Entsprechenden auf gleiche Weise wie dort anwendet, so kann man eine gerade Linie erzeugen, welche zwei beliebige in der Ebene gegebene Punkte verbindet und ganz in der Ebene liegt. Da nun zwischen zwei Punkten nur Eine gerade Linie möglich ist, so muss auch jede

*) Hierbei ist immer festzuhalten, dass nach dem Obigen unter entgegengesetzten Strecken immer gleiche, aber gegenläufige verstanden sind. Der Satz in der Form: „sind in einem Vierecke zwei Seiten parallel und gleich, so sind es auch die beiden andern,“ ist nicht mehr allgemein richtig, wenn man auch Vierecke mit sich schneidenden Seiten annimmt.

gerade Linie, welche zwei Punkte der Ebene verbindet, mit der vorher zwischen denselben Punkten erzeugten zusammenfallen, also auch ganz in die Ebene fallen. Diese Andeutungen mögen genügen, um einen vorläufigen Begriff zu geben von einem wissenschaftlichen Anfange der Geometrie *).

§ 24. Geometrische Aufgaben und Sätze; Mitte zwischen mehreren Punkten.

Wir schliessen hieran eine Reihe von geometrischen Aufgaben, welche sich durch die in diesem Kapitel gegebene Methode lösen lassen, und setzen dabei, ohne die Anwendung des Zirkels zu gestatten, nur voraus, dass man durch zwei Punkte, unter welchen auch ein unendlich entfernter sich befinden darf, eine gerade Linie, und durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, eine Ebene zu legen vermöge. Indem wir sagen, dass im ersten Falle unter den beiden Punkten auch einer unendlich entfernt sein dürfe, so wollen wir damit die Forderung ausdrücken, mit einer gegebenen geraden Linie eine Parallele zu ziehen. Die genannten Forderungen sind überhaupt die einzigen, die wir für den Theil der Geometrie, welcher dem ersten Theile unserer Wissenschaft entspricht, aufstellen **).



Aufgabe 1. Eine Strecke AX zu zeichnen, welche einer gegebenen BC gleich und gleichläufig ist (vgl. Fig. 7a und 7b). **40**

Auflösung. Man ziehe AD parallel BC und CE parallel BA, so ist der Durchschnittspunkt dieser beiden Linien der gesuchte Punkt X. Liegt ins besondere der Punkt A in der geraden Linie BC, so nehme man einen Punkt D ausserhalb derselben, mache nach dem soeben angegebenen Verfahren $DE \# BC$ und $AF \# DE$, so ist F der gesuchte Punkt X.

*) Vgl. zu diesem ganzen Abschnitt (§ 15—23) den Anhang I „Ueber das Verhältniss der nichteuklidischen Geometrie zur Ausdehnungslehre". (1877.)

**) Man pflegt die Forderung, mit einer gegebenen Linie eine Parallele zu

Aufgabe 2. Eine Strecke in beliebig viele gleiche Theile zu theilen. Die Auflösung kann vermittelst der in der vorigen Aufgabe gegebenen Konstruktion auf die gewöhnliche Auflösung zurückgeführt werden.

Fig. 8.

Aufgabe 3. Den Punkt X zu finden, welcher der Gleichung

$$[AX] = [BC] + [DE]$$

genügt*) (vgl. Fig. 8).

Auflösung. Man macht $AF \# BC$ und $FG \# DE$, so ist G der gesuchte Punkt.

Aufgabe 4. Den Punkt X zu finden, welcher der Gleichung

$$[AX] = [BC] - [DE]$$

genügt.

Für die folgenden Sätze und Aufgaben will ich ein Paar neue Benennungen einführen, welche zur Erleichterung der Ausdrucksweise wesentlich sind. Nämlich unter der *Abweichung* des Punktes A von einem andern B verstehe ich die Strecke BA mit Festhaltung ihrer Richtung und Länge, und unter der *Gesammtabweichung* eines Punktes R von einer Punktreihe $A, B, C, \ldots$ verstehe ich die Summe der Abweichungen jenes Punktes von den einzelnen Punkten dieser Reihe, also die Summe

$$[AR] + [BR] + [CR] + \cdots,$$

wobei, wie sich von selbst versteht, der im Vorigen entwickelte Begriff der Summe zu Grunde gelegt ist. Hieraus ist von selbst klar, dass die Gesammtabweichung einer Punktreihe $A, B, C \ldots$ von einem Punkte R durch die Summe

$$[RA] + [RB] + [RC] + \cdots$$

---

ziehen, nicht mit unter die Postulate der Geometrie aufzunehmen; allein wir haben dieselbe nur anzusehen als einen speciellen Fall der Forderung, zwei Punkte durch eine gerade Linie zu verbinden. Will man diese Forderung nicht mit aufnehmen, so bleibt die Reihe von Sätzen und Aufgaben, welche sich bloss auf das Ziehen von geraden Linien beschränken, gänzlich unfruchtbar, indem man dann nicht einmal die Projektion übersehen kann, bei welcher ja endlich entfernte Punkte ins Unendliche rücken können und umgekehrt.

*) Ich bediene mich hier der in der abstrakten Wissenschaft eingeführten Bezeichnung der Strecken, indem ich unter $[AB]$ die Strecke mit festgehaltener Richtung und Länge verstehe, weshalb hier das Gleichheitszeichen auch wieder das gewöhnliche ist**).

**) Vgl. die Anm. zu S. 50. (1877.)

dargestellt wird. Nun kann ich aus einer Gleichung

$$(1)\qquad [AB]+[CD]+[EF]+\cdots=0,$$

indem ich statt $[AB]$ nach dem allgemeinen Begriff der Summe (§ 19) 41
schreibe $[AR]+[RB]$ oder $[RB]-[RA]$, und ebenso statt $[CD]$ den Ausdruck $[RD]-[RC]$ einführe und so weiter, und indem ich dann $[RA]$, $[RC]$, ... mit umgekehrtem Zeichen auf die andere Seite bringe, die Gleichung ableiten:

$$(2)\quad [RA]+[RC]+[RE]+\cdots=[RB]+[RD]+[RF]+\cdots,$$

wo beide Seiten gleich viel Glieder haben. Diese so einfache Umgestaltung führt direkt zu einer Reihe der schönsten und einfachsten Sätze, wenn man nur noch bedenkt, dass man aus der zweiten Gleichung durch das rückgängige Verfahren wieder die erste gewinnen kann. Nämlich erstens:

Wenn die Gesammtabweichung eines Punktes R von einer Punktreihe, gleich der Gesammtabweichung desselben Punktes von einer andern Punktreihe ist, welche aber eben so viel Punkte enthält, wie jene erste: so gilt dasselbe auch für jeden andern Punkt, der statt R gesetzt werden mag, und es ist ferner die Summe der Strecken, welche von den Punkten der einen Reihe nach den entsprechenden der andern gezogen werden, gleich Null, wie man auch immer jene beiden Punktreihen als entsprechend setzen möge.

Ferner:

Wenn die Summe mehrerer (m) Strecken null ist, so bleibt die Summe auch null, wenn man die Anfangspunkte, oder auch die Endpunkte beliebig unter sich vertauscht (zum Beispiel statt AB und CD setzt AD und CB), und zugleich ist die Gesammtabweichung der Endpunkte von jedem beliebigen Punkte R stets gleich der Gesammtabweichung der Anfangspunkte von demselben Punkte R.

Als besondere Fälle dieser allgemeinen Sätze erscheinen die, wo einige Punkte oder alle Punkte der einen oder der andern Reihe zusammenfallen. Fallen alle m Punkte der einen Reihe in einen Punkt S zusammen, so haben wir nun, da die Gesammtabweichung dieser m Punkte gleich der m-fachen Abweichung des einen Punktes S ist, die Sätze in folgender Gestalt:

Wenn die Gesammtabweichung einer Reihe, welche m Punkte enthält, von einem Punkte R, gleich ist der m-fachen Abweichung eines Punktes S von demselben Punkte R, so gilt dasselbe auch | in Bezug auf 42

jeden andern Punkt, der statt R gesetzt werden mag, und die Gesammtabweichung jener Punktreihe von dem Punkte S ist null,

und umgekehrt:

Wenn die Gesammtabweichung eines Punktes S von einer Reihe von m Punkten null ist, so ist die Gesammtabweichung irgend eines Punktes R von jener Reihe gleich der m-fachen Abweichung desselben Punktes von S.

Aus dem letzten Satze folgt, dass es ausser dem Punkte S keinen andern gebe, welcher derselben Bedingung genüge; wir können ihn daher mit einem einfachen Namen bezeichnen, und nennen ihn die Mitte jener Punktreihe*). Es ist also unter der Mitte einer Punktreihe derjenige Punkt verstanden, dessen Gesammtabweichung von jener Reihe null ist. Aus dem ersten dieser beiden Sätze ergiebt sich eine höchst einfache Konstruktion der Mitte. Nämlich ist die Mitte zwischen m Punkten zu suchen, so ziehe man von irgend einem Punkte R die Strecken nach diesen Punkten, und mache RS gleich dem m-ten Theil von der Summe dieser Strecken (nach Aufgabe 3 und 2), so ist S die Mitte. Lässt man bei allen früheren Sätzen noch einige Punkte zusammenfallen, so erhält man mehrfache Punkte, oder Punkte mit zugehörigen Koefficienten, und für sie gelten noch immer dieselben Sätze, zum Beispiel: Sind m Punkte $A_1 \ldots A_m$ mit den zugehörigen Koefficienten $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ und n Punkte $B_1 \ldots B_n$ mit den zugehörigen Koefficienten $\beta_1 \ldots \beta_n$ gegeben, und ist zugleich

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = \beta_1 + \cdots + \beta_n,$$

so wird immer, wenn die Gesammtabweichung des ersten Vereins von irgend einem Punkte R gleich der des zweiten von demselben Punkte, das heisst

$$\alpha_1 [RA_1] + \cdots + \alpha_m [RA_m] = \beta_1 [RB_1] + \cdots + \beta_n [RB_n]$$

ist, dasselbe auch gelten für jeden andern Punkt, der statt R gesetzt werden mag. — Und auf gleiche Weise könnten auch die übrigen Sätze umgestaltet werden.

Wir haben hier, um sogleich eine Uebersicht zu geben, vorgegriffen, indem wir den Begriff der | Zahl mit aufgenommen haben, von dem in der abstrakten Wissenschaft bisher noch nicht die Rede sein konnte. 43

*) Ich habe mich über den Gebrauch dieses Namens statt des sonst üblichen des Centrums der mittleren Entfernungen schon anderweitig gerechtfertigt (Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. XXIV). [In der Abhandlung: Theorie der Centralen, s. dort insbesondere S. 271.]

§ 25. Die Neutonschen Grundgesetze der Mechanik.

Die Anwendung unserer Wissenschaft auf die Statik und Mechanik ist vorzugsweise geeignet, die Bedeutung derselben ans Licht treten zu lassen.

Betrachten wir zuerst, um das Ganze von Anfang an zu begründen, die Neuton'schen Grundgesetze, so besteht das erste*) aus zwei ungleichartigen Theilen, deren ersterer, dass nämlich jeder ruhende Körper im Zustande der Ruhe bleibt, bis eine Kraft ihn in Bewegung setzt, in dem Begriffe der Kraft, als Ursache der Bewegung, liegt, während der andere Theil aussagt, dass jeder bewegte Körper, so lange keine Kräfte auf ihn einwirken, dieselbe Bewegung beibehält, das heisst dass er in gleichen Zeiten stets gleiche Strecken (im Sinne unserer Wissenschaft, also gleich lange und gleichläufige) beschreibt. Da diese fortgesetzte Bewegung als eine fortdauernde Kraft erscheint, so können wir dies Gesetz noch einfacher so ausdrücken:

Jede Einwirkung einer Kraft auf die Materie ist zugleich die Mittheilung einer sich selbst stets gleich bleibenden (das heisst gleich stark und parallel bleibenden) Kraft an dieselbe.

Diese mitgetheilte und nach der Mittheilung der Materie einwohnende Kraft ist demnach wohl zu unterscheiden von der Kraft, welche auf die Materie einwirkt (ihren Sitz also anderswo hat).

Das zweite Neuton'sche Grundgesetz**) enthält ebenfalls zwei ungleichartige Theile, und jeder derselben enthält eine Grundvoraussetzung, welche aber in dem Neuton'schen Ausdrucke des Satzes etwas versteckt liegt. Nämlich ausser dem Zusammenhange betrachtet, scheint der Satz weiter nichts aussagen zu wollen, als dass, wenn verschiedene Kräfte auf dasselbe Theilchen wirkend gedacht werden, die mitgetheilten Bewegungen den Kräften proportional und gleichgerichtet seien; allein dies wäre kein | Grundgesetz, sondern bloss die Anwendung des Begriffs der Kraft, indem die Kraft als supponirte Ursache der Bewegung nur durch diese bestimmt und gemessen werden kann. Aber dass dies auch nicht der Sinn jenes Satzes sein soll, ergiebt sich aus dem Zusammenhange, und es zeigt sich, dass derselbe einestheils aussagen soll, wie dieselbe Kraft auf verschiedene Massen wirkt, und 44

*) „Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.“ Newton, philosophiae naturalis principia mathematica, Lex I.

**) „Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur.“

anderntheils, wie dieselbe Kraft auf denselben Körper in verschiedenen Zuständen seiner Bewegung wirkt, das heisst wie die einwirkende Kraft sich mit einer andern, die dem Körper schon einwohnt, verbindet. Dies letztere wird so ausgedrückt, dass dann die Veränderung der Bewegung in der Richtung, in welcher die Kraft wirkt, und ihr proportional erfolge. Fasst man diesen Begriff der Veränderung der einwohnenden Kraft durch die hinzutretende genauer auf, so ist er nichts anderes, als was wir unter der Addition verstanden, sobald wir uns die Kräfte als Strecken vorstellen. Wir fassen daher diesen Theil des Grundgesetzes besser so:

Zwei demselben Punkte mitgetheilte Kräfte summiren sich.

Der andere Theil jenes Gesetzes verwandelt sich, wenn wir das ausscheiden, was schon im Begriff der Kraft liegt, oder aus ihm gefolgert werden kann, in das Grundgesetz:

Zwei materielle Theilchen, welche von irgend einer bewegenden Kraft gleiche Einwirkungen erleiden, erleiden auch durch jede andere bewegende Kraft gleiche Einwirkungen.

Zwei solche Theilchen, die wir uns als Punkte, oder als Theile von unendlich kleiner Ausdehnung vorstellen können, nennen wir dann an Masse gleich.

Dass dies Gesetz die eigentliche Grundlage ist von jenem Theil des Neuton'schen Grundgesetzes, würde sich durch eine genaue Analyse desselben leicht ergeben, der Nachweis würde mich jedoch hier zu weit führen. Doch ist es wichtig, zu bemerken, wie wir hierdurch zu einem bestimmten und allgemeinen Mass der Kräfte gelangen, indem wir die Kraft gleich setzen können der Strecke, welche ein materielles Theilchen, dessen Masse als Einheit der Massen zu Grunde gelegt ist, in der Zeiteinheit beschreibt, wenn jene Kraft ihm dauernd einwohnt, das heisst die Kraft, welche der Masseneinheit einwohnt, ist gleich ihrer Geschwindigkeit.

45 Das dritte Neuton'sche Gesetz endlich, von der | Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung*), können wir so ausdrücken:

Wenn zwei Theilchen von gleicher Masse auf einander wirken, so bleibt die Summe ihrer Bewegungen stets dieselbe, als wenn sie nicht auf einander wirkten.

Es ist übrigens klar, wie die vier soeben dargestellten Gesetze von der Beharrung, der Summation der Kräfte, der gleichen Masse und

*) Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

der gegenseitigen Einwirkung ins Gesammt nur Ein Hauptgesetz darstellen, nämlich, dass die Kräfte sich in ihrer Gesammtheit erhalten. Das Beharrungsgesetz sagt die Erhaltung der einzelnen Kraft an dem einzelnen Theilchen aus, das Summationsgesetz die Erhaltung zweier Kräfte an dem einzelnen Theilchen in ihrer Summe, das letzte die Erhaltung der Gesammtkraft bei gegenseitiger Einwirkung, welches wiederum schon das dritte voraussetzt; denn das dritte lehrt, indem es den Begriff der Masse begründet, die Gesammtkraft eines Vereins von Punkten durch Addition der Kräfte, welche die einzelnen an Masse gleichen Punkte erfahren, finden.

§ 26. Gesammtbewegung, Bewegung des Schwerpunkts.

Daher können wir durch Kombination dieser Sätze sogleich den allgemeinen Satz aufstellen:

Die Gesammtkraft (oder die Gesammtbewegung), die einem Verein von materiellen Theilchen zu irgend einer Zeit einwohnt, ist die Summe aus der Gesammtkraft (oder der Gesammtbewegung), die ihm zu irgend einer früheren Zeit einwohnte, und den sämmtlichen Kräften, die ihm in der Zwischenzeit von aussen mitgetheilt sind; wenn nämlich alle Kräfte als Strecken aufgefasst werden von konstanter Richtung und Länge, und auf an Masse gleiche Punkte bezogen werden.

Die einwohnende Kraft und die einwohnende Bewegung sind nämlich nach dem vorigen Paragraphen identisch. — Der Beweis dieses Satzes liegt in den Grundgesetzen, wie wir sie vermittelst der Begriffe unserer Wissenschaft umgestaltet haben, vollständig vorbereitet. Jede einzelne Kraft erhält sich, jede neu einwirkende Kraft summirt sich, und die gegenseitigen Kräfte je zweier Punkte von gleicher Masse ändern die Gesammtkraft beider Punkte nicht, also ändern auch die 46 sämmtlichen gegenseitigen Kräfte des ganzen Punktvereins die Gesammtkraft desselben nicht.

Eine specielle Folgerung dieses Satzes ist die, dass, so lange keine Kraft von aussen hinzutritt, die Gesammtkraft, oder die Gesammtbewegung, die dem Verein einwohnt, konstant bleibt. Ist p die Gesammtkraft, die einem Verein von m an Masse gleichen Punkten, deren Masse wir als Einheit zu Grunde legen, zu irgend einer Zeit einwohnt, und $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ sind die Lagen dieser Punkte zu jener Zeit, und $\beta_1 \ldots \beta_m$ sind die Lagen, worin dieselben nach Verlauf einer Zeiteinheit übergehen würden, wenn die Gesammtkraft konstant bliebe, so haben wir die Gleichung

$$(1) \qquad [\alpha_1 \beta_1] + \cdots + [\alpha_m \beta_m] = p.$$

Wir wollen nun alles auf einen Punkt des Systems beziehen, den wir aber vorläufig noch ganz unbestimmt lassen, und nachher so bestimmen wollen, dass seine Bewegung sich vollständig ergiebt. Es habe dieser Punkt zu jener Zeit die Lage α; bei konstanter Gesammtkraft gehe nach einer Zeiteinheit α in β über, so hat man

$$[\alpha_1\beta_1] = [\alpha_1\alpha] + [\alpha\beta] + [\beta\beta_1]$$

nach der allgemeinen Definition der Summe. Da nun, wenn man auf diese Weise in alle Glieder der Gleichung (1) substituirt, $[\alpha\beta]$ selbst m-mal vorkommt, so erhält man

$$(2)\quad ([\alpha_1\alpha] + \cdots + [\alpha_m\alpha]) + m[\alpha\beta] + ([\beta\beta_1] + \cdots + [\beta\beta_m]) = p.$$

Bestimmen wir nun den Punkt α als Mitte der Punkte $\alpha_1 \ldots \alpha_m$, und β als die Mitte von $\beta_1 \ldots \beta_m$, so fallen die Summenglieder weg, weil die Gesammtabweichung einer Punktreihe von ihrer Mitte nach § 24 null ist, und man hat

$$(3)\qquad m[\alpha\beta] = p \quad \text{oder} \quad [\alpha\beta] = \frac{p}{m}$$

das heisst, wenn wir statt des Namens der Mitte den in der Statik üblichen des Schwerpunktes einführen, und m die Masse des ganzen Vereins nennen:

Der Weg, den der Schwerpunkt in der Zeiteinheit beschreiben würde, wenn die dem Verein einwohnende Gesammtkraft während derselben konstant bliebe,

oder kürzer ausgedrückt

die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist gleich der Gesammtkraft, dividirt durch die Masse.

Da nun dieselbe Gleichung (3) auch stattfinden würde, wenn 47 sämmtliche m Punkte in einem Punkte vereinigt wären, so kann man sagen:

Die Bewegung des Schwerpunktes eines Systems ist dieselbe, als ob die gesammte Masse ihm einwohnte, und sämmtliche Kräfte, die auf das System wirken, auf ihn allein einwirkten.

§ 27. Bemerkung über die Anwendbarkeit der neuen Analyse.

Mit dieser so höchst einfachen Beweisführung ist alles dargestellt, was in den bisherigen Lehrbüchern der Mechanik vermittelst weitläufiger Rechnungsapparate abgeleitet wird, und was wir zum Beispiel in *La Grange, Mécanique analytique p.* 45—48 und 257—262 der letzten Ausgabe*) entwickelt finden. — Und unsere Entwickelung würde noch

*) [Gemeint ist der 1. Band und zwar in der Ausgabe von 1811, s. Oeuvres de Lagrange Bd. XI. Die angeführten Stellen sind: I partie, section III, § 1 und II partie, section III, § 1.]

einfacher ausgefallen sein, wenn wir uns der in den folgenden Kapiteln entwickelten Begriffe und Rechnungsgesetze hätten bedienen können.

Aber der wesentlichste Vorzug unserer Methode ist nicht der der Kürze, sondern vielmehr der, dass jeder Fortschritt in der Rechnung zugleich der reine Ausdruck des begrifflichen Fortschreitens ist, während bei der bisherigen Methode der Begriff durch Einführung dreier willkührlicher Koordinatenaxen gänzlich in den Hintergrund gestellt wird. Und ich kann hoffen, schon durch die hier gegebene Entwickelung diesen Vorzug der neuen Analyse zur Anschauung gebracht zu haben, obgleich derselbe bei jedem Fortschritt in unserer Wissenschaft in ein immer helleres Licht treten wird, und erst nach Vollendung des Ganzen in seiner vollen Klarheit hervortreten kann.

Zweites Kapitel.

Die äussere Multiplikation der Strecken.

§ 28 — 30. Erzeugniss der Fortbewegung in der Geometrie, vorbereitende Betrachtung.

§ 28.

Wir gehen zuerst von der Geometrie aus, um aus ihr die Analogie zu gewinnen, nach welcher die abstrakte Wissenschaft fortschreiten muss, und sogleich eine anschauliche Idee vor Augen zu haben, welche uns durch die unbekannten und oft beschwerlichen Wege der abstrakten Entwickelung geleite. Wir gelangen von der Strecke zu einem räumlichen Gebilde höherer Stufe, wenn wir die ganze Strecke, das heisst jeden Punkt derselben | eine neue der ersteren ungleichartige 48 Strecke beschreiben lassen, so dass also alle Punkte eine gleiche Strecke konstruiren. Der so erzeugte Flächenraum hat die Gestalt eines Spathecks (Parallelogramms). Setzen wir nun zwei solche Flächenräume, die derselben Ebene angehören, als gleich bezeichnet, wenn man beim Uebergang aus der Richtung der bewegten Strecke in die Richtung der durch die Bewegung konstruirten, beidemale nach derselben Seite hin (zum Beispiel beidemale nach links hin) abbiegen muss, als ungleich bezeichnet, wenn nach entgegengesetzter, so ergiebt sich sogleich nachstehendes eben so einfache als allgemeine Gesetz:

Wenn in der Ebene eine Strecke sich nach einander um beliebige Strecken fortbewegt, so ist der gesammte dadurch beschriebene Flächenraum (wenn man die Vorzeichen der einzelnen Flächentheile in der angegebenen

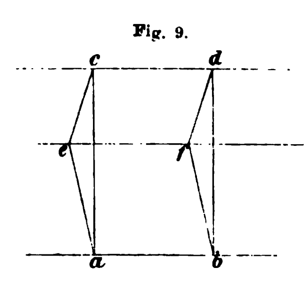
Weise setzt) eben so gross, als ob sie sich um die Summe jener Strecken fortbewegt hätte.

Oder:

Wenn in der Ebene eine Strecke sich zwischen zwei festen Parallelen fortbewegt, so dass sie zu Anfang in der einen, zuletzt in der andern liegt, so ist der dadurch erzeugte gesammte Flächenraum stets gleich gross, auf welchem (geraden oder gebrochenen) Wege sie sich auch dahin bewegt haben mag, sobald man nur das angenommene Zeichengesetz festhält.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem bekannten Satze, dass Parallelogramme, die von derselben Grundseite aus bis nach derselben Parallelen hin sich erstrecken, gleichen Flächenraum haben. Wie hieraus jener Satz hervorgeht, ergiebt sich leicht aus der Figur (vgl. Fig. 9). Betrachtet man nämlich zuerst die unendlichen geraden Linien ab und cd als die festen Parallelen, und vergleicht die Flächenräume, welche entstehen, wenn sich ab einerseits um die Strecke ac, andererseits um die gebrochene Linie aec bewegt, so ist der Anblick der Figur hinreichend, um sich vermittelst des angeführten Satzes von deren Gleichheit zu überzeugen. Aber ebenso, wenn man die Parallelen ab und ef als die festen betrachtet, und die Flächenräume vergleicht, welche entstehen, wenn sich ab einestheils um ae, anderntheils um ac und dann um ce fortbewegt, so überzeugt man 49 sich leicht von der Richtigkeit des obigen Satzes auch für diesen Fall, wenn man nur festhält, dass die Flächenräume, welche durch Bewegung der Strecke ab nach den Richtungen ac und ce entstehen, entgegengesetzt bezeichnet sind, zu ihrer Summe also den Unterschied der absoluten Flächenräume haben. Daraus fliesst dann durch wiederholte Anwendung der zu erweisende Satz.

Fig. 9.



§ 29.

Es ist an sich klar, dass die angeführten Sätze (aus denselben Gründen) auch gelten, wenn man in den Spathecken, aber dann auch in allen gleichzeitig, die bewegte Seite und die die Bewegung messende gegen einander austauscht. Also hat man den Satz:

Der Flächenraum, den in der Ebene eine gebrochene Linie beschreibt, ist gleich dem der geraden Linie, welche mit jener gleichen Anfangspunkt und Endpunkt hat,

oder:

Der gesammte Flächenraum, den in einer Ebene die Seiten einer geschlossenen Figur bei ihrer Fortbewegung beschreiben, ist allemal null.

Aus den Sätzen dieses und des vorigen Paragraphen folgt, vermittelst der in der allgemeinen Formenlehre (§ 9) entwickelten Begriffe, dass diejenige Verknüpfung der beiden Strecken a und b, deren Ergebniss der durch die Bewegung der ersten um die zweite erzeugte Flächenraum ist, eine multiplikative sei, weil, wie sich sogleich zeigt, diejenige Beziehung zur Addition für sie gilt, welche eine Verknüpfung als multiplikative bestimmt. Nämlich wählen wir für den Augenblick noch das allgemeine Verknüpfungszeichen ($\frown$) zur Bezeichnung jener Verknüpfungsweise, und schreiben die bewegte Strecke voran, so hat man nach dem vorigen Paragraphen

$$a \frown (b + c) = a \frown b + a \frown c$$

und nach den Sätzen dieses Paragraphen

$$(b + c) \frown a = b \frown a + c \frown a.$$

Und dies waren nach § 9 die Beziehungen, welche eine Verknüpfung als multiplikative bestimmen. Die besondere Eigenthümlichkeit dieser Multiplikation und die darauf begründete Benennungs- und Bezeichnungsweise wollen wir in der streng wissenschaftlichen Darstellung angeben.

§ 30.

In der hier dargestellten Beziehung liegt die beredteste | Rechtfertigung des von uns im vorigen Kapitel aufgestellten Additionsbegriffes. 50 50

In der That, wenn man eine Gleichung hat, deren Glieder Strecken in derselben Ebene, aber von ungleicher Richtung sind, und welche nicht mehr gilt, wenn man statt der Strecken ihre Längen setzt, und so die Gleichung zu einer algebraischen macht, so können wir diese scheinbare Disharmonie zwischen geometrischen und algebraischen Gleichungen sogleich aufheben, wenn wir das ganze System jener Strecken in derselben Ebene fortbewegen, und die dadurch entstehenden Flächenräume in die Gleichung einführen, oder anders ausgedrückt, wenn wir die Gleichung mit einer Strecke derselben Ebene multipliciren. Für die so entstehenden Flächenräume gilt nun, wie wir soeben nachwiesen, die angenommene Gleichung auch in algebraischer Weise, sobald man nur das angegebene Zeichengesetz beobachtet. Auch ist klar, dass erst jetzt, da die Flächenräume als Theile derselben Ebene einander gleichartig geworden sind, der Begriff der algebraischen Addition anwendbar sein kann.

Jene scheinbare Disharmonie besteht indessen noch fort, wenn die Strecken nicht alle in einer Ebene liegen, eben weil dann die durch Fortbewegung entstandenen Flächenräume auch verschiedenen Ebenen angehören, und also selbst noch als verschiedenartig angesehen werden müssen. Offenbar wird diese Verschiedenartigkeit nun aber aufgehoben, wenn man die Gesammtheit jener Flächenräume noch nach einer andern Richtung bewegt, und die dadurch entstehenden Körperräume betrachtet, da diese, als demselben Einen unendlichen Raume angehörig, einander gleichartig sind. Und man übersieht leicht genug, dass, wenn man von der Gleichheit der Spathe (Parallelepipeda)*), welche zwischen denselben parallelen Ebenen liegen, ausgeht, man auf gleiche Weise für sie, wie vorher für die Spathecke (Parallelogramme) die algebraische Gültigkeit der auf die angegebene Weise entstandenen Gleichungen beweisen, und überhaupt die den obigen entsprechenden Sätze aufstellen kann. Nachdem wir so den Begriff der Multiplikation für die Geometrie zur Anschauung gebracht haben, so können wir nun zu unserer | Wissenschaft zurückkehren, | um in ihr den rein abstrakten, von aller Betrachtung des Raumes unabhängigen Weg zu verfolgen.

51
51

A. Theoretische Entwickelung.

§ 31. Erzeugung von Ausdehnungen höherer Stufen.

Im ersten Kapitel betrachteten wir die Ausdehnungen, wie sie durch einfache Erzeugung aus dem Elemente hervorgingen; und die Verknüpfung dieser Ausdehnungen, sofern dadurch wieder Ausdehnungen derselben Gattung, das heisst solche, die ihrerseits wieder durch einfache Erzeugung aus dem Elemente ableitbar sind, entstanden, haben wir vollständig der Betrachtung unterworfen, und nachgewiesen, dass dieselbe als Addition oder Subtraktion aufzufassen sei. Die weitere Entwickelung fordert also die Erzeugung neuer Gattungen der Ausdehnung. Die Art dieser Erzeugung ergiebt sich sogleich analog der Art, wie aus dem Elemente die Ausdehnung erster Stufe erzeugt wurde, indem man nun auf gleiche Weise die sämmtlichen Elemente einer Strecke wiederum einer andern Erzeugung unterwerfen kann; und zwar fordert die Einfachheit der neu zu erzeugenden Grösse die Gleichheit der Erzeugungsweise für alle Elemente, das heisst dass alle Elemente jener Strecke a eine gleiche Strecke b beschreiben. Die eine Strecke a

*) Der Ausdruck Spath statt Parallelepipedum bedarf wohl kaum einer Rechtfertigung; aus ihm ist der Name Spatheck hergeleitet.

erscheint hier als die erzeugende, die andere b als das Mass der Erzeugung, und das Ergebniss der Erzeugung ist, wenn a und b ungleichartig sind, ein Theil des durch a und b bestimmten Systemes zweiter Stufe, muss also als Ausdehnung zweiter Stufe aufgefasst werden.

Wollen wir nun, wie es der Gang der Wissenschaft fordert, dass die Ausdehnung zweiter Stufe zu dem System zweiter Stufe dieselbe Beziehung haben soll, wie die Ausdehnung erster Stufe zu dem System erster Stufe, so muss zuerst das System zweiter Stufe als ein einfaches, das heisst aus gleichartigen Theilen bestehendes angesehen, und in diesem Sinne die Ausdehnung zweiter Stufe als Theil dieses Systems und als wieder Theile desselben in sich enthaltend aufgefasst werden, woraus denn folgt, dass zwei Ausdehnungen zweiter Stufe, welche demselben Systeme zweiter Stufe angehören, als gleichartig erscheinen und daher, wenn sie in demselben Sinne erzeugt sind, zur Summe die Vereinigung beider zu Einem Ganzen haben. Wir bezeichnen nun das auf diese Weise aus a und b entstandene Erzeugniss vorläufig, nämlich so lange, bis wir die Art dieser Verknüpfung näher bestimmt haben, mit $a \frown b$, und verstehen vorläufig „unter $a \frown b$, wo a und b Strecken sind, diejenige Ausdehnung, welche erzeugt wird, wenn jedes Element von a die Strecke b erzeugt, und zwar diese Ausdehnung als ein den übrigen gleichartiger Theil des Systemes zweiter Stufe aufgefasst.“ Diese Definition dehnen wir nun auf beliebig viele Glieder aus, und verstehen vorläufig: „unter $a \frown b \frown c \frown \ldots$, wo a, b, c ... beliebig viele, etwa n, Strecken sind, diejenige Ausdehnung, welche entsteht, wenn jedes Element von a die Strecke b erzeugt, jedes der so entstandenen Elemente die Strecke c erzeugt, und so weiter, und zwar diese Ausdehnung als allen übrigen Theilen desselben Systemes n-ter Stufe gleichartig gesetzt. Wir nennen die so erzeugte Ausdehnung eine Ausdehnung n-ter Stufe.“ 52

§ 32. Die Ausdehnungen höherer Stufen als Produkte.

Da die Ausdehnungen n-ter Stufe, sofern sie demselben Systeme n-ter Stufe angehören, einander gleichartig gesetzt wurden, so gilt für ihre Summe der Begriff, den wir in § 8 für die Summe des Gleichartigen aufgestellt haben, dass sie nämlich, wenn das Gleichartige auch in gleichem (nicht entgegengesetztem) Sinne erzeugt ist, das Ganze sei, zu dem jene gleichartigen Summanden die Theile bilden. Somit gelten auch sämmtliche Gesetze der Addition und Subtraktion für diese Verknüpfung der gleichartigen Ausdehnungen. Um daher die Beziehung der im vorigen Paragraphen dargestellten neuen Verknüpfungsweise

zur Addition aufzufassen, werden wir zunächst die Addition gleichartiger Grössen in Betracht ziehen.

Es ergiebt sich hier unmittelbar, wenn A und A_1 zwei gleichartige und zwar auch in gleichem Sinne erzeugte Ausdehnungsgrössen von beliebiger Stufe sind, und b eine Strecke darstellt, dass allemal

$$(A + A_1) \frown b = A \frown b + A_1 \frown b$$

ist, wo auch wiederum $A \frown b$ und $A_1 \frown b$ gleichartig sind, und wo das Verknüpfungszeichen die neue Verknüpfungsweise darstellen soll. Da nämlich $(A + A_1)$ das Ganze ist aus A und A_1, so bedeutet $(A + A_1) \frown b$ die Gesammtheit der Elemente, welche entstehen, wenn jedes Element von A und von A_1 die Strecke b erzeugt, oder, was dasselbe bedeutet, wenn jedes Element von A die Strecke b erzeugt und ebenso jedes Element von A_1, das heisst: es ist gleich $A \frown b + A_1 \frown b$.

Ebenso folgt aber auch, dass

$$A \frown (b + b_1) = A \frown b + A \frown b_1$$

ist, wenn b und b_1 in gleichem Sinne erzeugt sind. Denn $A \frown (b + b_1)$ 53 bedeutet die Gesammtheit der Elemente, welche hervorgehen, wenn jedes Element von A die Strecke $(b + b_1)$ erzeugt, das heisst wenn jedes Element von A zuerst die Strecke b erzeugt, und dann jedes der um b geänderten Elemente von A die Strecke b_1 erzeugt. Wenn zuerst jedes Element von A die Strecke b erzeugt, so ist die Gesammtheit der so erzeugten Elemente $A \frown b$; alsdann soll jedes der Elemente von A, nachdem es sich um b geändert hat, die Strecke b_1 erzeugen. Nun haben wir aber in § 19 gezeigt, dass, wenn alle Elemente einer Strecke sich um gleich viel ändern, die so hervorgehende Strecke der ersteren gleich sei. Dasselbe werden wir nun auch auf Ausdehnungen beliebiger Stufen übertragen können, da diese nämlich als Verknüpfungen von Strecken dargestellt sind, also als gleich betrachtet werden müssen, wenn die Strecken es sind, durch deren Verknüpfung sie gebildet sind. Also wird die Ausdehnungsgrösse A, nachdem sich alle ihre Elemente um b geändert haben, noch sich selbst gleich geblieben sein. Wenn also alle Elemente von A, nachdem sie sich um b geändert haben, die Strecke b_1 erzeugen, so wird dieselbe Ausdehnungsgrösse hervorgehen, als wenn alle Elemente von A unmittelbar die Strecke b_1 erzeugt hätten, das heisst, es wird die Ausdehnungsgrösse $A \frown b_1$ hervorgehen. Also werden im Ganzen die Ausdehnungen $A \frown b$ und $A \frown b_1$ erzeugt, und ihre Gesammtheit wird gleich $A \frown (b + b_1)$ sein, das heisst

$$A \frown (b + b_1) = A \frown b + A \frown b_1.$$

Es ist klar, dass man durch wiederholte Anwendung dieses Be-

ziehungsgesetzes dasselbe auf beliebig viele Faktoren ausdehnen kann. Da dies Gesetz nach § 9 das Grundgesetz der Multiplikation ist, so werden wir sagen, die neue Verknüpfungsweise habe zur Addition des in gleichem Sinne erzeugten die multiplikative Beziehung; somit werden auch alle daraus abgeleiteten Gesetze (§ 10) hier gelten, und namentlich das Grundgesetz auch bestehen bleiben, wenn einige der Grössen negativ, also mit den positiven in entgegengesetztem Sinne erzeugt sind. Nun haben wir das in gleichem und das in entgegengesetztem Sinne erzeugte unter dem Namen des Gleichartigen zusammengefasst (§ 8), und werden also sagen können, unsere Verknüpfungsweise habe überhaupt zur Addition des Gleichartigen die Beziehung, welche der Multiplikation im Verhältniss zur Addition zukomme*). Hiermit ist 54 nun unsere Verknüpfung nach § 12 als Multiplikation nachgewiesen, und wir führen daher für sie auch sogleich die multiplikative Bezeichnung ein.

Es ergiebt sich nun unmittelbar aus dem im vorigen Paragraphen gegebenen Begriffe dieser Verknüpfungsweise, „dass ein Produkt, in welchem zwei Faktoren gleichartig, oder überhaupt in welchem die n Faktoren von einander abhängig sind, das heisst einem System von niederer Stufe als der n-ten angehören, als null zu betrachten ist;" hierzu gehört auch der Fall, wo einer der Faktoren null ist, sofern einerseits die Null immer als abhängig gedacht werden kann, andererseits das mit ihr gebildete Produkt null ist. Aber auch umgekehrt folgt, „dass, wenn die Faktoren von einander unabhängig sind, das Produkt immer einen geltenden Werth habe," indem es dann einen bestimmten Theil jenes Systemes n-ter Stufe darstellt.

Es bleibt uns nur noch übrig, zu zeigen, dass jene Beziehung auch für die Addition ungleichartiger Strecken gültig sei. Dies darzuthun soll nun die Aufgabe der folgenden Paragraphen sein.

§ 33, 34. **Grundgesetz der äusseren Multiplikation.**

§ 33.

Diese allgemeine Beziehung beruht bei zwei Faktoren wesentlich auf dem Satze, dass wenn b und b_1 gleichartige Strecken sind,

$$(a + b_1) . b = a . b, \quad \text{und} \quad b . (a + b_1) = b . a$$

sei. Es sei, um dies zu erweisen, $a = [\alpha\beta]$, wo α und β Elemente

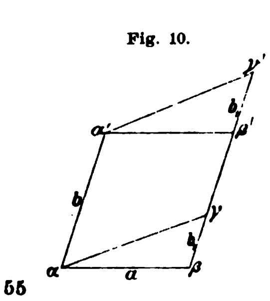
*) Vgl. hier überall § 12, wo das gleiche Eingehen der Theile in die Verknüpfung zum Princip der Entwickelung gemacht ist.

sind (vgl. Fig. 10), und $b_1 = [\beta\gamma]$, also $a + b_1 = [\alpha\gamma]$ nach der Definition der Summe (§ 19). Ferner sei

$$b = [\alpha\alpha'] = [\beta\beta'] = [\gamma\gamma'].$$

Nach dieser Bezeichnung ist nun die Ausdehnung $[\alpha\beta\beta'\alpha']$, wenn wir darunter die von den Strecken $\alpha\beta$, $\beta\beta'$, $\beta'\alpha'$, $\alpha'\alpha$ begränzte Ausdehnung verstehen, gleich $a . b$ und die Ausdehnung $[\alpha\gamma\gamma'\alpha']$ gleich $[\alpha\gamma] . b$, das heisst gleich $(a + b_1) . b$, und die Gleichheit dieser beiden Ausdehnungen bleibt also zu erweisen.

Fig. 10.



Vermöge der vorausgesetzten Gleichartigkeit von b und b_1 sind β, γ, β', γ' Elemente desselben Systemes erster Stufe, und wenn wir zunächst voraussetzen, dass b und b_1 auch in gleichem Sinne erzeugt sind (§ 8), so ist $[\beta\gamma]$ in gleichem Sinne erzeugt mit $[\gamma\gamma']$, das heisst γ liegt zwischen β und γ' *), und ebenso ist $[\beta\beta']$ in gleichem Sinne erzeugt mit $[\beta'\gamma']$, weil nämlich dies letztere nach § 19 gleich $[\beta\gamma]$ ist, also liegt auch β' zwischen denselben beiden Elementen β und γ', und diese letztern sind also die äussersten von den genannten vieren. Daraus folgt, dass

$$[\alpha\beta\beta'\alpha'] = [\alpha\beta\gamma'\alpha'] - [\alpha'\beta'\gamma']$$

und

$$[\alpha\gamma\gamma'\alpha'] = [\alpha\beta\gamma'\alpha'] - [\alpha\beta\gamma]$$

sei. Nun sind aber die Ausdehnungen $[\alpha\beta\gamma]$ und $[\alpha'\beta'\gamma']$ einander gleich, weil die letztere aus der ersteren durch Aenderung aller Elemente um die Strecke b hervorgeht, und dabei nach § 19 alle Strecken gleich bleiben, also auch die Ausdehnungen zweiter Stufe, indem jede solche nur eine Gesammtheit von Strecken darstellt. Somit werden auch die Ausdehnungen $[\alpha\beta\beta'\alpha']$ und $[\alpha\gamma\gamma'\alpha']$ einander gleich sein, da sie aus dem Gleichen auf dieselbe Weise entstanden sind; das heisst

$$a . b = (a + b_1) . b \text{ **)}.$$

Dieser Beweis ist zunächst nur für den Fall geführt, dass b und b_1 in gleichem Sinne erzeugt sind; um die Gültigkeit desselben Gesetzes auch für den Fall der in entgegengesetztem Sinne erfolgten Erzeugung darzuthun, sei $a + b_1 = c$, so ist $a = c - b_1$ und wir erhalten

$$c . b = (c - b_1) . b$$

oder

$$= (c + (-b_1)) . b,$$

*) Die Bedeutung des hier gebrauchten bildlichen Ausdrucks in der abstrakten Wissenschaft ist wohl an sich klar.

**) Es ist leicht zu sehen, dass dies nur der auf die abstrakte Wissenschaft übertragene Beweis für den entsprechenden geometrischen Satz ist.

das heisst, das eben dargestellte Gesetz gilt auch, wenn die eben durch b und b_1 bezeichneten Strecken in entgegengesetztem Sinne erzeugt sind, also überhaupt, wenn sie gleichartig sind.

Ganz genau auf dieselbe Weise folgt nun auch, dass, wenn b und b_1 gleichartig sind, auch

$$b \,.\, (a + b_1) = b \,.\, a$$

sei. Ist hier a gleich Null, so hat man $b \,.\, b_1$ gleich Null, das heisst, das Produkt zweier gleichartigen Strecken ist null, wie dies auch aus dem Begriff unmittelbar hervorgeht.

§ 34.

56

Dasselbe lässt sich nun auch erweisen, wenn in einem Produkte aus mehreren Faktoren irgend zwei auf einander folgende Faktoren auf die angegebene Weise zerstückt sind. Nämlich da das Gleiche mit dem Gleichen auf dieselbe Weise verknüpft wieder Gleiches giebt (§ 1), so muss auch, wenn P irgend eine Faktorenreihe bezeichnet,

$$(a + b_1) \,.\, b \,.\, P = a \,.\, b \,.\, P$$

sein.

Demnächst lässt sich zeigen, dass bei Vertauschung der Faktoren der absolute Werth derselbe bleibt. Nämlich $a \,.\, b \,.\, c \ldots$ bedeutet die Ausdehnung, welche aus einem als Ursprungselement gesetzten Elemente dadurch hervorgeht, dass dasselbe zuerst die Strecke a erzeugt, dann jedes Element dieser Strecke die Strecke b, dann jedes so entstandene Element die Strecke c erzeugt und so weiter. Alle Elemente der so gebildeten Ausdehnung gehen somit aus dem angenommenen Ursprungselemente durch Aenderungen hervor, welche mit $a, b, c \ldots$ gleichartig sind, aber deren Grösse nicht überschreiten, und die Gesammtheit der so erzeugbaren Elemente ist eben jene Ausdehnung. Da es nun auch für's Resultat gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge diese Aenderungen sich an einander schliessen (§ 17), so wird man von demselben Urprungselemente aus bei beliebiger Reihenfolge der Faktoren $a, b, c \ldots$ stets zu derselben Gesammtheit von Elementen gelangen, welche die Ausdehnung konstituiren; das heisst alle solche Produkte werden denselben absoluten Werth darstellen. Es werden also die früher für die ersten beiden Faktoren solcher Produkte erwiesenen Gesetze für je zwei andere Faktoren auch gelten, sofern nur die Vorzeichen entsprechend gewählt werden dürfen.

Die Vorzeichen können nur in so fern willkührlich gewählt werden, als sie noch nicht durch Definitionen bestimmt sind. Auf dieselbe

Weise nun, wie wir für zwei Faktoren die Zeichen nur so wählen konnten, dass auch dem Zeichen nach

$$(a + b_1) . b = a . b \quad \text{und} \quad b . (a + b_1) = b . a$$

wurde, auf dieselbe Weise werden wir auch, wenn beliebig viele Faktoren vorhergehen, diese Zeichenbestimmung festhalten, und also nicht nur dem absoluten Werthe nach, sondern auch dem Zeichen nach

$$P . (a + b_1) . b = P . a . b \quad \text{und} \quad P . b . (a + b_1) = P . b . a$$

57 setzen müssen, wo P ein Produkt von beliebig vielen Faktoren vorstellt. Da dieselbe Beziehung auch fortbesteht, wenn noch beliebig viele Faktoren folgen, so haben wir für diese besondere Art der Multiplikation das Gesetz gewonnen, „dass man, wenn ein Faktor einen Summanden enthält, welcher mit einem der angränzenden Faktoren gleichartig ist, diesen Summanden weglassen kann,“ worin denn schon liegt, dass, wenn zwei an einander gränzende Faktoren gleichartig werden, das Produkt null wird.

Dies Gesetz, in Verbindung mit der allgemeinen multiplikativen Beziehung zur Addition des Gleichartigen, bedingt alle ferneren Gesetze dieser besonderen Art der Multiplikation, die wir hier betrachten, und kann daher als Grundgesetz für dieselbe aufgefasst werden. Wir nennen diese Art der Multiplikation eine *äussere*, und wählen als specifisches Zeichen für sie den Punkt, während wir das unmittelbare Aneinanderschreiben als allgemeine Multiplikationsbezeichnung festhalten*).

§ 35, 36. Hauptgesetze der äusseren Multiplikation.

§ 35.

Aus diesem Grundgesetze nun und jenem Beziehungsgesetze leiten wir die übrigen Gesetze dieser Multiplikation auf rein formelle Weise ab.

Man hat durch Kombination beider, wenn P und Q beliebige Faktorenreihen, a_1 und b_1 aber Strecken bezeichnen, die [beziehungsweise] mit a und b gleichartig sind,

$$\begin{aligned} P . (a + a_1 + b_1) . b . Q &= P . (a + a_1) . b . Q \\ &= P . a . b . Q + P . a_1 . b . Q \\ &= P . a . b . Q + P . (a_1 + b_1) . b . Q; \end{aligned}$$

*) Ich habe hier die in der ersten Auflage gewählte Bezeichnung beibehalten. In der Ausdehnungslehre von 1862, so wie in meinen späteren Arbeiten habe ich für die äussere Multiplikation, wie überhaupt für die auf ein Hauptgebiet bezügliche, die scharfe Klammer als charakteristische Bezeichnung gewählt. (1877.)

oder da $a_1 + b_1$ jede Strecke vorstellen kann, welche in dem durch a und b bestimmten Systeme zweiter Stufe liegt (nach dem Begriffe dieses Systems*)), so hat man, so lange a, b, c demselben Systeme zweiter Stufe angehören,

$$P.(a+c).b.Q = P.a.b.Q + P.c.b.Q;$$

das heisst es gilt auch für diesen Fall noch die allgemeine multiplikative Beziehung zur Addition.

Hieraus nun folgt sogleich, dass

$$P.a.b.Q = -P.b.a.Q$$

ist, oder dass man zwei an einander gränzende Faktoren eines äusseren Produktes, wenn sie Strecken sind, nur mit Zeichenwechsel vertauschen darf. In der That, da

58

$$P.(a+b).(a+b).Q = 0$$

ist, weil zwei an einander gränzende Faktoren gleichartig sind, so | erhält man mit Anwendung des soeben erwiesenen Gesetzes, und weil $P.a.a.Q$ und $P.b.b.Q$ ebenfalls null sind,

58

$$P.a.b.Q + P.b.a.Q = 0,$$

das heisst

$$P.a.b.Q = -P.b.a.Q.$$

Ich werde dies merkwürdige Resultat nachher noch ausführlicher durchgehen, um jetzt zu den wichtigen Folgerungen überzugehen, welche aus diesem Vertauschungsgesetze fliessen.

Es ergiebt sich daraus, dass, wenn ein einfacher Faktor (so nennen wir nämlich einen Faktor, der eine Ausdehnung erster Stufe oder eine Strecke darstellt), zwei solche Faktoren überspringt, das Produkt gleiches Zeichen behält, indem die zweimalige Aenderung des Vorzeichens wieder zu dem ursprünglichen Vorzeichen zurückführt; also auch, dass überhaupt, wenn ein einfacher Faktor eine gerade Anzahl einfacher Faktoren überspringt, das Vorzeichen des Produktes dasselbe bleibt, hingegen, wenn eine ungerade, sich in das entgegengesetzte verwandeln muss, sobald der ganze Ausdruck denselben Werth behalten soll. Somit müssen die Gesetze, welche für zwei an einander gränzende Faktoren gelten, auch für [zwei] getrennte fortbestehen; denn man kann den einen der beiden getrennten Faktoren an den andern heranrücken, wobei sich das Vorzeichen entweder ändert oder nicht, je nachdem er dabei eine ungerade oder gerade Anzahl einfacher Faktoren überspringt, kann nun die Gesetze, die für zwei an einander gränzende Faktoren gelten,

*) Vgl. § 16 [und § 20].

anwenden, und dann in allen Produkten wieder jenen Faktor auf seine alte Stelle zurückrücken, wobei das Vorzeichen offenbar jedesmal wieder das ursprüngliche werden muss*).

Also wenn irgend zwei einfache Faktoren eines Produktes aus Stücken bestehen, welche demselben Systeme zweiter Stufe angehören, so gilt das Beziehungsgesetz der Multiplikation zur Addition, und da, 59 wenn zwei einfache Faktoren gleichartig werden, nach § 33 ihr Produkt null ist, so folgt, dass man Stücke, welche den übrigen Faktoren gleichartig sind, aus einem Faktor weglassen oder ihm hinzufügen kann, ohne den Werth des Produktes zu ändern. Daraus folgt sogleich, 59 was auch schon nach § 32 aus dem Begriffe hervorging, dass das Produkt von n Strecken, die von einander abhängig sind, null ist; denn eine derselben muss sich dann als Summe von Stücken darstellen lassen, die den andern gleichartig sind; und diese kann man dann nach dem eben erwiesenen Satze in dem Produkte weglassen, also statt jener Summe Null setzen, wodurch das Produkt selbst null wird.

§ 36.

Aus dem Hauptsatze des vorigen Paragraphen folgt der allgemeine Satz, dass,

wenn in einem Produkte von n einfachen Faktoren einer derselben zerstückt ist, und zwar so, dass alle Faktoren und Stücke demselben Systeme n-ter Stufe angehören, die multiplikative Beziehung [zur Addition] noch fortbesteht.

Denn es sei $a \,.\, b \ldots (p + q)$ dies Produkt, in welchem die $(n + 1)$ Strecken $a, b, \ldots, p, q$ demselben Systeme n-ter Stufe angehören sollen. Zuerst wollen wir annehmen, dass ein Stück des letzten Faktors nebst den sämmtlichen übrigen Faktoren n unabhängige Strecken darstellen, das heisst, dass sie nicht einem System niederer Stufe (als der n-ten) angehören sollen. Als dies Stück des letzten Faktors sei p angenommen, so muss nach § 20 sich q als eine Summe von Stücken darstellen lassen, welche jenen Strecken gleichartig sind, also

$$q = a_1 + b_1 + \cdots + p_1$$

gesetzt werden können, wenn $a_1, b_1, \ldots, p_1$ beziehlich den Strecken $a, b, \ldots, p$ gleichartig sind. Dann hat man, da $a_1, b_1, \ldots,$ als den

*) Denn änderte es sich vorher nicht, so ändert es sich auch jetzt nicht, da der Faktor wieder dieselbe Faktorenzahl überspringt; änderte es sich vorher aber, so ändert es sich jetzt wieder (aus demselben Grunde), wird also wieder das ursprüngliche.

übrigen Faktoren des Produktes $a\,.\,b \ldots (p+q)$ gleichartig, in dem letzten weggelassen werden können,

$$a\,.\,b \ldots (p+q) = a\,.\,b \ldots (p+p_1)$$

und dies ist nach § 32, da p und p_1 gleichartig sind,

$$= a\,.\,b \ldots p + a\,.\,b \ldots p_1;$$

oder da man in dem letzteren Produkte wieder dem Faktor p_1 die Summanden $a_1 + b_1 + \cdots$ hinzufügen, also statt p_1 wieder q setzen kann, so hat man

$$a\,.\,b \ldots (p+q) = a\,.\,b \ldots p + a\,.\,b \ldots q.$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung ist zunächst nur bewiesen für den Fall, dass $a, b, \ldots$ und eine der Strecken p oder q von einander un- 60 abhängig sind. Sind hingegen $a, b, \ldots$ von einander abhängig oder diese zwar unabhängig, aber beide Strecken p und q, also | auch ihre Summe *60* von ihnen abhängig, so werden beide Seiten jener Gleichung null, weil die Produkte abhängiger Strecken null sind; also besteht auch für diesen Fall jene Gleichung; also besteht sie allgemein, so lange in jenem Produkte von n Faktoren die sämmtlichen Strecken demselben Systeme n-ter Stufe angehören. Da aber nur in diesem Falle die Glieder der rechten Seite gleichartig sind, und bei höheren Stufen der Begriff der Addition nur für gleichartige Summanden festgesetzt ist, so haben wir die multiplikative Beziehung unserer Verknüpfungsweise zur Addition, so weit diese begrifflich bestimmt ist, vollständig dargethan; und es werden also alle Gesetze dieser Beziehung (s. § 10) hier gelten. Sollte sich späterhin ein erweiterter Begriff der Addition ergeben, so würde eine solche Verknüpfung nicht eher als Addition festgestellt sein, als bis auch ihre additive Beziehung zu der bisher dargelegten Multiplikation nachgewiesen ist.

Ich habe schon oben (§ 34) festgesetzt, dass wir das Produkt, zu dem wir hier gelangt sind, ein äusseres nennen, indem wir mit dieser Benennung andeuten wollen, dass diese Art des Produktes nur, sofern die Faktoren aus einander treten, und das Produkt eine neue Ausdehnung darstellt, einen geltenden Werth hat, hingegen, wenn die Faktoren in einander bleiben, gleich Null gesetzt wird*). Die Resultate der Entwickelung können wir in folgendem Satze zusammenfassen:

Wenn man unter dem äusseren Produkte von n Strecken diejenige Ausdehnungsgrösse n-ter Stufe versteht, welche erzeugt wird, wenn jedes Element der ersten Strecke die zweite erzeugt, jedes so erzeugte Element

*) Wie diesem äusseren Produkt ein inneres gegenüberstehe, habe ich in der Vorrede angedeutet.

die dritte, und so fort, und zwar so, dass jede Ausdehnungsgrösse n-ter Stufe als ein den übrigen gleichartiger Theil des Systems n-ter Stufe aufgefasst wird, dem sie angehört: so gelten für dasselbe, sofern Produkte aus n Faktoren nur innerhalb desselben Systems n-ter Stufe betrachtet 61 *werden, alle Gesetze, welche die Beziehung der Multiplikation | zur Addition und Subtraktion ausdrücken, und ausserdem das Gesetz, dass die einfachen Faktoren nur mit Zeichenwechsel vertauschbar sind.*

B. Anwendungen.

§ 37—40. Das Gesetz der Zeichenänderung bei Vertauschung räumlicher Faktoren.

§ 37.

61 Wir haben nun hier den Zusammenhang der Multiplikation mit dem bisherigen Begriff der Addition vollständig dargelegt, und gehen daher zu den Anwendungen über.

Die Anwendung auf die Geometrie haben wir der Hauptsache nach in § 28—30 vorweggenommen. Wir haben jedoch noch die jetzt eingeführten Benennungen und Bezeichnungen auf jene Darstellung zu übertragen.

Es erscheint danach nun der Flächenraum des Spathecks (Parallelogramms) als äusseres Produkt zweier Strecken, wenn man nämlich zugleich die Ebene mit festhält, welcher dasselbe angehört, und ebenso der Körperraum des Spathes (Parallelepipedons) als äusseres Produkt dreier Strecken, ohne dass man hier nöthig hat, eine Bestimmung hinzuzufügen, da der Raum stets ein und derselbe ist. Jene zwei Strecken bildeten dann die Seiten des Spathecks, und diese drei die Kanten des Spathes, und zwar nahmen wir dort die Strecke, durch deren Bewegung das Spatheck entstand, als ersten, die die Bewegung messende als zweiten Faktor an, und setzten zwei Spathecke als gleich bezeichnet, wenn der zweite Faktor vom ersten aus betrachtet nach derselben Seite hin liegt, wenn nach entgegengesetzter, als entgegengesetzt bezeichnet. Hierin liegt schon das Gesetz, dass

$$a \,.\, b = - b \,.\, a$$

ist; denn wenn b von a aus betrachtet nach links liegt, so muss a von b aus betrachtet nach rechts hin liegen und umgekehrt. Allein um diesem Vertauschungsgesetz, was die hier aufgestellte Multiplikation auf eine so auffallende Weise von der gewöhnlichen ausscheidet, eine noch anschaulichere Basis zu geben, will ich auch jenes allgemeinere



Zeichengesetz, von dem dieses eine specielle Folgerung enthält, auf geometrische Weise ableiten.

Zuerst ist aus dem Begriff des Negativen klar, dass, wenn Grundseite und Höhenseite*) eines Spathecks gleiche Richtungen**) beibehalten, auch der Flächenraum gleichbezeichnet bleibt, wie sich im Uebrigen auch jene Seiten vergrössern oder verkleinern mögen. Wenn 62 ferner der Endpunkt der Höhenseite in einer mit der Grundseite, oder 62 der Endpunkt der Grundseite in einer mit der Höhenseite parallelen Linie fortrückt, während die jedesmalige andere Seite dieselbe bleibt, so bleibt der Flächeninhalt des Spathecks gleich, also auch gleichbezeichnet. Von diesen beiden Voraussetzungen gehen wir aus, um die geometrische Begründung des allgemeinen Zeichengesetzes zu liefern.

Zunächst ist klar, dass bei den angegebenen Veränderungen die Höhenseite, von der Grundseite aus betrachtet, stets nach derselben Seite hin liegend bleibt, das heisst, wenn man zuerst in der Richtung der Grundseite, und dann in der der Höhenseite fortschreitet, so muss man in dem auf jene Weise veränderten Spatheck nach derselben Seite hin abbiegen, wie in dem ursprünglichen. Da man nun durch jene Veränderungen, bei welchen das Zeichen sich nicht ändert, die Höhenseite sowohl, als nachher die Grundseite in jede beliebige Lage bringen kann (nur dass sie beide nicht zusammenfallen dürfen), dabei aber immer die Höhenseite, von der Grundseite aus betrachtet, nach derselben Seite hin liegend bleibt, und man endlich auch dieselben, wenn man ihre Richtungen festhält, beliebig vergrössern und verkleinern kann, ohne dass sich das Vorzeichen ändert, so folgt daraus, dass alle Spathecke, deren Höhenseiten, von der Grundseite aus betrachtet, nach derselben Seite hin liegen, auch gleich bezeichnet sein müssen. Dass nun umgekehrt diejenigen Spathecke, in welchen die Höhenseiten, von den Grundseiten aus betrachtet, nach entgegengesetzten Seiten liegen, auch entgegengesetzt bezeichnete Flächenräume darstellen, folgt sogleich nach dem soeben erwiesenen, wenn es nur für irgend zwei bewiesen ist; für $a \,.\, b$ und $a \,.\, (-b)$ ergiebt sich dies aber sogleich aus dem Begriff des Negativen. Somit ist jenes allgemeine Zeichengesetz auch auf rein geometrischem Wege vollständig erwiesen.

Für Spathe würden wir auf ganz entsprechende Weise, wenn wir hier die erste, zweite und dritte Kante unterscheiden, das Gesetz aufstellen können:

*) Diesen Namen gebrauche ich in Ermangelung eines bessern, um die der Grundseite anliegende Seite (den zweiten Faktor) zu bezeichnen.

**) Entgegengesetzte Richtungen werden natürlich nicht als gleiche gerechnet.

Die Körperräume zweier Spathe sind gleich oder entgegengesetzt bezeichnet, je nachdem (um es in einem Bilde auszudrücken), wenn man den Körper in die Richtung der ersten Kante gestellt denkt (die Füsse nach deren Anfangspunkt zu, den Kopf nach dem Endpunkt), man, um von 63 *der Richtung der | zweiten Kante in die der dritten überzugehen, nach derselben, oder nach verschiedenen Seiten abbiegen muss.*

§ 38.

Um hiervon noch eine anschaulichere Idee zu geben, wollen wir die Aufgabe stellen:

„Ein Spatheck in ein ihm gleiches (und gleich bezeichnetes) zu verwandeln, dessen Grundseite (in derselben Ebene) gegeben ist, aber der des gegebenen Spathecks nicht parallel ist."

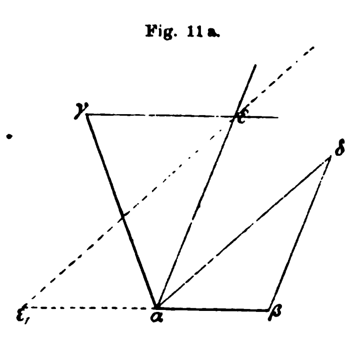


Fig. 11 a.

Es sei $\alpha\beta$ die Grundseite, $\alpha\gamma$ die Höhenseite des gegebenen Spathecks, $\alpha\delta$ die Grundseite des gesuchten (vgl. Fig. 11 a). Man ziehe von α die Parallele mit $\beta\delta$, von γ mit $\alpha\beta$, und nenne den Durchschnitt beider ε: so ist $\alpha\varepsilon$ die Höhenseite eines solchen Spathecks, welches der Aufgabe Genüge leistet. Denn es ist

$$[\alpha\beta] . [\alpha\gamma] = [\alpha\beta] . [\alpha\varepsilon],$$

weil $\gamma\varepsilon$ mit $\alpha\beta$ parallel ist, und

$$[\alpha\beta] . [\alpha\varepsilon] = [\alpha\delta] . [\alpha\varepsilon],$$

weil $\beta\delta$ parallel $\alpha\varepsilon$ ist, also auch in der That

$$[\alpha\delta] . [\alpha\varepsilon] = [\alpha\beta] . [\alpha\gamma].$$

Wollte man die gesammte Schaar der Spathecke haben, welche der Aufgabe genügen, so hätte man noch von ε mit $\alpha\delta$ die Parallele zu ziehen, und den Punkt ε in dieser Parallelen veränderlich zu setzen.

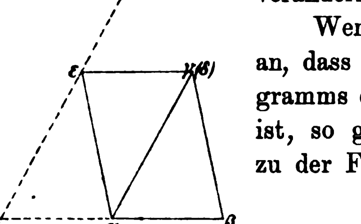


Fig. 11 b.

Wendet man diese Auflösung auf den Fall an, dass die Grundseite des gesuchten Parallelogramms der Höhenseite des gegebenen identisch ist, so gelangt man durch reine Konstruktion zu der Formel

$$a . b = - b . a.$$

In der That fällt dann δ auf γ (vgl. Fig. 11 b), und zieht man dann von ε die Parallele mit $\alpha\delta$, welche $\alpha\beta$ in ε_1 schneide, so überzeugt man sich leicht, dass

$$[\alpha\varepsilon_1] = [\beta\alpha] = -[\alpha\beta]$$

ist. Die obige Auflösung ergiebt daher

$$[\alpha\beta]\,.\,[\alpha\gamma] = [\alpha\gamma]\,.\,[\alpha\varepsilon] = [\alpha\gamma]\,.\,[\alpha\varepsilon_1];$$

also statt $[\alpha\varepsilon_1]$ seinen Werth $-[\alpha\beta]$ gesetzt, und das negative Zeichen dem ganzen Produkte beigelegt:

$$[\alpha\beta]\cdot[\alpha\gamma] = [\alpha\gamma]\cdot(-[\alpha\beta]) = -[\alpha\gamma]\cdot[\alpha\beta].$$

Da man sich dies Gesetz des Zeichenwechsels bei der Vertauschung der Faktoren eines äusseren Produktes nicht fest genug einprägen kann, indem es den gewöhnlichen Vorstellungen zu widerstreiten scheint, so will ich noch auf eine Analogie hindeuten, welche aber hier nur als Abschweifung aufgefasst sein will. Nämlich den Flächeninhalt eines Spathecks $a\,.\,b$ kann man, wenn der von a und b eingeschlossene Winkel mit (ab) und die Längen der Strecken a und b mit $\underline{a}$ und $\underline{b}$ bezeichnet werden, ausdrücken durch die Formel: 64 64

$$a\,.\,b = \underline{a}\,\underline{b}\,\sin(ab),$$

und

$$b\,.\,a = \underline{b}\,\underline{a}\,\sin(ba),$$

wo das Produkt der Längen das gewöhnliche, also $\underline{a}\,\underline{b} = \underline{b}\,\underline{a}$ ist. Da nun die Winkel (ab) und (ba) entgegengesetzt sind, und die Sinusse entgegengesetzter Winkel gleichfalls entgegengesetzt sind, so ist

$$\sin(ab) = -\sin(ba),$$

und also auch hiernach

$$a\,.\,b = -b\,.\,a.$$

§ 39.

Mit der hier gegebenen Entwickelung steht nun die Darstellung des Rechtecks durch das Produkt seiner Seitenlängen nicht im Widerspruch, sobald man nur die blossen Seitenlängen, in irgend einem gemeinschaftlichen Mass gemessen, als Faktoren dieses Produktes festhält, und nur meint, dass der absolute (vom Zeichen unabhängige) Flächenraum des Rechtecks so oft das Quadrat dieses Masses enthalten solle, als das Produkt jener Zahlen beträgt. Will man aber damit noch mehr ausdrücken, und namentlich behaupten, dass der Flächenraum jenes Rechtecks an sich, das heisst auch seinem Zeichen nach, dem Produkte jener Seiten gleichgesetzt werden könne, so steht dies, wenn man eben für das Produkt noch die Eigenthümlichkeit des algebraischen Produktes festhalten will (wie bisher immer geschehen ist), mit den soeben erwiesenen Wahrheiten in offenbarem Widerspruch. Es erscheint vielmehr das Parallelogramm (also auch das Rechteck) nothwendiger Weise als ein solches Produkt seiner Seiten, in welchem

die Vertauschung seiner Faktoren nur mit Zeichenwechsel stattfinden könne. Wie leicht übrigens diese Auffassung über bedeutende Schwierigkeiten, unter welchen sich selbst die ausgezeichnetsten Mathematiker
65 bisweilen verwirrt haben, hinweghilft, wird sich durch | folgendes Beispiel zeigen.

La Grange führt in seiner *mécanique analytique**) einen Satz von Varignon an, dessen er sich zur Verknüpfung der verschiedenen Principien der Statik bedient, und welcher nach ihm darin besteht „dass, wenn man von irgend einem in der Ebene eines Parallelogramms genommenen Punkte Perpendikel fällt auf die Diagonale und auf die beiden Seiten, welche diese Diagonale einfassen (*comprennent*), das Produkt der Diagonale in ihr Perpendikel gleich ist der Summe der Produkte beider Seiten in ihre beziehlichen Perpendikel, wenn der Punkt ausserhalb des Parallelogramms (*hors du parallelogramme*) fällt oder ihrem Unterschiede, wenn er innerhalb des Parallelogramms fällt."

Dieser Satz ist, wie sich sogleich zeigen wird, unrichtig, indem das erstere nicht stattfindet, wenn der Punkt ausserhalb des Parallelogramms fällt, sondern wenn er ausserhalb der beiden Winkelräume fällt, welche der von jenen beiden Seiten eingeschlossene Winkel und sein Scheitelwinkel bilden, hingegen das letztere, wenn innerhalb. Es versteht sich von selbst, dass das Produkt dabei im gewöhnlichen algebraischen Sinne genommen ist. Betrachtet man nun aber jene Produkte näher, so stellen sie in der That die Flächenräume der Parallelogramme, welche jene beiden Seiten und die Diagonale zu Grundseiten haben, und deren der Grundseite gegenüberliegende Seiten durch den angenommenen Punkt gehen, ihrem absoluten Werthe nach, das heisst unabhängig vom Zeichen, dar. Hält man hingegen das Zeichen dieser Flächenräume fest, so gilt der Satz ohne Unterscheidung der einzelnen Fälle sogleich allgemein, indem der Flächenraum, der die Diagonale zur Grundseite hat, stets die Summe ist der Flächenräume, die die beiden andern Seiten zu Grundseiten haben; und zwar ist der Beweis dieses Satzes nach unserer Analyse auf der Stelle gegeben. Denn ist $\alpha\delta$ die Diagonale des Parallelogramms, und sind $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ die beiden sie einschliessenden Seiten, ε endlich der willkührliche Punkt, so ist

$$[\alpha\delta] = [\alpha\beta] + [\alpha\gamma],$$

weil nämlich $[\beta\delta] = [\alpha\gamma]$ ist, und also nach dem einfachsten Multiplikationsgesetz

66 $$[\alpha\delta] \cdot [\alpha\varepsilon] = [\alpha\beta] \cdot [\alpha\varepsilon] + [\alpha\gamma] \cdot [\alpha\varepsilon],$$

was zu erweisen war. Will man dann den Satz für absolute Flächen

*) P. 14 der neuen Ausgabe [I partie, section I, No. 12].

räume aussprechen, so hat man nur die Fälle zu unterscheiden, wo der Punkt ε von jenen beiden Seiten des Parallelogramms aus betrachtet nach derselben, und wo nach verschiedenen Seiten hin liegt, woraus sich dann leicht der Satz in der oben gegebenen verbesserten Form ergiebt.

§ 40.

Ich will die Anwendungen auf die Geometrie nun mit der Lösung der obigen Aufgabe (§ 38) für den dort nicht mit aufgenommenen Fall schliessen, nämlich ein Spatheck in ein ihm gleiches zu verwandeln, dessen Seiten mit denen des gegebenen parallel sind, aber dessen eine Seite zugleich ihrer Länge nach gegeben ist. Ich wähle den Weg, wie ihn unsere Analyse darbietet.

Es sei $a \,.\, b$ das gegebene Spatheck, a_1 die mit a parallele Seite des gesuchten und b_1 die gesuchte mit b parallele Seite desselben, für welche die Gleichung

$$a \,.\, b = a_1 \,.\, b_1$$

bestehen soll, oder da $a_1 \,.\, b_1 = - b_1 \,.\, a_1$ ist,

$$a \,.\, b + b_1 \,.\, a_1 = 0.$$

Da man dem Faktor a das Stück b_1, dem Faktor b_1 das Stück a hinzufügen kann, weil diese Stücke mit dem jedesmaligen andern Faktor gleichartig sind, also ihre Hinzufügung das Produkt nicht ändert, so hat man

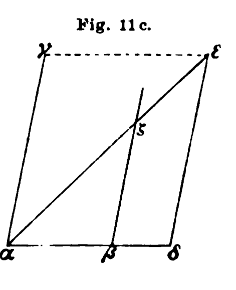
$$(a + b_1) \,.\, b + (a + b_1) \,.\, a_1 = 0,$$

oder

$$(a + b_1) \,.\, (a_1 + b) = 0,$$

das heisst $(a + b_1)$ und $(a_1 + b)$ müssen parallel sein. Hierin nun liegt die folgende Konstruktion und deren Beweis; nämlich wenn $a = [\alpha\beta]$, $b = [\alpha\gamma]$ ist (vgl. Fig. 11c), und $a_1 = [\alpha\delta]$, wo α, β, δ in Einer geraden Linie liegen, so mache man $\delta\varepsilon$ gleich lang und parallel mit $\alpha\gamma$, also $[\alpha\varepsilon]$ gleich $(a_1 + b)$, ziehe von β die Parallele mit $\alpha\gamma$, welche $\alpha\varepsilon$ in ζ schneide, so ist $[\beta\zeta]$ die gesuchte Strecke b_1*).

Fig. 11c.



*) Es versteht sich von selbst, dass man diese Aufgabe auch lösen kann durch zweimalige Anwendung der in § 38 gegebenen Auflösung, indem man eine nicht parallele Grundseite zu Hülfe nimmt.

§ 41. Das statische Moment.

67 In der Statik und Mechanik wird der Begriff des äusseren Produktes repräsentirt durch den Begriff des Momentes.

In der That können wir das Moment einer Kraft in Bezug auf einen Punkt definiren als äusseres Produkt, dessen erster Faktor die Strecke ist, welche von jenem Punkte (dem Beziehungspunkte) nach einem Punkte der geraden Linie, in welcher die Kraft wirkt, gezogen ist, und dessen zweiter Faktor die Strecke ist, welche die Kraft darstellt. Ist also ϱ der Beziehungspunkt, α der Angriffspunkt, das heisst der Punkt, welcher von der Kraft getrieben wird, p die Strecke, welche die Kraft darstellt, so ist das Moment

$$[\varrho\alpha] \cdot p,$$

wobei nach den Gesetzen der äusseren Multiplikation einleuchtet, dass es für das Resultat gleichgültig ist, welchen Punkt in der Wirkungslinie der Kraft man statt α einführen mag; denn es sei β ein anderer Punkt dieser Linie, also $[\alpha\beta]$ gleichartig mit p, so hat man

$$[\varrho\beta] \cdot p = ([\varrho\alpha] + [\alpha\beta]) \cdot p = [\varrho\alpha] \cdot p,$$

weil das Stück $[\alpha\beta]$, als dem zweiten Faktor gleichartig, nach § 35 weggelassen werden darf. Und ebenso ist unter dem Momente einer Kraft in Bezug auf eine Axe $\varrho\sigma$ das äussere Produkt aus drei Faktoren verstanden, dessen erster Faktor die als Strecke genommene Axe, dessen zweiter Faktor die Strecke von irgend einem Punkt der Axe nach irgend einem Punkt in der Wirkungslinie der Kraft, und dessen dritter Faktor die Kraft ist, also

$$[\varrho\sigma] \cdot [\sigma\alpha] \cdot p,$$

oder auch es ist das Produkt der als Strecke genommenen Axe in das auf irgend einen Punkt der Axe bezügliche Moment der Kraft, wobei wieder, aus denselben Gründen wie vorher, gleichgültig ist, welche Punkte man in jenen Linien auswählt.

Es erscheint also das Moment einer Kraft in Bezug auf einen Punkt als Flächenraum eines Spathecks, in Bezug auf eine Axe als Körperraum eines Spathes, und dabei haben überall zwei Kräfte, welche als Strecken gleich sind, nur dann gleiche Momente, wenn sie auch in derselben geraden Linie wirken.

Ferner verstehen wir unter dem Gesammtmoment mehrerer Kräfte, welche in derselben Ebene liegen, in Bezug auf einen Punkt der Ebene die Summe aller auf jenen Punkt bezüglichen Momente derselben, und 68 ebenso unter dem | Gesammtmoment mehrerer Kräfte in Bezug auf eine Axe die Summe aller auf diese Axe bezüglichen Momente. Da

Kraft und Bewegung nach § 25 und 26 durch dieselbe Strecke dargestellt werden, indem die Kraft eben nur die der Bewegung supponirte und also ihr gleich zu setzende Ursache ist, so ist schon ohne weiteres klar, was unter dem Moment der Bewegung und unter dem Gesammtmoment mehrerer Bewegungen verstanden ist; doch erinnern wir hier noch einmal daran, dass die Bewegung (nach § 25) nur für die Masseneinheit der Geschwindigkeit gleich gesetzt werden könne, und dass gleiche Bewegungen nur dann gleiche Momente haben, wenn sie in derselben geraden Linie fortschreiten.

Wie leicht sich nun vermittelst unserer Analyse hieraus alle allgemeinen Gesetze der Statik und Mechanik, welche sich auf's Moment beziehen, ableiten lassen, wird die folgende Entwickelung zur Genüge zeigen. Ich bemerke nur noch vorläufig, dass wir im zweiten Abschnitte dieses Theils*) einen noch einfacheren Ausdruck des Momentes und in dem nächsten Kapitel (§ 57) eine Verallgemeinerung des Begriffs des Gesammtmomentes kennen lernen werden.

§ 42, 43. Sätze über das Gesammtmoment. Gleichgewicht fester Körper.

§ 42.

Die Hauptsache bei der Anwendung des Begriffs des Momentes ist, dass das Gesammtmoment aller inneren Kräfte in Bezug auf jede beliebige Axe, und in Bezug auf jeden Punkt gleich Null ist; doch können wir das letztere hier nur beweisen, wenn alles in derselben Ebene liegt**).

Man versteht nämlich unter inneren Kräften bekanntlich solche, welche sich paarweise in der Art entsprechen, dass die Kräfte jedes Paares in derselben geraden Linie wirken und einander entgegengesetzt gleich sind; und wir können sogleich zeigen, dass die Momente jedes solchen Paares in Bezug auf jeden Punkt und jede Axe zusammen null sind. In der That, betrachtet man zum Beispiel in Bezug auf eine Axe jene beiden Momente, welche nach dem Früheren äussere Produkte aus [je] drei Faktoren sind, so sind die beiden ersten Faktoren in beiden Produkten vollkommen gleich, der erste Faktor als die gemeinschaftliche Axe darstellend, der zweite als Verbindungsstrecke zwischen denselben Linien; der dritte aber, welcher die Kraft darstellt, ist 69 entgegengesetzt gleich; folglich sind auch beide Momente einander ent- 69

*) § 120.

**) Der Beweis für den allgemeinen Fall folgt in § 57.

gegengesetzt gleich, also ihre Summe null. Da nun das Gesammtmoment jedes einzelnen Paares der inneren Kräfte null ist, so ist auch das aller Paare, das heisst aller inneren Kräfte null. Auf ganz entsprechende Weise, wie wir dies in Bezug auf eine Axe dargethan haben, ergiebt es sich auch in Bezug auf einen Punkt, wenn alles in derselben Ebene liegt, weshalb wir uns dieses Beweises entschlagen dürfen.

§ 43.

Da nun die einem Punkte mitgetheilte Bewegung stets gleich ist der ihm mitgetheilten Kraft, so wird auch das Gesammtmoment der einem Punktvereine innerhalb eines Zeitraums mitgetheilten Bewegungen gleich dem Gesammtmoment der ihm während dieser Zeit mitgetheilten Kräfte sein, und da das der inneren Kräfte null ist, gleich dem Gesammtmomente der jenem Punktverein von aussen mitgetheilten Kräfte, und zwar in Bezug auf jede beliebige Axe, und, wenn die Kräfte in derselben Ebene liegen, auch in Bezug auf jeden Punkt derselben. Dies Gesetz, was hier in einer so einfachen Form erscheint, ist von der grössten Allgemeinheit und überall aufs leichteste anwendbar.

Soll zum Beispiel Gleichgewicht stattfinden, so müssen die mitgetheilten Bewegungen alle null sein, also auch deren Gesammtmoment, und man hat also für's Gleichgewicht die Bedingung, dass das Gesammtmoment der von aussen mitgetheilten Kräfte in Bezug auf jede Axe null sein muss; so auch namentlich bei festen Körpern, bei welchen die Kräfte, die den festen Zustand erhalten, als innere erscheinen. Ist aber der feste Körper in einem Punkte oder in einer Linie befestigt, um welche er sich frei schwenkt, so ist die Kraft, durch welche jener Punkt oder jene Linie desselben in ihrer festen Lage erhalten wird, eine äussere, die aber nur als Widerstand leistende aufgefasst und daher zunächst als unbekannte gesetzt wird. Man hat daher, um die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts zu finden, jene unbekannte Kraft herauszuschaffen. Dies geschieht vermittelst unserer Analyse auf's leichteste.

Ist nämlich α der feste Punkt, x die Widerstand leistende Kraft, welche diesen Punkt fest hält, so muss man die Axe $\varrho\sigma$, in Bezug auf welche man die Momentgleichung nimmt, so wählen, dass das Moment der Kraft x verschwindet, das heisst $[\varrho\sigma].[\sigma\alpha].x = 0$ wird, für jeden | beliebigen Werth von x, das heisst es muss $[\varrho\sigma].[\sigma\alpha] = 0$ sein, oder die Axe $\varrho\sigma$ muss durch den Punkt α gehen. Somit haben wir dann als Bedingung, unter welcher nur Gleichgewicht stattfinden kann, dass das Gesammtmoment der von aussen wirkenden Kräfte in

70

70

Bezug auf jede durch den befestigten Punkt gehende Axe null sein muss. Soll eine Axe des Körpers befestigt sein, so kann man zwei befestigte Punkte annehmen, also zwei Widerstand leistende Kräfte, welche herausfallen, wenn die Axe, in Bezug auf welche die Moment-Gleichung genommen wird, durch jene beiden Punkte zugleich gelegt wird; also hat man dann als Bedingung, unter welcher nur Gleichgewicht stattfinden kann, dass das Gesammtmoment der von aussen wirkenden Kräfte in Bezug auf die befestigte Axe null sein muss.

§ 44. **Das Vertauschungsgesetz durch die Statik bestätigt.**

Wir haben in dem Begriff des Moments zugleich eine schöne Bestätigung des Gesetzes, dass innerhalb derselben Ebene das äussere Produkt zweier Strecken sein Zeichen so lange beibehält, als der zweite Faktor, vom ersten aus betrachtet, nach derselben Seite hin liegt, im entgegengesetzten Falle aber sein Zeichen ändert. Denn betrachtet man Kräfte in einer Ebene, welche um einen Punkt drehbar gedacht wird, so werden die Kräfte sich dann verstärken, wenn sie, vom Drehungspunkte aus betrachtet, nach derselben Seite hin gerichtet sind, hingegen sich ganz oder theilweise aufheben, wenn nach entgegengesetzter; so dass in der That durch den Begriff des Momentes, nach welchem die Natur selbst verfährt, jener Begriff des äusseren Produktes gerechtfertigt wird. Ich glaube nun, dass das Anfangs auffallende Zeichengesetz durch die ganze Reihe der Betrachtungen, wie wir sie in den verschiedenartigsten Beziehungen angestellt haben, das Auffallende ganz verloren hat, und vielmehr jetzt nicht nur als das begrifflich nothwendige, sondern auch als das durch die Natur selbst gerechtfertigte und in ihr sich überall bewährende erscheint.

§ 45, 46. **Lösung algebraischer Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.**

§ 45.

Dass nun die äussere Multiplikation, da sie den Begriff des Verschiedenartigen wesentlich voraussetzt, auf die Zahlenlehre keine so unmittelbare Anwendung findet, wie auf die Geometrie und Mechanik, darf uns freilich nicht wundern, indem die Zahlen ihrem Inhalte nach als gleichartige erscheinen. Aber desto interessanter ist es, zu bemerken, wie in der Algebra, sobald an der Zahl noch die Art ihrer Verknüpfung mit andern Grössen festgehalten, und in dieser Hinsicht die eine als von der andern formell verschiedenartig aufgefasst wird, 71

auch die Anwendbarkeit der äusseren Multiplikation mit einer so schlagenden Entschiedenheit heraustritt, dass ich wohl behaupten darf, es werde durch diese Anwendung auch die Algebra eine wesentlich veränderte Gestalt gewinnen.

Um hiervon eine Idee zu geben, will ich n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten setzen, von der Form

$$\begin{array}{c} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a_0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = b_0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots + s_nx_n = s_0, \end{array}$$

wo $x_1 \ldots x_n$ die Unbekannten seien. Hier können wir die Zahlenkoefficienten, welche verschiedenen Gleichungen angehören, sofern wir diese Verschiedenheit an ihrem Begriff noch festhalten, als verschiedenartig ansehen, und zwar alle als an sich verschiedenartig, das heisst als unabhängig in dem Sinne unserer Wissenschaft — die einer und derselben Gleichung als unter sich in derselben Beziehung gleichartig. Addiren wir nun in diesem Sinne alle n Gleichungen und bezeichnen die Summe des Verschiedenartigen in dem Sinne unserer Wissenschaft mit dem Verknüpfungszeichen $\dot{+}$, indem die gleichen Stellen in den so gebildeten Summenausdrücken immer dem Gleichartigen zukommen sollen, so erhalten wir

$$(a_1 \dot{+} b_1 \dot{+} \ldots \dot{+} s_1)\, x_1 \dot{+} (a_2 \dot{+} b_2 \dot{+} \ldots \dot{+} s_2)\, x_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \\ \dot{+} (a_n \dot{+} b_n \dot{+} \ldots \dot{+} s_n)\, x_n = (a_0 \dot{+} b_0 \dot{+} \ldots \dot{+} s_0),$$

oder bezeichnen wir $(a_1 \dot{+} b_1 \dot{+} \ldots \dot{+} s_1)$ mit p_1 und entsprechend die übrigen Summen, so haben wir

$$p_1x_1 \dot{+} p_2x_2 \dot{+} \cdots \dot{+} p_nx_n = p_0 \,.$$

Aus dieser Gleichung, welche die Stelle jener n Gleichungen vertritt, lässt sich nun auf der Stelle jede der Unbekannten, zum Beispiel x_1 finden, wenn wir die beiden Seiten mit dem äusseren Produkte aus den Koefficienten der übrigen Unbekannten äusserlich multipliciren, also hier mit $p_2 \,.\, p_3 \ldots p_n$. Da nämlich, wenn man die Glieder der
72 linken Seite einzeln multiplicirt, nach dem Begriff des | äusseren Produktes (§ 32) alle Produkte wegfallen, welche zwei gleiche Faktoren enthalten, so erhält man

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n x_1 = p_0 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n \,.$$

Also da beide Produkte, als demselben System n-ter Stufe angehörig einander gleichartig sind, so hat man

$$x_1 = \frac{p_0 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n}.\text{*)}$$

Also jede Unbekannte ist einem Bruche gleich, dessen Nenner das äussere Produkt der Koefficienten $p_1 \ldots p_n$ ist, und dessen Zähler man erhält, wenn man in diesem Produkt statt des Koefficienten jener Unbekannten die rechte Seite, nämlich p_0, als Faktor setzt. Alle Unbekannten haben also denselben Nenner, und werden unbestimmt oder unendlich, wenn dieser Nenner null wird, das heisst

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = 0$$

ist

§ 46.

Dass jene Ausdrücke für $x_1, \ldots, x_n$ nicht etwa blosse Rechnungsformen darstellen, sondern die vollkommenen Lösungen der gegebenen Gleichungen enthalten, wird noch deutlicher erhellen, wenn wir für irgend eine bestimmte Anzahl von Gleichungen statt $p_1, p_2 \ldots$ ihre Werthe substituiren. Man hat für drei Gleichungen

(1) $$x_1 = \frac{p_0 \cdot p_2 \cdot p_3}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3},$$

wo

$$p_0 = (a_0 + b_0 + c_0), \quad p_1 = (a_1 + b_1 + c_1), \ldots$$

ist, und zwar a_0 gleichartig ist mit a_1, und so weiter. Substituiren wir diese Ausdrücke in obiger Gleichung, multipliciren durch, indem wir die Produkte der gleichartigen Grössen, da sie null werden, auslassen, und ordnen entsprechend mit Beobachtung des für äussere Produkte festgestellten Zeichengesetzes, so haben wir sogleich, wie man bei geringer Uebung ohne weiteres aus obiger Formel ablesen kann,

(2) $$x_1 = \frac{a_0 b_2 c_3 - a_0 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_0 - a_2 b_0 c_3 + a_3 b_0 c_2 - a_3 b_2 c_0}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1},$$

worin wir, da alles entsprechend geordnet ist, wieder die gewöhnliche Multiplikationsbezeichnung einführen konnten. Dies ist die bekannte Formel, durch welche aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten eine derselben bestimmt wird, und es zeigt sich, wie dieselbe vollkommen in der so sehr viel einfacheren Formel (1) enthalten ist. 73

Wir haben hier, um sogleich die Anwendbarkeit unserer Analyse auch an einem Beispiele, welches nicht mehr auf die drei Dimensionen beschränkt ist, darzuthun, etwas vorgegriffen, indem der Begriff der Zahl und der Division, den wir hier anwandten, erst den Gegenstand

*) Die Gesetze der äusseren Multiplikation und Division lassen übrigens kein Heben im Zähler und Nenner zu, vgl. Kapitel IV.

des vierten Kapitels ausmachen werden; wir werden jedoch späterhin noch einmal auf diesen Gegenstand der Anwendung zurückkommen, und dort das Verfahren auch ausdehnen auf Gleichungen höherer Grade.

Drittes Kapitel.

Verknüpfung der Ausdehnungsgrössen höherer Stufen.

A. Theoretische Entwickelung.

§ 47, 48. Summe von Ausdehnungen in einem Gebiete nächst höherer Stufe.

§ 47.

Durch die äussere Multiplikation sind höhere Ausdehnungsgrössen entstanden, die Verknüpfungen derselben [aber] haben wir bisher nur betrachtet, sofern gleichartige Ausdehnungsgrössen addirt werden sollten, indem die Addition sich hier auf den allgemeinen Begriff des Zusammendenkens gründete, welcher überhaupt die Addition des Gleichartigen (wenn dasselbe gleich bezeichnet ist) charakterisirt. Vermöge dieses Begriffs hatten wir die im vorigen Kapitel dargelegten Gesetze entwickelt. Das Grundgesetz der Multiplikation, dass man statt des zerstückten Faktors seine Stücke einzeln einführen, und die so gebildeten Produkte addiren dürfe, fand daher seine Beschränkung darin, dass die dadurch entstehenden Produkte, um sie nach den bisherigen Begriffen addiren zu können, gleichartig sein mussten.

Um diese Beschränkung aufzuheben, werden wir daher den Begriff der Addition für höhere Ausdehnungsgrössen erweitern müssen. Der so erweiterte Begriff muss von der Art sein, dass er erstens bei gleichartigen Ausdehnungsgrössen in den gewöhnlichen umschlägt, und
74 dass für | ihn die Grundbeziehung der Addition zur Multiplikation gilt.
74 Natürlich muss dann für dieselbe die Geltung der Additionsgesetze nachgewiesen werden, ehe jene Verknüpfung als Addition fixirt werden kann. Somit ist klar, dass, wenn es überhaupt eine Addition ungleichartiger Ausdehnungsgrössen höherer Stufen giebt, das Gesetz bestehen muss

$$A \,.\, b + A \,.\, c = A \,.\, (b + c),$$

wo b und c Strecken vorstellen. Nennen wir schon vorläufig diese Verknüpfung eine Addition, um einen bequemeren Wortausdruck zu haben, so würden wir die Definition aufstellen können:

Zwei äussere Produkte n-ter Stufe, welche einen gemeinschaftlichen Faktor $(n-1)$-ter Stufe haben, addirt man, indem man die ungleichen Faktoren addirt, und dieser Summe den gemeinschaftlichen Faktor auf dieselbe Weise hinzufügt, wie er den Stücken hinzugefügt war.

§ 48.

Dieser formellen Definition müssen wir zuerst dadurch eine anschaulichere Bedeutung geben, dass wir untersuchen, wie weit sie reicht, das heisst, welche Ausdehnungsgrössen man nach ihr addiren kann.

Es leuchtet sogleich ein, dass zwei Ausdehnungsgrössen n-ter Stufe nur dann nach dem aufgestellten Begriffe summirbar sind, wenn sie demselben Systeme $(n+1)$-ter Stufe angehören; wir werden aber zeigen, dass sie alsdann auch immer summirbar sind, indem je zwei Ausdehnungsgrössen n-ter Stufe A_n und B_n, welche demselben Systeme $(n+1)$-ter Stufe angehören, sich stets auf einen gemeinschaftlichen Faktor $(n-1)$-ter Stufe bringen lassen.

Sind zuerst A_n und B_n gleichartig, so leuchtet es unmittelbar ein, indem, wenn $(n-1)$ einfache Faktoren von A_n konstant bleiben, der n-te aber sich beliebig durch Fortschreitung oder Rückschreitung verändert, auch das Produkt jeden beliebigen mit A_n gleichartigen Werth, also auch den Werth B_n annehmen kann. Hierin liegt zugleich, dass man jede Ausdehnung n-ter Stufe auf $(n-1)$ beliebige Faktoren, welche demselben Systeme n-ter Stufe angehören und von einander unabhängig sind, bringen kann.

Sind A_n und B_n ungleichartig, so sei

$$A_n = a_1 \, . \, a_2 \ldots a_n ,$$

wo $a_1, \ldots, a_n$ Strecken vorstellen, welche von einander unabhängig sind. Dann muss B_n nothwendig wenigstens Einen Faktor enthalten, welcher von den sämmtlichen Strecken $a_1 \ldots a_n$ unabhängig ist; es sei a_{n+1} ein solcher Faktor, und also 75

$$B_n = b_1 \, . \, b_2 \ldots b_{n-1} \, . \, a_{n+1} . \qquad 75$$

Da in einem System $(n+1)$-ter Stufe nicht mehr als $(n+1)$ von einander unabhängige Strecken angenommen werden können, so muss jeder von den Faktoren $b_1 \ldots b_{n-1}$ von jenen Strecken $a_1 \ldots a_{n+1}$ abhängig sein, das heisst sich als Summe darstellen lassen, deren Stücke diesen Strecken gleichartig sind. Denkt man sich nun jeden dieser Faktoren $b_1 \ldots b_{n-1}$ als solche Summe dargestellt, so kann man nun in jeder dasjenige Stück, was mit a_{n+1} gleichartig ist, weglassen, ohne den Werth des Produktes B_n zu ändern (vgl. § 35). Nach dieser

Weglassung sei das Produkt $b_1 . b_2 \ldots b_{n-1}$ übergegangen in C_{n-1}, so ist also

$$B_n = C_{n-1} . a_{n+1} .$$

Die Faktoren von C_{n-1} sind nur noch von den Strecken $a_1 \ldots a_n$, das heisst von den Faktoren der Ausdehnungsgrösse A_n abhängig; oder mit andern Worten, sie gehören dem Systeme A_n an, folglich wird sich A_n nach der im Anfang dieses Paragraphen angewandten Schlussfolge auf den Faktor C_{n-1} bringen lassen, wenn der n-te Faktor willkührlich gewählt werden darf; somit lassen sich beide Ausdehnungsgrössen A_n und B_n auf den gemeinschaftlichen Faktor C_{n-1} bringen, welcher von $(n-1)$-ter Stufe ist, oder, wie wir uns auch kürzer ausdrücken, beide haben eine Ausdehnungsgrösse $(n-1)$-ter Stufe gemeinschaftlich. So wird nun die obige Definition so umgewandelt werden können:

Zwei Ausdehnungsgrössen n-ter Stufe, welche demselben System $(n+1)$-ter Stufe angehören, werden addirt, indem man sie auf einen gemeinschaftlichen Faktor $(n-1)$-ter Stufe bringt, und die Summe der ungleichen Faktoren mit diesem gemeinschaftlichen Faktor verknüpft.

§ 49, 50. Geltung der Additionsgesetze für diese neue Summe.

§ 49.

Um nun die Geltung der Additionsgesetze, oder vielmehr zunächst nur die der Grundgesetze nachzuweisen, haben wir zuerst die Vertauschbarkeit der Stücke darzuthun. Diese Stücke werden sich nach dem vorigen Paragraphen darstellen lassen in der Form $A . b$ und $A . c$. Nun ist

$$A . b + A . c = A . (b + c) = A . (c + b) = A . c + A . b ,$$

76 also sind die Stücke vertauschbar. Das zweite Gesetz, dessen | Geltung nachgewiesen werden muss, ist, dass

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

76 sei, auch dann, wenn A, B, C Ausdehnungen n-ter Stufe in demselben Systeme $(n+1)$-ter Stufe sind, und die Addition den vorher bezeichneten Begriff haben soll.

Wir haben zu dem Ende die Frage zu beantworten, was drei solche Ausdehnungen gemeinschaftlich haben werden. Nun ist schon im vorigen Paragraphen gezeigt, dass je zwei derselben eine Ausdehnung $(n-1)$-ter Stufe gemeinschaftlich haben müssen; so zum Beispiel hat B sowohl mit A als mit C eine solche gemeinschaftlich; und da diese beiden Ausdehnungen $(n-1)$-ter Stufe, nämlich, welche B mit A, und

welche es mit C gemeinschaftlich hat, demselben Systeme B*), also demselben Systeme n-ter Stufe angehören, so haben sie nach demselben Satze des vorigen Paragraphen eine Ausdehnung $(n-2)$-ter Stufe gemeinschaftlich, und diese ist somit allen drei Grössen A, B, C gemeinschaftlich. Es sei D dieser gemeinschaftliche Faktor $(n-2)$-ter Stufe, so werden sich jene drei Grössen, da überdies je zwei eine Ausdehnung $(n-1)$-ter Stufe gemeinschaftlich haben, auf die Formen bringen lassen

$$A = D \,.\, b \,.\, c, \quad B = D \,.\, a \,.\, c, \quad C = D \,.\, a \,.\, b_1 .$$

Nämlich je zwei derselben werden ausser D noch einen gemeinschaftlichen Faktor erster Stufe haben, dessen Grösse aber willkührlich ist. Dieser sei c zwischen A und B, zwischen B und C sei er a, und zwar sei die Grösse von a so bestimmt, dass $B = D \,.\, a \,.\, c$ sei; der gemeinschaftliche Faktor, auf welchen A und C gebracht werden können, sei ausser D der Faktor b, oder ein mit b gleichartiger b_1, und zwar seien b und b_1 so gewählt, dass

$$A = D \,.\, b \,.\, c \quad \text{und} \quad C = D \,.\, a \,.\, b_1$$

sei.

Nachdem nun A, B, C auf diese Form gebracht sind, zeigt sich, dass sich $(A + B) + C$ durch die folgenden Umgestaltungen in $A + (B + C)$ verwandeln lässt. Erstens

$$(A + B) + C = (D \,.\, b \,.\, c + D \,.\, a \,.\, c) + D \,.\, a \,.\, b_1 .$$

Wir haben nun die durch die Klammer angedeutete Summation zu vollziehen. Nun lässt sich der Ausdruck $D \,.\, b \,.\, c + D \,.\, a \,.\, c$ zurückführen | auf $D \,.\, (b + a) \,.\, c$; man kann nämlich zuerst in beiden Summanden c auf die vorletzte Stelle bringen, wobei die Vorzeichen sich ändern, dann kann man nach der Definition die Summation | vornehmen, und endlich mit derselben Zeichenänderung den summirten Faktor wieder auf die alte Stelle bringen und erhält 77 77

$$(A + B) + C = D \,.\, (b + a) \,.\, c + D \,.\, a \,.\, b_1 .$$

Um nun diese beiden Glieder summiren zu können, hat man nur statt $D \,.\, a \,.\, b_1$ zu setzen $D \,.\, (b + a) \,.\, b_1$, was verstattet ist, weil b mit b_1 gleichartig ist, und man den Faktoren, ohne das Resultat zu ändern, Stücke hinzufügen darf, welche den andern Faktoren gleichartig sind (§ 35). Führt man dann auf der rechten Seite die Summation aus, so hat man

$$(A + B) + C = D \,.\, (b + a) \,.\, (c + b_1),$$

*) Wir benennen das System eben so wie die Ausdehnung, welche einen Theil von ihm bildet, weil keine Zweideutigkeit möglich ist.

wodurch man die drei Glieder auf eins zurückgeführt hat*). In diesem Gliede kann man nun zuerst die Summe $b + a$ wieder auflösen und erhält auf der rechten Seite den Ausdruck

$$D . b . (c + b_1) + D . a . (c + b_1).$$

In dem ersten Gliede dieses Ausdrucks kann nun wieder (§ 35) das Stück b_1 weggelassen und das zweite Glied aufgelöst werden; dadurch verwandelt sich der ganze Ausdruck in

$$D . b . c + (D . a . c + D . a . b_1),$$

das heisst in $A + (B + C)$ und man hat also in der That

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

§ 50.

Es ist nun noch das dritte Grundgesetz (§ 6) zu erweisen, dass nämlich das Resultat der Subtraktion eindeutig ist, oder dass, wenn das eine Stück unverändert bleibt, das andere aber sich ändert, auch die Summe sich ändern müsse.

Es sei innerhalb eines Systems $(n + 1)$-ter Stufe

$$A + B = C,$$

wo A, B und C von n-ter Stufe sind. Es ändere sich B in $B + D$, so wird nun

$$A + (B + D) = (A + B) + D = C + D$$

sein, und es ist zu zeigen, dass wenn $B + D$ von B verschieden ist, 78 auch $C + D$ von C verschieden sein müsse. Das erstere setzt | voraus, dass D nicht null sei; nun können wir aber zeigen, dass, wenn D nicht null ist, es auch zu einer Grösse (C) hinzugelegt, ihren Werth ändern müsse.

Unmittelbar ist dies klar, wenn C und D gleichartig sind, indem 78 das durch Zusammendenken des Gleichartigen | hervorgegangene nothwendig von jedem der Stücke verschieden ist. Sind aber C und D verschiedenartig, so lässt sich leicht zeigen, dass ihre Summe mit beiden verschiedenartig ist (immer vorausgesetzt, dass keins von beiden null ist). Da alles in demselben Systeme $(n + 1)$-ter Stufe angenommen ist, so werden C und D sich auf einen gemeinschaftlichen Faktor $(n - 1)$-ter Stufe bringen lassen. Es sei dieser E und

*) Man könnte nun zeigen, dass der Ausdruck: $A + (B + C)$ sich auf dasselbe Glied zurückführen liesse, allein wir setzen den einmal eingeschlagenen Weg der fortschreitenden Umwandlung fort.

$$C = E \,.\, c, \quad D = E \,.\, d,$$

also

$$C + D = E \,.\, (c + d).$$

Sind nun C und D verschiedenartig, so darf d nicht in dem Systeme $E \,.\, c$ enthalten sein, also ist auch $(c + d)$ nicht in ihm enthalten, also auch $E \,.\, (c + d)$ mit $E \,.\, c$ verschiedenartig, also kann es ihm auch nicht gleich sein. Somit wird durch Hinzulegen der Grösse D auch die Grösse C geändert; wenn also das eine Stück jener Summe sich ändert, während das andere dasselbe bleibt, so muss auch die Summe sich ändern. Soll folglich die Summe und das eine Stück derselben unverändert bleiben, so muss es auch das andere, das heisst das Resultat der Subtraktion ist eindeutig.

Da nun alle drei Grundgesetze der Addition und Subtraktion hier gelten, so gelten auch alle Gesetze derselben.

Die Grundbeziehung dieser Addition zur Multiplikation ist noch nicht vollständig dargelegt; nach der Definition ist zwar

$$A \,.\, b + A \,.\, c = A \,.\, (b + c);$$

allein es ist auch zu zeigen, dass

$$(A + B) \,.\, c = A \,.\, c + B \,.\, c$$

ist, wenn A und B Grössen n-ter Stufe in einem Systeme $(n + 1)$-ter Stufe sind. Dann kann man $A = E \,.\, a$, $B = E \,.\, b$ setzen (nach § 48), und hat

$$A \,.\, c + B \,.\, c = E \,.\, a \,.\, c + E \,.\, b \,.\, c.$$

Der rechts stehende Ausdruck lässt sich, wenn man a und b zuerst auf die letzte Stelle bringt (wobei sich das Zeichen ändert), dann nach der Definition summirt, und endlich den Faktor $(a + b)$ wieder auf die vorletzte Stelle zurückbringt (wobei das Zeichen wieder das ursprüngliche wird), verwandeln in $E \,.\, (a + b) \,.\, c$, das heisst in | $(A + B) \,.\, c$, 79 also [ist] die Richtigkeit jener Gleichung bewiesen.

Da somit die Grundgesetze der Beziehung zwischen Addition und Multiplikation hier gelten, so gelten auch alle Gesetze dieser Beziehung, und unsere Verknüpfungsweise ist daher sowohl an sich, als auch | in 79 ihrer Beziehung als wahre Addition nachgewiesen. Somit können wir nun den Hauptsatz des vorigen Kapitels (§ 36) dahin erweitern:

Für äussere Produkte gelten, wenn Produkte aus n einfachen Faktoren nur in einem Systeme $(n + 1)$*-ter Stufe betrachtet werden, alle Gesetze der Addition und Subtraktion, und alle Gesetze der Beziehung zwischen ihnen und der Multiplikation, wenn man die für diese Verknüpfungen aufgestellten Begriffe festhält.*

§ 51. Formelle Summe oder Summengrösse.

Auch dies Gesetz hat also noch eine Beschränkung in sich, was darin seinen Grund hat, dass wir höhere Ausdehnungen bisher nur addiren konnten, wenn sie einem und demselben Systeme nächst höherer Stufe angehörten. Wir müssen nun, um das Gesetz in seiner Allgemeinheit aufstellen zu können, auch zeigen, was unter der Summe von Ausdehnungen, welche in beliebig höheren Systemen liegen, verstanden sein könne.

Wollten wir hier denselben Weg einzuschlagen versuchen, wie in den vorhergehenden Paragraphen, und also als Summe zweier Grössen $A.B$ und $A.C$, welche nicht demselben Systeme nächst höherer Stufe angehören, die Grösse $A.(B+C)$ auffassen, so würde dies zu nichts führen, da dann B und C auch Ausdehnungen höherer Stufen sind, welche nicht einem und demselben Systeme nächst höherer Stufe angehören, und also die eine Summe ihrer Bedeutung nach eben so unbekannt ist, wie die andere. Es bleibt uns also nichts übrig, als den Begriff der Summe in diesem Falle rein formell aufzufassen, ohne dass es möglich wäre, eine Ausdehnung aufzuweisen, welche als die Summe sich darstellte.

Wir definiren daher die Summe von Ausdehnungen n-ter Stufe, welche einem höheren Systeme als dem $(n+1)$-ter Stufe angehören, dadurch, dass die Grundgesetze der Addition auf dieselbe anwendbar sein sollen, das heisst also als „dasjenige, was konstant bleibt, welche Veränderungen man auch mit der Form der Summe durch Anwendung der Additions- und Subtraktions-Gesetze vornehmen mag."

80 Es erscheint somit diese Summe nicht mehr als reine Ausdehnung, das heisst als solche, welche durch fortschreitende Multiplikation der Strecken gewonnen werden könnte, sondern sie tritt als Grösse von neuer Art, und zwar zunächst als Grösse von bloss formeller Bedeu-
80 tung hervor, die wir | daher am passendsten mit dem Namen der *Summengrösse* belegen könnten; wir fassen sie mit der Ausdehnung unter dem Begriffe der *Ausdehnungsgrösse* zusammen. Um ihre konkrete Bedeutung zu gewinnen, müssten wir ihren Bereich ausmitteln, das heisst aufsuchen, wie sich die Form der Summe, die in dem Werth der Stücke besteht, ändern könne, ohne dass der Werth der Summe selbst sich ändere. Dadurch erhalten wir eine Reihe von konkreten Darstellungen jener formellen Summe, und die Gesammtheit dieser möglichen Darstellungen in Eins zusammengeschaut, wie die Arten einer Gattung (nicht wie die Theile eines Ganzen), würde uns den konkreten Begriff vor Augen legen.

Indessen da diese Summengrösse nicht eher als in einem Systeme vierter Stufe eintreten kann, sie also im Raume, als einem Systeme dritter Stufe, keine Anwendung findet, so versparen wir uns diese Darstellung bis zum siebenten Kapitel*), in welchem sich die Bedeutung einer solchen Summe auf einem verwandten Gebiet ergeben, und sich durch Anschauungen sowohl der Geometrie, als besonders der Statik fruchtreich gestalten wird.

§ 52, 53. **Multiplikation der Ausdehnungsgrössen.**

§ 52.

Dagegen dürfen wir unsere Aufgabe nicht fallen lassen, das in diesem und dem vorigen Kapitel gewonnene Gesetz von allen Schranken, in denen es noch zusammengeengt ist, zu befreien, und also auch die Beziehung der Multiplikation zu dieser Addition aufzufassen. Aber da die formelle Summe keine Ausdehnung darstellt, so ist auch das äussere Produkt jener formellen Summe in eine Strecke noch nicht seiner Bedeutung nach bestimmt. Nun muss auch diese wiederum formell durch das Fortbestehen der multiplikativen Beziehung bestimmt werden, und wir haben somit, wenn es überhaupt eine solche Multiplikation jener Summengrössen geben soll, dieselbe so zu definiren, dass

$$(A + B + C + \cdots) \,.\, p = A \,.\, p + B \,.\, p + C \,.\, p + \cdots$$

sei. Doch dürfen wir dies nur dann festsetzen, wenn bei dem Konstantbleiben von $A + B + C + \cdots$ auch $A \,.\, p + B \,.\, p + C \,.\, p + \cdots$ konstant bleibt, indem das Wesen der Summe nur in diesem | Kon- *81* stantbleiben besteht, und das Princip der Gleichheit das gleichzeitige Konstantbleiben erfordert.

Also haben wir zu zeigen, dass, wenn

$$A + B + \cdots = P + Q + \cdots$$

ist, auch

$$A \,.\, p + B \,.\, p + \cdots = P \,.\, p + Q \,.\, p + \cdots$$

sein müsse. Dies ergiebt sich aber leicht, indem, wenn $A + B + \cdots$ 81 der Summe $P + Q + \cdots$ gleich gesetzt wird, und beides formelle Summen sind, durch blosse Anwendung der Additionsgesetze (andere Anordnung, Zusammenfassung der Stücke, Auflösung der Stücke in kleinere Stücke) aus der einen die andere hervorgehen muss. Da nun jeder solchen Veränderung, welche ohne Aenderung des Gesammtwerthes verstattet ist, eine ebensolche mit den um den Faktor p ver-

---

*) [Das heisst, dem zweiten Kapitel des zweiten Abschnitts].

mehrten Grössen entspricht, so wird, wenn man mit diesen die entsprechenden Operationen, wie mit jenen vornimmt, gleichzeitig, während sich $A + B + \cdots$ in $P + Q + \cdots$ verwandelt, auch $A . p + B . p + \cdots$ in $P . p + Q . p + \cdots$ übergehen. Somit wird es gestattet sein, jene Definition festzustellen, welche hiernach nichts ist, als eine abgekürzte Schreibart.

§ 53.

Da ferner, wenn mit mehreren Strecken fortschreitend, das heisst so multiplicirt wird, dass das jedesmal gewonnene Resultat mit dem nächstfolgenden Faktor multiplicirt wird, das Gesammtprodukt stets gleichen Werth behält, sobald das Produkt jener Strecken sich gleich bleibt, so können wir abkürzend statt jener Strecken, mit welchen fortschreitend multiplicirt ist, ihr Produkt setzen. Hierdurch ist der Begriff des Produktes zweier Ausdehnungen bestimmt, und so auch das Produkt einer formellen Summe in eine Ausdehnung, ein Produkt, was zwar im Allgemeinen wieder eine formelle Summe liefert, aber in besonderen Fällen auch in eine Ausdehnung übergehen kann *).

Dass nun nach dieser Bestimmung allgemein

$$(A + B) . P = A . P + B . P$$

82 ist, ergiebt sich leicht. Denn es sei $P = c : d \ldots$, so ist

$$(A + B) . P = (A + B) . c . d \ldots$$

nach der eben festgesetzten Bestimmung, ferner

$$(A + B) . c = A . c + B . c$$

nach § 52, also durch wiederholte Anwendung desselben Gesetzes

$$(A + B) . c . d \ldots = A . c . d \ldots + B . c . d \ldots,$$

das heisst

$$(A + B) . P = A . P + B . P.$$

82 Ist der zweite Faktor zerstückt, so lässt sich das entsprechende Gesetz hier nur für reale Summen nachweisen; für diese ergiebt sich aus obiger Gleichung durch Vertauschung (wobei die Zeichen sich entweder in allen Gliedern oder in keinem ändern)

$$P . (A + B) = P . A + P . B.$$

Für formelle Summen ist noch nichts über die Vertauschbarkeit der Faktoren festgesetzt und daher auch jene Schlussweise noch nicht

*) Nämlich, wenn die Stücke der Summe von n-ter Stufe sind und einem System $(n + m)$-ter Stufe angehören, so wird durch Multiplikation mit einer Ausdehnung $(m - 1)$-ter Stufe desselben Systemes offenbar die formelle Summe in eine Ausdehnung verwandelt.

anwendbar. Da wir überhaupt noch nichts über den Begriff eines Produktes, dessen zweiter Faktor eine formelle Summe ist, festgesetzt haben, so ist uns erlaubt für den Fall, dass der zweite Faktor eine formelle Summe ist, dieselbe Voraussetzung zu machen, wie für den Fall, wo der erste es ist, und also auch dann

$$P.(A+B) = P.A + P.B$$

zu setzen, und dies selbst auf den Fall zu übertragen, wo auch P eine formelle Summe darstellt.

§ 54, 55. Hauptgesetze der äusseren Multiplikation.

§ 54.

Nachdem wir nun alle bis dahin noch bestehenden Schranken aufgehoben, und die Geltung der multiplikativen Grundbeziehung für alle Ausdehnungsgrössen theils aus dem Begriffe nachgewiesen, theils durch Definitionen festgestellt haben: so gelten somit alle Gesetze dieser Beziehung, wie auch alle Gesetze der Addition und Subtraktion, und es sind auf diese Weise alle angegebenen Begriffe im allgemeinsten Sinne gerechtfertigt. Wir fassen daher, nachdem wir am Schlusse dieser Entwickelungsreihe angelangt sind, die Resultate derselben in folgenden Sätzen zusammen:

Wenn alle Elemente einer Ausdehnung (in ihrer elementaren Darstellung)) einer und derselben Erzeugung unterworfen [werden], das heisst statt jedes Elementes eine gleiche Strecke gesetzt wird, | deren Anfangselement* 83 *jenes Element ist, so ist die Gesammtheit der so gewonnenen Elemente die konkrete Darstellung einer Ausdehnung, welche, als Theil des zugehörigen Systems aufgefasst, das Produkt jener Ausdehnung in diese Strecke ist, und wir nannten dasselbe ein äusseres.*

Ferner:

Wenn man eine Ausdehnung mit den einfachen Faktoren einer andern fortschreitend auf die angegebene Weise | multiplicirt, so ist das Re- 83 *sultat als Produkt jener ersten Ausdehnung in diese letzte charakterisirt.*

Als Summe zweier Ausdehnungen n-ter Stufe in einem Systeme $(n+1)$-ter Stufe wurde diejenige Ausdehnung nachgewiesen, welche hervorgeht, wenn man jene beiden auf einen gemeinschaftlichen Faktor $(n-1)$-ter Stufe brachte, und die ungleichen Faktoren addirte.

Als Summe zweier Ausdehnungen n-ter Stufe in einem System von höherer als $(n+1)$-ter Stufe ergab sich die formelle Summengrösse, welche dasjenige darstellte, was bei Anwendung der Additionsgesetze konstant blieb.

*) Unter der elementaren oder konkreten Darstellung einer Ausdehnung verstehen wir das Gebilde, welchem diese Ausdehnung zugehört.

des vierten Kapitels ausmachen werden; wir werden jedoch späterhin noch einmal auf diesen Gegenstand der Anwendung zurückkommen, und dort das Verfahren auch ausdehnen auf Gleichungen höherer Grade.

Drittes Kapitel.

Verknüpfung der Ausdehnungsgrössen höherer Stufen.

A. Theoretische Entwickelung.

§ 47, 48. Summe von Ausdehnungen in einem Gebiete nächst höherer Stufe.

§ 47.

Durch die äussere Multiplikation sind höhere Ausdehnungsgrössen entstanden, die Verknüpfungen derselben [aber] haben wir bisher nur betrachtet, sofern gleichartige Ausdehnungsgrössen addirt werden sollten, indem die Addition sich hier auf den allgemeinen Begriff des Zusammendenkens gründete, welcher überhaupt die Addition des Gleichartigen (wenn dasselbe gleich bezeichnet ist) charakterisirt. Vermöge dieses Begriffs hatten wir die im vorigen Kapitel dargelegten Gesetze entwickelt. Das Grundgesetz der Multiplikation, dass man statt des zerstückten Faktors seine Stücke einzeln einführen, und die so gebildeten Produkte addiren dürfe, fand daher seine Beschränkung darin, dass die dadurch entstehenden Produkte, um sie nach den bisherigen Begriffen addiren zu können, gleichartig sein mussten.

Um diese Beschränkung aufzuheben, werden wir daher den Begriff der Addition für höhere Ausdehnungsgrössen erweitern müssen. Der so erweiterte Begriff muss von der Art sein, dass er erstens bei gleichartigen Ausdehnungsgrössen in den gewöhnlichen umschlägt, und
74 dass für | ihn die Grundbeziehung der Addition zur Multiplikation gilt.
74 Natürlich muss dann für dieselbe die Geltung der Additionsgesetze nachgewiesen werden, ehe jene Verknüpfung als Addition fixirt werden kann. Somit ist klar, dass, wenn es überhaupt eine Addition ungleichartiger Ausdehnungsgrössen höherer Stufen giebt, das Gesetz bestehen muss

$$A\,.\,b + A\,.\,c = A\,.\,(b + c),$$

wo b und c Strecken vorstellen. Nennen wir schon vorläufig diese Verknüpfung eine Addition, um einen bequemeren Wortausdruck zu haben, so würden wir die Definition aufstellen können:

Zwei äussere Produkte n-ter Stufe, welche einen gemeinschaftlichen Faktor (n — 1)-ter Stufe haben, addirt man, indem man die ungleichen Faktoren addirt, und dieser Summe den gemeinschaftlichen Faktor auf dieselbe Weise hinzufügt, wie er den Stücken hinzugefügt war.

§ 48.

Dieser formellen Definition müssen wir zuerst dadurch eine anschaulichere Bedeutung geben, dass wir untersuchen, wie weit sie reicht, das heisst, welche Ausdehnungsgrössen man nach ihr addiren kann.

Es leuchtet sogleich ein, dass zwei Ausdehnungsgrössen n-ter Stufe nur dann nach dem aufgestellten Begriffe summirbar sind, wenn sie demselben Systeme $(n+1)$-ter Stufe angehören; wir werden aber zeigen, dass sie alsdann auch immer summirbar sind, indem je zwei Ausdehnungsgrössen n-ter Stufe A_n und B_n, welche demselben Systeme $(n+1)$-ter Stufe angehören, sich stets auf einen gemeinschaftlichen Faktor $(n-1)$-ter Stufe bringen lassen.

Sind zuerst A_n und B_n gleichartig, so leuchtet es unmittelbar ein, indem, wenn $(n-1)$ einfache Faktoren von A_n konstant bleiben, der n-te aber sich beliebig durch Fortschreitung oder Rückschreitung verändert, auch das Produkt jeden beliebigen mit A_n gleichartigen Werth, also auch den Werth B_n annehmen kann. Hierin liegt zugleich, dass man jede Ausdehnung n-ter Stufe auf $(n-1)$ beliebige Faktoren, welche demselben Systeme n-ter Stufe angehören und von einander unabhängig sind, bringen kann.

Sind A_n und B_n ungleichartig, so sei

$$A_n = a_1 \,.\, a_2 \dots a_n,$$

wo $a_1, \dots, a_n$ Strecken vorstellen, welche von einander unabhängig sind. Dann muss B_n nothwendig wenigstens Einen Faktor enthalten, welcher 75 von den sämmtlichen Strecken $a_1 \dots a_n$ unabhängig ist; es sei a_{n+1} ein solcher Faktor, und also

$$B_n = b_1 \,.\, b_2 \dots b_{n-1} \,.\, a_{n+1}. \qquad 75$$

Da in einem System $(n+1)$-ter Stufe nicht mehr als $(n+1)$ von einander unabhängige Strecken angenommen werden können, so muss jeder von den Faktoren $b_1 \dots b_{n-1}$ von jenen Strecken $a_1 \dots a_{n+1}$ abhängig sein, das heisst sich als Summe darstellen lassen, deren Stücke diesen Strecken gleichartig sind. Denkt man sich nun jeden dieser Faktoren $b_1 \dots b_{n-1}$ als solche Summe dargestellt, so kann man nun in jeder dasjenige Stück, was mit a_{n+1} gleichartig ist, weglassen, ohne den Werth des Produktes B_n zu ändern (vgl. § 35). Nach dieser

und also zwei Flächenräume als ungleichartig auffassen, wenn die Ebenen, denen sie angehören, eine Verschiedenheit in den Richtungen darbieten. Da nun die Flächenräume, auf diese Weise aufgefasst, Ausdehnungen zweiter Stufe sind, so werden sich zwei Flächenräume, da sie zugleich einem und demselben Systeme dritter Stufe (dem Raume) angehören, nach § 48 auf einen gemeinschaftlichen Faktor erster Stufe bringen, das heisst sich als Spathecke (Parallelogramme) von gleicher Grundseite darstellen lassen. Die Summe derselben wird somit ein Spatheck sein, welches dieselbe Grundseite hat, dessen Höhenseite [vgl. S. 91] aber die Summe der beiden Höhenseiten jener Spathecke ist. Hiernach kann man nun die Sätze von der Fortbewegung (§ 28 und 29) allgemeiner so aussprechen:

86 *Die geometrische*) Summe der Flächenräume, welche eine | gebrochene Linie bei ihrer Fortbewegung beschreibt, ist gleich dem Flächenraum, welchen eine gerade Linie, die mit jener gebrochenen gleichen Anfangspunkt und Endpunkt hat, beschreibt, wenn sie sich auf gleiche Weise fortbewegt,*

oder noch allgemeiner, indem wir die Strecke vom Anfangspunkt 86 zum Endpunkt der gebrochenen Linie die schliessende Seite derselben nennen:

Die geometrische Summe der Flächenräume, welche eine gebrochene Linie bei gebrochener Bahn beschreibt, ist gleich dem Flächenraum, welchen die Seite, die die erstere schliesst, in einer Bahn beschreibt, die die zweite schliesst.

Für die Bewegung der Flächenräume hat man den Satz:

Die Summe der Körperräume, welche eine beliebig gebrochene Fläche in beliebig gebrochener Bahn beschreibt, ist gleich dem Körperraum, welchen die geometrische Summe jener Flächenräume (die die gebrochene Fläche bilden) in der jene gebrochene schliessenden Bahn beschreibt.

§ 57. Allgemeiner Begriff des Gesammtmomentes.

Auch für die Statik und Mechanik besteht die Anwendung dieses Kapitels in einer Erweiterung, welche jedoch hier so fruchtreich ist, dass nun erst der ganze Reichthum der Beziehungen hervortreten kann.

Zuerst die Beschränkung, welche bei dem Gesammtmoment mehrerer Kräfte in Bezug auf einen Punkt hinzugefügt wurde (§ 41), fällt jetzt weg, und wir können daher sagen, unter dem Gesammtmoment

*) Dieses Adjektivs bediene ich mich, wenn die zu summirenden Grössen noch nicht hinreichend als Grössen mit konstanter Richtung bezeichnet sind, um die Summe von der rein arithmetischen Summe zu unterscheiden.

mehrerer Kräfte in Bezug auf einen Punkt sei die Summe aller einzelnen auf jenen Punkt bezüglichen Momente verstanden; und zugleich ist klar, dass, wenn man durch diesen Punkt eine Strecke als Axe zieht, das Moment in Bezug auf diese Axe gefunden wird, wenn man diese Axe in jenes erste Moment multiplicirt. Sind zum Beispiel $\alpha\beta$, $\gamma\delta, \ldots$ die Kräfte, so ist ihr Gesammtmoment M_ϱ in Bezug auf einen Punkt ϱ gleich

$$[\varrho\alpha] \cdot [\alpha\beta] + [\varrho\gamma] \cdot [\gamma\delta] + \cdots;$$

und in Bezug auf eine Axe $\sigma\varrho$ ist das Moment derselben Kräfte gleich

$$[\sigma\varrho] \cdot [\varrho\alpha] \cdot [\alpha\beta] + [\sigma\varrho] \cdot [\varrho\gamma] \cdot [\gamma\delta] + \cdots$$

oder gleich

$$[\sigma\varrho] \cdot M_\varrho.$$

Dass nun auch hier das Gesammtmoment der innern Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt null ist, bedarf wohl kaum eines Beweises, indem sogleich einleuchtet, dass der Beweis auf ähnliche Weise, nur noch einfacher, erfolgt, wie der oben (§ 42) für den beschränkteren Begriff geführte. Und damit ist klar, wie die sämmtlichen oben aufgestellten Sätze (§ 43 und 44) auch in dieser Verallgemeinerung noch gelten. Namentlich wird der in § 43 aufgestellte Hauptsatz jetzt so ausgesprochen werden können: 87

*Das Gesammtmoment aller Bewegungen, welche den einzelnen Punkten (eines Vereins von Punkten) innerhalb eines Zeitraums mitgetheilt werden, ist gleich dem Gesammtmoment der sämmtlichen Kräfte, welche dem Vereine dieser Punkte während jener Zeit von aussen mitgetheilt werden, und zwar in Bezug auf jeden beliebigen Punkt.**)

Wirken also namentlich keine Kräfte von aussen ein, so muss auch das Gesammtmoment aller mitgetheilten Bewegungen während jedes Zeitraumes null sein, das heisst das Gesammtmoment aller Bewegungen, welche den Punkten einwohnen, muss in der Zeit konstant sein.**) Dies Gesammtmoment stellt somit eine unveränderliche Ebene und in derselben einen konstanten Flächenraum dar; jene Ebene ist es, welche *La Place* die unveränderliche Ebene (*plan invariable*) nennt, und welche vermittelst unserer Wissenschaft sich auf die einfachste Weise durch Summation ergiebt. Die Schwierigkeit der Ableitung nach den sonst üblichen Methoden übersieht sich leicht, wenn man nur

*) Die daraus hervorgehende Gleichung werden wir späterhin bei der Anwendung der Differenzialrechnung auf unsre Wissenschaft darstellen; s. § 105.

**) Es ist dies, wie man sich leicht überzeugt, das Princip der konstanten Flächenräume.

einen Blick wirft auf die in *La Grange's Mécanique analytique* *) oder in *La Place's Mécanique céleste* geführten Entwickelungen, und auf die komplicirten Formeln, in welchen dort die Darstellung fortschreitet.

§ 58, 59. **Abhängigkeit der Momente.**

§ 58.

Wir könnten zwar schon hier die Hauptsätze für die Theorie der Momente aufstellen; da indessen die Betrachtung der Momente im *88* zweiten Abschnitte sich noch weit einfacher gestalten | wird, so will ich hier nur ein Paar Beispiele geben, um zu zeigen, mit welcher Leichtigkeit sich durch Hülfe unserer Analyse die hierhergehörigen Aufgaben lösen lassen, und in welcher Ergiebigkeit die interessantesten Sätze daraus gleichsam hervorsprudeln.

Zuerst sei die Aufgabe die, aus dem Momente in Bezug auf einen 88 Punkt das in Bezug auf einen andern um eine Strecke von | gegebener Länge und Richtung von ihm entfernten Punkt zu finden, wenn ausserdem die Gesammtkraft (die Summe der als Strecken dargestellten Kräfte) ihrer Länge und Richtung nach gegeben ist. Es seien σ und τ die beiden Punkte, M_σ das gegebene auf den ersten Punkt bezügliche, M_τ das auf den zweiten bezügliche Moment, $[\alpha\beta]$, $[\gamma\delta]$, ... die Kräfte, α, γ, ... ihre Angriffspunkte, s die Gesammtkraft ihrer Länge und Richtung nach, also

$$s = [\alpha\beta] + [\gamma\delta] + \cdots.$$

Dann ist

$$M_\sigma = [\sigma\alpha] . [\alpha\beta] + [\sigma\gamma] . [\gamma\delta] + \cdots$$
$$M_\tau = [\tau\alpha] . [\alpha\beta] + [\tau\gamma] . [\gamma\delta] + \cdots.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, so erhält man, da

$$[\sigma\alpha] - [\tau\alpha] = [\sigma\alpha] + [\alpha\tau] = [\sigma\tau]$$

ist, und so weiter, die Gleichung

$$M_\sigma - M_\tau = [\sigma\tau] . ([\alpha\beta] + [\gamma\delta] + \cdots) = [\sigma\tau] . s,$$

wodurch die Aufgabe gelöst ist, und man hat den Satz gewonnen:

Rückt der Beziehungspunkt um eine Strecke fort, so nimmt das Moment um das äussere Produkt der Gesammtkraft in diese Strecke zu. **)

Hierin liegt zugleich, dass das Moment dasselbe bleibt, wenn jenes

---

*) P. 262—269 [II partie, section III, § 2, No. 7—11].

**) Hierbei ist das Wort „zunehmen" in demselben allgemeinen Sinne genommen, in welchem man auch sagen kann, 8 habe um (— 3) zugenommen, wenn 5 daraus geworden ist.

äussere Produkt null ist, das heisst wenn der Beziehungspunkt in der Richtung der Gesammtkraft fortschreitet, oder anders ausgedrückt, dass

die Momente in Bezug auf alle Punkte, welche in einer und derselben mit der Gesammtkraft parallelen Linie liegen, einander gleich sind.

Ferner:

Ist das Moment in Bezug auf irgend einen Punkt null, so ist | es in Bezug auf jeden andern Punkt gleich dem äusseren Produkt der Gesammtkraft in die Abweichung des letzten Punktes von dem ersten. 89

§ 59.

Eine andere Aufgabe, welche die Abhängigkeit der Momente in Bezug auf Axen, die durch denselben Punkt gehen, auffasst, | ist die, aus den Momenten in Bezug auf drei Axen, die durch einen Punkt gehen und nicht in derselben Ebene liegen, das Moment in Bezug auf jede vierte Axe, die durch denselben Punkt geht, zu finden. 89

Es seien a, b, c die drei Axen, A, B, C die auf sie bezüglichen Momente, $\alpha a + \beta b + \gamma c$, wo α, β, γ Zahlen vorstellen, die vierte Axe, deren zugehöriges Moment D gesucht wird.*) Das Moment in Bezug auf den Durchschnitt der drei Axen sei M, so ist nach § 57

$$A = a \,.\, M, \quad B = b \,.\, M, \quad C = c \,.\, M,$$

$$D = (\alpha a + \beta b + \gamma c) \,.\, M.$$

Lösen wir in dem letzten Ausdrucke die Klammer auf, so wird

$$D = \alpha a \,.\, M + \beta b \,.\, M + \gamma c \,.\, M$$
$$= \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

Dies Resultat in Worten ausgedrückt:

*Aus den Momenten dreier Axen, die durch Einen Punkt gehen, ohne in Einer Ebene zu liegen, kann man das jeder andern Axe, die durch denselben Punkt geht, finden; und zwar herrscht zwischen den Momenten dieselbe Vielfachen-Gleichung, wie zwischen den Axen.***)

Wenn einer der Koefficienten null wird, so hat man den Satz:

Aus den Momenten zweier Axen, die durch einen Punkt gehen, kann man das jeder andern Axe, die durch denselben Punkt geht, finden, und

---

*) Dass sich jede Strecke im Raume als Summe aus drei Stücken darstellen lässt, welche drei gegebenen Strecken parallel sind, ist oben gezeigt; darin liegt, dass sie sich als Vielfachensumme derselben darstellen lässt.

**) Der Kürze wegen sagen wir, zwischen Grössen bestehe eine Vielfachen-Gleichung, wenn die Glieder der Gleichung nur Vielfache jener Grössen darstellen.

zwar herrscht zwischen den Momenten dieselbe Vielfachen-Gleichung, wie zwischen den Axen.

Wir werden späterhin bei der allgemeineren Behandlung der Momente auch diesen Satz in viel allgemeinerer Form darstellen können.

Viertes Kapitel.

Aeussere Division, Zahlengrösse.

A. Theoretische Entwickelung.

§ 60. Begriff der äusseren Division.

90 Die zur Multiplikation gehörige analytische Verknüpfung ist die Division; folglich wird nach dem allgemeinen Begriff der analytischen Verknüpfung (§ 5) das Dividiren darin bestehen, dass man zu dem Produkte und dem einen Faktor den andern sucht; und es wird vermöge dieser Erklärung jeder besonderen Art der Multiplikation eine ihr zugehörige Art der Division entsprechen; die äussere Division wird also darin bestehen, dass man zu dem äusseren Produkt und dem einen Faktor desselben den andern sucht.

Es ist klar, dass hier, da die Faktoren des äusseren Produktes im Allgemeinen nicht vertauschbar sind, auch zwei Arten der Division zu unterscheiden sind, je nachdem nämlich der erste Faktor gegeben ist oder der zweite (vgl. § 11). Wir bezeichnen den gesuchten Faktor (Quotienten) so, dass wir das gegebene Produkt A (den Dividend) nach gewöhnlicher Weise über den Divisionsstrich, den gegebenen Faktor B (den Divisor) unter denselben setzen, diesem gegebenen Faktor aber einen Punkt folgen oder vorangehen lassen, je nachdem der gesuchte Faktor als folgender oder vorangehender Faktor aufgefasst werden soll. Also $\frac{A}{B.}$ bedeutet den Faktor C, welcher als zweiter Faktor mit B verknüpft A giebt, also welcher der Gleichung genügt:

$$B\,.\,C = A;$$

und $\frac{A}{.B}$ bedeutet den Faktor C, welcher als erster Faktor mit B verknüpft A giebt, das heisst der Gleichung genügt:

$$C\,.\,B = A;$$

oder beide Bestimmungen durch blosse Formeln ausgedrückt:

$$B\cdot\frac{A}{B.} = A; \qquad \frac{A}{.B}\cdot B = A.$$

Hierbei haben wir dann nur festzuhalten, dass, wenn die Stufenzahlen von der Art sind, dass die Faktoren direkt vertauschbar sind, beide Quotienten gleichen Werth haben, wenn sie hingegen | nur mit 91 Zeichenwechsel vertauschbar sind, beide Quotienten | entgegengesetzten 91 Werth haben.*) Daher wird man im ersteren Falle auch das Zeichen des Punktes im Nenner weglassen können, wenn man nicht etwa die Division noch ins Besondere als äussere bezeichnen will.

§ 61, 62. **Realität und Vieldeutigkeit des Quotienten.**

§ 61.

Es kommt nun darauf an, aus der formellen Bestimmung die wesentliche Bedeutung des Quotienten zu ermitteln.

Da das äussere Produkt zweier Ausdehnungen stets eine Ausdehnung giebt, welcher jene beiden untergeordnet sind und deren Stufenzahl die Summe ist aus den Stufenzahlen der Faktoren, so folgt zunächst, dass auch der Quotient nur dann eine Ausdehnung darstellen könne, wenn der Divisor dem Dividend untergeordnet ist, das heisst von dem System des Dividend ganz umfasst wird; und dass dann zugleich der Divisor von niederer Stufe sein muss als der Dividend, die Stufenzahl des Quotienten aber die Differenz ist zwischen denen des Dividend und Divisors. In jedem andern Falle kann also der Quotient keine Ausdehnung darstellen, sondern nur eine formelle Bedeutung haben, die wir vorläufig auf sich beruhen lassen. Umgekehrt zeigt sich aber auch, dass der Quotient jedesmal dann eine Ausdehnung darstellen muss, wenn jene Bedingung erfüllt ist, dass nämlich der Divisor dem Dividend untergeordnet sei. Nämlich nach § 48 kann man jede Ausdehnung n-ter Stufe auf $(n-1)$ beliebige ihr untergeordnete Faktoren bringen, sobald diese nur von einander unabhängig sind, und somit kann man sie auch auf jede geringere Anzahl untergeordneter Faktoren bringen, das heisst sie als Produkt darstellen, dessen einer Faktor eine beliebige ihr untergeordnete Ausdehnung ist. Also

Der Quotient ist nur dann, aber auch stets dann, eine Ausdehnung, wenn der Divisor dem Dividend untergeordnet und von niederer Stufe ist, und zwar ist seine Stufenzahl dann der Unterschied der beiden Stufenzahlen des Dividend und Divisors.

---

*) Da die Vertauschung der Faktoren nur dann einen Zeichenwechsel erfordert, wenn beide von ungerader Stufenzahl sind, das Produkt also von gerader, so werden auch beide Quotienten nur dann entgegengesetzten Werth haben, wenn der Dividend von gerader, der Divisor von ungerader Stufe ist; in jedem andern Falle werden sie gleichen Werth haben.

§ 62.

92 Es bleibt nun zu untersuchen, ob in diesem Falle der Quotient
92 eindeutig ist, oder mehrdeutig, und wie im letztern Falle | die Gesammtheit seiner Werthe gefunden werden kann.

Es sei $\frac{A}{B.}$ der zu untersuchende Quotient, und B der Grösse A untergeordnet. Nach dem vorigen Paragraphen giebt es nun allemal eine Ausdehnung, welche mit B multiplicirt A giebt, das heisst welche als Quotient aufgefasst werden kann; es sei C eine solche, so dass also

$$B \, . \, C = A$$

ist, und die Frage ist die, ob es noch andere von C verschiedene Ausdehnungen gebe, welche statt C in diese Gleichung gesetzt werden können. Jedenfalls müssten dieselben von derselben Stufe sein wie C (§ 61). Jede von C verschiedene Ausdehnung derselben Stufe wird sich, wenn X eine beliebige Grösse derselben Stufe ist, darstellen lassen in der Form $C + X$, und es ist also X so zu bestimmen, dass

$$B \, . \, (C + X) = A$$

ist, wenn $C + X$ auch als ein Werth des Quotienten $\frac{A}{B.}$ erscheinen soll. Man hat dann

$$B \, . \, C + B \, . \, X = A = B \, . \, C,$$

das heisst

$$B \, . \, X = 0.$$

Nun giebt aber nach § 55 nur das Produkt zweier abhängiger Grössen, aber ein solches auch allemal Null, folglich genügt ausser dem partiellen Werth C des Quotienten noch jede andere Grösse, welche von ihm um einen vom Divisor abhängigen Summanden verschieden ist, aber auch keine andere. Die Gesammtheit dieser Grössen, die von B abhängig sind, oder welche statt X gesetzt der Gleichung

$$B \, . \, X = 0$$

genügen, können wir nun nach der Definition des Quotienten mit $\frac{0}{B}$ bezeichnen; somit haben wir

$$\frac{B \, . \, C}{B \, .} = C + \frac{0}{B} \, .$$

Dies Resultat können wir in folgendem Satze darstellen:

93 *Wenn der Divisor* (B) *dem Dividend* (A) *untergeordnet und von*
93 *niederer Stufe ist, so ist der Quotient nur partiell bestimmt,* | *und zwar findet man, wenn man einen besonderen Werth* (C) *des Quotienten kennt, den allgemeinen, indem man den unbestimmten Ausdruck einer von dem*

Divisor (B) *abhängigen Grösse zu jenem besondern Werth hinzuaddirt, oder es ist dann*

$$\frac{A}{B} = C + \frac{0}{B}.^{*)}$$

Auf die Raumlehre übertragen, sagt dieser Satz aus, dass erstens, wenn zu einem Spathecke (Parallelogramme) die Grundseite und der Flächenraum (nebst der Ebene, der er angehören soll) gegeben ist, dann die andere Seite, die wir Höhenseite genannt haben, nur partiell bestimmt sei, und dass, wenn ihr Anfangspunkt fest ist, der Ort ihres Endpunktes eine mit der Grundseite parallele gerade Linie sei; dass zweitens, wenn zu einem Spathe die Grundfläche und der Körperraum gegeben ist, die andere Seite (Höhenseite) nur partiell bestimmt sei, und der Ort ihres Endpunktes bei festem Anfangspunkt eine mit der Grundfläche parallele Ebene sei; und dass endlich, wenn zu einem Spathe die Höhenseite und der Körperraum gegeben ist, die Grundfläche partiell bestimmt sei, indem dieselbe als der veränderliche ebene Durchschnitt eines Prismas, dessen Kanten der Höhenseite parallel sind, erscheint.

Dies letztere bedarf eines Nachweises. Ist nämlich eine Grundfläche als besonderer Werth jenes Quotienten gefunden, das heisst giebt sie wirklich mit der gegebenen Höhenseite äusserlich multiplicirt den gegebenen Körperraum, und stellt man sich diese Grundfläche in Form eines Spathecks vor, so wird man jedes andere Spatheck, was mit der gegebenen Höhenseite äusserlich multiplicirt dasselbe Produkt giebt, dadurch aus dem ersten gewinnen, dass man den Seiten des ersten beliebige mit der Höhenseite parallele Summanden hinzufügt, worin dann der ausgesprochene Satz liegt.

§ 63, 64. Ausdruck für den eindeutigen Quotienten.

§ 63.

Aus dem Satze des vorigen Paragraphen ergiebt sich, dass man die Gesetze der arithmetischen Division nicht ohne weiteres auf | unsere 94 Wissenschaft übertragen könne, namentlich dass man im Dividend | und 94 Divisor nicht gleiche Faktoren wegheben dürfe. Aber da überhaupt die Rechnung mit unbestimmten, wenn auch nur partiell unbestimmten Grössen, mannigfachen Schwierigkeiten unterliegt, und in der ander-

---

*) Es ist dies unbestimmte Glied sehr wohl zu vergleichen mit der unbestimmten Konstanten bei der Integration, und das eigenthümliche Verfahren, welches dadurch herbeigeführt wird, ist hier dasselbe wie dort.**)

**) Vergleiche die Anm. zu S. 39 und 43. (1877.)

weitigen Analyse des Endlichen nichts vollkommen entsprechendes findet, so ist es am zweckmässigsten, diesen unbestimmten Ausdruck durch bestimmte Ausdrücke zu ersetzen.

Es ergiebt sich nämlich, dass der Quotient ein bestimmter ist, sobald derselbe seiner Art nach gegeben, das heisst das System gleicher Stufe bestimmt ist, dem er angehören soll, vorausgesetzt nämlich, dass dies System von dem des Divisors unabhängig, dem Systeme des Dividend aber untergeordnet sei. Wird diese Voraussetzung erfüllt, so ist in der That immer ein, aber auch nur Ein Werth des Quotienten möglich, welcher in dem gegebenen Systeme liegt. Denn denkt man sich irgend eine diesem Systeme gleichartige Ausdehnung (C) mit dem Divisor multiplicirt, so wird das Produkt dem Dividend gleichartig sein, also auch durch Vergrösserung oder Verkleinerung jener Ausdehnung (C) dem Dividend gleich gemacht werden können, wobei diese Ausdehnung (C) selbst sich als Quotient darstellt. Aber auch nur Ein solcher Werth des Quotienten wird hervorgehen. Es sei nämlich C ein solcher Werth des Quotienten $\frac{A}{B.}$, so dass also $B . C = A$ ist; es verwandle sich C in eine ihm gleichartige Grösse $C + C_1$, wo C_1 nicht gleich Null ist, so hat man

$$B . (C + C_1) = B . C + B . C_1 = A + B . C_1;$$

es ist also $B . (C + C_1)$ nicht gleich A, da $B . C_1$, weil beide Faktoren nach der Voraussetzung von einander unabhängig sind, nicht Null geben kann. Also jeder andere mit C gleichartige Werth genügt statt C gesetzt nicht der Gleichung

$$B . C = A,$$

das heisst, kann nicht als ein Werth des Quotienten $\frac{A}{B.}$ aufgefasst werden; also giebt es nur einen solchen.

Dies Resultat kann man auch so ausdrücken: Wenn zwei gleiche Produkte einen gleichen Faktor haben, und der andere Faktor in beiden gleichartig, von dem ersten aber unabhängig ist, so ist auch dieser in beiden gleich.

95 Es kommt nun darauf an, für diesen bestimmten Quotienten eine angemessene Bezeichnung zu finden. Es sei P der Dividend, A der 95 Divisor, B | eine Grösse, welcher der Quotient gleichartig sein soll, A und B seien beide dem Systeme P untergeordnet, aber von einander unabhängig; dann wird P sich als Produkt von A_1 in B, wo A_1 mit A gleichartig ist, darstellen lassen, der Quotient wird also

$$\frac{A_1 . B}{A.}$$

sein; diesen können wir, sofern er mit B gleichartig sein soll, vorläufig mit

$$\frac{A_1}{A} B$$

bezeichnen. Also $\frac{A_1}{A} B$ soll die mit B gleichartige Grösse B_1 bezeichnen, welche der Gleichung

$$A_1 . B = A . B_1$$

genügt.*)

§ 64.

Um nun die Bedeutung dieser Ausdrücke auszumitteln, haben wir die Verbindung eines und desselben Ausdrucks | $\frac{A_1}{A}$ mit verschiedenen 96 Grössen zu untersuchen.

Zunächst ergiebt sich, dass, *wenn* A, B, C *von einander unabhängig sind*, und

$$\frac{A_1}{A} B = B_1$$

ist, dann auch allemal

$$\frac{A_1}{A} C = \frac{B_1}{B} C$$

sein muss. Denn aus der ersten Gleichung hat man nach der Definition

$$A_1 . B = A . B_1,$$

*) Die Bezeichnung kann keine Zweideutigkeit hervorrufen, da wir bisher noch nicht einen Quotienten zweier gleichartiger Grössen kennen gelernt haben. Dabei bleibt vorläufig unentschieden, ob in dieser Bezeichnung $\frac{A_1}{A}$ in der That als Quotient und seine Verbindung mit B als Multiplikation aufzufassen sei; doch wird die Angemessenheit der Bezeichnung erst dann klar werden können, wenn wirklich jene Auffassung sich herausstellt. Durch einen Seitenblick auf die Zahlenlehre, mit welcher hier unsere Wissenschaft in Berührung tritt, ohne aber von ihr Sätze zu entlehnen, leuchtet ein, dass wenn A_1 ein Vielfaches von A ist, auch B_1 ein eben so Vielfaches von B sein müsse, und dass also, wenn wir unter $\frac{A_1}{A}$ die Zahl verstehen, welche angiebt, ein Wievielfaches A_1 von A sei, dann B_1 in der Form $\frac{A_1}{A} B$ dargestellt werden könne. Allein so einfach diese Anwendung der Zahlenlehre auch sein mag, so dürfen wir sie hier nicht aufnehmen, ohne unserer Wissenschaft zu schaden. Auch würde sich dieser Verrath an unserer Wissenschaft bald genug rächen durch die mannigfachen Verwickelungen und Schwierigkeiten, in die wir sehr bald durch den Begriff der Irrationalität gerathen würden. Wir bleiben daher, ohne uns durch die betrügerische Aussicht auf einen bequemen Weg verlocken zu lassen, unserer Wissenschaft getreu.

und setzt man $\frac{A_1}{A} C = C_1$, so ist

$$A_1 . C = A . C_1 .$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit C, die zweite mit B (auf zweiter Stelle), so hat man

$$A_1 . B . C = A . B_1 . C,$$
$$A_1 . B . C = A . B . C_1,$$

also auch

$$A . B_1 . C = A . B . C_1 .$$

Da nun $B_1 . C$ mit $B . C_1$ gleichartig ist, und der andere Faktor (A) sowohl, als das Produkt auf beiden Seiten gleich ist, so muss (§ 63)

$$B_1 . C = B . C_1,$$

das heisst

$$\frac{B_1}{B} C = C_1 = \frac{A_1}{A} C$$

sein. Also wenn

$$\frac{A_1}{A} B = B_1$$

ist, so geben die Ausdrücke $\frac{A_1}{A}$ und $\frac{B_1}{B}$ mit jeder beliebigen von $A . B$ unabhängigen Grösse verbunden dasselbe Resultat.

Aber wir können nun zeigen, dass dies auch dann noch der Fall sein müsse, *wenn beide Ausdrücke mit einer Grösse C verbunden sind, welche nur von A und von B unabhängig ist, ohne zugleich von dem Produkte $A . B$ unabhängig zu sein.*

Zunächst erweisen wir dies für den Fall, dass C eine Strecke sei, die wir mit c bezeichnen wollen. Es sei also

97

$$\frac{A_1}{A} c = c_1$$

oder

$$A_1 . c = A . c_1 ,$$

wo c zwar von A und B unabhängig, aber von $A . B$ abhängig sei. Um nun zu zeigen, dass dann, wenn

$$\frac{A_1}{A} B = B_1$$

ist, auch

$$\frac{B_1}{B} c = \frac{A_1}{A} c = c_1$$

sein müsse, suchen wir den Faktor c durch Hinzufügung einer von $A . B$ unabhängigen Strecke p selbst davon unabhängig zu machen. Man erhält dann statt $A_1 . c$ den Ausdruck $A_1 . (c + p)$; diesem wird ein Ausdruck gleichgesetzt werden können, dessen erster Faktor A [ist], und

dessen zweiter mit $(c+p)$ gleichartig ist und also als Summe zweier mit c und p gleichartiger Stücke dargestellt werden kann. Es sei derselbe c_2+p_1, so hat man

$$A_1 \cdot (c+p) = A \cdot (c_2+p_1).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit p, so erhält man

$$A_1 \cdot c \cdot p = A \cdot c_2 \cdot p$$

oder, da $A_1 \cdot c = A \cdot c_1$ ist,

$$A \cdot c_1 \cdot p = A \cdot c_2 \cdot p,$$

und daraus folgt, da die entsprechenden Faktoren gleichartig sind, nach § 63 die Gleichung

$$c_1 = c_2.$$

Führt man daher statt c_2 diesen Werth c_1 oben ein, so erhält man

$$A_1 \cdot (c+p) = A \cdot (c_1+p_1).$$

Und da nun p von $A \cdot B$ unabhängig war, also auch $(c+p)$ davon unabhängig ist, so können wir nun das oben erwiesene Gesetz anwenden, dass

$$B_1 \cdot (c+p) = B \cdot (c_1+p_1)$$

ist; also auch, mit p multiplicirt,

$$B_1 \cdot c \cdot p = B \cdot c_1 \cdot p;$$

und da hier die entsprechenden Faktoren gleichartig sind, so hat man

$$B_1 \cdot c = B \cdot c_1$$

oder

$$\frac{B_1}{B} c = c_1 = \frac{A_1}{A} c$$

auch dann noch, wenn c von $A \cdot B$ abhängig ist.

Nun können wir dies Resultat leicht ausdehnen auf den Fall, dass die Ausdrücke $\frac{A_1}{A}$ und $\frac{B_1}{B}$, welche der Gleichung

$$\frac{A_1}{A} B = B_1 \quad \text{oder} \quad A_1 \cdot B = A \cdot B_1 \qquad 98$$

entsprechen, mit einer beliebigen von A und von B unabhängigen Grösse höherer Stufe C verbunden sind. Es sei $C = c \cdot d \cdot e \ldots$, so lässt sich jede mit C gleichartige Grösse C_1 in der Form $c_1 \cdot d \cdot e \ldots$ darstellen, wie wir schon an mehreren Orten gezeigt haben. Ist also

$$\frac{A_1}{A} C = C_1 \quad \text{oder} \quad A_1 \cdot C = A \cdot C_1,$$

so hat man nun durch jene Substitution

$$A_1 \cdot c \cdot d \cdot e \ldots = A \cdot c_1 \cdot d \cdot c \ldots,$$

woraus, vermöge der Gleichartigkeit der Faktoren, folgt (§ 63)

$$A_1 . c = A . c_1,$$

somit auch nach dem soeben erwiesenen Satze

$$B_1 . c = B . c_1,$$

also auch durch Wiederholung derselben Schlussreihe

$$B_1 . c . d . e \ldots = B . c_1 . d . e \ldots,$$

das heisst

$$B_1 . C = B . C_1$$

oder

$$\frac{B_1}{B} C = C_1 = \frac{A_1}{A} C.$$

Wir haben somit den allgemeinen Satz bewiesen:

Wenn

$$\frac{A_1}{A} B = B_1$$

ist, so ist auch in Bezug auf jede Grösse C, welche von A und von B unabhängig ist,

$$\frac{A_1}{A} C = \frac{B_1}{B} C.$$

§ 65, 66. Begriff des Quotienten zweier gleichartiger Grössen.

§ 65.

Da nun der Begriff der Ausdrücke $\frac{A_1}{A}$ und $\frac{B_1}{B}$ nur bestimmt ist, sofern sie mit Grössen verbunden sind, die von A und B unabhängig sind, und für jede zwei solche Verbindungen, in welche $\frac{A_1}{A}$ und $\frac{B_1}{B}$ mit derselben Grösse eingehen, unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{A_1}{A} B = B_1$$

ist, die Gleichheit dargethan ist, so folgt, dass wir berechtigt sind, 99 die Ausdrücke $\frac{A_1}{A}$ und $\frac{B_1}{B}$ unter obiger Voraussetzung selbst | einander gleichzusetzen, und dadurch den Begriff, den diese Ausdrücke an sich haben, zu bestimmen. Also

99 *Wenn*

$$\frac{A_1}{A} B = B_1$$

oder $A_1 . B = A . B_1$ *ist* (*A und B von einander unabhängig gedacht*), *so setzen wir*

$$\frac{A_1}{A} \textit{ gleich } \frac{B_1}{B}.$$

Es ist klar, wie hierdurch die Bedeutung von $\frac{A_1}{A} B$ auch dann bestimmt ist, wenn B von A abhängig ist; denn man hat nur eine Hülfsgrösse C anzunehmen, welche von A und B unabhängig ist, und C_1 so zu bestimmen, dass nach der angegebenen Definition $\frac{C_1}{C}$ gleich ist $\frac{A_1}{A}$, so ist durch Substitution des Gleichen

$$\frac{A_1}{A} B = \frac{C_1}{C} B,$$

und dadurch auch der Begriff des ersten Ausdrucks bestimmt. Namentlich ergiebt sich daraus, dass

$$\frac{A_1}{A} A = A_1$$

ist. Denn nimmt man eine Hülfsgrösse B, welche von A unabhängig ist, und setzt

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B},$$

das heisst

$$\frac{B_1}{B} A = A_1,$$

so muss auch nach dem allgemeinen Begriff des Gleichen

$$\frac{A_1}{A} A = \frac{B_1}{B} A$$

sein; der letztere Ausdruck ist aber, wie wir soeben zeigten, gleich A_1, also auch der erstere, was wir zeigen wollten.

Hieraus nun folgt zugleich, dass der Ausdruck $\frac{A_1}{A}$ als Quotient aufgefasst werden könne, sobald seine Verbindung mit andern Grössen, wie wir sie bisher beschrieben, als Multiplikation dargethan ist, das heisst die Beziehung jener Verbindung zur Addition als eine multiplikative nachgewiesen ist.

§ 66.

Zuerst ist

$$\frac{A_1}{A}(b+c) = \frac{A_1}{A} b + \frac{A_1}{A} c.$$

Nämlich $\frac{A_1}{A}(b+c)$ ist eine mit $b+c$ gleichartige Strecke, welche sich daher auch in | Stücken ausdrücken lassen muss, die mit b und c *100* gleichartig sind; es seien dies b_1 und c_1, also

$$(1) \qquad \frac{A_1}{A}(b+c) = b_1 + c_1 \qquad 100$$

oder

$$A_1 . (b+c) = A . (b_1 + c_1).$$

Man multiplicire diese Gleichung mit c, so hat man

$$A_1 . b . c = A . b_1 . c,$$

also auch vermöge der Gleichartigkeit der Faktoren

$$A_1 . b = A . b_1 \quad \text{oder} \quad \frac{A_1}{A} b = b_1 .$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich durch Multiplikation mit b, dass

$$\frac{A_1}{A} c = c_1$$

ist; substituirt man diese Ausdrücke für b_1 und c_1 in die obige Gleichung (1), so hat man in der That

$$\frac{A_1}{A}(b + c) = \frac{A_1}{A} b + \frac{A_1}{A} c .$$

Es ist dies nun auszudehnen auf den Fall, dass statt b und c Ausdehnungen höherer Stufen B und C eintreten. Die Summe derselben giebt nach § 47 nur dann eine Ausdehnung, wenn beide Ausdehnungen n-ter Stufe sich auf einen gemeinschaftlichen Faktor $(n - 1)$-ter Stufe bringen lassen. Es sei daher

$$B = b . E, \quad C = c . E .$$

Dann sei

$$\frac{A_1}{A} b = b_1 ; \quad \frac{A_1}{A} c = c_1 ,$$

also

$$A_1 . (b + c) = A . (b_1 + c_1),$$

so ist auch noch, wenn man diese Gleichung mit E multiplicirt,

$$A_1 . (b + c) . E = A . (b_1 + c_1) . E$$

oder

$$A_1 . (b . E + c . E) = A . (b_1 . E + c_1 . E)$$

oder

$$\frac{A_1}{A}(B + C) = b_1 . E + c_1 . E . \tag{2}$$

Es ist aber, wenn man die Gleichungen, durch welche b_1 und c_1 bestimmt wurden, in Produktform darstellt und mit E multiplicirt,

$$A_1 . b . E = A . b_1 . E ; \quad A_1 . c . E = A . c_1 . E ,$$

also

101
$$\frac{A_1}{A} B = b_1 . E$$

101 und auf dieselbe Weise

$$\frac{A_1}{A} C = c_1 . E .$$

Diese Ausdrücke für $b_1 . E$ und $c_1 . E$ in die obige Gleichung (2) substituirt, hat man

$$\frac{A_1}{A}(B + C) = \frac{A_1}{A} B + \frac{A_1}{A} C .$$

Gilt nun die multiplikative Beziehung für reale Summen, so gilt sie auch für formale, weil diese ihrem Begriffe nach nur durch jene bestimmt sind; da nämlich dann $B + C$ keine Ausdehnung darstellt, so hat auch

$$\frac{A_1}{A}(B + C)$$

nur die formelle Bedeutung, dass es

$$= \frac{A_1}{A} B + \frac{A_1}{A} C$$

gesetzt werde. Es gilt also die multiplikative Beziehung für diese Ausdrücke $\left(\frac{A_1}{A}, \ldots\right)$ allgemein, und ihre Verknüpfung, wie wir sie aufgefasst haben, ist als wahre Multiplikation zu fassen. Also ist auch $\frac{A_1}{A}$ selbst ein wahrer Quotient*).

§ 67. Proportion.

Um eine anschaulichere Idee des Quotienten zu gewinnen, gehen wir zunächst von Strecken aus; es seien a und b von einander unabhängig, und

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} \quad \text{oder} \quad a_1 . b = a . b_1,$$

so hat man aus der letzten Gleichung

$$a_1 . b + b_1 . a = 0,$$

oder da man dem zweiten Faktor Stücke hinzufügen darf, die dem 102 ersten gleichartig sind,

$$a_1 . (a + b) + b_1 . (a + b) = 0, \qquad 102$$

$$(a_1 + b_1) . (a + b) = 0,$$

das heisst $(a + b)$ und $(a_1 + b_1)$ sind gleichartig oder können als Theile desselben Systems erster Stufe aufgefasst werden. Nach der Erzeugungsweise des Systems erster Stufe mussten dann a_1 und b_1 entsprechende Theile von a und b sein. Schreibt man nun die ursprüngliche Gleichung als Proportion

$$a_1 : a = b_1 : b,$$

so gelangt man zu dem Satze: Vier Strecken stehen in Proportion,

*) Da die Stufenzahl des Quotienten die Differenz ist zwischen den Stufenzahlen des Dividend und Divisor, so ist $\frac{A_1}{A}$ als Ausdehnungs-Grösse nullter Stufe zu fassen, was auch damit übereinstimmt, dass, wenn eine Ausdehnung mit ihr multiplicirt wird, sich deren Stufenzahl nicht ändert.

wenn die erste von der zweiten der entsprechende Theil ist, wie die dritte von der vierten. Nach dem Begriff des Quotienten zweier gleichartiger Grössen bleibt der Werth desselben ungeändert, wenn man Dividend und Divisor mit derselben unabhängigen Ausdehnung multiplicirt, den Quotienten erweitert; nämlich wenn

$$a_1 . b = a . b_1, \text{ also } \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$$

ist, so ist auch

$$a_1 . E . b = a . E . b_1,$$

also

$$\frac{a_1 . E}{a . E} = \frac{b_1}{b}, \text{ also } = \frac{a_1}{a}.$$

Somit kann man auch jedes Verhältniss durch eine beliebige Ausdehnung erweitern. Nun können wir sagen, dass $a_1 . E$ von $a . E$ der entsprechende Theil ist, wie a_1 von a, und somit haben wir den allgemeinen Satz:

Vier Grössen stehen in Proportion, wenn die erste von der zweiten der entsprechende Theil ist, wie die dritte von der vierten.

§ 68. **Zahlengrösse, Produkt derselben mit einer Ausdehnungsgrösse.**

Wir haben nun die Verknüpfungen dieser neu gewonnenen Grössen, die wir *Zahlengrössen* nennen, sowohl unter sich, als mit den Ausdehnungsgrössen darzustellen.

Die multiplikative Verknüpfung derselben mit den Ausdehnungsgrössen haben wir dargestellt, und ihre Beziehung zur Addition gesichert. Wir haben nun die rein multiplikativen Gesetze dieser Verknüpfung, das heisst die Vereinbarkeit und Vertauschbarkeit der Faktoren zu untersuchen. Es ergiebt sich, dass man in einem äusseren Produkt, worin Zahlengrössen vorkommen, diese jedem beliebigen Faktor *103* zuordnen | kann, ohne den Werth des Resultates zu ändern.

In der That ist, $\frac{a_1}{a}$ mit α bezeichnet,

103 $$\alpha (B . C) = (\alpha B) . C.$$

Denn es sei αB oder $\frac{a_1}{a} B = B_1$, oder

$$a_1 . B = a . B_1,$$

so hat man durch Multiplikation mit C

$$a_1 . B . C = a . B_1 . C;$$

also auch nach der Definition

$$\frac{a_1}{a}(B.C) = B_1 . C,$$

oder

$$\alpha(B.C) = (\alpha B).C.$$

Was die Vertauschbarkeit anbetrifft, so ist die Bedeutung des Ausdrucks $A\alpha$, wo A eine beliebige Ausdehnung, α aber eine Zahlengrösse ist, noch nicht festgesetzt; und wir können diese Bedeutung nach der Analogie bestimmen. Nämlich, da die Ausdehnungsgrösse nullter Stufe als Ausdehnungsgrösse von gerader Stufe erscheint, eine solche aber in einem äusseren Produkt beliebig geordnet werden darf, so können wir feststellen, dass unter $A\alpha$ dasselbe verstanden sein solle, wie unter αA, woraus dann folgt,

dass die Stellung einer Zahlengrösse innerhalb eines äusseren Produktes ganz gleichgültig ist.

Was endlich den Quotienten einer Ausdehnung durch eine Zahlengrösse betrifft, so ist dessen Bedeutung aus dem allgemeinen Begriff der Division sogleich klar, und die Eindeutigkeit dieses Quotienten, so lange der Divisor nicht null wird, ergiebt sich leicht. In der That, es sei

$$\frac{B}{\alpha} = X, \quad \alpha = \frac{a}{a_1},$$

wo a von B unabhängig sei, so hat man

$$\alpha X = B, \quad \frac{a}{a_1} X = B, \quad a . X = a_1 . B,$$

und wir haben oben gezeigt, dass es nur Einen mit B gleichartigen Werth X giebt, welcher dieser letzten Gleichung genügt, während jene Gleichartigkeit in den vorhergehenden Gleichungen ausgesagt ist.

§ 69, 70. **Produkt mehrerer Zahlengrössen.**

§ 69.

Zu dem Begriffe des Produktes mehrerer Zahlengrössen gelangen 103 wir vom fortschreitenden Produkte aus.

Setzen wir das Produkt

$$(1) \qquad P . \alpha\beta\gamma \ldots = P_1,$$

wo die Ausdehnung P mit den Zahlengrössen α, β, γ, ... fortschrei- 104 tend, das heisst so multiplicirt werden soll, dass das Resultat jeder früheren Multiplikation mit der nächstfolgenden Zahlengrösse multiplicirt wird: so entsteht die Aufgabe, eine Zahlengrösse zu finden, mit welcher P multiplicirt sogleich dasselbe Resultat P_1 gebe. Zu dem

Ende seien α, β, γ, ... dargestellt in den Formen

$$\frac{A_1}{A}, \frac{B_1}{B}, \frac{C_1}{C}, \ldots,$$

so dass P, A, B, C, ... alle von einander unabhängig seien. Multiplicirt man dann beide Seiten der obigen Gleichung (1) mit $A.B.C\ldots$, so kann man nach dem vorigen Paragraphen die Zahlengrössen α, β, γ, ... oder

$$\frac{A_1}{A}, \frac{B_1}{B}, \frac{C_1}{C}, \ldots$$

jedem beliebigen dieser Faktoren zuordnen, also auch $\frac{A_1}{A}$ dem A, und so weiter, und erhält dadurch

$$P.A_1.B_1.C_1\ldots = P_1.A.B.C\ldots.$$

Also ist, da P_1 dem P gleichartig ist, nach der Definition des Quotienten

$$P_1 = P\frac{A_1.B_1.C_1\ldots}{A.B.C\ldots}.$$

Somit haben wir das Gesetz, dass

$$P\frac{A_1}{A}\frac{B_1}{B}\frac{C_1}{C}\cdots = P\frac{A_1.B_1.C_1\ldots}{A.B.C\ldots}$$

ist, zunächst zwar nur, wenn P von $A.B.C\ldots$ unabhängig ist, aber demnächst auch, wenn P hiervon abhängig ist. Um dies zu zeigen, stellen wir zuerst die Zahlengrössen α, β, γ, ... oder die Quotienten $\frac{A_1}{A}, \cdots$ in neuen Formen $\left(\frac{\mathsf{A}_1}{\mathsf{A}}, \ldots\right)$ dar, so dass P von $\mathsf{A}.\mathsf{B}.\Gamma\ldots$ unabhängig ist, so werden wir nun das obige Gesetz anwenden können, und eine Zahlengrösse ρ erhalten, welche statt der fortschreitenden Faktoren $\frac{A_1}{A}, \ldots$ $\left(\text{oder } \frac{\mathsf{A}_1}{\mathsf{A}}, \cdots\right)$ gesetzt werden kann und welche gleich

$$\frac{\mathsf{A}_1.\mathsf{B}_1.\Gamma_1\ldots}{\mathsf{A}.\mathsf{B}.\Gamma\ldots}$$

105 ist. Nimmt man nun eine Ausdehnung Q zu | Hülfe, welche sowohl von $A.B.C\ldots$ als auch von dieser neuen Grösse $\mathsf{A}.\mathsf{B}.\Gamma\ldots$ unabhängig ist, so ergiebt sich $Q\alpha\beta\gamma\ldots$ vermöge der ersten Grössen gleich

105 $$Q\frac{A_1.B_1.C_1\ldots}{A.B.C\ldots},$$

vermöge der zweiten aber gleich

$$Q\rho.$$

Also ist

$$\rho = \frac{A_1.B_1.C_1\ldots}{A.B.C\ldots}.$$

Nun war aber

$$P \, . \, \alpha\beta\gamma \ldots = P\varrho$$

vermöge der zweiten Reihe von Formen, also ist auch vermöge des gefundenen Werthes für ϱ

$$P \frac{A_1}{A} \frac{B_1}{B} \frac{C_1}{C} \cdots = P \, \frac{A_1 \, . \, B_1 \, . \, C_1 \ldots}{A \, . \, B \, . \, C \ldots}.$$

Es ist also das obige Gesetz in seiner ganzen Allgemeinheit bewiesen.

§ 70.

Hieraus gehen sogleich zwei für die Verknüpfung der Zahlengrössen höchst wichtige Folgerungen hervor, nämlich erstens, dass, wenn für irgend eine Grösse P die fortschreitende Multiplikation mit mehreren Zahlengrössen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ durch die Multiplikation mit einer bestimmten Zahlengrösse ϱ ersetzt wird, dies auch für jede andere Grösse gilt, die statt P gesetzt wird, indem nämlich der für ϱ im vorigen Paragraphen gewonnene Ausdruck gänzlich unabhängig ist von P, und nur von den Zahlengrössen $\alpha, \beta, \ldots$ abhängt; zweitens dass die Zahlengrössen auch beliebig unter sich vertauscht werden können, weil man in dem Produkt

$$\frac{A_1 \, . \, B_1 \ldots}{A \, . \, B \ldots}$$

im Zähler und Nenner gleiche Vertauschungen vornehmen kann, indem dadurch in beiden gleiche Zeichenänderungen, also für den Werth des Quotienten gar keine hervorgeht. Die erste dieser Folgerungen berechtigt uns, das Produkt $\alpha\beta\gamma \ldots$ selbst gleich ϱ zu setzen. Also:

Unter dem Produkte mehrerer Zahlengrössen ist diejenige Zahlengrösse zu verstehen, welche in ihrer Multiplikation mit irgend einer Ausdehnung dasselbe Resultat liefert, als wenn | diese Ausdehnung fortschreitend mit den Faktoren jenes Produktes multiplicirt wird. 106

Hiernach ist also, wenn $A, B, C, \ldots$ von einander unabhängig sind,

$$\frac{A_1}{A} \frac{B_1}{B} \frac{C_1}{C} \cdots = \frac{A_1 \, . \, B_1 \, . \, C_1 \ldots}{A \, . \, B \, . \, C \ldots}. \qquad 106$$

Die zweite Folgerung, die wir vorher ableiteten, sagt nun aus, dass man Zahlengrössen als Faktoren unmittelbar vertauschen könne.

§ 71. Geltung aller Gesetze arithmetischer Multiplikation und Division für die Zahlengrössen.

Um nun die Geltung aller Gesetze arithmetischer Multiplikation und Division (s. § 6) für die Zahlengrössen nachzuweisen, haben

wir noch die Eindeutigkeit des Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$, so lange α nicht null ist, darzuthun.

Es bedeutet nach der allgemeinen Definition analytischer Verknüpfungen $\frac{\beta}{\alpha}$ diejenige Grösse, welche mit α multiplicirt β giebt; es sei nun $\alpha\gamma$ gleich β, so haben wir zu zeigen, dass, wenn zugleich $\alpha\gamma'$ gleich β sei, γ nothwendig gleich γ' sein müsse, vorausgesetzt noch immer, dass α nicht null sei. Es soll also, wenn A irgend eine Ausdehnung vorstellt, vorausgesetzt werden, dass

$$A\beta = A(\alpha\gamma) = A(\alpha\gamma')$$

sei; da man aber nach dem vorigen Paragraphen statt mit dem Produkte, mit den einzelnen Faktoren multipliciren kann, so hat man auch

$$(A\alpha)\gamma = (A\alpha)\gamma'.$$

Nun haben wir aber bei der Definition der Zahlengrösse festgesetzt, dass zwei Zahlengrössen, welche mit derselben Ausdehnung multiplicirt gleiches Resultat geben, auch als gleich betrachtet werden müssen. Ist nun α nicht null, so ist $A\alpha$ eine wirkliche Ausdehnung, also nach der angeführten Bestimmung $\gamma = \gamma'$, das heisst der Quotient zweier Zahlengrössen eindeutig, so lange der Divisor nicht null ist.

Da nun auf der Vertauschbarkeit und Vereinbarkeit der Faktoren, wie auch auf der Eindeutigkeit des Quotienten in dem angegebenen Umfange, alle Gesetze arithmetischer Multiplikation und Division beruhen (§ 6), und dieselben Gesetze auch für die Verknüpfung der Zahlengrössen mit den Ausdehnungen gelten (§ 68), so ergiebt sich, dass

107 · alle Gesetze arithmetischer Multiplikation und Division für die | Verknüpfung der Zahlengrössen unter sich und mit den Ausdehnungsgrössen gelten *).

107 Hierdurch ist nun zugleich der wesentliche Zusammenhang zwischen der arithmetischen und der äusseren Multiplikation dargethan, indem jene als specielle Gattung von dieser erscheint, für den Fall nämlich, dass die Faktoren Ausdehnungsgrössen nullter Stufe sind. Wir bedienen uns daher für die Multiplikation der Zahlengrössen beliebig bald des Punktes bald des unmittelbaren Aneinanderschreibens, indem das letztere uns oft bequem ist, um die Klammern zu ersparen und dadurch die Uebersicht zu erleichtern.

*) Wir entlehnen dabei nichts aus der Arithmetik, als nur den Namen, indem wir die Gesetze dieser Verknüpfungen in der allgemeinen Formenlehre § 6 unabhängig dargethan haben.

§ 72. Addition der Zahlengrössen.

Um zur Addition zweier Zahlengrössen (α und β) zu gelangen, haben wir zunächst den Ausdruck

$$\alpha C + \beta C = C_1$$

zu betrachten, und die Zahlengrösse zu suchen, mit welcher C multiplicirt werden muss, damit derselbe Werth C_1 hervorgehe.

Zu dem Ende seien α, β dargestellt in den Formen $\frac{a_1}{a}$ und $\frac{a_2}{a}$, wo a von C unabhängig sei. Die obige Gleichung verwandelt sich dann in

$$\frac{a_1}{a} C + \frac{a_2}{a} C = C_1$$

und durch die Multiplikation mit a in

$$a_1 . C + a_2 . C = a . C_1,$$

oder

$$(a_1 + a_2) . C = a . C_1,$$

also

$$C_1 = \frac{a_1 + a_2}{a} C.$$

Wir haben somit den Satz gewonnen, dass

$$\frac{a_1}{a} C + \frac{a_2}{a} C = \frac{a_1 + a_2}{a} C$$

sei, und zwar zunächst nur, wenn a von C unabhängig ist; aber auf dieselbe Weise wie in § 69 lässt sich dies auf den Fall der Abhängigkeit ausdehnen.

Aus diesem Satze nun geht hervor, dass, wenn

$$\alpha C + \beta C = \gamma C$$

ist, dann auch, weil der Ausdruck für γ nur von α und β und nicht von C abhängig ist, dieselbe Gleichung für jeden Werth von C fort- *108* besteht, und darin liegt die Berechtigung, in diesem Falle $\alpha + \beta$ gleich γ zu setzen. Also wir setzen

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

wenn

$$\alpha C + \beta C = \gamma C$$

ist, wo C irgend eine Ausdehnung bezeichnet; das heisst, nach der De- 108 finition ist

$$\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta) C.$$

Um nun diese Verknüpfung als wahre Addition nachzuweisen, haben wir die Geltung der additiven Grundgesetze und der additiven Beziehung zur Multiplikation darzuthun.

Zuerst liegt die Vertauschbarkeit der Stücke direkt in der Definition, da auch die Stücke αC und βC vertauschbar sind. Um die Vereinbarkeit der Stücke nachzuweisen, gehen wir darauf zurück, dass

$$(\alpha C + \beta C) + \gamma C = \alpha C + (\beta C + \gamma C)$$

ist; diese Gleichung verwandelt sich, wenn man das in der Definition dargelegte Gesetz auf jeder Seite zweimal anwendet, in

$$[(\alpha + \beta) + \gamma]\, C = [\alpha + (\beta + \gamma)]\, C,$$

woraus folgt

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Endlich ist auch das Resultat der Subtraktion eindeutig. Denn wird der Werth von β in der Gleichung

$$\alpha + \beta = \gamma$$

gesucht, so erhalten wir, wenn

$$\alpha = \frac{a_1}{a}, \quad \beta = \frac{a_2}{a}, \quad \gamma = \frac{a_3}{a}$$

gesetzt wird, nach dem obigen die Gleichung

$$a_1 + a_2 = a_3,$$

oder

$$a_2 = a_3 - a_1.$$

Also hat a_2 einen bestimmten Werth, also auch $\frac{a_2}{a}$ oder β, das heisst $\gamma - \alpha$ hat nur Einen Werth, das Resultat der Subtraktion ist eindeutig.

Da somit die Grundgesetze der Addition und Subtraktion gelten, so gelten auch alle Gesetze derselben.

§ 73. Beziehung dieser Addition zur Multiplikation. Allgemeines Gesetz.

Es bleibt uns nur noch übrig, die Beziehung dieser Addition zur Multiplikation darzustellen, und zu zeigen, dass

109 $$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

ist.

Es ist nach der Definition des Produktes (§ 70)

$$P \,.\, \alpha(\beta + \gamma) = P\alpha \,.\, (\beta + \gamma),$$

wo der Punkt zugleich die Stelle der Klammern vertreten soll, der Ausdruck der rechten Seite ist aber nach dem vorigen Paragraphen

$$= P\alpha \,.\, \beta + P\alpha \,.\, \gamma$$
$$= P \,.\, \alpha\beta + P \,.\, \alpha\gamma.$$

109 Also ist wiederum nach dem vorigen Paragraphen, da

$$P \,.\, \alpha(\beta + \gamma) = P \,.\, \alpha\beta + P \,.\, \alpha\gamma$$

ist, auch $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$. Durch Verknüpfung dieses Resultates mit den früher gewonnenen gelangen wir nun zu dem allgemeinen Lehrsatze:

Alle Gesetze der arithmetischen Verknüpfungen gelten auch für die Verknüpfungen der Zahlengrössen unter sich und mit den Ausdehnungen; und alle Gesetze der äusseren Multiplikation und ihrer Beziehung zur Addition und Subtraktion bleiben bestehen, auch wenn man die Zahlengrösse als Ausdehnungsgrösse nullter Stufe nimmt, nur dass das Resultat der Division mit ihr ein bestimmtes wird.

Wenden wir den Begriff der Abhängigkeit, wie wir ihn in § 55 für Ausdehnungen aufstellten, auch auf die Zahlengrössen an, als Ausdehnungsgrössen nullter Stufe, so zeigt sich, dass diese immer unter sich und von allen Ausdehnungsgrössen unabhängig gedacht werden müssen, wenn nicht etwa eine dieser Grössen null wird. Die Null hingegen erscheint nach § 32 immer als abhängig. Auf der andern Seite erscheinen die Zahlengrössen stets als einander gleichartig.

B. Anwendungen.

§ 74. Die Zahlengrösse in der Geometrie.

Da wir schon in den Anwendungen zu den vorigen Kapiteln der leichteren Uebersicht wegen die Zahlengrösse mit aufgenommen hatten: so bleibt uns hier nur noch übrig, die hier gewählte Methode auf die *Geometrie* anzuwenden.

Es ist als ein wesentlicher Uebelstand bei den bisherigen Darstellungen der Geometrie zu betrachten, dass man bei der Behandlung der Aehnlichkeitslehre auf diskrete Zahlenverhältnisse zurückzugehen pflegt. Dies Verfahren, was sich zuerst leicht darbietet, verwickelt, wie wir schon oben andeuteten, bald genug in die schwierigen Untersuchungen über inkommensurable Grössen; und es rächt sich das Aufgeben | des rein geometrischen Verfahrens gegen ein dem ersten An- *110* scheine nach leichteres durch das Auftreten einer Menge schwieriger Untersuchungen von ganz heterogener Art, welche über das Wesen der räumlichen Grössen nichts zur Anschauung bringen. Allerdings kann man sich nicht der Aufgabe entziehen, die räumlichen Grössen zu messen und das Resultat dieses Messens in einem Zahlenbegriff auszudrücken. Allein diese Aufgabe kann nicht in der Geometrie | selbst 110 hervortreten, sondern nur dann, wenn man ausgerüstet einerseits mit dem Zahlenbegriff, andrerseits mit den räumlichen Anschauungen, jenen auf diese anwendet, also in einem gemischten Zweige, welchen wir im

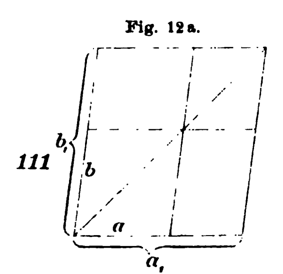
allgemeinen Sinne mit dem Namen der Messkunde belegen können, und von welchem die Trigonometrie ein besonderer Zweig ist*). Bis auf diesen Zweig nun die Aehnlichkeitslehre oder auch noch gar die Flächeninhaltslehre hinausschieben zu wollen, wie es zwar nicht der Form nach, aber dem Gehalte nach in der That bisher geschehen ist, hiesse die (reine) Geometrie ihres wesentlichen Inhaltes berauben. Nun finden wir zu dem Wege, den wir hier verlangen, in der neueren Geometrie mannigfache Vorarbeiten, in unserer Wissenschaft aber ist uns der Weg selbst aufs vollkommenste vorgezeichnet.

§ 75—79. Rein geometrische Darstellung der Proportionen in der Geometrie.

§ 75.

Es bieten sich hier zwei Ausgangspunkte dar, welche jedoch ihrem Wesen nach zusammenfallen, wie verschieden auch ihr Ausdruck klingen mag. Nämlich vier Strecken, von denen die beiden ersten und die beiden letzten unter sich parallel sind, aber nicht diese mit jenen, stehen in Proportion, nach der ersten Betrachtungsweise, wenn das Spatheck aus der ersten und vierten gleich ist dem aus der zweiten und dritten; nach der zweiten Betrachtungsweise, wenn die Summe aus der ersten und dritten (im Sinne unserer Wissenschaft) parallel ist mit der Summe aus der zweiten und vierten. Schon aus der in § 67 geführten Entwickelung geht die wesentliche Uebereinstimmung beider Betrachtungsweisen hervor, indem wenn

Fig. 12a.



$$a_1 \,.\, b = a \,.\, b_1$$

war, daraus hervorging, dass

$$(a_1 + b_1) \,.\, (a + b) = 0^{**}),$$

das heisst beide Summen $(a + b)$ und $(a_1 + b_1)$ parallel waren, und ebenso würde aus der letzten

111 Gleichung die erste folgen; und es ist also gleichgültig, von welcher der beiden Gleichungen wir die Gültigkeit der Proportion

$$a_1 : a = b_1 : b$$

abhängig machen.

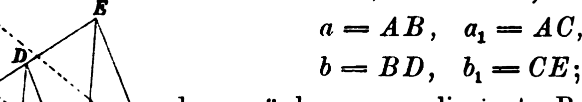
*) Die Zahlengrösse, wie wir sie in unserer Wissenschaft entwickelt haben, erscheint nicht als diskrete Zahl, das heisst nicht als eine Menge von Einheiten, sondern in stetiger Form, als Quotient stetiger Grössen, und setzt daher den diskreten Zahlenbegriff keineswegs voraus.

**) Die Formeln sind hier nur Repräsentanten geometrischer Sätze, die ein jeder leicht aus denselben herauslesen kann, s. Fig. 12a.

Wir wollen die zweite Betrachtungsweise als die geometrisch einfachere wählen und können dieselbe so ausdrücken: Wenn zwei Dreiecke parallele Seiten haben, so sagen wir, dass zwei beliebige parallele Seiten beider sich verhalten, wie zwei andere in entsprechender Folge genommen; denn wenn a und b zwei Seiten des einen, und a_1 und b_1 die damit parallelen Seiten des andern sind, so sind eben dann und nur dann $a + b$ und $a_1 + b_1$ einander parallel. Hierbei ist wohl zu beachten, dass auf dieser Stufe vier Strecken, als Strecken, das heisst, mit festgehaltener Länge und Richtung aufgefasst, nur dann als proportionirt erscheinen, wenn sie paarweise parallel sind, und diese parallelen Strecken stellen wir dann in der Proportion auf die beiden ersten und auf die beiden letzten Stellen.

§ 76.

Der eigentliche Nerv der Entwickelung beruht nun darin, die Proportion als Gleichheit zweier Verhältnisse nachzuweisen, so dass, wenn $a : a_1 = b : b_1$, und $a : a_1 = c : c_1$ ist, auch $b : b_1 = c : c_1$ sei.



Um den geometrischen Ausdruck dieses Satzes zu finden, setzen wir*)

$$a = AB, \quad a_1 = AC,$$
$$b = BD, \quad b_1 = CE;$$

dann würden, wenn die erste Proportion bestehen soll, die Punkte A, D, E eine gerade Linie bilden müssen, weil $a + b$, das heisst AD parallel sein soll $a_1 + b_1$, das heisst AE. Ebenso sei

$$c = BF, \quad c_1 = CG,$$ 112

so werden wieder vermöge der zweiten Proportion die Punkte A, F, G eine gerade Linie bilden. Soll nun auch die dritte Proportion richtig sein, so müsste DF parallel mit EG sein; es ist also zu zeigen, dass, wenn die Ecken eines Dreiecks in geraden Linien fortrücken, die sich in Einem Punkte schneiden, und zwei von den | Seiten parallel bleiben, 112 auch die dritte parallel bleiben müsse.

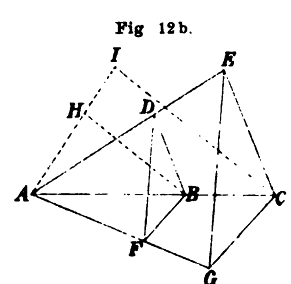
Dieser Satz ergiebt sich sogleich, wenn die beiden Dreiecke oder (was auf dasselbe zurückläuft) die drei Linien, in welchen sich die Ecken bewegen, nicht in derselben Ebene liegen. In diesem Falle darf man nur durch je zwei der von A ausgehenden Linien eine Ebene ge-

*) S. Fig. 12b.

legt denken, und durch den Punkt C eine mit BDF parallele Ebene legen, so wird diese die drei ersten Ebenen in Kanten schneiden, welche mit den Seiten jenes Dreiecks BDF parallel sind, und wovon zwei mit CE und CG zusammenfallen; somit wird auch die dritte mit EG zusammenfallen, also EG mit DF parallel sein.

§ 77.

Liegen jene Linien in Einer Ebene, so hat man nur von B und C zwei ausserhalb der Ebene liegende einander parallele Linien zu ziehen, welche durch eine von A aus gezogene Linie in den Punkten H und I geschnitten werden. Dann ist nach dem Satze des vorigen Paragraphen erstens HD parallel IE, zweitens HF parallel IG, also vermöge des Parallelismus dieser beiden Linienpaare wieder nach demselben Satze DF parallel mit EG.



Somit haben wir allgemein bewiesen, dass, wenn die Ecken eines Dreiecks sich in geraden Linien fortbewegen, die durch einen Punkt gehen, und zwei Seiten parallel bleiben, auch die dritte es bleibt; oder dass, wenn zwei Streckenpaare einem und demselben Streckenpaare proportionirt sind, sie auch unter einander proportionirt sein müssen, sobald die drei Streckenpaare drei verschiedene Richtungen darbieten.

§ 78.

Der Begriff einer Proportion zwischen vier parallelen Strecken hat in dem Vorigen noch keine Bestimmung erfahren. In der That ist dieser Fall, obgleich arithmetisch der einfachste, doch geometrisch der verwickeltste, sofern zu drei parallelen Strecken die vierte Proportionale geometrisch nur durch zu Hülfe nehmen einer neuen Richtung erfolgt.

Nach dem Princip der im vorigen Paragraphen geführten Entwickelung haben wir ein Streckenpaar einem ihm parallelen als pro- *113* portionirt zu setzen, wenn beide einem und | demselben Streckenpaare proportionirt sind; denn sind sie es mit Einem solchen, so sind sie es nach dem vorigen Paragraphen auch mit jedem andern, welches dem vorher angenommenen selbst proportionirt ist. Es gilt somit, wenn wir diese Definition noch zu Hülfe nehmen, allgemein der Satz, dass zwei Streckenpaare, welche einem und demselben Streckenpaare pro-

portionirt sind, es auch unter einander sein müssen. | Somit können 113 wir auch die Proportion, wie wir ihren Begriff geometrisch bestimmten, in der That als Gleichheit zweier Ausdrücke darstellen, deren jeden wir ein Verhältniss nennen.

Geometrisch sagt dies Resultat, indem man die proportionirten Strecken an Einen Punkt anlegt, zunächst nur aus, dass wenn die Ecken eines Dreiecks oder überhaupt eines Vielecks sich in geraden Linien bewegen, die durch Einen Punkt gehen, und die übrigen Seiten dabei sich parallel bleiben, auch die letzte sich parallel bleiben müsse, und ebenso jede Diagonale. Oder betrachtet man dies sich ändernde Vieleck in zweien seiner Zustände, so hat man den Satz: „Wenn die geraden Linien, welche die entsprechenden Ecken zweier Vielecke von gleicher Seitenzahl verbinden, durch Einen Punkt gehen, und alle entsprechenden Seitenpaare bis auf eines parallel sind, so muss auch dies eine Paar parallel sein.“ Jene Vielecke heissen dann bekanntlich „ähnlich und ähnlich liegend“, jener Eine Punkt ihr „Aehnlichkeitspunkt“. Umgekehrt ergiebt sich, dass zwei Dreiecke, welche parallele Seiten haben, auch ähnlich und ähnlich liegend sind, oder dass die geraden Linien, welche ihre entsprechenden Ecken verbinden, durch Einen Punkt gehen. Hieraus wieder folgt, dass in ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren die Durchschnittspunkte zweier entsprechender Diagonalenpaare mit dem Aehnlichkeitspunkte in einer geraden Linie liegen, und überhaupt, dass, wenn man die Verbindungslinien entsprechender Punktenpaare und ebenso die Durchschnittspunkte entsprechender Linienpaare als entsprechend setzt, dann jedesmal in ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren je zwei entsprechende Punkte mit dem Aehnlichkeitspunkte in gerader Linie liegen, je zwei entsprechende Linien aber parallel sind.

Hiermit sind dann die Sätze für die Aehnlichkeit, so weit man sie auf dieser Stufe (ohne den Begriff der Länge aufzunehmen) ableiten kann, entwickelt, und überall auf dem Begriff des Aehnlichkeitspunktes basirt. Es ist aber auch leicht abzusehen, wie | dem ganz entsprechend, *114* wenn man noch den Begriff der Länge, wie es in der Geometrie gewöhnlich geschieht, sogleich mit aufnimmt, alle Sätze der Aehnlichkeit selbst genau in der Form, in welcher man sie gewöhnlich aufstellt, dargestellt werden können, ohne dass man irgend den Begriff der Zahl aufzunehmen Ursache hätte. Auf die weitere Darlegung dieses Gegenstandes kann ich mich um so | weniger einlassen, da 114 die Entwickelung dem zweiten Theile dieses Werkes parallel gehen würde.

§ 79.

Nachdem wir so das Princip der Entwickelung für die Geometrie dargelegt haben, können wir uns wohl der Mühe überheben, die Entwickelung noch auf die Proportionalität der Flächenräume auszudehnen. Auch erscheint es überflüssig, für die Verknüpfungen der Zahlengrössen, wie wir sie in der abstrakten Wissenschaft formell bestimmt haben, noch die entsprechenden Sätze der Geometrie aufzustellen, da dieselben ihres Formalismus wegen nur für die Analyse eine Bedeutung haben, und mehr als blosse analytische Abkürzungen erscheinen, als dass sie eigenthümliche räumliche Verhältnisse darlegten.

Interessant ist es noch zu bemerken, wie bei der rein geometrischen Darstellung wie auch in der abstrakten Wissenschaft die Betrachtung vom Raume aus zur Ebene, und dann erst von dieser zur geraden Linie führt, und dass somit diejenige Betrachtung, in welcher alles räumlich aus einander tritt, sich räumlich entfaltet, auch als die der Raumlehre eigenthümliche und für sie als die einfachste erscheint, während, wenn die Gebilde in einander liegen, dann auch alles noch verhüllt erscheint, wie der Keim in der Knospe, und erst seine räumliche Bedeutung gewinnt, wenn man das Ineinanderliegende in Beziehung setzt zu dem räumlich Entfalteten.

Fünftes Kapitel.

Gleichungen, Projektionen.

A. Theoretische Entwickelung.

§ 80. Ableitung neuer Gleichungen aus einer gegebenen durch Multiplikation.

Nachdem wir in den vorigen Kapiteln die Verknüpfungsgesetze kennen gelernt haben, welchen die Ausdehnungsgrössen unterliegen, *115* so bleibt uns nun übrig, diese Gesetze auf | die Auflösung und Umgestaltung der Gleichungen, welche zwischen solchen Grössen stattfinden können, anzuwenden.

Da die Glieder auf beiden Seiten einer Gleichung als zu addirende oder zu subtrahirende alle von gleicher Stufe sein müssen, so können wir der Gleichung selbst diese Stufenzahl beilegen, und also unter einer Gleichung n-ter Stufe eine solche verstehen, deren Glieder von n-ter Stufe sind. Zunächst haben wir uns nun die Frage zu stellen,

was für Umgestaltungen wir mit solchen Gleichungen vornehmen dürfen, 115
oder wie wir andere Gleichungen daraus ableiten können. Dass man die Glieder derselben mit Aenderung der Vorzeichen von einer Seite auf die andere bringen kann, ist klar, und es fragt sich also nur noch nach den Umgestaltungen, welche eine Gleichung durch Multiplikation und Division erleiden kann. Dabei wollen wir annehmen, dass alle Glieder auf dieselbe (linke) Seite gebracht seien, und also die andere (rechte) Seite gleich Null ist.

Nun ist klar, dass, wenn man beide Seiten der Gleichung mit einer und derselben Ausdehnungsgrösse multiplicirt, dann die rechte Seite null bleibt, auf der linken aber statt der ganzen Summe die einzelnen Glieder multiplicirt werden können. Man kann also, indem man alle Glieder einer Gleichung jedesmal mit derselben Ausdehnungsgrösse multiplicirt, eine Reihe neuer Gleichungen aus derselben ableiten, welche im Allgemeinen (wenn der hinzutretende Faktor nicht etwa von nullter Stufe ist) von höherer Stufe sind als die gegebene.

Ist die gegebene Gleichung von m-ter Stufe, und ist das System, welchem alle Glieder angehören, und welches wir das **Hauptsystem** der Gleichung nennen, von n-ter Stufe, so kann man insbesondere jene Gleichung mit einer Ausdehnung von **ergänzender**, das heisst von $(n-m)$-ter Stufe, welche gleichfalls dem Hauptsysteme angehört, multipliciren, und erhält dadurch eine Gleichung von n-ter Stufe, deren Glieder alle einander gleichartig sind. Hiernach kann man also aus jeder Gleichung, deren Glieder ungleichartig sind, insbesondere eine Reihe von Gleichungen ableiten, deren jede lauter gleichartige Glieder enthält.

§ 81. Wiederherstellung der ursprünglichen Gleichung.

Obgleich man nun aus einer Gleichung beliebig viele Gleichungen höherer Stufen ableiten kann, so kann man doch nicht umgekehrt aus einer der letzteren die ursprüngliche Gleichung herstellen. In der That, wenn man aus der ursprünglichen Gleichung

$$A = 0, \qquad \textit{116}$$

in welcher A ein Aggregat von beliebig vielen Gliedern bedeutet, durch Multiplikation mit einer beliebigen Ausdehnung L eine neue Gleichung

$$A \, . \, L = 0$$

abgeleitet hat, so folgt nun, wenn nur die Richtigkeit der letzten Gleichung gegeben ist, keinesweges daraus die Richtigkeit der ersteren; 116
vielmehr folgt aus jener letzten nur

$$A = \frac{0}{L},$$

in welcher nach dem vorigen Kapitel $\frac{0}{L}$ jede von L abhängige Grösse, die Null mit eingeschlossen, darstellt. Die Gleichung $A = 0$ wird sich daher nur dann ergeben, wenn vorausgesetzt ist, dass A keinen von L abhängigen geltenden Werth habe, oder mit andern Worten, wenn die Glieder, als deren Summe A gedacht ist, einem von L unabhängigen Systeme angehören; das heisst:

wenn die Glieder einer Gleichung alle einen gemeinschaftlichen Faktor L auf derselben Stelle haben, und die sämmtlichen übrigen Faktoren aller Glieder einem von diesem gemeinschaftlichen Faktor unabhängigen Systeme angehören, so kann man den Faktor L in allen Gliedern weglassen.

§ 82. Projektion oder Abschattung. Abschattung einer Summe.

Durch Verknüpfung der Verfahrungsarten der beiden vorigen Paragraphen gelangen wir nun zu einem Verfahren, um aus einer Gleichung andere Gleichungen derselben Stufe abzuleiten.

In der That, ist

$$A + B + \cdots = 0$$

die ursprüngliche Gleichung, so erhalten wir durch Multiplikation mit L (nach § 80) die Gleichung

$$A . L + B . L + \cdots = 0.$$

Wollen wir nun hierauf das Verfahren von § 81 anwenden, um den Faktor L wegzuschaffen, so müssen wir die Glieder dieser Gleichung in solcher Form darstellen, dass die Faktoren, mit welchen L multiplicirt ist, ins Gesammt einem von L unabhängigen Systeme angehören.

Es sei G ein solches System und A', B', ... seien Ausdehnungen, welche diesem System angehören, und die Beschaffenheit haben, dass

117 $$A' . L = A . L, \quad B' . L = B . L, \ldots$$

sei, so hat man die Gleichung

$$A' . L + B' . L + \cdots = 0,$$

und daraus nach dem vorigen Paragraphen

$$A' + B' + \cdots = 0,$$

eine Gleichung, welche von derselben Stufe ist, wie die ursprüngliche.

117 Ein jedes Glied der letzten Gleichung ist aus dem entsprechenden der ersten dadurch hervorgegangen, dass man in dem Systeme G eine Grösse gesucht hat, welche mit einer von G unabhängigen Grösse L multiplicirt dasselbe giebt, wie das entsprechende Glied der ursprüng-

lichen Gleichung, und es zeigt sich sogleich, dass, wenn eine solche Grösse möglich ist, auch immer nur Eine möglich sei. Nimmt man nämlich zwei solche an, etwa A' und A'', welche aus A auf die angegebene Weise entstanden sein sollen, so müssen sie nach der Voraussetzung mit L multiplicirt gleiches Resultat geben (nämlich $A . L$); wir erhalten also die Gleichung

$$A' . L = A'' . L,$$

und da das System G, welchem A' und A'' angehören, von L unabhängig sein soll, so kann man nach § 81 hier L weglassen und hat

$$A' = A'',$$

das heisst, beide Werthe fallen in Einen zusammen; es ist also in der That nur Eine solche Grösse möglich. Wir nennen hier A' die Projektion oder Abschattung*), A die projicirte oder abgeschattete Grösse, G das Grundsystem, das System L das Leitsystem, und sagen, dass A' die Projektion oder Abschattung von A auf G nach (gemäss) dem Leitsystem L sei. Also *unter der Projektion oder Abschattung einer Grösse* (A) *auf ein Grundsystem* (G) *nach einem Leitsysteme* (L) *verstehen wir diejenige Grösse, welche, dem Grundsysteme angehörend, mit einem Theil des Leitsystems gleiches Produkt liefert, wie die projicirte oder abgeschattete Grösse* (A).

Wir können somit den im Anfange dieses Paragraphen entwickelten Satz in der Form aussprechen:

Eine Gleichung bleibt als solche bestehen, wenn man alle ihre Glieder in demselben Sinne abschattet (*projicirt*); 118

oder auch, wenn man Ein Glied auf die eine Seite allein geschafft denkt,

die Abschattung (*Projektion*) *einer Summe ist gleich der Summe aus den Abschattungen der Stücke.* **) 118

§ 83. Wann die Abschattung null und wann sie unmöglich wird.

Um der Betrachtungsweise eine grössere Anschaulichkeit zu geben, haben wir zu untersuchen, wann die Abschattung null, und wann sie unmöglich wird.

*) Die Namen Projektion und Abschattung sollen nicht überall dasselbe bedeuten, ihr Unterschied wird aber erst im zweiten Abschnitte dieses Theiles heraustreten; auf die hier betrachteten Grössen angewandt, fallen beide Begriffe zusammen.

**) Ich ziehe in dem Ausdruck der Sätze den Namen Abschattung vor, weil in dieser Form die Sätze allgemein sind, und auch für die später zu entwickelnden Grössen bestehen bleiben.

Soll die Abschattung A' null werden, so muss auch, da

$$A'.L = A.L$$

ist, das Produkt $A.L$ null, das heisst A von L abhängig sein; aber auch umgekehrt, herrscht diese Abhängigkeit, so muss, weil das System, dem jeder geltende Werth von A' angehören soll, von L unabhängig ist, also das Produkt $A'.L$ nicht gleich Null machen kann, A' selbst null sein. Also ist die Abschattung dann, aber auch nur dann null, wenn die abgeschattete Grösse vom Leitsystem abhängig ist. Da endlich jede dem Systeme G angehörige Grösse, mit L multiplicirt, dem Systeme $G.L$ angehören muss, so wird $A'.L$, also auch das ihm Gleiche $A.L$, nothwendig dem Systeme $G.L$ angehören, wenn die Abschattung möglich sein soll; wobei der Nullwerth, wie immer, als jedem beliebigen Systeme angehörig und von ihm abhängig betrachtet wird. Aber auch umgekehrt, wenn $A.L$ dem Systeme $G.L$ angehört, so ist die Abschattung allemal möglich; denn wenn $A.L$ nicht null ist, und es dem Systeme $G.L$ angehört, so müssen die einfachen Faktoren von $A.L$ sich als Summen von Stücken darstellen lassen, welche denen von $G.L$ gleichartig sind; also muss dann namentlich A sich auf diese Weise darstellen lassen; aber diejenigen Stücke, welche mit den Faktoren von L gleichartig sind, kann man, ohne den Werth des Produktes $A.L$ zu ändern, [aus A] weglassen; thut man dies, und nennt die so gewonnene Grösse, welche nun statt A eintritt, A', so sind die Faktoren von A' nur von G abhängig, A' gehört also zu-
119 gleich dem Systeme G an, ist also die | Abschattung von A. Ist aber $A.L$ gleich Null, so haben wir schon nachgewiesen, dass die Abschattung auch null, also möglich ist.

Somit hat sich ergeben, dass die Abschattung allemal dann, aber auch nur dann, möglich ist, wenn das Produkt der abgeschatteten
119 Grösse in das Leitsystem dem Produkte des Grundsystems in das Leitsystem angehört. Da, wenn $A.L$ nicht null ist, die angeführte Bedingung mit der Bedingung identisch ist, dass A dem Systeme $G.L$ angehöre, so können wir die Resultate dieses Paragraphen auch in folgendem Satze zusammenfassen:

Ist die abzuschattende Grösse von dem Leitsysteme abhängig, so ist die Abschattung null; ist sie davon unabhängig, so hat die Abschattung allemal dann einen geltenden Werth, wenn die abzuschattende Grösse dem aus dem Grund- und Leitsysteme zusammengesetzten Systeme angehört; in jedem andern Falle ist sie unmöglich.

Wenden wir den Begriff der Abschattung auch auf die Grössen nullter Stufe, das heisst auf die Zahlengrössen an, so haben wir nur

zu beachten, dass die Allgemeinheit der Gesetze es erfordert, dieselben als jedem beliebigen Systeme angehörig, aber, wenn sie nicht null sind, als von ihnen unabhängig zu betrachten (s. Kap. 4). Daraus geht dann hervor, dass die Zahlengrössen bei der Abschattung sich nicht ändern.

§ 84. Abschattung eines Produktes und eines Quotienten. Allgemeines Gesetz.

Wir gehen nun zur Abschattung eines Produktes über, um dieselbe mit den Abschattungen seiner Faktoren zu vergleichen.

Es sei $A.B$ das Produkt, A' und B' die Abschattungen von A und B auf das Grundsystem G nach dem Leitsysteme L, so hat man die Gleichungen

$$A'.L = A.L \text{ und } B'.L = B.L.$$

Die Abschattung des Produktes $A.B$ wird nun diejenige Grösse sein, welche, dem Systeme G angehörend, mit L multiplicirt ein Produkt giebt, welches gleich $A.B.L$ ist. Da nun $A.L$ gleich ist $A'.L$, so kann ich in dem Produkte $A.B.L$ statt A den Werth A' setzen, wie sich sogleich durch zweimalige Vertauschung und Zusammenfassung ergiebt.*) Somit erhalte ich

$$A.B.L = A'.B.L = A'.B'.L, \qquad 120$$

letzteres, weil $B.L$ gleich ist $B'.L$. Da nun A' und B' beide dem Systeme G angehören, so gehört auch $A'.B'$ ihm an, und da zugleich, wie wir eben zeigten,

$$A.B.L = A'.B'.L$$

ist, so ist in der That $A'.B'$ die Abschattung von $A.B$; also hat man den Satz:

Die Abschattung eines Produktes ist das Produkt aus den Abschattungen seiner Faktoren, wenn alle Abschattungen in demselben Sinne genommen (das heisst Grundsystem und Leitsystem dieselben) sind;

oder mit dem früheren Resultate zusammengefasst:

Eine richtige Gleichung bleibt richtig, wenn man ihre Glieder, oder die Faktoren ihrer Glieder, alle in demselben Sinne abschattet.

---

*) In der That kann ich $A.B.L$ entweder gleich $A.L.B$ oder gleich $-A.L.B$ setzen, dann die Faktoren $A.L$ zu einem Produkt zusammen fassen, statt dieses Produktes das ihm gleiche $A'.L$ setzen, und dann die vorige Ordnung wiederherstellen, wobei, wenn das *minus*-Zeichen eingetreten war, sich nothwendig das ursprüngliche Zeichen wiederherstellt.

Hat man ins Besondere die Gleichung

$$A_1 = \alpha A, \text{ oder } \frac{A_1}{A} = \alpha,$$

wo α eine Zahlengrösse bezeichnen soll, so folgt daraus, wenn A'_1 und A' die Abschattungen von A_1 und A sind, die Gleichung

$$A'_1 = \alpha A' \text{ oder } \frac{A'_1}{A'} = \alpha,$$

das heisst der Werth eines Quotienten zweier gleichartiger Grössen ändert sich nicht, wenn man statt derselben die in gleichem Sinne genommenen Abschattungen setzt. Oder allgemeiner, sucht man die Abschattung eines Quotienten $\frac{A}{.B}$, so hat man, da dieser Quotient jede Grösse C bezeichnet, welche der Gleichung

$$C.B = A$$

genügt, durch Abschattung der einzelnen Faktoren in gleichem Sinne die neue Gleichung

$$C'.B' = A' \text{ oder } C' = \frac{A'}{.B'},$$

121 das heisst, statt einen Quotienten abzuschatten, kann man Zähler und Nenner in demselben Sinne abschatten. Fassen wir daher Addition, 121 Subtraktion, äussere Multiplikation und Division unter dem | allgemeinen Begriffe der *Grundverknüpfungen* zusammen, so können wir den allgemeinen Satz aufstellen, welcher die früheren in sich schliesst:

Statt das Ergebniss einer Grundverknüpfung abzuschatten, kann man deren Glieder in demselben Sinne abschatten.

§ 85. Analytischer Ausdruck der Abschattung.

Es bietet sich uns hier die Aufgabe dar, die Abschattung analytisch auszudrücken, wenn die Grösse, welche abgeschattet werden soll, und der Sinn der Abschattung, das heisst Grundsystem und Leitsystem gegeben sind. Doch beschränken wir uns hier nur auf den Fall, dass die abzuschattende Grösse mit dem Grundsysteme von gleicher Stufe ist, indem die Lösung im allgemeineren Falle zwar auch schon hier leicht zu bewerkstelligen ist, jedoch zu einem Ausdrucke führen würde, der an Einfachheit dem später zu entwickelnden Ausdrucke (s. Abschn. II, Kap. 4) sehr nachstehen würde.

Es sei A die abzuschattende Grösse, L ein Theil des Leitsystems, G des Grundsystems, und A und G seien von gleicher Stufe, so wird die Abschattung A' mit G gleichartig sein müssen, also

$$A' = xG$$

gesetzt werden können, wo x eine Zahlengrösse ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit L, so hat man

$$A'.L = xG.L,$$

oder, da $A'.L$ nach dem Begriff der Abschattung gleich $A.L$ ist, so hat man

$$A.L = xG.L, \text{ also } x = \frac{A.L}{G.L}$$

und daraus

$$A' = \frac{A.L}{G.L} G,$$

was der gesuchte analytische Ausdruck ist. Den Wortausdruck dieses Resultats versparen wir uns bis zur Behandlung des allgemeinen Falles.

§ 86. Ableitung eines Vereins von Gleichungen, welcher die ursprüngliche ersetzt.

Dagegen müssen wir den Faden wieder anknüpfen, den wir oben (§ 81) fallen liessen. Wir hatten nämlich dort gezeigt, wie man zwar aus einer Gleichung

$$A + B + \cdots = 0$$ *122*

durch Multiplikation mit einer beliebigen Ausdehnung L eine neue 122 Gleichung

$$A.L + B.L + \cdots = 0$$

ableiten, aber aus dieser im Allgemeinen nicht wieder die ursprüngliche herleiten könne; es kommt also jetzt darauf an, aus jener Gleichung einen Verein von Gleichungen dieser Art abzuleiten, welcher jene eine ersetze, das heisst, aus welchem sich jene erste wiederum ableiten lässt.

Ins Besondere liess sich der Faktor L so auswählen, dass nach der Multiplikation der einzelnen Glieder mit diesem Faktor eine Gleichung aus lauter gleichartigen Gliedern hervorging, und da solche Gleichungen als die einfachsten erscheinen, so wird es besonders darauf ankommen, jene erste Gleichung durch Gleichungen dieser Art zu ersetzen.*) Die Entwickelung der folgenden Paragraphen zeigte, wie die Gleichung

$$A.L + B.L + \cdots = 0$$

ersetzt werden konnte durch eine Gleichung zwischen den Abschattungen auf ein und dasselbe Grundsystem nach dem Leitsystem L,

---

*) Wir sagen überhaupt, dass sich zwei Vereine von Gleichungen gegenseitig ersetzen, wenn man aus jedem der beiden Vereine den andern ableiten kann.

also, wenn $A', B', \ldots$ solche Abschattungen von $A, B, \ldots$ darstellen, durch die Gleichung

$$A' + B' + \cdots = 0;$$

und die Aufgabe, die wir uns stellten, ist also identisch mit der, eine Gleichung zu ersetzen durch einen Verein von Gleichungen, welche durch Abschattungen der ersteren hervorgehen, und namentlich eine Gleichung zwischen ungleichartigen Gliedern durch solche Abschattungsgleichungen, deren Glieder alle gleichartig sind.

Es sei die ursprüngliche Gleichung von m-ter Stufe, und ihr Hauptsystem, das heisst das System, welchem alle ihre Glieder ins Gesammt angehören, von n-ter Stufe, und zwar sei dies letztere dargestellt als Produkt von n unabhängigen einfachen Faktoren $a.b\ldots.$ Alsdann wird nach dem Begriffe des Systems n-ter Stufe sich jeder einfache Faktor eines jeden Gliedes der gegebenen Gleichung als Summe darstellen lassen, deren Stücke jenen Faktoren $a, b, \ldots$ gleichartig sind, 123 also in der Form $a_1 + b_1 + \cdots$. Denkt man sich | jeden einfachen Faktor jedes Gliedes der gegebenen Gleichung auf diese Weise dargestellt, und führt die Multiplikation aus, so dass die Klammern verschwinden, so erhält man eine Summe von Gliedern, deren jedes mit einem der Produkte zu m Faktoren aus $a, b, \ldots$ gleichartig ist. Multiplicirt man nun die Gleichung mit $(n-m)$ von den Faktoren $a, b, \ldots,$ so bleiben nur diejenigen Glieder von geltendem Werthe, welche mit dem Produkte der m übrigen Faktoren jener Reihe $a, b, \ldots$ gleichartig sind, indem alle andern wenigstens Einen einfachen Faktor enthalten, der mit den neu hinzutretenden Faktoren gleichartig ist, also bei dieser Multiplikation verschwinden. Nun kann man aber wiederum nach § 81 die hinzugetretenen Faktoren hinweglassen, indem das System, dem die übrigen angehören, von dem System der hinzutretenden unabhängig ist. Man erhält auf diese Weise einen Verein richtiger Gleichungen, wenn man, nachdem die ursprüngliche Gleichung auf die angegebene Weise umgestaltet ist, jedesmal die gleichartigen Glieder zu einer Gleichung vereinigt. Und da die sämmtlichen so gewonnenen Gleichungen bei ihrer Addition die ursprüngliche wiedergeben, so haben wir einen Verein von Gleichungen gewonnen, welcher die ursprüngliche genau ersetzt, und die Aufgabe ist gelöst. Somit haben wir den Satz:

Wenn man in einer Gleichung m-ter Stufe, deren Glieder einem Systeme n-ter Stufe angehören, jeden einfachen Faktor eines jeden Gliedes als Summe darstellt, deren Stücke n von einander unabhängigen Strecken gleichartig sind, und durchmultiplicirt, so kann man jede Reihe von gleichartigen Gliedern, welche daraus hervorgehen, zu Einer Gleichung zusammen-

fassen und erhält dadurch einen Verein von Gleichungen, welcher die ursprüngliche ersetzt.

Oder, da jede dieser Gleichungen ersetzt wird durch eine Gleichung, welche aus der ursprünglichen durch Multiplikation mit $(n-m)$ von den Faktoren a, b, ... hervorgeht,

wenn man eine Gleichung m-ter Stufe, deren Glieder einem Systeme n-ter Stufe angehören, nach und nach mit jedem Produkt zu $(n-m)$ Faktoren, welches sich aus n von einander unabhängigen Strecken jenes Systems bilden lässt, multiplicirt, so | erhält man einen Verein von Gleichungen, 124 *welcher die ursprüngliche ersetzt.*

Da die Glieder, welche bei dem vorhergehenden Satze in jeder abgeleiteten Gleichung erschienen, sich unmittelbar als Abschattungen der Glieder, welche in der ursprünglichen Gleichung vorkamen, zu erkennen geben, so können wir den gewonnenen Satz auch vermittelst des Begriffs der Abschattungen aussprechen, haben jedoch für den bequemeren Ausdruck noch eine Reihe neuer Begriffe aufzustellen.

§ 87. Richtsysteme (Koordinatensysteme), Richtgebiet, Richtmasse, Hauptmass.

Nämlich die Betrachtungsweise des vorigen Paragraphen führt uns zu dem Begriffe der Koordinatensysteme oder Richtsysteme, welche wir jedoch in einem viel ausgedehnteren Sinne auffassen, als dies gewöhnlich geschieht. Auch erlaube ich mir, die sonst üblichen Benennungen, welche namentlich, wenn sie der durch die Wissenschaft geforderten Erweiterung unterworfen werden sollen, als sehr schleppend erscheinen, und überdies fremden Sprachen entlehnt sind, durch einfachere zu ersetzen.

Ich nenne die n Strecken a, b, ..., welche ein System n-ter Stufe bestimmen, (also alle von einander unabhängig sind), sofern jede Strecke des Systems durch sie ausgedrückt werden soll, die Richtmasse erster Stufe oder die Grundmasse dieses Systems, ihren Verein ein Richtsystem, die Produkte von m Grundmassen (mit Festhaltung der ursprünglichen Ordnung derselben) Richtmasse m-ter Stufe, das Richtmass n-ter Stufe das Hauptmass, die Systeme der Richtmasse m-ter Stufe endlich nennen wir Richtgebiete m-ter Stufe, die Systeme der Grundmasse ins Besondere Richtaxen (Koordinatenaxen). Ergänzende Richtmasse nennen wir solche, die mit einander multiplicirt das Hauptmass geben, und die ihnen zugehörigen Richtgebiete nennen wir gleichfalls ergänzende.

§ 88. Richtstücke, Zeiger.

Durch die in § 86 geführte Entwickelung ist klar, wie jede Ausdehnung m-ter Stufe, welche einem Systeme n-ter Stufe angehört, sich als Summe darstellen lässt von Stücken, welche den Richtmassen m-ter Stufe, die zu jenem Systeme gehören, gleichartig sind. Diese Stücke nun nennen wir Richtstücke jener Grösse, so dass also jede Grösse als Summe ihrer Richtstücke erscheint; die Zahlengrössen, welche hervorgehen, wenn die Richtstücke einer Grösse durch die entsprechenden *125* (gleichartigen) | Richtmasse dividirt werden, die Zeiger der Grösse, 125 so dass also jede Grösse als | Vielfachen-Summe*) der Richtmasse gleicher Stufe erscheint. Die Richtstücke einer Grösse erster Stufe sind es, welche sonst auch Koordinaten genannt werden. Eine Grösse im Sinne des Richtsystems abschatten (projiciren), heisst, sie auf eins der Richtgebiete gemäss dem ergänzenden Richtgebiete abschatten.

§ 89. Gleichungen zwischen den Richtstücken und zwischen den Zeigern.

Wenden wir diese Begriffe auf die in § 86 aufgestellten Sätze an, so gehen dieselben in folgende über:

In einer Gleichung kann man statt aller Glieder die Richtstücke oder Zeiger derselben setzen, welche einem beliebigen, aber alle demselben Richtmasse zugehören, und führt man dies in Bezug auf alle Richtmasse derselben Stufe aus, so erhält man einen Verein von Gleichungen, welcher die gegebene ersetzt.

Die in § 86 abgeleiteten Gleichungen sind nämlich eben diese Gleichungen zwischen den Richtstücken, und aus ihnen erhält man die Zeigergleichungen durch Division mit dem jedesmal zugehörigen Richtmasse.**) Ferner:

Aus einer Gleichung kann man einen sie ersetzenden Verein von Gleichungen ableiten, indem man jene Gleichung nach und nach mit den sämmtlichen Richtmassen, deren Stufenzahl die der Gleichung zu der des Hauptsystems ergänzt, multiplicirt.

---

*) Jedes Produkt einer Grösse in eine Zahlengrösse nennen wir nämlich ein Vielfaches der ersteren, und unterscheiden davon das Mehrfache, bei welchem jene Zahlengrösse eine ganze Zahl sein muss.

**) Diese Zeigergleichungen, als Gleichungen zwischen blossen Zahlengrössen, vermitteln am vollständigsten den Uebergang zur Arithmetik.

§ 90. Abschattungen einer Gleichung im Sinne eines Richtsystems. Ausdruck für den Zeiger.

Wenn wir eine als Summe ihrer Richtstücke dargestellte Grösse m-ter Stufe mit einem Richtmasse von ergänzender, das heisst $(n-m)$-ter Stufe multipliciren, so fallen alle Richtstücke bis auf eins weg, und dies eine erscheint daher als Abschattung jener Grösse auf das Richtgebiet m-ter Stufe gemäss dem ergänzenden Richtgebiete, und alle Richtstücke jener Grösse erscheinen also als im Sinne des Richtsystems erfolgte Abschattungen auf die verschiedenen Richtgebiete gleicher Stufe. Wir können daher sagen,

*eine Gleichung m-ter Stufe werde ersetzt durch einen Verein von Gleichungen, welche durch Abschattung auf die verschiedenen Richtgebiete m-ter Stufe im Sinne des Richtsystems hervorgehen.**) 126

Zugleich ergiebt sich hieraus ein einfacher analytischer Ausdruck für die Richtstücke oder Zeiger einer Grösse. Es werde nämlich das einem Richtmasse A zugehörige Richtstück P' einer Grösse P gesucht, B sei das zu A gehörige ergänzende Richtmass, so hat man, da P' die Abschattung von P auf A nach B ist (s. § 85),

$$P' = \frac{P.B}{A.B} A,$$

also ist der zugehörige Zeiger gleich

$$\frac{P.B}{A.B},$$

das heisst:

der einem Richtmass A zugehörige Zeiger einer Grösse ist gleich einem Bruche, dessen Zähler das Produkt der Grösse in das ergänzende Richtmass und dessen Nenner das Produkt jenes ersten Richtmasses in das ergänzende ist.

B. Anwendungen.

§ 91. Abschattung in der Geometrie.

Wenden wir die in diesem Kapitel entwickelten Begriffe auf die Geometrie an, so ergiebt sich zunächst für die Ebene nur Eine Art der Projektion (Abschattung)**), indem eine Strecke auf eine gegebene

---

*) Dass eine Gleichung m-ter Stufe in einem System n-ter Stufe durch so viel einfache Gleichungen ersetzt werde, als es Kombinationen aus n Elementen zur m-ten Klasse gebe, bedarf wohl kaum einer Erwähnung.

**) Wir ziehen bei dieser Anwendung wieder den Namen der Projektion vor, aus Gründen, die späterhin von selbst einleuchten werden.

gerade Linie nach einer gegebenen Richtung projicirt werden kann. Das Richtsystem für die Ebene bietet nur zwei Grundmasse und zwei ihnen zugehörige Richtaxen dar. Als Hauptmass erscheint der Flächenraum des von den beiden Grundmassen gebildeten Spathecks (Parallelogramms).

Im Raume treten drei Arten der Projektion hervor, nämlich es werden entweder Strecken oder Flächenräume auf eine gegebene Ebene nach einer gegebenen Richtung projicirt, oder es werden Strecken auf eine gegebene gerade Linie parallel einer gegebenen Ebene projicirt. Das Richtsystem für den Raum bietet drei Grundmasse und drei ihnen zugehörige Richtaxen dar, ferner drei Richtebenen als Richtgebiete 127 zweiter | Stufe, und drei ihnen zugehörige Richtmasse zweiter Stufe, welche die Flächenräume der aus je zwei Grundmassen beschriebenen Spathecke mit Festhaltung der Richtungen ihrer Ebenen darstellen. Als Hauptmass erscheint das von den drei Grundmassen beschriebene Spath (Parallelepipedum). Interessant erscheint hier besonders die Darstellung eines Flächenraums von bestimmter Richtung als Summe seiner Richtstücke, nämlich als Summe dreier Flächenräume, welche den drei Richtebenen angehören. Da die Sätze, welche sich über Projektionen und Richtsysteme in der Geometrie aufstellen lassen, in unserer Wissenschaft schon ganz in der Form aufgestellt sind, in welcher sie für die Geometrie auszusprechen wären, so können wir uns der Wiederholung derselben hier überheben.

§ 92. Verwandlung der Koordinaten.

Dagegen wollen wir das Problem der Koordinatenverwandlung zunächst für die Geometrie und demnächst auch allgemein für unsre Wissenschaft lösen.

Es seien a, b, c drei Grundmasse und e_1, e_2, e_3 drei neue von einander unabhängige Grundmasse, welche als Vielfachensummen jener ursprünglichen Grundmasse gegeben sind, so ist nun die Aufgabe: eine Grösse p, einestheils, wenn sie als Vielfachensumme der ursprünglichen Grundmasse gegeben ist, als Vielfachensumme der neuen Grundmasse darzustellen, und umgekehrt, wenn sie in der letzteren Form gegeben ist, sie in der ersteren darzustellen; in beiden Fällen sind die Zeiger zu suchen. Diese Aufgaben sind nun in der That durch den Satz in § 90, welcher die Zeiger finden lehrt, gelöst. Danach ist in Bezug auf die erste Aufgabe der zu e_1 gehörige Zeiger von p gleich

$$\frac{p \cdot e_2 \cdot e_3}{e_1 \cdot e_2 \cdot e_3}$$

und in Bezug auf die zweite der zu a gehörige Zeiger von p gleich

$$\frac{p \,.\, b \,.\, c}{a \,.\, b \,.\, c}$$

und durch diese so höchst einfachen Ausdrücke ist das Problem der Koordinatenverwandlung in seiner grössten Allgemeinheit gelöst.

Die zweite Aufgabe ist besonders bei der Theorie der Kurven und Oberflächen von Wichtigkeit, indem dieselben dadurch bestimmt werden, dass zwischen den Zeigern einer Strecke, welche von einem als Anfangspunkt der Koordinaten angenommenen Punkte nach einem Punkte 128 der Kurve oder Oberfläche gezogen ist, eine Gleichung aufgestellt wird. Es sei $p = xa + yb + zc$ diese Strecke, und

$$f(x, y, z) = 0$$

die Gleichung, welche eine Oberfläche bestimmt; sucht man nun die Gleichung derselben Oberfläche zunächst für denselben Anfangspunkt der Koordinaten, aber in Bezug auf neue Richtaxen und auf die ihnen zugehörigen Richtmasse, e_1, e_2, e_3, so hat man, wenn

$$p = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$$

ist, die Gleichung

$$f\left(\frac{p \,.\, b \,.\, c}{a \,.\, b \,.\, c}, \ \frac{a \,.\, p \,.\, c}{a \,.\, b \,.\, c}, \ \frac{a \,.\, b \,.\, p}{a \,.\, b \,.\, c}\right) = 0,$$

eine Gleichung, welche, wenn man statt p seinen Werth substituirt, als Gleichung zwischen den neuen Variabeln u_1, u_2, u_3 erscheint. Will man auch den Anfangspunkt der Koordinaten etwa um die Strecke e verlegen, so hat man nun, wenn q die Strecke ist von dem neuen Anfangspunkt nach demselben Punkte der Oberfläche, nach welchem der entsprechende Werth von p gerichtet, und

$$q = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$$

ist, nur in der obigen Gleichung statt p seinen Werth $q + e$ einzuführen, um die verlangte Gleichung zu erhalten, oder ist

$$e = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

so hat man, wie sich sogleich ergiebt,

$$f\left(\frac{q \,.\, b \,.\, c}{a \,.\, b \,.\, c} + \alpha, \ \frac{a \,.\, q \,.\, c}{a \,.\, b \,.\, c} + \beta, \ \frac{a \,.\, b \,.\, q}{a \,.\, b \,.\, c} + \gamma\right) = 0$$

als die verlangte Gleichung zwischen den neuen Variabeln v_1, v_2, v_3. Will man diese Gleichung als blosse Zahlengleichung darstellen, so hat man nur die neuen Grundmasse auf bestimmte Weise als Vielfachensummen der ursprünglichen darzustellen und in die Gleichung einzuführen. Es sei

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c \\ e_2 &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c \\ e_3 &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c, \end{aligned}$$

so zeigt sich unmittelbar, wie sich die verlangte Gleichung darstellt in der Form

$$f(\alpha + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3, \quad \beta + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3,$$
$$\gamma + \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3) = 0,$$

129 eine Gleichung, welche an Einfachheit nichts zu wünschen übrig | lässt.

Für den allgemeinsten Fall der abstrakten Wissenschaft ergiebt sich die Lösung unserer Aufgabe mit derselben Leichtigkeit. In der That, ist eine Grösse P als Vielfachensumme gewisser Richtmasse gegeben, und man will dieselbe als Vielfachensumme anderer Richtmasse ausdrücken, so hat man den zu einem derselben, A gehörigen Zeiger, wenn B das zu A gehörige ergänzende Richtmass ist, nach § 90 gleich

$$\frac{P.B}{A.B}.$$

§ 93. Elimination einer Unbekannten aus Gleichungen höherer Grade.

Was nun die Anwendung auf die Theorie der Gleichungen betrifft, so haben wir schon oben (§ 45) die Methode, Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten durch Hülfe unserer Analyse aufzulösen, vorweggenommen. Wir setzen diesen Gegenstand hier fort, indem wir die durch unsere Wissenschaft dargebotene Methode, aus Gleichungen höherer Grade mit mehreren Unbekannten die Unbekannten zu eliminiren, darlegen.

Es seien zwei Gleichungen höherer Grade mit mehreren Unbekannten gegeben, es soll eine derselben, etwa y, eliminirt, also eine Gleichung zwischen den übrigen Unbekannten aufgestellt werden. Die gegebenen Gleichungen seien nach Potenzen von y geordnet:

$$a_m y^m + \cdots + a_1 y + a_0 = 0$$
$$b_n y^n + \cdots + b_1 y + b_0 = 0,$$

wo $a_m, \ldots, a_0$ und $b_n, \ldots, b_0$ beliebige Funktionen der andern Unbekannten sind, a_0 und b_0 aber nicht gleich Null sein sollen. Multiplicirt man die erste Gleichung nach der Reihe mit $y, y^2, \ldots, y^n$, die letzte nach und nach mit $y, y^2, \ldots, y^m$, so erhält man $m + n$ neue Gleichungen. Betrachtet man die Koefficienten einer jeden dieser $m + n$ Gleichungen als unter sich gleichartig, hingegen die der verschiedenen Gleichungen als von einander unabhängig (auch wenn sie bis dahin mit demselben Buchstaben bezeichnet waren), so erhält man, wenn man die so aufgefassten Gleichungen im Sinne unserer Wissenschaft addirt, eine Gleichung von der Form

$$e_{m+n} y^{m+n} + \cdots + e_1 y = 0.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit dem äusseren Produkt $e_2 . e_3 \ldots e_{m+n}$, so fallen alle Glieder bis auf das letzte nach den | Ge- 130 setzen der äusseren Multiplikation weg, und wir erhalten die Gleichung

$$e_1 . e_2 . e_3 \ldots e_{m+n} y = 0,$$

oder, da y nicht null sein kann, weil dann in den gegebenen Gleichungen wider die Voraussetzung a_0 und b_0 gleich Null sein würden, so hat man

$$e_1 . e_2 . e_3 \ldots e_{m+n} = 0$$

als die verlangte Eliminationsgleichung.

Zweiter Abschnitt.

Die Elementargrösse.

Erstes Kapitel.

Addition und Subtraktion der Elementargrössen erster Stufe.

A. Theoretische Entwickelung.

§ 94. Gesetz über die Summe der Strecken, welche von einem veränderlichen Elemente nach einer Reihe fester Elemente gezogen sind.

131 Ich knüpfe den Begriff der Elementargrössen an die Lösung einer einfachen Aufgabe, durch die ich zuerst zu diesem Begriffe gelangte, und die mir überhaupt zu dessen genetischer Entwickelung am geeignetsten zu sein scheint.

Aufgabe. Es seien drei Elemente α_1, α_2, β_1 und ausserdem ein Element ϱ gegeben; man soll das Element β_2 finden, welches der Gleichung

$$[\varrho\alpha_1] + [\varrho\alpha_2] = [\varrho\beta_1] + [\varrho\beta_2]$$

genügt.

Auflösung. Schafft man die Glieder der linken Seite auf die rechte, so hat man, da

$$-[\varrho\alpha] = [\alpha\varrho], \text{ und } [\alpha\varrho] + [\varrho\beta] = [\alpha\beta]$$

ist, die Gleichung

$$[\alpha_1\beta_1] + [\alpha_2\beta_2] = 0,$$

durch welche das Element β_2 auf eine einfache Weise bestimmt ist.

Um dies Resultat der Anschauung näher zu bringen, wollen wir es auf die Geometrie anwenden, und also die Elemente als Punkte annehmen; so finden wir den Punkt β_2, indem wir $[\alpha_2\beta_2]$ entgegengesetzt gleich mit $[\alpha_1\beta_1]$ machen. — Das Interessante bei dieser Auflösung

ist, dass das Element β_2 ganz unabhängig von ϱ bestimmt ist, und 132 da wir aus der letzten Gleichung, welche in der Auflösung vorkommt, durch das umgekehrte Verfahren wieder die erste in Bezug auf jedes beliebige ϱ ableiten können, so haben wir zugleich den Satz, dass, wenn die Gleichung

$$[\varrho\alpha_1] + [\varrho\alpha_2] = [\varrho\beta_1] + [\varrho\beta_2]$$

für irgend einen Punkt ϱ gilt, sie auch für jeden andern Punkt gilt, der statt ϱ eingeführt werden mag.

Dieser Satz lässt sich direkt ableiten, doch wollen wir ihn vorher verallgemeinern; denn es ist klar, wie das angegebene Verfahren auch noch anwendbar bleibt, wenn man statt der zwei Elemente α_1, α_2 und β_1, β_2 beliebig viele, nur auf beiden Seiten eine gleiche Anzahl, einführt, ja, da unter den Elementen beliebig viele zusammen fallen können, auch dann noch, wenn zu den Strecken auf beiden Seiten beliebige Koefficienten hinzutreten, sobald nur die Summe dieser Koefficienten auf beiden Seiten dieselbe ist. In der That, es sei

$$i_1[\varrho\alpha_1] + \cdots + i_n[\varrho\alpha_n] = k_1[\varrho\beta_1] + \cdots + k_m[\varrho\beta_m],$$

wo die Grössen $i_1, \ldots$ und $k_1, \ldots$ Zahlengrössen darstellen, und es sei zugleich

$$i_1 + \cdots + i_n = k_1 + \cdots + k_m,$$

so können wir zeigen, dass die erste Gleichung auch fortbesteht für jeden Punkt σ, der statt ϱ eingeführt wird. Denn es ist

$$[\varrho\alpha] = [\varrho\sigma] + [\sigma\alpha], \quad [\varrho\beta] = [\varrho\sigma] + [\sigma\beta].$$

Führt man diese Ausdrücke in Bezug auf die betreffenden Zeiger ($1 \ldots n$, $1 \ldots m$) in die obige Gleichung ein, löst die Klammern auf und fasst die Glieder, welche $[\varrho\sigma]$ enthalten, auf jeder Seite zusammen, so erhält man auf jeder Seite $[\varrho\sigma]$ multiplicirt mit der Summe der Koefficienten, und da diese auf beiden Seiten gleich ist, so hebt sich das so gewonnene Glied auf beiden Seiten auf, und man behält

$$i_1[\sigma\alpha_1] + \cdots + i_n[\sigma\alpha_n] = k_1[\sigma\beta_1] + \cdots + k_m[\sigma\beta_m],$$

das heisst, die Gleichung besteht fort in Bezug auf jedes Element, was statt ϱ eingeführt werden mag. Also:

Wenn man von einem Elemente ϱ Strecken nach beliebig vielen festen Elementen zieht, und zwei beliebige Vielfachensummen derselben, deren Koefficienten aber gleiche Summe haben, einander gleich sind, so besteht diese Gleichheit fort, wie sich auch das Element ϱ ändern mag.

Ist ins Besondere die Summe der Koefficienten in dem Ausdrucke 133

$$i_1[\varrho\alpha_1] + \cdots + i_n[\varrho\alpha_n]$$

null, so ergiebt sich, indem man auf die oben angegebene Weise,

nämlich statt $[\rho\alpha]$ überall $[\rho\sigma] + [\sigma\alpha]$, substituirt, jener Ausdruck gleich

$$i_1 [\sigma\alpha_1] + \cdots + i_n [\sigma\alpha_n],$$

weil nämlich das Glied $(i_1 + \cdots + i_n) [\rho\sigma]$ wegen des ersten Faktors null wird. Also:

Wenn man von einem veränderlichen Elemente ρ Strecken nach beliebig vielen festen Elementen zieht, so ist jede Vielfachensumme dieser Strecken, deren Koefficientensumme null ist, eine konstante Grösse.

Auch geht aus der Art, wie sich die Gleichungen dieses Paragraphen aus einander ableiten lassen, unmittelbar hervor, dass, wenn zwei beliebige Vielfachensummen jener Strecken in Bezug auf dieselben zwei Anfangselemente ρ und σ einander gleich sind, auch ihre Koefficientensummen gleich sein, und daher ihre eigene Gleichheit bei jeder Aenderung von ρ fortbestehen müsse, und ebenso dass, wenn eine solche Vielfachensumme in Bezug auf zwei Anfangs-Elemente ρ und σ gleichen Werth behält, ihre Koefficientensumme null ist, und sie selbst daher bei jeder Aenderung von ρ denselben Werth behält.

§ 95. Abweichung eines Elementes, eines Elementarvereins. Gewicht.

Um die Resultate des vorigen Paragraphen einfacher einkleiden zu können, führen wir einige Benennungen ein, die wir auch für die Geometrie festhalten.

Nämlich wir verstehen unter der *Abweichung eines Elementes α von einem Elemente ρ* die Strecke $[\rho\alpha]$, unter der *Gesammtabweichung einer Elementenreihe von einem Elemente ρ* die Summe aus den Abweichungen der einzelnen Elemente jener Reihe von dem Elemente ρ. Fallen unter jenen Elementen mehrere (m) in eins (α) zusammen, so wird auch die Abweichung $[\rho\alpha]$ dieses Elementes ebenso oft (m-mal) in jener Summe vorkommen. Hierdurch gelangen wir zu einer Erweiterung des Begriffs; nämlich, nennen wir einen Verein von Elementen, deren jedes mit einer bestimmten Zahlengrösse behaftet ist, einen *Elementarverein*, so werden wir unter der *Gesammtabweichung eines Elementarvereins von einem Elemente ρ* eine Vielfachensumme aus den Abweichungen der jenem Vereine angehörigen Elemente von dem Element ρ verstehen müssen, deren Koefficienten die Zahlengrössen sind, mit welchen die zugehörigen Elemente behaftet sind. Die Summe dieser Zahlengrössen nennen wir das *Gewicht**) *des Elementarvereins,*

134

*) Der Name „Gewicht" ist auch sonst in der Mathematik (in der Wahrscheinlichkeitsrechnung) im abstrakten Sinne gebräuchlich, und bedarf wohl hier keiner Rechtfertigung.

so wie die Zahlengrössen, mit welchen die einzelnen Elemente behaftet sind, die ihnen zugehörigen Gewichte. Besteht also der Elementarverein aus den Elementen α, β, ... und den zugehörigen Gewichten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ..., so ist die Abweichung jenes Elementarvereins von einem Elemente ϱ gleich

$$\mathfrak{a}\,[\varrho\alpha] + \mathfrak{b}\,[\varrho\beta] + \cdots.$$

Somit haben wir denn die Sätze:

Wenn zwei Elementarvereine von demselben Elemente um Gleiches) abweichen, und ihr Gewicht gleich ist, oder wenn sie von denselben zwei Elementen um Gleiches abweichen, so weichen sie auch von jedem andern Elemente um Gleiches ab, und im letztern Falle ist ihr Gewicht gleich,*

und

*Ein Elementarverein, dessen Gewicht null ist, weicht von je zwei Elementen um Gleiches ab, und ein Elementarverein, welcher von zwei Elementen um Gleiches abweicht, hat Null zum Gewicht und weicht von allen Elementen um Gleiches ab**).*

§ 96. Begriff der Elementargrössen und ihrer Summe.

Jedes Gebilde wird dadurch als Grösse fixirt, dass der Bereich seiner Gleichheit und Verschiedenheit bestimmt wird. Wir bezeichnen daher zwei Elementarvereine als gleiche Grössen und zwar als gleiche *Elementargrössen*, wenn ihre Abweichungen von denselben Elementen jedesmal gleichen Werth haben. Ein Elementarverein wird also zur Elementargrösse, wenn man von der besonderen Art seiner Zusammensetzung absieht, und nur die Abweichungswerthe festhält, welche er mit anderen Elementen bildet, so dass also eine Elementargrösse auf verschiedene Weise als | Elementarverein da sein kann, und jeder Ele- 135 mentarverein als eine | besondere Verkörperung einer Elementargrösse *135* oder, wie wir es oben bezeichneten, als elementare oder konkrete Darstellung einer Elementargrösse aufzufassen ist. Hiernach versteht es sich nun schon von selbst, dass unter der Abweichung und dem Gewichte einer Elementargrösse dasselbe zu verstehen ist, was wir unter der Abweichung und dem Gewichte des Elementarvereins verstanden, welchem sie zugehört, und dass zwei Elementargrössen nur dann gleich sein können, wenn sie gleiches Gewicht und gleiche Abweichungswerthe darbieten, dass aber die Gleichheit der Elementargrössen schon

*) Das heisst, die Abweichungen sollen gleich sein.

**) Dabei versteht sich von selbst, dass auch jedes einzelne Element sowohl für sich, als wenn es mit einer Zahlengrösse behaftet ist, als Elementarverein aufgefasst werden kann, indem die Gewichte der übrigen Elemente null sind.

erfolgt, wenn auch nur irgend zwei solche Werthe als gleich dargethan sind.

Unsere Aufgabe ist nun, die Art der Verknüpfung auszumitteln, in welche die verschiedenen Elemente und die zugehörigen Zahlengrössen eines Elementarvereins eingehen müssen, wenn als das Resultat der Verknüpfung die Elementargrösse erscheinen soll.

Die Verknüpfungen sind von zwiefacher Art, einestheils nämlich zwischen einem Element und der zugehörigen Zahlengrösse, dem Gewichte, andererseits zwischen den mit Gewichten behafteten Elementen und überhaupt zwischen den Elementarvereinen, sofern sie ihren Abweichungen nach betrachtet werden, das heisst zwischen den Elementargrössen unter sich.

Betrachten wir zuerst diese letzte Verknüpfungsweise, so ist klar, dass die Gesammtabweichung eines Elementarvereins dieselbe bleibt, in welcher Ordnung man die einzelnen Theile dieses Vereins nehmen, und wie man sie unter sich zu besonderen Vereinen zusammenfassen mag, und dass endlich, wenn man zu Elementarvereinen, welche verschiedene Abweichung darbieten, Elementarvereine, welche gleiche Abweichungen darbieten, hinzufügt, die so erzeugten Gesammtvereine auch verschiedene Abweichung darbieten müssen; und zwar wird dies alles der Fall sein, weil es für die Addition der Strecken gilt. Diese Vertauschbarkeit und Vereinbarkeit der Glieder, und auf der andern Seite das Gesetz, dass, wenn das eine Glied der Verknüpfung konstant bleibt, das Resultat nur dann konstant bleibe, wenn auch das andere Glied es bleibt, bestimmt jene Verknüpfung nach § 6 als eine additive, und die Gesetze der Addition und Subtraktion gelten allgemein für diese Verknüpfung.

Was nun die Verknüpfung des Elementes mit dem zugehörigen 136 Gewichte betrifft, so leuchtet ein, dass, wenn in einem Elementar- *136* vereine dasselbe Element mehrmals und zwar mit verschiedenen Gewichten behaftet vorkommt, man statt dessen das Element einmal und zwar mit der Summe der Gewichte behaftet setzen kann, ohne dass die Abweichung des Vereins geändert wird, wie dies aus den Gesetzen der Multiplikation von Zahlengrössen mit Strecken bekannt ist. Bezeichnet man daher vorläufig diese zweite Verknüpfungsweise durch das Zeichen $\frown$, so hat man, wenn α ein Element, m und n die Gewichte sind,

$$m \frown \alpha + n \frown \alpha = (m + n) \frown \alpha,$$

eine Gleichung, welche das multiplikative Grundgesetz in Bezug auf das erste Verknüpfungsglied darstellt, und da die Verknüpfung einer Zahlengrösse mit einem Verein aus mehreren Elementen noch nicht

ihrem Begriffe nach gegeben ist, also auch die andere Seite jenes Grundgesetzes noch nicht hervortreten kann, so ist jene Verknüpfung, so weit sie überhaupt bestimmt ist, als eine multiplikative bestimmt.

Fassen wir dies zusammen, so ist die Elementargrösse eines Vereins von Elementen $\alpha, \beta, \ldots$ mit den zugehörigen Gewichten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ gleich

$$\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \cdots,$$

das heisst, sie ist als Vielfachensumme der Elemente dargestellt, deren Koefficienten die den Elementen zugehörigen Gewichte sind, und zugleich ist dadurch die Addition der Elementargrössen unter sich bestimmt.

§ 97. Vervielfachung dieser Grössen.

Um nun die multiplikative Verknüpfung allgemeiner darzustellen, haben wir die Multiplikation einer Zahlengrösse mit einer Elementargrösse so zu definiren, dass auch die andere Seite des multiplikativen Grundgesetzes fortbesteht; dies geschieht, indem wir festsetzen, dass eine Vielfachensumme von Elementen mit einer Zahlengrösse multiplicirt werde, wenn man die Koefficienten derselben mit dieser Zahlengrösse multiplicirt.

Nämlich dann ergiebt sich sogleich, wenn a und b beliebige Elementargrössen, das heisst Vielfachensummen von Elementen darstellen, die Geltung der beiden multiplikativen Grundgesetze

$$ma + na = (m + n)\,a$$

und

$$ma + mb = m\,(a + b).$$

Dass nun auch das Resultat der Division mit einer Zahlengrösse, | so- 137 bald diese nicht null ist, ein bestimmtes sei, ergiebt sich leicht, indem verschiedene Elementargrössen, das heisst solche, deren Abweichungen von denselben Elementen Verschiedenheiten darbieten, auch nachdem sie mit derselben Zahlengrösse, die nicht null ist, multiplicirt sind, verschiedene Abweichungen darbieten müssen, also verschieden bleiben. Und ebenso leicht ergiebt sich auch, dass, wenn wir *gleichartige Elementargrössen* solche nennen, welche aus derselben Elementargrösse durch Multiplikation mit Zahlengrössen hervorgegangen sind, der Quotient zweier gleichartiger Elementargrössen, wenn nicht der Divisor null ist, eine bestimmte Zahlengrösse liefert. Somit gelten alle Gesetze arithmetischer Multiplikation und Division für die fragliche Verknüpfung.

Die Verknüpfung des Elementes ϱ mit andern Elementen oder Elementargrössen, wie sie bei der oben eingeführten Bezeichnung der Abweichung eintritt, behalten wir dem folgenden Kapitel vor.

§ 98. Die Elementargrösse als vielfaches Element.

Es erschien bisher die Elementargrösse im Allgemeinen als eine Vielfachensumme von Elementen, und wir müssen uns die Aufgabe stellen, eine Elementargrösse, welche in dieser Form gegeben ist, in möglichst einfacher Form darzustellen.

Zunächst machen wir den Versuch, sie in Einem Gliede, also als vielfaches Element darzustellen. Es sei daher

$$\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \cdots = x\sigma$$

gesetzt, wo σ ein Element, x sein Gewicht bezeichnet; da das Gesammtgewicht auf beiden Seiten gleich sein muss, so erhalten wir sogleich

$$x = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots,$$

und wir haben nur noch σ so zu bestimmen, dass die Gesammtabweichung von irgend einem Elemente ϱ auf beiden Seiten gleich ist, und erhalten

$$\mathfrak{a}[\varrho\alpha] + \mathfrak{b}[\varrho\beta] + \cdots = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots)[\varrho\sigma],$$

das heisst

$$[\varrho\sigma] = \frac{\mathfrak{a}[\varrho\alpha] + \mathfrak{b}[\varrho\beta] + \cdots}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots},$$

wodurch σ bestimmt ist, sobald $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots$ einen geltenden Werth hat, das heisst:

Eine Elementargrösse, deren Gewicht nicht null ist, lässt sich als ein 138 *mit gleichem Gewichte behaftetes Element darstellen,* | *und zwar ist die Abweichung dieses Elementes von einem Elemente ϱ gleich der durch das Gewicht dividirten Abweichung der Elementargrösse von demselben Elemente.*

Setzt man übrigens in jener Gleichung, welche für jedes Element ϱ gilt, dies Element mit σ identisch, so hat man, weil $[\sigma\sigma]$ null ist, mit Weglassung des Divisors die Gleichung

$$0 = \mathfrak{a}[\sigma\alpha] + \mathfrak{b}[\sigma\beta] + \cdots,$$

das heisst, die Gesammtabweichung einer Vielfachensumme von Elementen von dem Summenelement (σ) ist gleich Null.

§ 99. Die Elementargrösse mit dem Gewichte Null ist eine Strecke.

Ist das Gewicht der Elementargrösse null, so haben wir schon gezeigt, dass dann die Abweichungen der Elementargrösse von je zwei Elementen gleich gross sind; ist diese Abweichung daher in Bezug auf irgend ein Element null, so ist sie es auch in Bezug auf jedes

andere, und jene Elementargrösse kann dann einem beliebigen Elemente mit dem Gewichte Null gleichgesetzt werden, wie dies auch die Formel des vorigen Paragraphen schon darlegt, oder sie kann selbst gleich Null gesetzt werden. Ist aber die Abweichung einer solchen Elementargrösse (deren Gewicht null ist) von irgend einem Elemente gleich einer Strecke von geltender Grösse, so ist auch die Abweichung derselben von jedem andern Elemente derselben Strecke gleich, und diese Strecke, welche jene konstante Abweichung misst, repräsentirt daher jene Elementargrösse vollständig, so dass zu gleichen Elementargrössen, deren Gewichte null sind, auch gleiche Abweichungswerthe gehören, und umgekehrt.

Werden nun solche Elementargrössen zu einander addirt oder mit Zahlengrössen multiplicirt, so geht der Abweichungswerth des Resultates aus denen jener Elementargrössen durch dieselbe Addition oder Multiplikation hervor, es tritt also zwischen solchen Elementargrössen und ihren Abweichungswerthen weder an sich, das heisst in ihrem Begriffsumfange, noch in ihren Verknüpfungen, irgend ein Unterschied hervor, und wir sind somit berechtigt, jene Elementargrösse und ihren Abweichungswerth als gleich zu definiren, ja wir sind dazu gezwungen, wenn wir nicht durch unnütze Unterscheidungen den Gegenstand verwirren wollen. *Wir setzen daher eine Elementargrösse, deren Gewicht null ist, derjenigen konstanten Strecke gleich, um welche jene Grösse von beliebigen Elementen abweicht,* oder, *wir verstehen unter der | Abweichung* 139 *einer Strecke von einem Element jene Strecke selbst, und die Strecke | er-* 139 *scheint als eine besondere Art von Elementargrössen.*

Um dies noch anschaulicher zu übersehen, können wir zunächst nachweisen, dass sich jede Elementargrösse, deren Gewicht null ist, als Differenz zweier Elemente $(\beta - \alpha)$ darstellen lässt, deren eins (α) willkührlich ist. In der That, da das Gesammtgewicht dieser Differenz gleichfalls null ist, so kommt es nur darauf an, dass in Bezug auf irgend ein Element (ϱ) die Abweichungen gleich sind. Die Abweichung jener Differenz von ϱ ist $[\varrho\beta] - [\varrho\alpha]$, das heisst sie ist gleich $[\alpha\beta]$, und dadurch ist nicht bloss das Element β bestimmt, wenn α gegeben ist, sondern auch die konstante Abweichung der gegebenen Elementargrösse selbst gefunden, und es folgt daraus ferner, dass

$$[\alpha\beta] = \beta - \alpha$$

ist. Beide stellen also nur verschiedene Bezeichnungen dar, und da die erstere willkührlich, die letztere nothwendig ist, so werden wir von jetzt an am liebsten jene von Anfang an nur als vorläufig dargestellte Bezeichnung gegen die letzte fallen lassen, und also künftig eine Strecke,

welche, wenn α als ihr Anfangselement gesetzt wird, β zum Endelement hat, mit $\beta - \alpha$ bezeichnen*).

Fassen wir das Ergebniss beider Paragraphen zusammen, so zeigt sich,

dass eine Elementargrösse erster Stufe, denn so bezeichnen wir die bisher behandelte Elementargrösse im Gegensatz gegen die später zu behandelnden, *sich, wenn ihr Gewicht einen geltenden Werth hat, als vielfaches Element, wenn ihr Gewicht null ist, als Strecke darstellen lässt, und zwar erhält man jedesmal diesen Werth, indem man die Gewichte und die Abweichungen von irgend einem Elemente gleichsetzt, wobei die Abweichung einer Strecke von einem Elemente jener Strecke selbst gleich gesetzt, und das Gewicht einer Strecke null gesetzt wird.*

§ 100. Summe einer Strecke und eines einfachen oder vielfachen Elementes.

140 Da nach dem vorigen Paragraphen die Strecke als eine besondere 140 Gattung von Elementargrössen erster Stufe erschien, so lässt sich | die Summe einer Strecke und eines einfachen oder vielfachen Elementes gleichfalls als Elementargrösse auffassen, und den Begriff dieser Summe, der durch das Frühere schon bestimmt ist, wollen wir nun näher vor Augen rücken.

Suchen wir zuerst die Summe $(\alpha + p)$ eines Elementes α und einer Strecke p, so muss, da das Gewicht dieser Summe Eins ist, dieselbe wieder gleich einem einfachen Elemente β gesetzt werden. Man hat dann aus der Gleichung

$$\alpha + p = \beta$$

die neue Gleichung

$$\beta - \alpha = p,$$

das heisst $\alpha + p$ bedeutet das Element β, in welches α übergeht, wenn es sich um p ändert, oder dessen Abweichung von α gleich p ist. Betrachten wir die Summe eines vielfachen Elementes $m\alpha$ und einer Strecke p, so haben wir, da das Gewicht der Summe m ist, die Gleichung

$$m\alpha + p = m\beta$$

und daraus

$$m(\beta - \alpha) = p,$$

oder

*) Es ist hier noch zu erwähnen, dass die Formel des vorigen Paragraphen für diesen Fall die Elementargrösse als unendlich entferntes Element mit dem Gewichte Null darstellt, falls man nämlich die Division mit Null gelten lassen will; aber die bestimmte Bedeutung dieses Ausdrucks tritt eben erst durch die hier gegebene Darstellung ans Licht.



$$\beta - \alpha = \frac{p}{m},$$

das heisst $m\alpha + p$ bedeutet das m-fache eines Elementes β, dessen Abweichung von α der m-te Theil der Strecke p ist. Oder fassen wir beides zusammen und drücken es auf allgemeinere Weise aus, indem wir zugleich bedenken, dass, wenn β von α um $\frac{p}{m}$ abweicht, dann $m\beta$ von α um p abweiche, so ergiebt sich,

dass die Summe einer Elementargrösse von geltendem Gewichtswerthe und einer Strecke eine Elementargrösse ist, welche mit der ersteren gleiches Gewicht hat, und von dem Elemente der ersteren um die hinzuaddirte Strecke abweicht.

B. Anwendungen.

§ 101. Mitte eines Punktvereins.

Wollen wir die in diesem Kapitel gewonnenen Resultate auf die Geometrie anwenden, so haben wir nur statt der Elemente uns Punkte vorzustellen; und behalten wir dann die übrigen Benennungen, welche in diesem Kapitel eingeführt wurden, namentlich die Benennungen „Gewicht, Abweichung, Elementargrösse" | hier in derselben Bedeutung *141* bei, so erhalten wir auch dieselben Sätze, von denen wir jedoch die interessantesten in anschaulicherer | Form darlegen wollen **141**

Stellt man sich zunächst n Punkte $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ vor, so lässt sich stets ein Punkt σ finden, dessen Abweichung von jedem beliebigen Punkte ϱ der n-te Theil ist von der Gesammtabweichung jener n Punkte von demselben Punkte ϱ, und dieser Punkt ist durch eine solche Gleichung

$$[\varrho\sigma] = \frac{[\varrho\alpha_1] + \cdots + [\varrho\alpha_n]}{n}$$

vollkommen bestimmt. Dieser Punkt ist es, welchen man den Punkt der mittleren Entfernung zwischen jenen n Punkten zu nennen pflegt, den ich aber kürzer als deren *Mitte* bezeichnet habe (vgl. § 24). Drücken wir nun den obigen Satz geometrischer aus, so können wir sagen:

Zieht man von einem veränderlichen Punkte ϱ die Strecken nach n festen Punkten, so geht die von ϱ aus mit der Summe dieser Strecken gezogene Parallele durch einen festen Punkt σ, welcher die Mitte zwischen jenen n Punkten heisst, und dessen Entfernung von ϱ der n-te Theil jener Summe ist.

Oder, wenn wir auch den Begriff der Summe vermeiden wollen:

Zieht man von einem veränderlichen Punkte ϱ die Strecken nach n festen Punkten, und legt diese Strecken, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig, das heisst so an einander, dass der Endpunkt einer jeden Strecke jedesmal der Anfangspunkt der nächstfolgenden wird, und macht ϱ zum Anfangspunkt der ersten, so geht die Linie, welche die so gebildete Figur schliesst, durch einen festen Punkt σ, welcher die Mitte der n Punkte heisst und von der schliessenden Seite nach dem Punkte ϱ zu den n-ten Theil abschneidet.

Hieraus ergiebt sich eine höchst einfache Konstruktion der Mitte, und zugleich das Gesetz, dass die Strecken, welche von der Mitte nach den *n* Punkten gezogen werden, stetig an einander gelegt eine geschlossene Figur geben, oder dass sie den Seiten einer geschlossenen Figur gleich und parallel sind.

§ 102. Die Mitte als Axe.

Es ist klar, wie die im vorigen Paragraphen aufgestellten Gesetze auch noch gelten, wenn sich mehrere der festen Punkte vereinigen, wenn man dann nur die Anzahl derselben festhält, und auch dann 142 noch, wenn man diese Punkte mit beliebigen positiven oder | negativen Zahlengrössen, welche wir auch hier Gewichte nennen können, multiplicirt denkt, so lange nur die Summe der Gewichte einen geltenden Werth hat; nennen wir dann wieder die Gesammtheit der so 142 mit | Gewichten behafteten Punkte einen Punktverein, so können wir den Satz aussprechen: „Wenn man von einem veränderlichen Punkte ϱ nach den Punkten eines festen Punktvereins Strecken zieht, diese Strecken, ohne ihre Richtung zu ändern, mit den zugehörigen Gewichten multiplicirt, und die so gewonnenen Strecken von ϱ aus stetig an einander legt, so geht die die Figur schliessende Seite durch einen festen Punkt σ, welcher die Mitte jenes Punktvereins ist, und dessen Entfernung von ϱ so oft in der schliessenden Seite enthalten ist, als das Gesammtgewicht beträgt.“

Ist das Gesammtgewicht null, so fällt, wie sich aus der Formel

$$[\varrho\sigma] = \frac{\mathfrak{a}[\varrho\alpha] + \mathfrak{b}[\varrho\beta] + \cdots}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots}$$

ergiebt, der Punkt σ ins Unendliche, und die schliessende Seite geht dann durch denselben unendlich entfernten Punkt, das heisst, hat eine konstante Richtung. Dies ergiebt sich noch einfacher und zugleich bestimmter aus den Sätzen, die wir für den Fall, dass das Gesammtgewicht null ist, oben aufgestellt hatten, und es folgt daraus zugleich, dass diese schliessende Seite zugleich eine konstante Länge hat. Es

erscheint also als Mitte des Punktvereins, wenn das Gesammtgewicht null ist, ein unendlich entfernter Punkt, oder was dasselbe ist, eine konstante Richtung, also nicht ein (endlich liegender) Mittelpunkt, sondern eine Mittelaxe. Da dieser Fall ein besonderes Interesse darbietet, so sprechen wir ihn noch einmal mit möglichster Vermeidung aller Kunstausdrücke aus:

Zieht man von einem veränderlichen Punkte ϱ die Strecken nach einer Reihe fester Punkte, zu welchen eine Reihe von Zahlengrössen, deren Summe null ist, gehört, und man legt diese Strecken, nachdem man sie, ohne ihre Richtung zu verändern, mit den zugehörigen Zahlen multiplicirt hat, stetig an einander, so hat die schliessende Seite konstante Richtung und Länge, und kann die Axe jenes Punktvereins genannt werden).*

§ 103. Schwerpunkt. Axe des Gleichgewichts.

In Bezug auf die Statik stellen wir sogleich das Hauptgesetz auf, *143* nämlich

Wenn die Punkte eines Vereins von parallelen Kräften gezogen | werden, welche den Gewichten jener Punkte proportional, aber von veränderlicher Richtung sind, so ist das Gesammtmoment jener Kräfte in Bezug auf die Mitte jenes Vereins null, in Bezug auf jeden andern Punkt gleich dem Moment der an der Mitte angebrachten Gesammtkraft. 143

Der Beweis ist höchst einfach. Ist nämlich σ die Mitte des Vereins $\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{b}\beta$, ..., und sind $\mathfrak{a}p$, $\mathfrak{b}p$, ... die Kräfte, durch welche die Punkte α, β, ... gezogen werden, so hat man das Gesammtmoment in Bezug auf σ gleich

$$\mathfrak{a}[\sigma\alpha].p + \mathfrak{b}[\sigma\beta].p + \cdots = (\mathfrak{a}[\sigma\alpha] + \mathfrak{b}[\sigma\beta] + \cdots).p = 0,$$

da der erste Faktor nach dem vorigen Paragraphen null ist. Für jeden andern Punkt ϱ hat man das Moment gleich

$$(\mathfrak{a}[\varrho\alpha] + \mathfrak{b}[\varrho\beta] + \cdots).p,$$

und da der erste Faktor gleich $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots)[\varrho\sigma]$ ist, gleich

$$[\varrho\sigma].(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots).p,$$

das heisst gleich dem Moment der an σ angebrachten Gesammtkraft.

Es ist bekannt genug, dass von der ersteren Eigenschaft die Mitte, wenn die Gewichte als physische Gewichte aufgefasst werden, der Schwerpunkt heisst. Da die physischen Gewichte immer als positiv

*) Sollten die Resultate dieses Paragraphen in rein geometrische Form gekleidet werden, so müsste man statt der Gewichte parallele Strecken nehmen, deren Grössen das Verhältniss der Gewichte darstellten.

erscheinen, so hat der zweite Fall hier keine direkte Anwendung. Denkt man sich aber einen in eine Flüssigkeit getauchten Körper, welcher von dieser Flüssigkeit rings umgeben ist, und rechnet man die Kraft, mit welcher jedes Theilchen durch sein physisches Gewicht nach unten, und die, mit welcher es durch den Druck der Flüssigkeit (welcher dem physischen Gewichte der verdrängten Flüssigkeit gleich ist) nach oben getrieben wird, zusammen, und betrachtet die Gesammtkraft als mathematisches Gewicht des betreffenden Theilchens, so hat man ebenso wohl positive als negative Gewichte. Wenn ins Besondere der Körper in der Flüssigkeit schwebt, so ist die Summe jener Gewichte null, und statt des mit einem Gewicht behafteten Schwerpunktes tritt nun eine bestimmte Strecke als Summe des Punktvereins auf, welchen der in der Flüssigkeit schwebende Körper darstellt. Diese
144 Strecke kann ins Besondere null werden; dann schwebt der Körper in jeder Lage im Gleichgewicht; hingegen in jedem andern Falle bestimmt die Richtung der Strecke die Axe, welche die senkrechte Lage
144 annehmen muss, wenn der in der Flüssigkeit schwebende Körper | im Gleichgewichte sein soll.

Wie die Richtung und Länge dieser Strecke, welche für die Statik, wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden, eine bestimmte und einfache Bedeutung hat, gefunden werden könne, ergiebt sich sogleich aus dem folgenden Satze, welcher eine unmittelbare Folgerung aus dem Begriffe der Summe mehrerer Elementargrössen ist, nämlich aus dem Satze:

Wenn ein Körper aus mehreren einzelnen Körpern zusammengefügt ist, so findet man aus den Schwerpunkten und den Gewichten der einzelnen Körper den Schwerpunkt und das Gewicht des Ganzen, oder die Strecke, welche beides vertritt, indem man die Summe aus den mit den betreffenden Gewichten behafteten Schwerpunkten nimmt.

In unserm Falle ist der Schwerpunkt des Körpers an sich und der des verdrängten Wassers zu nehmen, und beide mit den betreffenden Gewichten, welche entgegengesetzt bezeichnet sind, zu multipliciren; und da für den Fall, dass der Körper schwebt in der Flüssigkeit, die Gewichte gleich sind, so erhält man als Summe dies Gewicht, multiplicirt mit der gegenseitigen Abweichung beider Schwerpunkte; die Axe geht also durch beide Schwerpunkte und ist null, wenn dieselben zusammenfallen.

§ 104. **Magnetismus, magnetische Axe.**

Eine ungleich wichtigere Anwendung des letzten Falles, in welchem statt des Summenpunktes eine Axe erscheint, ist die auf den Magnetismus.

Gauss hat gezeigt*), dass die magnetischen Intensitäten innerhalb eines magnetischen Körpers allemal zur Summe Null geben. Denkt man sich diese Intensitäten den zugehörigen Punkten (oder Theilchen) als mathematische Gewichte beigelegt, so wird die Summe des so gebildeten Punktvereins eine Strecke von bestimmter Richtung und Länge sein. Um die Bedeutung dieser Strecke für die Theorie des Magnetismus kennen zu lernen, denken wir uns eine magnetische Kraft, welche, wie etwa der Erdmagnetismus, oder die Kraft eines entfernten Magneten, die | einzelnen Punkte in parallelen Richtungen, den magne- *145* tischen Intensitäten proportional forttreibt, so ist das Moment dieser Kräfte in Bezug auf irgend einen Punkt ϱ gleich

$$\mathfrak{a}\,[\varrho\alpha]\,.\,p + \mathfrak{b}\,[\varrho\beta]\,.\,p + \cdots,$$

wenn $\mathfrak{a}p, \mathfrak{b}p, \ldots$ die den magnetischen Intensitäten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ proportio- 145 nalen auf die Punkte α, β, ... wirkenden Kräfte sind; es verwandelt sich aber jener Ausdruck, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor p ausserhalb einer Klammer setzt, und bedenkt, dass dann die von der Klammer eingeschlossene Grösse jener konstanten Strecke, welche die Summe des Punktvereins darstellt und von uns mit a bezeichnet werden soll, gleich ist, in

$$a\,.\,p,$$

das heisst, das Moment jener Kräfte ist in Bezug auf je zwei Punkte gleich gross, nämlich, wenn wir a die magnetische Axe, und p die einwirkende magnetische Kraft (wie sie auf einen Punkt von der zur Einheit genommenen Intensität wirkt) nennen, gleich dem äusseren Produkt der magnetischen Axe in die einwirkende magnetische Kraft. Gleichgewicht ist also vorhanden, wenn dies Produkt null ist, das heisst, die magnetische Axe in der Richtung der einwirkenden Kraft liegt.

Der Begriff der magnetischen Axe, wie ich ihn hier dargestellt habe, ist von dem sonst gangbaren nur dadurch verschieden, dass sie hier als eine Strecke von bestimmter Richtung und Länge aufgefasst ist, während man sonst an ihr nur die Richtung festzuhalten pflegt. Die Gründe, warum ich diesen Begriff modificirt habe, ohne die Benennung zu ändern, ergeben sich leicht, da einerseits die Wissenschaft die Verknüpfung der Richtung und Länge jener Strecke zu einem Begriffe fordert, und andrerseits aus dem, was man über die magnetische Axe aussagt, jedesmal sogleich hervorgeht, ob die Länge in den Begriff mit aufgenommen ist, oder nicht, so dass also keine Verwechselung möglich ist. Dass man bisher in der Theorie des Magnetismus beides

*) In seiner Abhandlung *„Intensitas vis magneticae"*. [Werke, Bd. V, S. 79 ff.]

stets gesondert betrachtet hat, liegt nur darin, dass die Einheit von Richtung und Länge, wie wir sie in dem Begriffe der Strecke aufgefasst haben, bisher in der Geometrie keine Stelle fand. Uebrigens beweist schon die ausserordentliche Einfachheit, in welcher vermöge dieses Begriffes und der durch unsere Wissenschaft gebotenen Verknüpfung *146* das magnetische Moment sich darstellt, die Unentbehrlichkeit unserer Analyse für die Theorie des Magnetismus hinlänglich.

Anmerkung. Wir sind hier zu dem ersten und einzigen Punkte gelangt, in welchem unsere Wissenschaft an schon anderweitig Bekanntes heranstreift. Nämlich in dem barycentrischen Kalkül von Möbius wird gleichfalls eine Addition einfacher und vielfacher Punkte 146 dargelegt, zwar zunächst nur als eine kürzere Schreibart, aber doch mit derselben Rechnungsmethode, wie wir sie in den ersten Paragraphen dieses Kapitels, wenn gleich in grösserer Allgemeinheit, dargelegt haben. Was jedoch dort gänzlich fehlt, ist die Auffassung der Summe als Einer Grösse für den Fall, dass die Gewichte zusammen Null betragen.

Was den scharfsinnigen Verfasser jenes Werkes daran hinderte, diese Summe als Strecke von konstanter Länge und Richtung aufzufassen, ist ohne Zweifel die Ungewohntheit, Länge und Richtung in Einem Begriffe zusammenzufassen. Wäre jene Summe dort als Strecke fixirt, so wäre daraus der Begriff der Addition und Subtraktion der Strecken, wie wir ihn in Kapitel 1 des ersten Abschnittes dargestellt haben, für die Geometrie hervorgegangen, und unsere Wissenschaft hätte einen zweiten Berührungspunkt mit jenem Werke gefunden; auch würde dann der barycentrische Kalkül selbst eine viel freiere und allgemeinere Behandlung gewonnen haben*).

§ 105. Anwendung auf die Differenzialrechnung.

Es erscheint mir hier der geeignetste Ort, um die Anwendung unserer Wissenschaft auf die Differenzialrechnung wenigstens anzudeuten.

---

*) Als ich diese Anmerkung schrieb, war mir die Mechanik von Möbius (Leipzig 1843), in welcher er die Addition der Strecken lehrte, noch nicht zu Gesicht gekommen. Die Abhandlung in Crelle's Journal (Band 28), in welcher Möbius den barycentrischen Kalkül in der hier angedeuteten Weise begründete, erschien erst nach dem Druck der Ausdehnungslehre, obwohl das Datum der Unterschrift nachweist, dass dieselbe schon früher geschrieben war. Es gehört dies zu den merkwürdigen Berührungen wissenschaftlicher Arbeiten, wie sie so oft zum Erstaunen derer, welche so zusammentreffen, stattfinden. (1877.) [Gemeint sind die Elemente der Mechanik des Himmels, s. Möbius ges. Werke Bd. 4, S. 1—318. Die erwähnte Abhandlung steht im Crelleschen Journale, Bd. 28 auf S. 1—9 und in den ges. Werken Bd. 1, S. 601—612.]

Um zu einer solchen Anwendung zu gelangen, müssen wir die durch unsere Wissenschaft gewonnenen Grössen als Funktionen darstellen. Dies geschieht am einfachsten, wenn die unabhängige Veränderliche als Zahlengrösse gesetzt wird, etwa gleich t. Dann wird sich jede Grösse P in der Form

$$P = A + Bt^1 + Ct^2 + \cdots,$$

oder noch allgemeiner in der Form

$$P = A_m t^m + A_n t^n + \cdots$$

darstellen lassen, wo $A, B, C, \ldots$ oder $A_m, A_n, \ldots$ nothwendig Grössen von derselben Stufe sind wie P, und als unabhängig von t gedacht werden müssen. Setzen wir dann diesen Ausdruck als Funktion von t gleich $f(t)$, also

$$P = f(t),$$

und setzen wir ferner 147

$$dP = f(t + dt) - f(t),$$

so erhalten wir im allgemeinen Falle

$$\frac{dP}{dt} = mA_m t^{m-1} + nA_n t^{n-1} + \cdots.$$

Als der einfachste Fall erscheint hier der, dass P, also auch $A_m, A_n, \ldots$ Elementargrössen erster Stufe sind. Nimmt man dann ins Besondere an, dass P ein konstantes Gewicht habe, so wird es sich, wenn man die Grössen jetzt als Grössen erster Stufe mit kleinen Buchstaben bezeichnet, in der Form darstellen lassen

$$p = a + b_m t^m + b_n t^n + \cdots,$$

wo $b_m, b_n, \ldots$ Strecken darstellen, a und p also Elementargrössen von gleichem Gewichte. Dann erhält man

$$\frac{dp}{dt} = mb_m t^{m-1} + nb_n t^{n-1} + \cdots,$$

und $\frac{dp}{dt}$ stellt also eine Strecke dar.

Man übersieht leicht, dass, wenn p den Ort eines Punktes in der Zeit t darstellt, dann

$$\frac{dp}{dt}$$

die Geschwindigkeit desselben ihrer Grösse und Richtung nach, und

$$\frac{d^2p}{dt^2}$$

seine Beschleunigung auf dieselbe Weise darstellt. Durch die Einführung dieser Betrachtungsweise in die Mechanik gelangt man mit

Anwendung unserer Analyse auf's Leichteste zu der Lösung mancher Probleme, die sonst als verwickelt erscheinen; doch würde mich die weitere Verfolgung dieses Gegenstandes zu weit von meinem Ziele abführen*).

Zweites Kapitel.

Aeussere Multiplikation, Division und Abschattung der Elementargrössen.

A. Theoretische Entwickelung.

§ 106. In wiefern die Strecke als Produkt aufgefasst werden kann.

Der Begriff der Abweichung, wie wir ihn der Entwickelung des vorigen Kapitels zu Grunde legten, enthält dem Keime nach den Begriff des Produktes zweier Elementargrössen in sich.

148 Wir verstanden dort unter der Abweichung eines Elementes α von einem andern Elemente ϱ die Strecke, welche von ϱ nach α geführt werden kann, und bezeichneten dieselbe mit $[\varrho\alpha]$; ebenso verstanden wir unter der Abweichung eines Elementarvereines von einem Elemente ϱ die Vielfachensumme aus den Abweichungen seiner Elemente von demselben Elemente ϱ, wenn man als Koefficienten dieser Vielfachensumme die den betreffenden Elementen zugehörigen Zahlengrössen (Gewichte) nimmt. Wir bestimmten darauf die einem Elementarverein entsprechende Elementargrösse so, dass sie statt desselben gesetzt werden konnte, sobald es sich nur um die Abweichung handelte, und setzten eben die Gleichheit der Abweichungen als einzige Bedingung für die Gleichheit der Elementargrössen; daraus ergab sich dann, dass die einem Elementarvereine zugehörige Elementargrösse wiederum die mit den zugehörigen Gewichten als Koefficienten versehene Vielfachensumme der Elemente sei, also die entsprechende Vielfachensumme der Elemente, wie die Gesammtabweichung jenes Vereins eine Vielfachensumme aus den Abweichungen der Elemente war.

Bezeichnen wir daher gleichfalls die Abweichung einer Elementargrösse a von einem Elemente ϱ mit $[\varrho a]$, so haben wir

$$[\varrho\,(\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \cdots)] = \mathfrak{a}\,[\varrho\alpha] + \mathfrak{b}\,[\varrho\beta] + \cdots;$$

und so auch, da die Gesammtabweichung eines Elementarvereins die Summe ist aus den Abweichungen seiner Theile

---

*) Vgl. meinen Aufsatz: Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre, in den mathematischen Annalen Bd. XII, [S. 222—240]. (1877.)

$$[\varrho(a+b+c+\cdots)] = [\varrho a] + [\varrho b] + \cdots,$$

wenn $a, b, \ldots$ beliebige Elementargrössen vorstellen. Späterhin hatten wir das Produkt einer Zahlengrösse in eine Elementargrösse, das heisst in eine Vielfachensumme von Elementen, als eine Vielfachensumme definirt, welche aus der ersteren durch Multiplikation ihrer Koefficienten mit jener Zahlengrösse hervorgeht, und daraus folgt nun, dass man die Abweichung einer m-fachen Elementargrösse findet, wenn man die der einfachen mit m multiplicirt, also dass

$$[\varrho(ma)] = m[\varrho a]$$

ist*). Kurz es zeigt sich, dass die multiplikative Grundbeziehung | für *149* die fragliche Verknüpfung von ϱ mit einer Elementargrösse, sowohl an sich, als auch in Bezug auf das Hinzutreten von Zahlenfaktoren gilt, sobald man nur den zweiten Faktor als gegliedert betrachtet. 149 Ueberdies zeigt sich, da $[\varrho\varrho]$ null ist, und $[\varrho\alpha]$ gleich $-[\alpha\varrho]$, dass diese Multiplikation eine äussere sein würde.

§ 107. **Elementarsysteme.**

Ehe wir nun zu dem vollständigen Begriffe des äusseren Produktes der Elementargrössen übergehen, wollen wir den Begriff der Elementarsysteme feststellen.

Dieser Begriff gründet sich wie der der Ausdehnungssysteme (§ 16) auf den Begriff der Abhängigkeit. Wir nennen eine Elementargrösse erster Stufe *abhängig* von andern Elementargrössen, wenn sie sich als Vielfachensumme derselben darstellen lässt, hingegen nennen wir mehrere Elementargrössen erster Stufe *unabhängig*, wenn zwischen ihnen keine Abhängigkeit in dem angegebenen Sinne stattfindet, das heisst, keine von ihnen sich als Vielfachensumme der übrigen darstellen lässt. Nun verstehen wir unter einem *Elementarsysteme n-ter Stufe* die Gesammtheit der Elemente, welche von n Elementen abhängig sind, während diese n Elemente von einander unabhängig sind.

Sind nun $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die n von einander unabhängigen Elemente, und ich betrachte zwei von ihnen abhängige Elemente ϱ und σ, so wird auch ihre Differenz sich als Vielfachensumme jener n Elemente darstellen lassen; diese Differenz, welche die gegenseitige Abweichung beider Elemente darstellt, hat zum Gewichte Null, und man erhält daher $\varrho - \sigma$ in der Form dargestellt:

*) Hieraus ergiebt sich übrigens, dass man in der ersten Gleichung dieses Paragraphen auch statt der Elemente $\alpha, \beta, \ldots$ die Elementargrössen $a, b, \ldots$ einführen könnte.

$$\varrho - \sigma = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma + \cdots,$$

wo zugleich

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots = 0$$

ist. Drückt man vermittelst der letzten Gleichung irgend einen der Koefficienten, zum Beispiel $\mathfrak{a}$, durch die übrigen aus, so erhält man, indem man diesen Werth in die erste einführt,

$$\varrho - \sigma = \mathfrak{b}(\beta - \alpha) + \mathfrak{c}(\gamma - \alpha) + \cdots,$$

das heisst, die gegenseitige Abweichung zweier Elemente eines Elementar-Systems n-ter Stufe ist als Vielfachensumme von $(n - 1)$ Strecken darstellbar, welche von einem der n Elemente, die das System bestimmen, nach den übrigen gelegt sind; und umgekehrt, jede Strecke, *150* die sich als Vielfachensumme dieser $(n - 1)$ Strecken | darstellen lässt, führt auch von einem Elemente jenes Systems nothwendig wieder zu einem Elemente desselben Systems.

Wir können daher auch sagen, ein Elementarsystem n-ter Stufe 150 sei die Gesammtheit der Elemente, deren gegenseitige | Abweichungen einem und demselben Ausdehnungssystem $(n - 1)$-ter Stufe angehören, oder, wenn man sich so ausdrücken will, es sei die elementare Darstellung eines Ausdehnungssystemes $(n - 1)$-ter Stufe. Noch bemerke ich, dass es im Begriffe des Elementarsystems unmittelbar liegt, dass n Elemente dann und nur dann von einander unabhängig sind, wenn sie keinem niederen Elementarsystem als dem n-ter Stufe angehören.

§ 108. **Aeusseres Produkt der Elementargrössen, formell bestimmt.**

Um nun sogleich zu dem Begriff der äusseren Multiplikation beliebig vieler Elementargrössen erster Stufe zu gelangen, haben wir nur den allgemeinen (formellen) Begriff der äusseren Multiplikation auf diese Grössen anzuwenden.

Der Begriff der Multiplikation ist schon dadurch bestimmt, dass man in einem Produkte von zwei Faktoren, von denen der eine aus zwei gleichartigen Stücken besteht, statt dieses Faktors seine Stücke einzeln einführen, und die so gebildeten Produkte, welche wieder als gleichartig zu betrachten sind, addiren darf. Das Produkt mehrerer Grössen erster Stufe (die wir als solche einfache Faktoren genannt haben) wird als ein äusseres dadurch bestimmt, dass ohne Werthänderung desselben in jedem einfachen Faktor solche Stücke, welche mit einem der beiden zunächststehenden Faktoren gleichartig sind, weggelassen werden können. Durch diese Grundgesetze bestimmen wir also auch den Begriff der Multiplikation von Elementargrössen erster Stufe, und halten zugleich alle, in dem ersten Abschnitte für Aus-

dehnungsgrössen gegebenen Begriffsbestimmungen auch für Elementargrössen fest, und da auf jenen Grundgesetzen und den hinzutretenden Begriffsbestimmungen alle im ersten Abschnitte bewiesenen Gesetze beruhen, so gelten sie auch alle für Elementargrössen, also namentlich alle Gesetze der äusseren Multiplikation, der formellen Addition und Subtraktion, der Division und der Abschattung. In Bezug auf die letzte bemerken wir nur noch, dass der Name Projektion hier nicht gebraucht werden darf, weil er in Bezug auf Elementargrössen, wie sich später zeigen wird, einen gänzlich andern Begriff in sich schliesst, als wir bisher mit dem Namen | der Abschattung bezeichneten. *151*

Unsere Aufgabe bleibt daher ins Besondere, unserm Begriffe die möglichste Anschaulichkeit zu geben, und seine konkrete Darstellung vor Augen zu legen.

§ 109. Realisation dieses Produktes; Ausweichung, starre Elementargrösse.

Die Hauptsache ist hier, auszumitteln, wann zwei Produkte einander gleichgesetzt werden können, indem dadurch der Begriffsumfang der Grösse, welche das Produkt darstellt, bestimmt wird. Da nun | durch 151 jene formellen Grundgesetze der Begriff des Produktes vollkommen bestimmt sein soll, so haben wir zwei Produkte dann, aber auch nur dann, einander gleich zu setzen, wenn sich vermittelst jener Grundgesetze (oder der daraus abgeleiteten) das eine Produkt in das andere verwandeln lässt.

Es sei daher ein Produkt aus n Elementargrössen erster Stufe der Betrachtung unterworfen. Zunächst ist klar, dass wenn die Gewichte dieser n Elementargrössen alle einzeln genommen null sind, also jede derselben als Ausdehnungsgrösse erster Stufe erscheint, auch ihr Produkt eine Ausdehnungsgrösse n-ter Stufe liefert. In jedem andern Falle, und wenn auch nur Ein einfacher Faktor ein geltendes Gewicht hat*), lässt sich jenes Produkt als Produkt eines Elementes in eine Ausdehnungsgrösse $(n-1)$-ter Stufe darstellen. Denn wir können zuerst den Faktor, von welchem wir voraussetzen, dass sein Gewicht nicht null sei, auf die erste Stelle bringen; sollte sich dabei das Vorzeichen des Produktes ändern, so können wir statt dessen das Zeichen irgend eines Faktors ändern. Ist nun $\mathfrak{a}\alpha$ jener Faktor, dessen Gewicht $\mathfrak{a}$ nicht null sein soll, so können wir nun den übrigen Faktoren, wenn ihr Gewicht noch nicht null ist, ein beliebiges Vielfaches von α als Stück hinzufügen, ohne den Werth des Produktes zu ändern, und

*) das heisst ein solches, welches nicht null ist.

dadurch das Gewicht jedes der übrigen Faktoren auf Null bringen. Nachdem dies geschehen ist, sind also die übrigen $(n-1)$ Faktoren Strecken geworden; ihr Produkt, welches eine Ausdehnungsgrösse $(n-1)$-ter Stufe ist, sei Q, so ist die Elementargrösse gleich

$$\mathfrak{a}\alpha \,.\, Q,$$

und dies wiederum, da $\mathfrak{a}$ eine Zahlengrösse ist, gleich

$$\alpha \,.\, \mathfrak{a}Q = \alpha \,.\, P,$$

152 wenn $\mathfrak{a}\,Q$ gleich P gesetzt wird. Es ist also die oben aufgestellte | Behauptung erwiesen; aber noch mehr: da das zu den einzelnen Faktoren hinzuzuaddirende Vielfache von α, wenn es das Gewicht derselben null machen soll, ein bestimmtes ist, so ergiebt sich dadurch ein bestimmter Werth von Q, also auch von P.

Um nun zu zeigen, dass P immer einen bestimmten Werth behält, welche Formveränderung man auch vorher mit jenem Produkte vorgenommen hat, haben wir nur festzuhalten, dass alle Formveränderungen eines Produktes, welche den Werth desselben ungeändert 152 lassen, darauf | beruhen, dass man jedem einfachen Faktor Stücke hinzufügen kann, welche den übrigen Faktoren gleichartig sind. Lassen wir nun in dem ursprünglichen Produkte zunächst den Faktor $\mathfrak{a}\alpha$ ungeändert, fügen aber irgend einem andern Faktor ein Stück hinzu, welches irgend einem der übrigen Faktoren, etwa dem Faktor $\mathfrak{b}\beta$ gleichartig ist, zum Beispiel das Stück $\mathfrak{m}\beta$, wo $\mathfrak{m}$ eine Zahlengrösse bedeutet, so hat man nachher, um das Gewicht dieses vermehrten Faktors auf Null zu bringen, noch ausser dem, was vorher zu subtrahiren war, die Grösse $\mathfrak{m}\alpha$ zu subtrahiren, somit erscheint das jenem Faktor hinzugefügte gleich $\mathfrak{m}(\beta-\alpha)$; aber der Faktor $\mathfrak{b}\beta$ verwandelt sich bei derselben Umwandlung in $\mathfrak{b}(\beta-\alpha)$; also bleibt auch nach der bezeichneten Umwandlung das dem einen Faktor hinzugefügte Stück dem andern gleichartig, das heisst das Produkt Q, also auch P behält denselben Werth.

Somit haben wir gezeigt, dass der Werth P, welcher als zweiter Faktor erscheint, ein bestimmter ist, wenn α unverändert bleibt; nun kann aber α um jede Strecke wachsen, welche dem Systeme P angehört; es sei dieselbe p_1, so hat man

$$(\alpha + p_1) \,.\, P = \alpha \,.\, P,$$

das heisst, es kann sich das Element α in jedes dem Elementarsysteme, was durch α und P bestimmt ist, angehörige Element verwandeln, während P immer denselben Werth behält, und hiermit ist der Begriffsumfang bestimmt.

Wir nennen nun ein Produkt von n Elementargrössen erster Stufe

oder eine Summe von solchen Produkten eine Elementargrösse n-ter Stufe, und ein solches Produkt, dessen einfache Faktoren nicht sämmtlich Strecken sind, eine starre Elementargrösse. Somit haben wir den Satz gewonnen, „dass eine starre Elementargrösse n-ter Stufe sich als Produkt eines Elementes in eine Ausdehnung $(n-1)$-ter Stufe darstellen lässt, | dass diese Ausdehnung, welche wir die Ausweichung jener Elementargrösse nennen, durch dieselbe vollkommen bestimmt sei, dass aber als Element jedes beliebige angenommen werden kann, was dem durch die einfachen Faktoren der Elementargrösse bestimmten Systeme angehört." Die starre Elementargrösse erscheint daher überhaupt als Einheit des durch sie bedingten Elementarsystems und der ihr zugehörigen Ausweichung; und durch das Ineinanderschauen beider, das heisst, durch das Zusammenfassen beider Anschauungen in eine ist die Begriffseinheit einer Elementargrösse von höherer Stufe, oder, | was dasselbe ist, eines Produktes von Elementargrössen erster Stufe gegeben. 153 153

Wir wollen nun die Anschauung der starren Elementargrösse dadurch vollenden, dass wir sie als bestimmten Theil des Elementarsystems, dem sie angehört, darzustellen suchen.

§ 110. Das Eckgebilde.

Nach dem im vorigen Paragraphen aufgestellten Begriff ist das Produkt zweier Elemente α, β die an das durch α und β bestimmte Elementarsystem gebundene und dadurch gleichsam erstarrte Strecke $\alpha\beta$.

Den Begriff der Strecke gründeten wir auf den des einfachen Ausdehnungsgebildes erster Stufe. Darunter verstanden wir die Gesammtheit der Elemente, in die ein erzeugendes Element bei stetiger Fortsetzung derselben Aenderung überging; das erzeugende Element in seinem ersten Zustande nannten wir das Anfangselement des Gebildes, in seinem letzten das Endelement, beide Elemente die Gränzelemente und alle übrigen Elemente des Gebildes bezeichneten wir als zwischen jenen Gränzelementen liegende. Somit können wir auch sagen, das einfache Gebilde $\alpha\beta$ sei die Gesammtheit der zwischen α und β liegenden Elemente, wobei es vermöge des Begriffs des Stetigen gleichgültig ist, ob wir die Gränzelemente selbst, weil sie an sich keine Ausdehnung darstellen, mit hinzunehmen oder nicht.

Dies Gebilde nun wird als Elementargrösse zweiter Stufe aufgefasst, wenn man nur einestheils das Elementarsystem zweiter Stufe, dem es angehört, und andrerseits die Erzeugungsweise festhält, so dass zwei solche Gebilde, welche demselben Elementarsysteme zweiter Stufe angehören und durch dieselben Aenderungen erzeugt sind, als Elementar-

grössen einander gleich sind, aber auch nur zwei solche. Oder denkt man das ganze Elementarsystem durch stetige Fortsetzung derselben *154* Aenderung | erzeugt, und nimmt zwei Elemente desselben als entsprechende an, und ausserdem je zwei Elemente als entsprechende, welche aus den entsprechenden durch dieselbe Aenderung erzeugt sind, so werden zwei auf diese Weise sich entsprechende Gebilde als gleiche Elementargrössen zweiter Stufe erscheinen.

Wenden wir nun dasselbe auf die Elementargrössen höherer Stufe an, und betrachten also drei oder mehrere Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$ so entsteht uns hier gleichfalls die Aufgabe, die Gesammtheit der zwischen diesen Elementen liegenden Elemente zu finden, und diese Gesammt-154 heit zu vergleichen mit dem Produkte der Elemente. Was wir | unter einem zwischen zwei Elementen liegenden Elemente verstehen, ist schon festgesetzt; jedes Element nun, was zwischen einem Elemente α und einem zwischen β und γ liegenden Elemente sich befindet, bezeichnen wir als ein zwischen α, β und γ liegendes, und überhaupt ein Element, welches zwischen α und einem zwischen einer Reihe von Elementen $\beta, \gamma, \ldots$ befindlichen Elemente liegt, als ein zwischen der ganzen Elementenreihe $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ liegendes. Die Gesammtheit dieser Elemente wollen wir vorläufig ein *Eckgebilde* nennen, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seine Ecken, und diese Ecken sowohl als die Elemente, welche zwischen einem Theile dieser Ecken liegen (nicht zwischen allen), seine Gränzelemente, jene zwischen sämmtlichen Ecken liegenden Elemente hingegen die inneren Elemente des Eckgebildes.

Unsere Aufgabe ist nun zunächst die, alle Zwischenelemente (inneren Elemente) als Vielfachensummen jener Elemente, zwischen denen sie liegen, darzustellen, und die Relation zu bestimmen, welche dann zwischen den Koefficienten statt finden muss.

Zuerst in Bezug auf zwei Elemente ist klar, dass ein Element ϱ dann und nur dann zwischen α und β liege, wenn $\alpha\varrho$ gleichbezeichnet ist mit $\varrho\beta$, so dass die letzte Aenderung als Fortsetzung der ersten erscheint. Jedes Element ϱ nun, was in dem durch α, β bedingten Elementarsystem liegt, kann dargestellt werden durch die Gleichung

$$\varrho = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta,$$

wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebige Zahlengrössen vorstellen, deren Summe Eins ist. Nach dem vorigen liegt nun ϱ dann und nur dann zwischen α und β, wenn $\alpha\varrho$ gleichbezeichnet ist mit $\varrho\beta$, das heisst,

$$\alpha\,.\,(\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta) \text{ gleiches Zeichen hat mit } (\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta)\,.\,\beta,$$

155 oder, indem man die Gesetze der äusseren Multiplikation anwendet, wenn $\mathfrak{b}\alpha\,.\,\beta$ gleich bezeichnet ist mit $\mathfrak{a}\alpha\,.\,\beta$, das heisst, $\mathfrak{b}$ gleich be-

zeichnet ist mit $\mathfrak{a}$; das heisst, da ihre Summe Eins, also positiv ist, wenn beide Koefficienten oder Gewichte positiv sind. Ist einer derselben null, so ist das Element ein Gränzelement.

Durch Fortsetzung desselben Verfahrens können wir nun beweisen, dass ein Element ϱ dann und nur dann zwischen einer Reihe von Elementen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, welche von einander unabhängig sind, liege, wenn es sich in der Form

$$\varrho = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma + \cdots$$

mit lauter positiven Koefficienten darstellen lasse.

Wir sagten, dass | ein Element ϱ dann und nur dann zwischen 155 einer Reihe von Elementen liege, wenn es zwischen dem ersten Elemente dieser Reihe und einem zwischen den folgenden befindlichen Elemente liege. Soll ϱ daher zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ liegen, so muss es zwischen α und einem zwischen $\beta, \gamma, \ldots$ liegenden Elemente sich befinden, es muss also ϱ sich als Vielfachensumme von α und einem zwischen $\beta, \gamma, \ldots$ liegenden Elemente, deren Koefficienten beide positiv sind, darstellen lassen; also muss zuerst der Koefficient von α positiv sein, demnächst aber auch der Koefficient des zwischen $\beta, \gamma, \ldots$ liegenden Elementes. Dies Element muss sich aber aus demselben Grunde als Vielfachensumme von β und einem zwischen den folgenden Elementen $\gamma, \ldots$ befindlichen Elemente mit positiven Koefficienten darstellen lassen; in dem Ausdrucke für ϱ war aber dies zwischen $\beta, \gamma, \ldots$ liegende Element mit einem positiven Koefficienten multiplicirt; also werden wir, indem wir den für dies Element gefundenen Ausdruck in den Ausdruck für ϱ einführen, und die Klammer auflösen, ϱ als Vielfachensumme von den Elementen α, β und einem zwischen den folgenden Elementen $\gamma, \ldots$ befindlichen Elemente mit positiven Koefficienten dargestellt haben, und da wir dies Verfahren bis zum letzten Elemente hin fortsetzen können, so folgt, dass jedes zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ liegende Element sich als Vielfachensumme von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ mit positiven Koefficienten darstellen lasse.

Es ist nun noch zu zeigen, dass auch jedes Element, was sich in dieser Form darstellen lasse, Zwischenelement sei.

Ist ein Element ϱ in der obigen Form dargestellt

$$\varrho = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma + \cdots,$$

wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ positive Koefficienten sind, so hat die Summe aller *156* auf $\mathfrak{a}\alpha$ folgenden Glieder zum Gewichte $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots$, also eine positive Zahl, ist also, wenn man die Koefficienten $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ mit $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots$ dividirt, und dann jene Summe mit $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots$ multiplicirt, als Produkt einer positiven Zahl in ein Element, was seinerseits wieder als

Vielfachensumme von $\beta, \gamma, \ldots$ mit positiven Koefficienten erschei
darstellbar; folglich liegt ϱ zwischen α und einem Elemente, was
Vielfachensumme der folgenden Elemente mit positiven Koefficient
darstellbar ist, und da wir diesen Schluss fortsetzen können bis zu c
beiden letzten Elementen hin, und [da] das als Vielfachensumme die
156 letzten mit positiven Koefficienten | darstellbare Element ein zwisch
liegendes ist, so folgt, dass ϱ selbst zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ liege. A
ist der vorher ausgesprochene Satz erwiesen; auch ist klar, dass, we
einer oder mehrere Koefficienten null werden, während die übrig
positiv bleiben, ϱ als Gränzelement erscheint.

§ 111. Vergleichung des Eckgebildes mit dem Produkte. Ausdehnung der Elementargrösse.

Betrachte ich nun auf der andern Seite das Produkt $\alpha . \beta . \gamma . \delta$.
dessen Ausweichung nach § 109 gleich $[\alpha\beta] . [\beta\gamma] . [\gamma\delta] \ldots$ ist, u
stelle das Ausdehnungsgebilde dar, was diesen Werth hat, und dadu
entsteht, dass das Element α zuerst die Strecke $[\alpha\beta]$ beschreibt, da
jedes so erzeugte Element die Strecke $[\beta\gamma]$, dann jedes die Stre
$[\gamma\delta]$ beschreibt, und so weiter, so ist klar, dass jedes solche Elem
(σ) aus α durch eine Aenderung von der Form

$$p\,[\alpha\beta] + q\,[\beta\gamma] + r\,[\gamma\delta] + \cdots,$$

wo $p, q, r, \ldots$ sämmtlich positiv und kleiner als Eins sind, herv
geht, also der Gleichung

$$[\alpha\sigma] = p\,[\alpha\beta] + q\,[\beta\gamma] + r\,[\gamma\delta] + \cdots$$

genügt, und dass jenes Ausdehnungsgebilde ausserdem keine Eleme
enthält, indem die Werthe Null und Eins für jene Koefficient
$(p, q, r, \ldots)$ Gränzelemente bedingen.

Das Eckgebilde zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ enthielt die Gesam
heit der Elemente, welche der Gleichung

$$\sigma = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma + \mathfrak{d}\delta + \cdots$$

mit positiven Werthen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots$, das heisst, welche
Gleichung

$$[\alpha\sigma] = \mathfrak{b}\,[\alpha\beta] + \mathfrak{c}\,[\alpha\gamma] + \mathfrak{d}\,[\alpha\delta] + \cdots$$

genügen, wenn $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots$ positiv, und ihre Summe kleiner als E
157 ist. Setzen wir hier statt $[\alpha\gamma]$ seinen Werth $[\alpha\beta] + [\beta\gamma]$, statt [
seinen Werth $[\alpha\beta] + [\beta\gamma] + [\gamma\delta]$, und so weiter, so erhält man
ein Element σ des Eckgebildes die Gleichung

$$[\alpha\sigma] =$$
$$= (\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \cdots)[\alpha\beta] + (\mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \cdots)[\beta\gamma] + (\mathfrak{d} + \cdots)[\gamma\delta] + \cdots$$
$$= p[\alpha\beta] + q[\beta\gamma] + r[\gamma\delta] + \cdots$$

mit der Bedingung, dass jeder frühere Koefficient grösser als der folgende, der erste kleiner als Eins, der letzte grösser als Null ist, also mit der Bedingung

$$1 > p > q > r > \cdots > 0.$$

Es umfasst also das Eckgebilde nur einen Theil der Elemente, welche jenes dem Produkte $\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma \,.\, \delta \ldots$ entsprechende Ausdehnungsgebilde enthält, nämlich diejenigen, in denen die zuletzt hinzugefügte Be- 157 dingung erfüllt ist.

Nun wollen wir jenes Eckgebilde vorläufig mit $[a, b, c, \ldots]$ bezeichnen, indem wir $[\alpha\beta]$ mit a, $[\beta\gamma]$ mit b, $[\gamma\delta]$ mit c bezeichnen, und so weiter, und verstehen also darunter die Gesammtheit der Elemente σ, welche der Gleichung

$$[\alpha\sigma] = pa + qb + rc + \cdots$$

mit der Bedingung

$$1 > p > q > r > \cdots > 0$$

genügen. Als Gränzelemente erscheinen diejenigen, bei deren Darstellung in jener Form theilweise Gleichheit jener Grössen $(1, p, q, r, \ldots, 0)$ eintritt. Nun leuchtet ein, wie jede andere Folge von $a, b, c, \ldots$ auch ein anderes Eckgebilde hervorruft, welches mit dem ersteren kein inneres Element gemeinschaftlich hat, und wie die Gesammtheit der Elemente, welche die zu allen möglichen Folgen von $a, b, c, \ldots$ gehörigen Eckgebilde enthalten, wenn man die Gränzelemente immer nur einmal setzt, das dem Produkte $a \,.\, b \,.\, c \ldots$ entsprechende Ausdehnungsgebilde selbst darstellt. In der That, jedes Element dieses Ausdehnungsgebildes wird, wenn die Koefficienten $p, q, r, \ldots$ verschieden sind, nur in Einem der Eckgebilde, aber auch gewiss in einem, vorkommen; und wenn diese Koefficienten theilweise gleich sind, so werden es Gränzelemente sein, die also nur einmal gesetzt werden sollten. Wir können daher, da auch die Eckgebilde kein Element enthalten, welches nicht in jenem Ausdehnungsgebilde enthalten wäre, das letztere als Summe | sämmtlicher Eckgebilde, welche bei allen möglichen Folgen 158 der Faktoren $a, b, c, \ldots$ eintreten, ansehen.

Nun können wir endlich zeigen, dass alle diese Eckgebilde, als Theile ihres Systems, einander gleich sind.

Die Gleichheit zweier Theile eines Elementarsystems besteht im allgemeinsten Sinne darin, dass beide von dem in einfachem Sinne erzeugten Systeme von Elementen gleiche Gebiete umfassen, nämlich so,

dass wechselseitig jedem Elemente des einen Gebietes ein, aber auch nur Ein Element des andern entspricht.

Um dies bestimmter zu fassen, nehmen wir an, $a, b, c, \ldots$ seien entsprechende Aenderungen, das heisst solche, die aus den entsprechenden Grundänderungen auf dieselbe Weise hervorgegangen seien, und 158 durch sie werde das System von α aus erzeugt, und zwar so, dass je zwei Elemente, welche in einer der Richtungen $a, b, c, \ldots$ an einander gränzen, durch die dieser Richtung zugehörige Grundänderung aus einander erzeugt seien. Dann ist klar, wie jedem Elemente des Eckgebildes $[\alpha, b, c, \ldots]$ ein, aber auch nur Ein Element eines Eckgebildes, in welchem die Strecken $a, b, c, \ldots$ in anderer Ordnung vorkommen, entspricht. Denn, wenn σ ein Element des ersten ist und $[\alpha\sigma]$ als Vielfachensumme von $a, b, c, \ldots$ dargestellt ist, so hat man sogleich das entsprechende Element des andern, wenn man in jener Vielfachensumme, ohne die Ordnung der Koefficienten zu ändern, $a, b, c, \ldots$ auf die Ordnung des zweiten Eckgebildes bringt. Folglich sind in der That, wenigstens in Bezug auf die angenommene Erzeugungsweise des Systems, alle jene Eckgebilde als Elementargrössen einander gleich. Aber schon aus der Art, wie wir in § 20 die Systeme von den Grundänderungen unabhängig gemacht haben, geht hervor, dass dasselbe auch gelten wird in Bezug auf jede andere einfache Erzeugungsweise des Systems; also sind jene Eckgebilde an sich gleich.

Da sie nun insgesammt dem Produkte gleich waren, so werden wir sagen können, jedes derselben sei gleich dem Produkte dividirt durch eine Zahl, welche die Anzahl der verschiedenen Folgen ausdrückt, welche die n Faktoren $a, b, c, \ldots$ annehmen können; diese Zahl nennen wir die *Gefolgszahl* aus n Elementen, und bezeichnen sie, wenn die Anzahl der Faktoren n ist, mit $n!$, setzen also das Eckgebilde seiner Ausdehnung nach gleich

159 $$\frac{a.b.c\ldots}{n!}\text{*)};$$

wir nennen diesen Werth die Ausdehnung des Produktes $\alpha.\beta.\gamma\ldots$, das heisst die Ausdehnung der Elementargrösse. Es ist also

die Ausdehnung einer starren Elementargrösse gleich ihrer Ausweichung, dividirt durch die zu der Stufenzahl dieser Ausweichung gehörige Gefolgszahl.

Namentlich ist, indem wir voraussetzen, dass zwei Elemente zwei

*) Dass $n! = 1.2.3\ldots n$ sei, lehrt die Kombinationslehre; würden wir dies voraussetzen, so würden wir den Werth des Eckgebildes erhalten $\frac{a.b.c\ldots}{1.2.3\ldots}$.

Folgen zulassen, drei Elemente aber deren sechs, die Ausdehnung einer starren Elementargrösse dritter Stufe die Hälfte ihrer Auswei- 159 chung, und die Ausdehnung einer starren Elementargrösse vierter Stufe der sechste Theil ihrer Ausweichung*); und nehmen wir an, dass Ein Element nur Eine Anordnung zulasse, nämlich die, dass es eben gesetzt wird, und wenn kein Element da ist, auch Eine Anordnung möglich ist, nämlich die, dass eben kein Element gesetzt wird, so folgt, dass für Elementargrössen erster und zweiter Stufe Ausdehnung und Ausweichung einander gleich sind.

§ 112. Gleiche Elementargrössen haben gleiche Ausweichungen.

Für die Elementargrössen erster Stufe ist die Ausweichung oder Ausdehnung eine Zahlengrösse, nämlich dieselbe, die wir oben als ihr Gewicht bezeichneten. Es entsteht daher die Aufgabe, für Elementargrössen höherer Stufen die entsprechenden Sätze abzuleiten, die wir für Elementargrössen erster Stufe in Bezug auf ihr Gewicht aufstellten.

Zunächst ergiebt sich, „dass, wenn die Glieder einer Gleichung dasselbe Element α als gemeinschaftlichen Faktor enthalten, während der andere Faktor eines jeden Gliedes eine Ausdehnung ist, man jenes Element α aus allen Gliedern weglassen könne, ohne die Richtigkeit der Gleichung aufzuheben.“ Die Richtigkeit dieses Satzes erhellt, wenn man in der vorausgesetzten Gleichung Ein Glied auf die linke Seite allein schafft, | und die übrigen in Ein Glied mit dem Faktor α zu- *160* sammenfasst, und also die Gleichung in der Form darstellt

$$\alpha . A = \alpha . (B + C + \cdots);$$

da nämlich nun die linke Seite eine starre Elementargrösse darstellt, die rechte also gleichfalls, so müssen die Ausweichungen auf beiden Seiten gleich, also

$$A = B + C + \cdots$$

sein. Stellt man dann die Glieder dieser Gleichung wieder in der ursprünglichen Ordnung her, so hat man die Gleichung, deren Richtigkeit zu erweisen war.

Wir können die Summe der Ausweichungen mehrerer Glieder, welche alle dasselbe Element ϱ als Faktor haben, auch dann, wenn diese Summe eine *formelle* Ausdehnungsgrösse darstellt, die Ausweichung

---

*) Diese Resultate entsprechen den Sätzen der Geometrie, dass das Dreieck die Hälfte ist des Parallelogramms von gleicher Grundseite und Höhe, und die dreiseitige Pyramide der sechste Theil des Spathes, dessen Kanten drei zusammenstossenden Kanten der Pyramide gleich sind.

160 ihrer Summe nennen, ¦ und dann den soeben erwiesenen Satz auch so ausdrücken: „In einer Gleichung, deren Glieder dasselbe Element ϱ als gemeinschaftlichen Faktor haben, kann man statt aller Glieder gleichzeitig ihre Ausweichungen setzen, ohne die Richtigkeit der Gleichung aufzuheben.“ Vermittelst dieses Satzes ergiebt sich nun, dass, wenn man die Glieder irgend einer Gleichung alle mit demselben Elemente ϱ multiplicirt, und statt jedes so gewonnenen Gliedes seine Ausweichung setzt, die Gleichung eine richtige bleibt.

Wir verstehen nun dem vorigen Kapitel gemäss *unter der Abweichung einer Grösse B von einer andern A die Ausweichung des Produktes $A.B$*, und haben somit den Satz gewonnen, dass man in einer Gleichung statt aller Glieder gleichzeitig ihre Abweichungen von demselben Elemente ϱ setzen darf, oder einfacher ausgedrückt, dass gleiche Elementargrössen auch von demselben Elemente um Gleiches abweichen. Hierbei ist zu bemerken, wie aus der Definition sogleich hervorgeht, dass die Abweichung einer Ausdehnung von einem Elemente stets dieser selbst gleich, also von dem Elemente gänzlich unabhängig ist.

Stellen wir uns nun eine Gleichung vor, deren Glieder theils starre Elementargrössen theils Ausdehnungen sind, und in welcher jede der ersteren als Produkt eines Elementes in eine Ausdehnung, also in der Form $\alpha . A$ dargestellt ist: so verwandelt sich durch Multiplikation aller Glieder mit ϱ jenes Glied in $\varrho . \alpha . A$ oder in $\varrho . (\alpha - \varrho) . A$, weil man in jedem Faktor eines äusseren Produktes Stücke hinzufügen
161 kann, ¦ welche den andern Faktoren gleichartig sind, und da $(\alpha - \varrho)$ eine Strecke, also $(\alpha - \varrho) . A$ eine Ausdehnung ist, so kann man nun den gemeinschaftlichen Faktor ϱ weglassen, und erhält auf diese Weise die Abweichungsgleichung, welche somit aus der gegebenen dadurch hervorgeht, dass man von den Elementen der starren Elementargrössen überall ϱ subtrahirt, und die Glieder, welche Ausdehnungen darstellen, unverändert lässt. Subtrahirt man nun diese Gleichung von der gegebenen, so fallen die Ausdehnungsglieder weg, das Glied $\alpha . A$ verwandelt sich in $\alpha . A - (\alpha - \varrho) . A$, das heisst in $\varrho . A$; das heisst, statt der verschiedenen Elemente, welche mit den Ausweichungen multiplicirt waren, tritt überall das Element ϱ ein; dies kann man nun weglassen nach dem vorigen Paragraphen, und erhält somit eine Glei-
161 chung, welche aus der gegebenen dadurch hervorgeht, ¦ dass man die Ausdehnungsglieder weglässt, statt der übrigen aber ihre Ausweichungen setzt. Da nun die Ausweichung einer Summe von Elementargrössen als die Summe ihrer Ausweichungen definirt ist, worin zugleich liegt, *dass die Ausweichung einer Ausdehnungsgrösse null ist*, so können wir einfacher sagen:

Gleiche Elementargrössen haben gleiche Ausweichungen,
oder

Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man statt aller Glieder gleichzeitig ihre Ausweichungen setzt.

Aus diesem Satze geht, wenn man die Ableitungsweise, durch welche er sich ergab, umkehrt, der umgekehrte Satz hervor:

Zwei Elementargrössen, welche gleiche Ausweichungen haben, und von irgend einem Elemente ϱ um gleiche Grössen abweichen, sind einander gleich (und weichen auch von jedem andern Elemente um eine gleiche Grösse ab).

Nämlich sind

$$\alpha_1 . A_1 + \alpha_2 . A_2 + \cdots + P$$

und

$$\beta_1 . B_1 + \beta_2 . B_2 + \cdots + Q,$$

wo die griechischen Buchstaben Elemente, die lateinischen Ausdehnungsgrössen vorstellen, die beiden Elementargrössen, von denen wir voraussetzen, dass ihre Ausweichungen gleich sind, das heisst,

$$A_1 + A_2 + \cdots = B_1 + B_2 + \cdots$$

ist, und dass ihre Abweichungen von irgend einem Elemente ϱ gleich sind, das heisst

$$(\alpha_1 - \varrho) . A_1 + (\alpha_2 - \varrho) . A_2 + \cdots + P$$

gleich ist 162

$$(\beta_1 - \varrho) . B_1 + (\beta_2 - \varrho) . B_2 + \cdots + Q,$$

so erhält man aus dieser letzten Gleichung, indem man die Klammern auflöst, und bemerkt, dass nun die Glieder, welche ϱ enthalten, sich vermöge der ersten Gleichung aufheben, die zu erweisende Gleichung

$$\alpha_1 . A_1 + \alpha_2 . A_2 + \cdots + P$$

gleich

$$\beta_1 . B_1 + \beta_2 . B_2 + \cdots + Q.$$

Eine specielle Folgerung dieses Satzes ist die, *dass eine Elementargrösse, deren Ausweichung null ist, einer Ausdehnungsgrösse gleich ist, und von allen Elementen um gleich viel, nämlich um eben diese Ausdehnungsgrösse abweicht.* Denn wenn die Abweichung jener Elementargrösse von irgend einem Elemente ϱ, welche Abweichung | immer nach 162 der Definition eine Ausdehnungsgrösse darstellt, gleich P ist, so muss sie selbst gleich P sein, weil sie mit P gleiche Ausweichung nämlich Null hat, und beide von demselben Elemente ϱ um eine gleiche Grösse abweichen, denn die Abweichung jeder Ausdehnungsgrösse von einem beliebigen Elemente ist eben diese Ausdehnungsgrösse selbst; also erfolgt jene Gleichheit nach dem soeben erwiesenen Satze, und daraus fliesst dann der andere Theil des zu erweisenden Satzes unmittelbar.

§ 113. **Summe der Elementargrössen.**

Wir wenden den Satz des vorigen Paragraphen noch auf die Addition einer starren Elementargrösse $(\alpha . A)$ und einer Ausdehnung (P) an.

Ist A die Ausweichung der ersteren, so muss es auch, da die Ausweichung einer Ausdehnungsgrösse null ist, die der Summe sein; soll daher die Summe wiederum eine starre Elementargrösse sein, so muss sie sich in der Form $\beta . A$ darstellen lassen, und es wird dann $\beta . A$ in der That der Summe gleich sein, wenn beide gleiche Abweichungen von irgend einem Elemente, zum Beispiel von α, darbieten; die Abweichung der Grösse $\alpha . A$ von α ist aber null, also hat man als die einzige Bedingungsgleichung

$$P = (\beta - \alpha) . A,$$

das heisst,

die Summe einer starren Elementargrösse und einer Ausdehnungsgrösse ist nur dann wieder eine starre Elementargrösse, wenn die Aus- 163 *weichung der ersteren der letzteren* | *untergeordnet ist, und zwar ist die Summe dann diejenige Elementargrösse, welche mit der ersteren gleiche Ausweichung hat, und von einem Elemente der ersteren um die letztere abweicht.*

B. Anwendungen.

§ 114. **Die Elementargrössen im Raume, Liniengrössen, Plangrössen.**

Nachdem wir nun die Erzeugung der Elementargrössen höherer Stufen aus denen der ersten durch Multiplikation und Addition dargestellt, und ihren Begriff durch Vergleichung mit den Elementargrössen erster Stufe und mit den Ausdehnungsgrössen der Anschauung näher gerückt haben, gehen wir jetzt zu den Anwendungen auf die *Geometrie* und *Mechanik* über, in welchen jene Begriffe sich anschaulich abbilden.

Was zuerst die *Geometrie* betrifft, so ist klar, wie die gerade Linie und die Ebene als Elementarsysteme zweiter und dritter Stufe erscheinen. Der Raum selbst aber erscheint als Elementarsystem vierter Stufe, und erst hierdurch ist der Raum in seiner wahren Bedeutung dargestellt.

163 Die starre Elementargrösse | liess sich am einfachsten als Produkt eines Elementes in eine Ausdehnungsgrösse darstellen, welche wir die Ausweichung derselben nannten; und es erschien dieselbe als die an ihr Elementarsystem gebundene Ausweichung.

Betrachten wir zuerst das Produkt $(\alpha . p)$ eines Punktes (α) in eine Strecke (p), so ist p die Ausweichung dieses Produktes; die gerade Linie, welche von α in der Richtung der Strecke p gezogen wird, das Elementarsystem desselben, und das Produkt erscheint also als eine Strecke, welche einen Theil einer konstanten geraden Linie ausmacht, und an diese Linie gebunden bleibt. Wir nennen dies Produkt, da es einen Theil einer geraden Linie bildet, *Liniengrösse*, und fahren fort, die Strecke, welche an ihr erscheint, ihre Ausweichung zu nennen. Ebenso stellt sich das Produkt $(\alpha . P)$ eines Punktes (α) in einen Flächenraum (P) von konstanter Richtung als ein Flächenraum dar, welcher in einer konstanten Ebene liegt, nämlich in der durch jenen Punkt in der Richtung des Flächenraums gelegten Ebene; wir nennen jene Grösse, da sie einen Theil einer konstanten Ebene bildet, *Ebenengrösse* (vielleicht besser *Plangrösse*), und jenen Flächenraum von konstanter Richtung ihre Ausweichung. Das Produkt endlich eines Punktes in einen Körperraum hat für die Geometrie, da der Raum ein Elementarsystem vierter Stufe ist, also jeder Körperraum schon an sich an ihn gebunden ist, keine andere Bedeutung als dieser Körperraum selbst. *164*

§ 115. Produkte und Summen dieser Grössen.

Hieraus entwickelt sich nun leicht der Begriff eines Produktes von mehreren Punkten.

Betrachtet man zuerst das Produkt zweier Punkte $\alpha . \beta$ oder $\alpha\beta$, so ist das System, an welches es gebunden ist, die durch beide Punkte gezogene gerade Linie, und da

$$\alpha . \beta = \alpha . (\beta - \alpha)$$

ist, so ist die Ausweichung dieses Produktes die Abweichung des zweiten Punktes von dem ersten, das heisst, das Produkt zweier Punkte ist eine Liniengrösse, deren Linie durch jene beiden Punkte geht, und deren Ausweichung die von dem ersten an den zweiten geführte Strecke ist.

Das Produkt dreier Punkte $\alpha . \beta . \gamma$ erscheint als Plangrösse, deren Ebene durch jene drei Punkte geht; und da

$$\alpha . \beta . \gamma = \alpha . (\beta - \alpha) . (\gamma - \alpha) = \alpha . [\alpha\beta] . [\alpha\gamma]$$

ist, so ist die Ausweichung derselben der Flächenraum eines Parallelogramms, was die Abweichungen der beiden letzten Punkte von dem ersten zu Seiten hat. Auch können wir, da

$$[\alpha\gamma] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma] \qquad 164$$

ist,

$$[\alpha\beta] . [\alpha\gamma] = [\alpha\beta] . [\beta\gamma]$$

setzen; also ist die Ausweichung das Produkt der stetig auf einander folgenden Strecken, welche die Punkte in der Reihenfolge, in welcher sie in dem Produkte auftreten, verbinden.

Das Produkt von vier Punkten $\alpha.\beta.\gamma.\delta$ erscheint als ein Körperraum, und zwar ist die Ausweichung desselben, da

$$\alpha.\beta.\gamma.\delta = \alpha.(\beta-\alpha).(\gamma-\alpha).(\delta-\alpha) = \alpha.[\alpha\beta].[\alpha\gamma].[\alpha\delta]$$

ist, gleich dem Körperraum eines Spathes, welches die Abweichungen der drei letzten Punkte von dem ersten (in der gehörigen Reihenfolge genommen) zu Seiten hat; oder da

$$[\alpha\gamma] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma]$$
$$[\alpha\delta] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma] + [\gamma\delta]$$

ist, so ist auch, wenn man die den übrigen Faktoren gleichartigen Stücke weglässt,

$$[\alpha\beta].[\alpha\gamma].[\alpha\delta] = [\alpha\beta].[\beta\gamma].[\gamma\delta],$$

das heisst, die Ausweichung des Produktes von vier Punkten ist gleich dem Produkte der stetig auf einander folgenden Strecken, welche jene Punkte in der Reihenfolge, in welcher sie in jenem Produkte vor-
165 kommen, verbinden. | Hierbei braucht man nicht hinzuzufügen, dass diese Grösse als an den Raum gebunden zu betrachten ist, weil alle räumlichen Grössen an ihn gebunden sind.

Das Produkt von mehr als vier Punkten wird, da der Raum nur ein Elementarsystem vierter Stufe ist, stets null sein müssen. Sind die zu multiplicirenden Punkte noch mit Gewichten behaftet, so hat man nur das Produkt der einfachen Punkte noch mit dem Produkte der Gewichte zu multipliciren, wodurch sich nur die Ausweichung ändert.

Viel einfacher gestaltet sich alles, wenn wir die *Ausdehnung* betrachten. Nach der Definition der inneren oder zwischen liegenden Elemente, deren Gesammtheit die Ausdehnung darstellt, ist die Ausdehnung des Produktes $\alpha.\beta.\gamma$ gleich dem Flächenraum des Dreiecks, welches α, β, γ zu Ecken hat, und die des Produktes $\alpha.\beta.\gamma.\delta$ gleich dem Körperraum der Pyramide, welche α, β, γ, δ zu Ecken hat; und zugleich liegt in dem Satze, dass die Ausdehnung einer starren Elementargrösse gleich ihrer Ausweichung dividirt durch die zu der Stufenzahl dieser Ausweichung gehörige Gefolgszahl ist, dass das Dreieck die Hälfte des Parallelogramms, und die dreiseitige Pyramide der sechste
165 Theil des Spathes ist, | dessen Kanten mit dreien der Pyramide parallel sind.

Hierdurch ist also der Begriff eines Produktes von mehreren Elementargrössen erster Stufe für den Raum bestimmt; und wir sind dabei nur zu zwei neuen Grössen, nämlich der Liniengrösse und der

Plangrösse gelangt. Auch erhellt, wie das Produkt einer Liniengrösse in einen Punkt (oder eine Elementargrösse erster Stufe) allemal eine Plangrösse, das Produkt zweier Liniengrössen und das eines Punktes in eine Plangrösse allemal einen Körperraum liefert; dass diese Produkte aber null werden, wenn die Stufenzahlen der Faktoren zusammengenommen grösser sind, als die des Elementarsystemes, in welchem sie liegen, also zum Beispiel das Produkt zweier Liniengrössen null wird, wenn sie in derselben Ebene liegen. Also auch hierdurch gelangen wir zu keinen andern Grössen, als zu den beiden oben genannten.

Hingegen gelangen wir durch die Addition der Liniengrössen zu einer eigenthümlichen Summengrösse, welche besonders für die Statik von entschiedener Wichtigkeit ist. Wir zeigten oben (Kapitel 3 des ersten Abschnittes), dass die Summe zweier Produkte n-ter Stufe nur dann wieder als ein Produkt n-ter Stufe erscheint, | wenn jene beiden *166* Produkte demselben Systeme $(n+1)$-ter Stufe angehören, hingegen eine formelle Summe, die wir Summengrösse nannten, liefert, wenn sie nur durch ein noch höheres System umfasst werden konnten. Der letztere Fall kann für den Raum, welcher als Elementarsystem vierter Stufe erscheint, nur eintreten, wenn Elementargrössen zweiter Stufe, das heisst Liniengrössen addirt werden sollen, und diese nicht in Einer Ebene liegen. Die nähere Erörterung dieses Falles behalte ich der Anwendung auf die Statik vor, in welcher diese Summengrösse eine selbstständige Bedeutung gewinnt.

§ 116, 117. **Richtsysteme für Elementargrössen.**

§ 116.

Unter den zahlreichen Anwendungen, welche die Methode unserer Analyse auf die *Geometrie* verstattet, hebe ich hier nur diejenigen hervor, welche mir am geeignetsten erscheinen, um das Wesen jener Methode in ein helleres Licht zu setzen.

Um die Beziehung zu der sonst üblichen *Koordinatenbestimmung* hervortreten zu lassen, will ich zuerst den Begriff der Richtsysteme auf die Auffassung des Raumes als eines Elementarsystemes übertragen. Wir hatten im fünften Kapitel des ersten Abschnittes den Begriff eines Richtsystemes für Ausdehnungsgrössen aufgestellt, und demnächst für Elementargrössen festgesetzt, dass alle Definitionen, welche wir für Ausdehnungsgrössen aufgestellt hatten, auch auf jene übertragen werden sollen. Während dort als Grundmasse Ausdehnungsgrössen 166 erster Stufe auftraten, so werden hier Elementargrössen erster Stufe als Grundmasse auftreten, und dadurch ist dann die Bedeutung aller

dort in § 87 und 88 aufgestellten Begriffe auch für Elementargrössen bestimmt, namentlich sind die Definitionen von Richtmassen, Richtgebieten, Richtstücken, Zeigern hier genau dieselben wie dort; nur die Richtgebiete erster Stufe, welche wir dort Richtaxen nannten, werden wir hier Richtelemente nennen müssen. Dabei will ich dann nur noch bemerken, dass, da auch die Strecken als Elementargrössen erster Stufe aufgefasst werden können, unter den Grundmassen beliebig viele als Strecken auftreten können, und nur wenn alle Grundmasse Strecken werden, erhalten wir das Richtsystem für Ausdehnungsgrössen. Dasjenige Richtsystem, was diesem am nächsten steht, und dennoch zur Darstellung und Bestimmung der Elementargrössen hinreicht, ist das- *167* jenige, in welchem Ein Grundmass ein Element ist, alle | übrigen aber Strecken darstellen, ein Richtsystem, was seiner Einfachheit wegen besondere Auszeichnung verdient.

§ 117.

Wenden wir dies nun auf die Geometrie an, so erscheinen für den Raum als ein Elementarsystem vierter Stufe vier von einander unabhängige Elementargrössen erster Stufe als Grundmasse, welche zur Bestimmung hinreichen. Die Bedingung, dass sie von einander unabhängig sein sollen, sagt nur aus, dass sie nicht in Einer Ebene liegen dürfen, und wenigstens eins von ihnen eine starre Elementargrösse sein muss (während von den übrigen beliebige auch Strecken sein dürfen).

Nehmen wir vier starre Elementargrössen (das heisst vielfache Elemente) als Grundmasse an, so haben wir die von Möbius in seinem barycentrischen Kalkül zu Grunde gelegte Art der Koordinatenbestimmung, welche mit der von Plücker in seinem System der analytischen Geometrie dargestellten ihrem Wesen nach zusammenfällt. Als Richtgebiete zweiter Stufe erscheinen hier sechs gerade Linien, welche je zwei der Richtelemente verbinden, und als Kanten einer Pyramide erscheinen, welche jene Richtelemente zu Ecken hat; als Richtgebiete dritter Stufe vier Ebenen, welche durch je drei der Richtelemente gelegt sind und als Seitenflächen jener Pyramide erscheinen; und die Richtmasse zweiter und dritter Stufe stellen Theile jener Linien und Ebenen dar; das Richtmass vierter Stufe, welches hier das Hauptmass 167 ist, stellt einen Körperraum dar. Jede Elementargrösse | erster Stufe, mag sie nun eine starre Elementargrösse oder eine Strecke sein, kann im Raume als Vielfachensumme der vier Grundmasse dargestellt werden; jede Elementargrösse zweiter Stufe, mag sie nun eine Liniengrösse

oder ein Flächenraum von konstanter Richtung, oder eine Summengrösse sein, kann als Summe von sechs Liniengrössen dargestellt werden, welche den oben erwähnten sechs Linien angehören; kurz jede Grösse kann als Vielfachensumme der Richtmasse gleicher Stufe, oder als Summe von Stücken, welche den Richtgebieten gleicher Stufe angehören, dargestellt werden.

Diese Richtsysteme, deren Grundmasse starre Elementargrössen, das heisst vielfache Punkte sind, nennen wir mit Möbius *barycentrische*. Die einfachste Art der barycentrischen Richtsysteme ist die, bei welcher die Grundmasse blosse Punkte darstellen. Aber die barycentrischen Richtsysteme selbst erscheinen nur als eine besondere, | obwohl am *168* weitesten reichende Art der allgemeinen Richtsysteme, welche aus vier beliebigen Elementargrössen erster Stufe bestehen. Denn wir zeigten, dass sich beliebig viele derselben bis auf eine in Strecken verwandeln können, und erhalten so ausser dem genannten noch solche Richtsysteme, in welchen die Richtgebiete erster Stufe theils Richtelemente, theils Richtaxen (konstante Richtungen) sind.

Unter diesen heben wir besonders diejenige Art der Richtsysteme hervor, welche ein Element und drei Strecken zu Grundmassen haben. Als Richtmasse zweiter Stufe treten hier auf einestheils drei Liniengrössen, deren Linien durch das Richtelement gehen, und deren Ausweichungen die drei andern Grundmasse sind; anderntheils drei Flächenräume von konstanter Richtung, welche durch die drei zwischen jenen drei Strecken möglichen Spathecke (Parallelogramme) dargestellt werden. Als Richtmasse dritter Stufe erscheinen einestheils drei Plangrössen, deren Ebenen durch das Richtelement gehen und deren Ausweichungen die Flächenräume jener drei Spathecke sind, anderntheils ein als Ausdehnungsgrösse aufgefasster Körperraum, welcher durch das aus jenen drei Strecken konstruirbare Spath dargestellt ist. Als Hauptmass endlich erscheint derselbe Körperraum aufgefasst als Elementargrösse vierter Stufe. Die Systeme, welchen diese Richtmasse angehören, bilden dann die zugehörigen Richtgebiete.

Die Richtstücke eines Punktes in Bezug auf ein solches Richtsystem sind nun einestheils das Richtelement, anderntheils drei | Strecken, 168 welche den drei Richtaxen parallel sind, und als Summe von solchen vier Richtstücken wird jeder Punkt im Raume dargestellt werden können; die Abweichung eines Punktes im Raume vom Richtelemente wird daher nach diesem Richtsysteme durch Richtstücke von konstanter Richtung (durch Parallelkoordinaten) bestimmt, also ganz auf dieselbe Weise, wie eine Ausdehnung überhaupt durch Richtsysteme, welche zur Bestimmung von Ausdehnungen dienen, bestimmt wird.

§ 118. Verwandlung der Koordinaten.

Indem wir nun alle diese Richtsysteme als besondere Arten eines allgemeinen Richtsystems, dessen vier Grundmasse Elementargrössen sind, darstellen: so haben wir damit einestheils die allgemeinste Ko- *169* ordinatenbestimmung gefunden, bei welcher die Ebene | noch als Punktgebilde erster Ordnung erscheint, andererseits sind wir dadurch in den Stand gesetzt, das Verfahren, durch welches wir von einer Koordinatenbestimmung zu einer andern derselben Art übergehen konnten, und welches wir in § 92 für Parallelkoordinaten darstellten, nicht nur auf jede Art der Richtsysteme anzuwenden, sondern auch es da eintreten zu lassen, wo aus einer Art der Koordinatenbestimmung zur andern übergegangen werden soll, sobald beide nur jener von uns dargestellten allgemeineren Gattung angehören. Namentlich können wir danach unmittelbar die barycentrischen Gleichungen in Gleichungen zwischen Parallelkoordinaten umwandeln und umgekehrt, ohne dass wir noch irgend einer besonderen Vorschrift bedürften. — Indem wir nun ferner den Begriff der Richtstücke (Koordinaten) in einem allgemeineren Sinne auffassten, sofern wir auch Richtstücke höherer Ordnung annahmen, so reicht dieselbe allgemeine Art der Richtsysteme auch aus, um Elementargrössen höherer Stufen, namentlich um Liniengrössen und Ebenengrössen zu bestimmen.

Ehe wir die Bedeutung dieser Bestimmungen durchgehen, haben wir auf einen Unterschied zwischen der von uns angegebenen Bestimmungsweise und der sonst üblichen aufmerksam zu machen und zu zeigen, wie dieser Unterschied ausgeglichen werden könne. Nämlich wir sind überall zu der Bestimmung von Elementargrössen, das heisst von Punkten mit zugehörigen Gewichten, von Liniengrössen und Ebenengrössen gelangt. Bei der Bestimmung durch Koordinaten kommt es aber nur auf die Bestimmung der Punkte, Linien und Ebenen ihrer Lage nach an, und dadurch erhalten wir bei unserer Betrachtungsweise 169 stets ein Richtstück oder einen Zeiger mehr, als es bei jener Bestimmung der Lage erforderlich ist. Dieser Unterschied lässt sich auf der Stelle ausgleichen, indem man bedenkt, dass, wenn alle Richtstücke oder Zeiger einer Grösse mit derselben Zahlengrösse multiplicirt oder dividirt werden, dadurch die Lage (das Elementarsystem) derselben nicht geändert wird. Man erhält also sogleich die Anzahl der Zeiger um Eins vermindert, wenn man die Richtstücke (oder die Zeiger) mit einem der Zeiger jedesmal dividirt, und dadurch einen der Zeiger jedesmal auf Eins bringt. Die so gewonnenen Zeiger genügen dann jedesmal zur Bestimmung der Lage.

Indem wir nun auf solche Weise zum Beispiel die Lage einer Ebene durch | ihre Zeiger bestimmen, und zwischen den als veränder- *170* lich genommenen Zeigern eine Gleichung m-ten Grades aufstellen, so wird dadurch eine unendliche Menge von Ebenen bedingt, deren Zeiger jener Gleichung genügen; und von allen diesen Ebenen wird eine Oberfläche umhüllt werden, von welcher ich späterhin zeigen werde, dass sie dieselbe sei, welche man als Oberfläche m-ter Klasse bezeichnet hat. Ebenso führt die Bestimmung der geraden Linie durch ihre Zeiger zu eigenthümlichen, bisher nicht beachteten Gebilden, welche ich zuerst gelegentlich in einer Abhandlung im Crelle'schen Journal der Betrachtung unterworfen habe.*)**) Da die weitere Erörterung dieses Gegenstandes die Schranken dieses Werkes überschreiten würde, so will ich mich damit begnügen, hier noch die Gleichung für die gerade Linie und die Ebene, wie sie sich durch unsere Wissenschaft ergiebt, aufzustellen, und mit den sonst bekannten Gleichungen für dieselben in Beziehung zu setzen.

§ 119. Gleichung der Ebene.

Die allgemeinste Aufgabe, die man sich hier stellen kann, ist die, die Gleichung einer Ebene, welche durch drei beliebige gegebene Punkte geht, oder die Gleichung einer [geraden] Linie, welche durch zwei beliebige gegebene Punkte geht, aufzustellen.

Es seien die gegebenen Punkte im ersten Falle α, β, γ, im zweiten Falle α, β; der veränderliche Punkt, welcher als Punkt jener Ebene oder dieser | Linie durch eine Gleichung zwischen ihm und den ge- 170 gebenen Punkten bestimmt werden soll, sei σ, so hat man sogleich aus dem Begriffe eines Elementarsystems zweiter und dritter Stufe für den ersten Fall die Gleichung

$$\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma \,.\, \sigma = 0,$$

für den zweiten

$$\alpha \,.\, \beta \,.\, \sigma = 0,$$

und durch diese Formeln, welche den grössten Grad der Einfachheit besitzen, ist die Aufgabe im allgemeinsten Sinne gelöst. Will man dann aus Vorliebe für die gewöhnliche Koordinatenbehandlung oder aus einem andern Grunde die entsprechenden Koordinatengleichungen

---

*) Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. XXIV. [S. 262—282 und 372—380.]

**) Diese Gebilde sind besonders seit Plücker's letztem Werke „Neue Geometrie des Raumes, 1868" vielfach von den ausgezeichnetsten Mathematikern bearbeitet worden und bilden den Hauptgegenstand der heutigen Liniengeometrie. (1877.)

aufstellen, so kann man, wenn man nur die Mühe des Niederschreibens dieser langgestreckten Formeln nicht scheut, dieselben unmittelbar aus jener einfachen Gleichung ableiten.

171 Will man zum Beispiel die Gleichung in Parallelkoordinaten darstellen, so hat man sich nur des am Schlusse des § 117 erwähnten Richtsystems zu bedienen. Bei diesem Richtsysteme wird jeder Punkt als Summe des Richtelements ϱ und einer Strecke dargestellt. Es sei

$$\alpha = \varrho + p_1, \quad \beta = \varrho + p_2, \quad \gamma = \varrho + p_3, \quad \sigma = \varrho + p,$$

so hat man durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung der Ebene

$$(\varrho + p_1) \cdot (\varrho + p_2) \cdot (\varrho + p_3) \cdot (\varrho + p) = 0,$$

oder, indem man die Klammern auflöst, und die Produkte, welche null werden*), weglässt,

$$\varrho \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p + p_1 \cdot \varrho \cdot p_3 \cdot p + p_1 \cdot p_2 \cdot \varrho \cdot p + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \varrho = 0,$$

oder, indem man mit gehöriger Beobachtung des Vorzeichens ϱ überall auf die erste Stelle bringt, und es dann nach § 112 weglässt,

$$(p_2 \cdot p_3 + p_3 \cdot p_1 + p_1 \cdot p_2) \cdot p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot$$

Um nun diese Gleichung in die Koordinaten-Gleichung zu verwandeln, hat man nach § 88 nur statt jeder Strecke die Summe ihrer Richtstücke zu setzen. Es sei

$$\begin{aligned} p &= x + y + z \\ p_1 &= x_1 + y_1 + z_1 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \end{aligned}$$

wo x, y, z, ... die Richtstücke darstellen, so hat man nun

$$\begin{aligned} &(x_2 + y_2 + z_2) \cdot (x_3 + y_3 + z_3) \cdot (x + y + z) + \\ &+ (x_3 + y_3 + z_3) \cdot (x_1 + y_1 + z_1) \cdot (x + y + z) + \\ &+ (x_1 + y_1 + z_1) \cdot (x_2 + y_2 + z_2) \cdot (x + y + z) = \\ &= (x_1 + y_1 + z_1) \cdot (x_2 + y_2 + z_2) \cdot (x_3 + y_3 + z_3). \end{aligned} \tag{171}$$

Nun hat man nur die Klammern aufzulösen, indem man beachtet, dass die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Richtstücke parallel sind, und somit aus jedem Gliede nur sechs geltende Produkte zu je drei Faktoren hervorgehen, und hat dann die Faktoren der so entstehenden vierundzwanzig Produkte mit Beobachtung der Zeichen so zu ordnen, dass die Buchstaben in jedem Produkte auf dieselbe Weise auf einander folgen, und erhält dann eine Gleichung, in welcher man statt der Richtstücke die Zeiger setzen und sie dadurch zu einer

*) Das sind nämlich alle die, welche ϱ öfter als einmal als Faktor enthalten, und das Produkt $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p$.

arithmetischen Gleichung machen kann, in welcher | wiederum die Ord- *172* nung der Faktoren gleichgültig ist. Die Gleichung, welche man auf diese Weise gewinnt, ist, wenn man unter $x, y, z, \ldots$ jetzt die Zeiger versteht, folgende:

$$\begin{aligned}(y_2z_3 - y_3z_2 + y_3z_1 - y_1z_3 + y_1z_2 - y_2z_1)\,x + \\ + (z_2x_3 - z_3x_2 + z_3x_1 - z_1x_3 + z_1x_2 - z_2x_1)\,y + \\ + (x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1)\,z = \\ = x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3.\end{aligned}$$

Diese Gleichung, welche sich durch die gewöhnliche Analyse nicht auf eine einfachere Form reduciren lässt, sagt, so weitläuftig sie auch erscheint, dennoch nichts weiter aus, als jene ursprüngliche Gleichung

$$\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma \,.\, \sigma = 0,$$

und enthält die kürzeste Lösung des obigen Problems, welche auf dem Wege der Koordinaten möglich ist. Man sieht hier in einem recht schlagenden Beispiel den Vortheil unserer Methode, und die Formelverwickelungen, in die man hineingeräth, sobald man diese Methode aufgiebt.

§ 120. **Das statische Moment als Abweichung.**

Indem ich die Darstellung der geometrischen Abschattung und Projektion, wie auch der verschiedenen Verwandtschaftssysteme einem späteren Kapitel *), in welchem diese Begriffe in einem noch grösseren Umfange ans Licht treten werden, vorbehalte, so schreite ich nun zu den Anwendungen auf die *Statik*.

Der Begriff | des Momentes tritt zuerst hier in seiner ganzen Ein- 172 fachheit auf, wie auch der Begriff der Kraft erst hier seine Darstellung findet, indem wir die Kraft als Liniengrösse, also als Elementargrösse zweiter Stufe auffassen. Unter dem Moment einer Kraft $\alpha\beta$ in Bezug auf einen Punkt ϱ verstanden wir oben das Produkt

$$[\varrho\alpha] \,.\, [\alpha\beta] \text{ oder } (\alpha - \varrho) \,.\, (\beta - \alpha);$$

multipliciren wir diesen Werth noch mit dem Elemente ϱ, so erscheint das Moment als Ausweichung der so entstehenden Elementargrösse $\varrho \,.\, (\alpha - \varrho) \,.\, (\beta - \alpha)$; diese ist aber nach dem bekannten Gesetz der äusseren Multiplikation gleich

$$\varrho \,.\, \alpha \,.\, \beta,$$

somit können wir das Moment in Bezug auf einen Punkt definiren als Ausweichung eines Produkts, dessen erster Faktor der | Beziehungs- *173*

*) Kap. 4 dieses Abschnittes.

punkt und dessen zweiter Faktor die Kraft ist, oder als Abweichung der Kraft von dem Beziehungspunkte. Da nun jede Gleichung zwischen den Elementargrössen auch zwischen ihren Ausweichungen besteht, so wird auch jede Gleichung, welche zwischen jenen Produkten stattfindet, zwischen ihren Momenten gleichfalls stattfinden, obwohl nicht umgekehrt.

Man könnte daher selbst zweifelhaft sein, ob man nicht lieber jenes Produkt des Beziehungspunktes in die Kraft als Moment definiren und, was wir bisher als Moment fixirten, nur als Ausweichung jener Grösse darstellen soll. — Doch behalten wir den festgestellten Begriff bei.

Unter dem Moment einer Kraft $\alpha\beta$ in Bezug auf eine Axe $\varrho\sigma$ verstanden wir oben (§ 41) das Produkt

$$[\varrho\sigma] . [\sigma\alpha] . [\alpha\beta]$$

oder

$$(\sigma - \varrho) . (\alpha - \sigma) . (\beta - \alpha).$$

Multipliciren wir dasselbe mit ϱ, so erhalten wir das Produkt

$$\varrho . \sigma . \alpha . \beta,$$

dessen Ausweichung eben jenes Moment ist. Also erscheint das Moment einer Kraft in Bezug auf eine Axe als Ausweichung eines Produktes, dessen erster Faktor die Axe und dessen zweiter Faktor die Kraft ist, oder, einfacher ausgedrückt, als Abweichung der Kraft von der Axe. Da übrigens eine Gleichung zwischen Elementargrössen vierter Stufe im Raume, als einem Elementarsystem vierter Stufe, keine andere 173 Bedeutung hat, als die Gleichung zwischen ihren | Ausweichungen, so kann man das Moment in Bezug auf eine Axe auch direkt als Produkt dieser Axe in die Kraft auffassen.*)

§ 121. Neuer Weg für die Behandlung der Statik.

Es bietet sich auf diesem Punkte der Entwickelung eine Methode dar, durch welche wir alle Gesetze für das Gleichgewicht fester Körper ohne Voraussetzung aller früher bewiesenen Sätze der Statik auf die einfachste Weise ableiten können.

---

*) Da der Name (statisches) Moment jetzt überflüssig erscheint, indem er durch den Namen der Abweichung vollkommen ersetzt wird, und sich dieser sogar noch leichter handhaben lässt, so wäre es gewiss zweckmässig, wenn man den Namen Moment nur in dem Sinne gebrauchte, in welchem ihn zum Beispiel La Grange in seiner *mécanique analytique* überall gebraucht, wo er von dem Moment ohne weitere Bestimmung redet, und wenn man das sogenannte statische Moment eben als Abweichung bezeichnete. Doch habe ich dies nicht ohne weiteres einführen wollen.

Wir bedürfen dazu nur einestheils des Grundsatzes, *dass drei Kräfte,* | *welche auf einen Punkt wirken, dann und nur dann im Gleich-* 174 *gewicht sind, wenn ihre Summe null ist,* oder, indem wir zwei Kräfte oder Kraftsysteme einander gleichwirkend nennen, wenn sie durch dieselben Kräfte aufgehoben werden können, *dass zwei Kräfte, die auf einen Punkt wirken, der auf denselben Punkt wirkenden Summe beider Kräfte gleichwirkend sind,* anderntheils, *dass zwei Kräfte, welche auf einen festen Körper wirken, dann und nur dann im Gleichgewichte sind, wenn sie in derselben geraden Linie wirken und einander entgegengesetzt gleich sind.* Hieraus folgt sogleich, wenn wir den soeben aufgestellten Begriff des Gleichwirkens festhalten, *dass zwei Kräfte, welche auf einen festen Körper wirken, dann und nur dann einander gleichwirkend sind, wenn sie in derselben Linie wirken und einander gleich sind* oder einfacher ausgedrückt, *wenn sie als Liniengrössen einander gleich sind.*

Betrachten wir daher die Kräfte, welche auf feste Körper wirken, als Liniengrössen, so zeigt sich sogleich, wie zwei Kräfte, deren Wirkungslinien sich schneiden, ihrer Summe gleichwirkend seien; denn ist α dieser Durchschnittspunkt, so werden sich beide Kräfte als Liniengrössen darstellen lassen, deren erster Faktor α ist; sind dann $\alpha . p$ und $\alpha . q$, wo p und q Strecken bedeuten, diese Kräfte, so sind sie nach der ersten Voraussetzung gleichwirkend mit $\alpha . (p + q)$ oder mit $\alpha . p + \alpha . q$, das heisst sie sind der Summe der | Kräfte gleich- 174 wirkend, auch wenn die Kräfte als Liniengrössen aufgefasst werden.

Sind die Kräfte parallel, zum Beispiel die eine gleich $\alpha . p$, die andere gleich $m\beta . p$, wo p wiederum eine Strecke bedeutet, so können wir die beiden gleichwirkende Kraft nach demselben Princip nicht unmittelbar finden; nehmen wir daher zwei sich einander aufhebende Kräfte zu Hülfe, nämlich $\alpha . m\beta$ und $m\beta . \alpha$*), so sind jene beiden Kräfte gleichwirkend den vier Kräften

$$\alpha . p, \quad \alpha . m\beta, \quad m\beta . \alpha, \quad m\beta . p,$$

von denen die beiden ersten, da sie auf denselben Punkt wirken, ihrer Summe gleichwirkend sein werden, und ebenso die beiden letzten, und wir erhalten somit die beiden Kräfte

$$\alpha . (p + m\beta), \quad m\beta . (\alpha + p)$$

als den gegebenen Kräften gleichwirkend. Diese beiden Produkte können wir, indem wir zu dem zweiten Faktor den ersten hinzuaddiren, 175 wodurch nach den Gesetzen der äusseren Multiplikation der Werth des Produktes nicht geändert wird, auf einen gemeinschaftlichen Faktor

*) Beide heben einander auf, weil $\alpha . m\beta = - m\beta . \alpha$ ist.

bringen; nämlich es werden dann jene Kräfte gleich

$$\alpha . (\alpha + m\beta + p), \quad m\beta . (\alpha + m\beta + p).$$

Wenn nun m nicht gleich -1 ist, so stellt der zweite Faktor einen vielfachen Punkt dar (mit dem Gewichte $1 + m$); beide Kräfte wirken dann auf einen Punkt, und sind somit ihrer Summe gleichwirkend; diese Summe ist

$$(\alpha + m\beta) . (\alpha + m\beta + p),$$

das heisst, sie ist gleich

$$(\alpha + m\beta) . p .$$

Und so sind also die beiden Kräfte $\alpha . p$ und $m\beta . p$, wenn nicht m gleich -1, das heisst wenn nicht die Summe ihrer Ausweichungen null ist, Einer Kraft $(\alpha + m\beta) . p$, das heisst ihrer Summe gleichwirkend.

Da nun die Wirkungslinien zweier Kräfte, die in Einer Ebene liegen, sich entweder schneiden oder parallel laufen, so folgt überhaupt, dass zwei Kräfte, welche in Einer Ebene liegen, jedesmal, wenn ihre 175 Ausweichungen nicht zur Summe Null geben, Einer Kraft | gleichwirkend sind, welche die Summe jener Kräfte ist.

Betrachten wir nun noch den Fall, den wir bisher ausschlossen, dass nämlich die Ausweichungen beider Kräfte zusammen null, das heisst beide Kräfte, als Strecken betrachtet, entgegengesetzt gleich sind, so leuchtet ein, dass beide dann aber auch nur dann im Gleichgewicht sind, wenn sie in derselben Richtungslinie liegen, das heisst die Summe der Kräfte selbst null ist. In diesem besonderen Falle können wir also auch noch sagen, dass beide Kräfte ihrer Summe gleichwirkend sind. Es bleibt daher nur der Fall noch zu untersuchen, wo beide Kräfte als Strecken zur Summe Null geben, als Liniengrössen aber nicht.

In diesem Falle nun ist nach der zweiten Voraussetzung nicht Gleichgewicht vorhanden; aber wir können auch leicht zeigen, dass es dann keine geltende Kraft gebe, welche jenen beiden Kräften das Gleichgewicht halte. Denn aus den beiden Voraussetzungen, die wir zu Anfang dieses Paragraphen aufstellten, geht hervor, dass die Ausweichung der Gesammtkraft stets die Summe ist aus den Ausweichungen 176 der einzelnen Kräfte. Also müsste hier die Ausweichung der | fraglichen Kraft null sein, das heisst, diese Kraft selbst müsste null sein und die gegebenen Kräfte schon im Gleichgewichte stehen, was wider die Annahme ist. Somit haben wir in der That gezeigt, dass zwei Kräfte, welche in parallelen, von einander getrennten Linien wirken, und als Strecken entgegengesetzt gleich sind, auf keine ihnen gleichwirkende einzelne Kraft zurückgeführt werden können. Dieser Fall ist

aber derselbe, in welchem die Kräfte keine Liniengrösse als Summe darbieten, sondern eine Ausdehnung zweiter Stufe; in der That ist $\alpha . p - \beta . p$ gleich $(\alpha - \beta) . p$, was eine Ausdehnung zweiter Stufe darstellt.

Um die Bedeutung dieses Falles für die Statik näher in's Auge zu fassen, bemerken wir, dass das Gesammtmoment zweier solcher Kräfte in Bezug auf alle Punkte im Raume, das heisst die Gesammtabweichung derselben von allen Punkten, eine konstante Grösse ist. In der That, da die gesammte Abweichung gleich der Abweichung der Summe ist, die Summe aber hier eine Ausdehnung zweiter Stufe ist, und die Abweichung einer Ausdehnung immer dieser selbst gleich ist, so folgt, dass die Gesammtabweichung jener beiden Kräfte von jedem beliebigen Punkte der Summe dieser beiden Kräfte selbst gleich ist, also konstant bleibt, sobald diese Summe es bleibt. Wir sagen daher, es seien beide | Kräfte diesem Moment, welches durch ihre Summe 176 dargestellt wird, gleichwirkend*). Somit können wir nun den Satz aufstellen:

Zwei oder mehrere Kräfte, welche in Einer Ebene wirken, sind ihrer Summe gleichwirkend.

Nämlich von zwei Kräften lässt sich dies sogleich auf beliebig viele übertragen.

§ 122. Allgemeines Gesetz für das Gleichgewicht.

Gehen wir zur Betrachtung der Kräfte im Raume über, so haben wir daran zu erinnern, dass die Addition von Kräften als Elementargrössen zweiter Stufe nur dann eine reale Bedeutung hat, wenn dieselben in Einer Ebene als einem Systeme dritter Stufe liegen, hingegen eine bloss formelle Bedeutung gewinnt, wenn | dies nicht der 177 Fall ist. Vermöge dieser formellen Bedeutung wurden zwei solche Summen einander gleich gesetzt, wenn sie durch Anwendung der realen Addition und der allgemeinen additiven Verknüpfungsgesetze sich auf denselben Ausdruck zurückführen lassen.

Betrachten wir nun zwei solche Summen von Kräften im Raume, welche sich auf diese Weise auf denselben Ausdruck zurückführen lassen, und bedenken, dass bei der realen Addition, weil dabei die

*) Es ist dies also als eine Erweiterung des Begriffs des Gleichwirkens anzusehen, indem das Moment selbst als eine eigenthümliche Kraftgrösse aufgefasst ist, welche mit andern Kräften zusammenwirken kann; dadurch ist die in der Statik so wichtige Theorie der Kräftepaare in ihrem wahren Gesichtspunkte aufgefasst.

Kräfte in Einer Ebene liegen, die Summe der Kräfte jedesmal der Gesammtheit der einzelnen Kräfte, welche ihre Stücke bilden, gleichwirkend sei: so folgt, dass bei jener Umwandlung der formellen Summe in eine ihr gleiche, jedesmal die Kräfte, welche diese Summe bilden, einander gleichwirkend bleiben, also „dass zwei Vereine von Kräften, welche gleiche Summe darbieten, allemal einander gleichwirkend sind", also auch, „dass eine Reihe von Kräften, deren Summe null ist, im Gleichgewicht ist".

Nun können wir ferner jede Summe von Kräften auf Eine Kraft, deren Angriffspunkt willkührlich ist, und Ein Moment, oder auch auf zwei Kräfte zurückführen. In der That, setzen wir die Summe mehrerer Kräfte gleich

$$\alpha . p + M,$$

wo α ein Element, p eine Strecke, $\alpha . p$ also eine Kraft, M aber eine 177 Ausdehnung zweiter Stufe, also ein Moment darstellt: so werden nach den oben dargestellten Sätzen beide Ausdrücke dann und nur dann gleich sein, wenn sie gleiche Ausweichung und von irgend einem Elemente, zum Beispiel α, gleiche Abweichung haben; es muss also dann p gleich der Summe aller Ausweichungen, welche die einzelnen Kräfte darbieten, und M gleich der Summe aller Abweichungen von dem Elemente α sein; da aber beide Summen stets real sind, die erste als Summe von Strecken, die letzte als Summe von Ausdehnungsgrössen zweiter Stufe in einem Systeme dritter Stufe, so lässt sich jene Reihe von Kräften allemal auf die angegebene Form bringen, und zwar ist α willkührlich, dann aber p und M bestimmt. Kann man nun jene Kraftsumme auf den Ausdruck $\alpha . p + M$ bringen, so kann man sie auch auf die Summe zweier Kräfte bringen; ist zum Beispiel M gleich $r . s$, so kann man von dem Gliede $\alpha . p$ das Glied $\alpha . s$ subtrahiren und dasselbe Glied zu M addiren, ohne den Werth der Summe zu ändern, und erhält so

178 $$\alpha . p + M = \alpha . (p - s) + (\alpha + r) . s,$$

wo die rechte Seite zwei Kräfte darstellt. Da endlich zwei Vereine von Kräften, welche gleiche Summen haben, einander gleichwirkend sind, wie wir oben zeigten, so hat man den Satz, „dass sich jede Reihe von Kräften im Raume auf zwei Kräfte oder auf eine Kraft und ein Moment zurückführen lassen, welche ihnen gleichwirkend sind und dieselbe Summe liefern, wie jene Kräfte."

Hieran schliesst sich sogleich die Folgerung, „dass mehrere Kräfte auch nur dann im Gleichgewicht sind, wenn ihre Summe null ist"; denn auf zwei ihnen gleichwirkende Kräfte, welche auch dieselbe Summe

liefern, lassen sie sich zurückführen, aber zwei Kräfte sind nach der zweiten Voraussetzung nur dann im Gleichgewichte, wenn ihre Summe null ist, alsdann wird aber auch die Summe der gegebenen Kräfte, da sie dieselbe ist, null sein; also ist jener Satz bewiesen.

Wenn nun zwei Vereine von Kräften einander gleichwirkend sind, so müssen die des einen Vereins mit den entgegengesetzt genommenen Kräften des andern (nach der Definition des Gleichwirkens) zusammengesetzt Gleichgewicht geben, das heisst nach dem vorigen Satze, ihre Summe muss null sein, also müssen dann die Kräfte des einen Vereins dieselbe Summe liefern, wie die des andern; somit haben wir bewiesen, „dass zwei Vereine gleichwirkender | Kräfte nothwendig gleiche Sum- 178 men liefern.“ Fassen wir diesen Satz mit dem umgekehrten, den wir vorher bewiesen haben, zusammen, so erhalten wir den Satz:

Dass zwei Vereine von Kräften dann und nur dann einander gleichwirkend sind, wenn sie gleiche Summen liefern.

Dieser Satz berechtigt uns, die Gesammtwirkung mehrerer Kräfte als die Wirkung ihrer Summe aufzufassen, auch dann, wenn diese Summe sich nicht mehr als einzelne Kraft darstellen lässt; wir haben somit den allgemeinen Satz:

Zwei oder mehrere Kräfte sind ihrer Summe gleichwirkend, und sind nur dann im Gleichgewichte, wenn ihre Summe null ist.

Dieser Satz umfasst alle früheren und erscheint als deren Endresultat.

§ 123. **Allgemeine Beziehung zwischen den statischen Momenten.**

Dass nun zwei Vereine gleichwirkender Kräfte in Bezug auf jeden Punkt und jede Axe gleiches Gesammtmoment | haben, dass zwei Ver- *179* eine von Kräften, welche gleiche Gesammtausweichung und in Bezug auf irgend einen Punkt gleiches Moment haben, einander gleichwirkend sind und in Bezug auf jeden Punkt und jede Axe gleiches Moment haben, sind jetzt, nachdem wir einen Verein von Kräften als ihrer Summe gleichwirkend dargestellt haben, nur andere Ausdrucksweisen der von uns in der abstrakten Wissenschaft aufgestellten Sätze. — Wir halten uns daher mit der Ableitung jener statischen Gesetze nicht weiter auf, und wollen statt dessen einen allgemeinern Satz über die Theorie der Momente aufstellen, welcher alle Sätze, die man bisher über diese Theorie aufgestellt hat, an Allgemeinheit weit übertrifft, und dennoch durch unsere Analyse sich auf's einfachste ergiebt.

Um diesen Satz sogleich in einer leichtfasslichen Form zu geben, will ich einen neuen Begriff einführen, welcher für die Betrachtung

der Verwandtschaftsbeziehungen überhaupt von der grössten Wichtigkeit ist. Nämlich ich sage, *dass ein Verein von Grössen in derselben Zahlenrelation stehe, wie ein anderer Verein entsprechender Grössen, wenn jede Gleichheit, welche zwischen den Vielfachensummen aus den Grössen des letzten Vereins stattfindet, auch bestehen bleibt, wenn man statt dieser Grössen die entsprechenden des ersten Vereins setzt.* Der Satz, den wir hier beweisen wollen, lässt sich nun in der Form darstellen:

179 *Die Gesammtmomente eines Kräftevereins in Bezug auf verschiedene Punkte oder Axen stehen in derselben Zahlenrelation, wie diese Punkte oder Axen.*

Denn ist S die Summe des Kräftevereins, so ist das Gesammtmoment desselben in Bezug auf irgend eine Grösse A (sei dieselbe nun ein Punkt oder eine Axe) gleich der Ausweichung des Produktes $A \,.\, S$; sind nun verschiedene Beziehungsgrössen $A, B, \ldots$ gegeben, und herrscht zwischen denselben eine Zahlenrelation, welche sich in der Form

$$\mathfrak{a}A + \mathfrak{b}B + \cdots = 0,$$

wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ Zahlengrössen sind, darstellen lässt, so wird auch, wenn man mit S multiplicirt,

$$\mathfrak{a}A \,.\, S + \mathfrak{b}B \,.\, S + \cdots = 0$$

sein; diese Gleichung bleibt nun nach § 112 auch bestehen, wenn 180 man statt der Produkte $A \,.\, S, \ldots$ ihre Ausweichungen, das heisst die Momente von S in Bezug auf jene Grössen setzt; also stehen diese Momente in derselben Zahlenrelation, wie die Beziehungsgrössen.

Vermittelst dieses Satzes können wir also aus den Momenten in Bezug auf zwei Punkte das Moment in Bezug auf jeden andern Punkt derselben geraden Linie finden, und ebenso aus den Momenten in Bezug auf drei Punkte, die nicht in Einer geraden Linie liegen, das jedem andern Punkte derselben Ebene zugehörige; aus den Momenten in Bezug auf vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen, das jedem andern Punkte des Raumes zugehörige; ferner aus den Momenten in Bezug auf zwei Axen, die sich schneiden, das Moment in Bezug auf jede andere durch denselben Punkt gehende und in derselben Ebene liegende Axe; aus den Momenten in Bezug auf drei Axen derselben Ebene, welche nicht durch Einen Punkt gehen, das jeder andern Axe derselben Ebene; und überhaupt aus den Momenten in Bezug auf eine Reihe von Axen, welche in keiner Zahlenrelation zu einander stehen, das Moment in Bezug auf jede Axe, welche zu ihnen in bestimmter Zahlenrelation steht.

§ 124. Wann ein Verein von Kräften einer einzelnen Kraft gleichwirkt.

Ich schliesse diese Anwendung mit der Lösung der Aufgabe, die Bedingungsgleichung zu finden, welche bestehen muss, wenn ein System von Kräften einer einzelnen Kraft oder einem Moment gleichwirkend sein soll.

In beiden Fällen wird die Summe der Kräfte S als Produkt | zweier 180 Elementargrössen erster Stufe dargestellt werden können, und daraus folgt für diesen Fall sogleich die Gleichung

$$S \,.\, S = 0,$$

eine Gleichung, welcher nie genügt wird, wenn S eine formelle Summe darstellt; denn dann lässt sich S als Summe zweier Kräfte darstellen, welche nicht in derselben Ebene liegen; es seien dies A und B, also

$$S = A + B,$$

so ist

$$\begin{aligned} S \,.\, S &= (A + B) \,.\, (A + B) \\ &= 2A \,.\, B, \end{aligned}$$

weil nämlich $A \,.\, A$ und $B \,.\, B$ null sind, $A \,.\, B$ aber gleich $B \,.\, A$ | ist*); 181 da nun A und B nicht derselben Ebene angehören, so kann auch $A \,.\, B$ nicht null sein, also ist jene Gleichung

$$S \,.\, S = 0$$

die nothwendige, aber auch ausreichende Bedingungsgleichung für den Fall, dass S eine einzelne Kraft oder ein einzelnes Moment darstellen soll; und zwar wird sie ein Moment darstellen, wenn die Ausweichung von S null ist, im entgegengesetzten Falle eine Kraft von geltendem Werthe.

Ist

$$S = A + B + C + \cdots,$$

so wird

$$S \,.\, S = 2A \,.\, B + 2A \,.\, C + 2B \,.\, C + \cdots,$$

also gleich der Summe aus den Produkten zu zwei Faktoren, die sich aus den Stücken bilden lassen**). Daraus folgen sogleich die Sätze:

Ein Verein von Kräften ist dann und nur dann einer einzelnen Kraft oder einem einzelnen Moment gleichwirkend, wenn die Summe der Produkte zu zwei Faktoren, welche sich aus den Kräften bilden lassen, null ist.

---

*) Nämlich weil A und B Grössen zweiter, also gerader Stufe sind, welche sich nach § 55 ohne Zeichenwechsel vertauschen lassen.

**) Nämlich gleich der einfachen Summe, wenn man die Produkte $A \,.\, B$ und $B \,.\, A$ als verschieden gebildete betrachtet.

Ferner

Zwei Vereine von Kräften können nur dann einander gleichwirkend 181 *sein, wenn die Produkte zu zwei Faktoren, welche sich | aus den Kräften des einen Vereins bilden lassen, gleiche Summe liefern wie die aus den Kräften des andern gebildeten.*

Diese Sätze bleiben auch noch bestehen, wenn man statt der Produkte zweier Kräfte überall ihre sechsten Theile, nämlich die Pyramiden, welche die Kräfte zu gegenüberliegenden Kanten haben, einführt.

Drittes Kapitel.

Das eingewandte Produkt*).

A. Theoretische Entwickelung.

§ 125. Formelle Erklärung des eingewandten Produktes; Grad der Abhängigkeit und der Multiplikation.

182 Der Begriff des Produktes als eines äusseren bestand darin, dass jedes Stück eines Faktors, welches von dem andern Faktor abhängig war, ohne Werthänderung des Produktes weggelassen werden konnte, worin zugleich lag, dass das Produkt zweier abhängiger Grössen null sei. Reale Grössen, das heisst solche, die sich als Produkte aus lauter einfachen Faktoren darstellen lassen, wurden dann „von einander unabhängig“ genannt, wenn jeder einzelne Faktor derselben ganz ausserhalb desjenigen Systems lag, was durch die übrigen Faktoren bestimmt war, oder, mehr abstrakt ausgedrückt, wenn keine Grösse, die dem Systeme von einer der Grössen angehört, zugleich dem durch die sämmtlichen übrigen bestimmten Systeme angehört. Da nun diese Bestimmung, welche das Produkt als ein äusseres charakterisirt, nicht in dem Begriffe des Produktes an sich liegt, so muss es möglich sein, den allgemeinen Begriff des Produktes festzuhalten, und doch jene Bestimmung aufzugeben, oder durch eine andere zu ersetzen. Um nun diese neue Bestimmung aufzufinden, müssen wir, da nach ihr auch das Produkt zweier abhängiger Grössen soll einen geltenden Werth haben können, die verschiedenen Grade der Abhängigkeit untersuchen.

Wenn zwei Systeme höherer Stufen überhaupt von einander abhängig sind, so wird es Grössen geben, welche beiden zugleich angehören. Da nun jedes System, welches gewisse Grössen enthält, auch

*) Vgl. zu diesem Kapitel den zweiten Anhang. (1877.)

sämmtliche von ihnen abhängige Grössen, das heisst das ganze durch sie bestimmte System, also auch das äussere Produkt jener Grössen, enthalten muss, so folgt, | dass Systeme, welche gewisse Grössen ge- 182 meinschaftlich enthalten, auch das ganze durch diese Grössen bestimmte System, also auch das äussere Produkt derselben, gemeinschaftlich enthalten werden; nach der Stufenzahl dieses gemeinschaftlichen Systemes wird nun auch der Grad der Abhängigkeit bestimmt werden können, und wir werden sagen können, zwei Systeme seien im m-ten Grade von einander abhängig, wenn sie ein System m-ter Stufe gemeinschaftlich enthalten, und ebenso, zwei reale Grössen seien im m-ten Grade von einander | abhängig, wenn die durch sie bestimmten Systeme *183* es sind, oder wenn sie sich auf einen gemeinschaftlichen Faktor m-ter Stufe bringen lassen (und auf keinen höheren). Dies letztere nämlich folgt aus dem Vorhergehenden, da nach § 61 jede Grösse, welche dem durch eine andere Grösse bestimmten Systeme angehört, auch als Faktor der letzteren angesehen werden kann*).

Jedem Grade der Abhängigkeit nun entspricht eine Art der Multiplikation; wir fassen alle diese Arten der Multiplikation unter dem Namen der eingewandten Multiplikation zusammen, und verstehen ins Besondere unter dem *eingewandten Produkt m-ter Stufe* dasjenige, in welchem ohne Werthänderung desselben in jedem Faktor nur ein solches Stück weggelassen werden kann, welches von dem andern Faktor in einem höheren, als dem m-ten Grade abhängig ist; und zwar nennen wir das eingewandte Produkt m-ter Stufe ein reales, wenn die Faktoren wenigstens im m-ten Grade von einander abhängen, hingegen ein formales, wenn in einem niederen**). Der Werth des eingewandten Produktes besteht dann eben in demjenigen, was bei jenen verstatteten Aenderungen konstant bleibt. Nur das reale Produkt ist es jedoch, was wir hier der Betrachtung unterwerfen, indem das formale eine andere Behandlungs- und Bezeichnungsweise erfordert, und überdies von viel geringerer Bedeutung ist.

Das reale eingewandte Produkt hat nun entweder einen geltenden Werth, oder es ist null, und zwar wird es nicht nur, wie jedes Produkt, null, wenn ein Faktor es wird, sondern auch, wenn die | beiden 183 Faktoren in einem höheren Grade von einander abhängen, als die Stufe der eingewandten Multiplikation beträgt. Nämlich dies letztere folgt

*) Von den unabhängigen Grössen würden wir also sagen können, sie seien im nullten Grade, das heisst eben gar nicht abhängig von einander.

**) Der formale Begriff des eingewandten (regressiven) Produktes ist in der Ausdehnungslehre von 1862 als unfruchtbar aufgegeben und dadurch die ganze Sache vereinfacht worden. (1877.)

daraus, dass man dann einen Faktor als Summe betrachten kann, deren eines Stück null und deren anderes er selbst ist, und dass man dann nach der vorhergehenden Definition dies Stück weglassen darf, wodurch das Produkt gleich Null erscheint.

§ 126. Beziehung zwischen dem gemeinschaftlichen und dem nächstumfassenden Systeme.

Um die Bedeutung des realen eingewandten Produktes darlegen zu können, haben wir das Nullwerden desselben abhängig zu machen *184* von dem Systeme, welchem beide Faktoren | angehören, während wir es bisher von dem gemeinschaftlichen Systeme beider Faktoren oder von dem Grade ihrer gegenseitigen Abhängigkeit bedingt sein liessen.

Wir stellen uns zu dem Ende die Aufgabe: „Wenn das zweien Grössen gemeinschaftliche System gegeben ist, das sie zunächst umfassende System, das heisst das niedrigste*) System, welchem beide zugleich angehören, zu finden."

Wir erinnern hierbei daran, dass eine Grösse einem Systeme dann und nur dann angehört, wenn sie einer andern Grösse, die dies System darstellt, untergeordnet ist, das heisst, sich dieselbe als äusserer Faktor dieser letzteren Grösse darstellen lässt. Wenn daher A und B die beiden Grössen sind, und C ihr gemeinschaftliches System darstellt, so wird sich C als äusserer Faktor sowohl von A als von B darstellen lassen, also zum Beispiel B auf die Form CD gebracht werden können.

Indem wir C als das gemeinschaftliche System für A und B setzen, so meinen wir damit nach dem vorigen Paragraphen, dass C alle Grössen in sich enthalte, welche dem A und B gemeinschaftlich angehören, aber auch keine andern. Daraus folgt, dass D keine Grösse mit A gemeinschaftlich haben kann, weil sonst auch CD, das heisst B noch Grössen mit A gemeinschaftlich haben würde, welche nicht dem Systeme von C angehörten, wider die Annahme. Da nun hiernach A und D von einander unabhängig sind, das Produkt AD also als äusseres einen geltenden Werth hat, so werden zuerst beide Grössen A und B diesem Produkte AD untergeordnet sein, indem A unmittelbar als äusserer Faktor desselben erscheint, von den beiden Faktoren der Grösse B oder CD aber der eine C in A enthalten ist, der andere 184 unmittelbar in | jenem Produkte AD erscheint, also auch B selbst als äusserer Faktor dieses Produktes darstellbar ist. Dass es aber keine Grösse von niederer Stufe giebt, welcher beide Grössen A und B unter-

*) Darunter ist natürlich das System, was die kleinste Stufenzahl hat, zu verstehen.

geordnet sind, folgt sogleich, da eine solche Grösse sowohl A als D zu äusseren Faktoren haben muss, also, da beide von einander unabhängig sind, auch ihr Produkt AD (§ 125) als äusseren Faktor enthalten muss. Also stellt AD das jene Grössen A und B zunächst umfassende System dar, und die Aufgabe ist gelöst. Hierin liegt der Satz:

Wenn zwei Grössen A und B als höchsten gemeinschaftlichen Faktor eine Grösse C haben, und man setzt eine derselben, zum Beispiel B, gleich dem äusseren Produkt CD, so stellt das Produkt der andern in die Grösse D, nämlich das Produkt AD, das nächstumfassende System dar. 185

Bezeichnen wir die Stufenzahlen der vier Grössen A, B, C, D mit den entsprechenden kleinen Buchstaben, die des nächstumfassenden Systemes mit u, so haben wir u gleich $a + d$, oder da $B = CD$, also $b = c + d$ ist,

$$u = a + b - c;$$

oder

$$u + c = a + b,$$

oder

$$c = a + b - u,$$

das heisst:

Die Stufenzahlen zweier Grössen sind zusammengenommen ebenso gross, als die Stufenzahl des ihnen gemeinschaftlichen Systemes und die des sie zunächst umfassenden zusammengenommen;

oder

aus der Stufenzahl des gemeinschaftlichen Systems zweier Grössen findet man die des nächstumfassenden, indem man jene von der Summe der Stufenzahlen, welche jenen einzelnen Grössen zugehören, subtrahirt;

oder

aus der Stufenzahl des zwei Grössen zunächst umfassenden Systemes findet man die des gemeinschaftlichen durch Subtraktion der ersteren von der Summe der Stufenzahlen beider Grössen.

In der letzten Form ist dieser allgemeine Satz besonders für die Anwendung bequem, wie sich leicht zeigt, wenn man ihn auf die Geometrie zu übertragen versucht.*) 185

*) Betrachte ich zum Beispiel die Ebene als das nächstumfassende System zweier Linien, so wird, da jene als Elementarsystem von dritter, diese von zweiter Stufe sind, das gemeinschaftliche System von $(2 + 2 - 3)$-ter, das heisst von erster Stufe sein, und somit entweder durch einen Punkt oder durch eine Richtung dargestellt sein. Somit haben wir dann den Satz: „Zwei gerade Linien, welche in derselben Ebene liegen, ohne zusammenzufallen, schneiden sich entweder in Einem Punkte oder laufen parallel.“ Wird der Raum als nächstumfassendes System gedacht, so haben wir die Sätze: „Zwei Ebenen, welche nicht zusammenfallen, schneiden sich entweder in einer geraden Linie, oder liegen ein-

§ 127. Einführung des Beziehungssystemes.

186 Es hatte nach § 125 ein eingewandtes Produkt zweier geltenden Werthe dann und nur dann wiederum einen geltenden realen Werth, wenn die Stufe des ihnen gemeinschaftlichen Systems gleich war der Stufe der eingewandten Multiplikation, oder, mit Anwendung des im vorigen Paragraphen bewiesenen Gesetzes, wenn die Stufe des nächstumfassenden Systemes und die der eingewandten Multiplikation zusammen gleich der Stufensumme beider Faktoren sind.

Nennen wir nun im Allgemeinen diejenige Zahl, welche die Stufe der eingewandten Multiplikation zur Stufensumme beider Faktoren ergänzt, die Beziehungszahl des eingewandten Produktes oder der eingewandten Multiplikation, so folgt, dass das eingewandte Produkt zweier geltenden Werthe nur dann und immer dann einen geltenden, realen Werth liefert, wenn die Stufe des nächstumfassenden Systemes gleich der Beziehungszahl des Produktes ist. Wurde die Stufenzahl des gemeinschaftlichen Systemes grösser als die Stufe der eingewandten Multiplikation, so wurde das Produkt nach § 125 null, wurde sie kleiner, so erhielt das Produkt einen bloss formalen Werth. Bleiben nun die Stufen beider Faktoren dieselben, so wird, wenn die Stufe des gemeinschaftlichen Systemes wächst, die des nächstumfassenden Systemes abnehmen und umgekehrt, weil beide eine konstante Summe haben, nämlich die Stufensumme beider Faktoren. Daraus folgt, dass ein eingewandtes Produkt zweier geltender Werthe null wird, wenn 186 die Stufe des sie zunächst umfassenden | Systemes kleiner wird als die Beziehungszahl; und einen formalen Werth erhält, wenn sie grösser wird.

Wenn also ein System von h-ter Stufe gegeben ist, und wir wissen, dass alle in Betracht gezogenen Grössen diesem Systeme als Hauptsystem (s. § 80) angehören, so sind wir auch sicher, dass das eingewandte Produkt, dessen Beziehungszahl h ist, einen realen Werth haben werde. Wir nennen dann diese eingewandte Multiplikation eine auf jenes System bezügliche, und nennen dies System das Be-187 ziehungssystem | des Produktes*), und wenn diesem Beziehungssysteme zugleich beide Faktoren angehören, so nennen wir dasselbe auch (der früheren Benennungsweise gemäss) das Hauptsystem des

ander parallel"; „eine Linie, welche nicht ganz in einer Ebene liegt, schneidet diese entweder in einem Punkte, oder liegt mit ihr parallel"; „zwei Ebenen, welche nicht parallel sind, haben eine Richtung, aber auch nur Eine gemeinschaftlich."

*) Die Stufenzahl dieses Systemes ist eben die Zahl, die wir oben Beziehungszahl nannten.

Produktes. Dann können wir sagen, das eingewandte Produkt sei immer ein reales, wenn die Faktoren dem Beziehungssysteme angehören, es sei zugleich von geltendem Werthe, wenn das die Faktoren zunächst umfassende System zugleich das Beziehungssystem des Produktes ist, und es sei null, wenn das nächstumfassende System beider Faktoren dem Beziehungssysteme des Produktes untergeordnet und [also] von niederer Stufe ist.

§ 128. **Dadurch ist die Einheit der äusseren und der eingewandten Multiplikation vermittelt.**

Das äussere Produkt zweier geltender Grössen zeigte sich nach § 55 dann als null, wenn sie von einander abhängig sind, das heisst, wenn die Stufe des sie zunächst umfassenden Systemes kleiner ist als die Stufensumme der beiden Faktoren; oder, da wir für das äussere Produkt jedes System, welchem die Faktoren untergeordnet sind, und dessen Stufenzahl grösser oder eben so gross ist, wie jene Summe, als Beziehungssystem ansehen können, so können wir, das Gesetz des vorigen Paragraphen erweiternd, sagen:

Ein Produkt zweier geltenden Werthe ist dann und nur dann null, wenn die Faktoren von einander abhängig sind, und zugleich ihr nächstumfassendes System niedriger ist als das Beziehungssystem.

Hierin liegt dann zugleich, „dass ein solches Produkt nur dann einen geltenden Werth hat, wenn entweder beide Faktoren von einander unabhängig sind, oder ihr nächstumfassendes System das Beziehungssystem ist.“ Und zwar ist im ersteren Falle das Produkt ein äusseres, im letzteren ein eingewandtes. Wenn beide Bedingungen | zu- 187 gleich eintreten, das heisst beide Faktoren von einander unabhängig sind und zugleich ihr nächstumfassendes System das Beziehungssystem ist, so kann die Multiplikation nicht nur als äussere, sondern auch als eingewandte nullten Grades aufgefasst werden. Dadurch erweitert sich der zweite Satz des vorigen Paragraphen zu folgendem Satze:

Wenn in einem Produkte zweier geltenden Werthe die Stufensumme 188 *der Faktoren kleiner ist als die Beziehungszahl, so ist das Produkt ein äusseres; ist jene Summe grösser, so ist das Produkt ein eingewandtes und zwar von so vielter Stufe, als der Ueberschuss jener Summe über die Beziehungszahl beträgt; ist endlich jene Summe dieser Zahl gleich, so kann das Produkt sowohl als äusseres, wie auch als eingewandtes nullter Stufe betrachtet werden.*

Durch die Einführung des Beziehungssystemes oder des Hauptsystemes haben wir somit den wichtigen Vortheil errungen, dass es

nun, wenn einmal das Beziehungssystem als Hauptsystem feststeht, nicht mehr nöthig ist, für das Produkt zweier Grössen die Multiplikationsweise noch besonders festzustellen, dass es daher nun auch als überflüssig erscheint, die äussere Multiplikation von der eingewandten, oder die verschiedenen Grade der letzteren durch die Bezeichnung zu unterscheiden.*)

§ 129. Das eingewandte Produkt in der Form der Unterordnung.

188 Um nun den geltenden Werth eines realen eingewandten | Produktes in einen einfachen Begriff zu fassen, müssen wir für das gegebene Produkt, dessen Werth zu ermitteln ist, alle Formen aufsuchen, in welchen es sich vermöge der in der Definition festgestellten formellen Multiplikationsgesetze darstellen lässt, ohne seinen Werth zu ändern. Das, was dann allen diesen Formen gemeinschaftlich ist, wird den Werth dieses Produktes unter einen einfachen Begriff gefasst darstellen.

189 Die vermöge der | Definition verstatteten Formänderungen sind erstens die allgemein multiplikative, dass man die Faktoren in umgekehrtem Verhältnisse ändern darf, und zweitens die besondere, dass man aus dem einen Faktor ein Stück weglassen darf, was von dem andern Faktor in einem höheren Grade abhängt, als die Stufe des eingewandten Produktes beträgt; oder, aufs Beziehungssystem zurückgeführt, dass man aus dem einen Faktor ein Stück weglassen darf, welches mit dem andern Faktor zusammen von einem Systeme umfasst wird, dessen Stufe kleiner ist als die Beziehungszahl.

Als einfachster Fall erscheint der, wo der eine Faktor das Beziehungssystem darstellt, der andere also ihm untergeordnet ist, oder kürzer ausgedrückt, wo das Produkt in F o r m d e r U n t e r o r d n u n g

*) Zugleich haben wir hierdurch den Vortheil einer leichteren Anwendbarkeit auf die Raumlehre gewonnen. Betrachten wir zum Beispiel die Ebene, also ein Elementarsystem dritter Stufe, als Hauptsystem, wie dies überall in der Planimetrie geschieht, so wird das Produkt zweier Elementargrössen in Bezug auf dies System dann und nur dann null sein, wenn sie von einander abhängig sind und zugleich einem System zweiter Stufe angehören, das heisst, wenn sie Punkte oder Richtungen gemeinschaftlich haben und zugleich in Einer geraden Linie liegen. Betrachten wir ferner den Raum, das heisst also ein Elementarsystem vierter Stufe als Hauptsystem, wie dies in der Stereometrie als solcher geschieht, so wird das darauf bezügliche Produkt zweier Elementargrössen dann und nur dann null sein, wenn sie in derselben Ebene liegen und zugleich von einander abhängig sind, das heisst Punkte oder Richtungen gemeinschaftlich haben; zum Beispiel das Produkt zweier Liniengrössen, welche sich schneiden oder einander parallel sind, das zweier Ebenen, wenn sie in einander liegen, und so weiter.

erscheint. Da hier das nächstumfassende System immer zugleich das Beziehungssystem ist, so kann keinem der Faktoren ein geltendes Stück hinzugefügt werden, ohne den Werth des Produktes zu ändern. Die einzige Formänderung, welche den Werth des Produktes ungeändert lässt, ist daher die allgemein multiplikative, dass nämlich die Faktoren sich in umgekehrtem Verhältnisse ändern dürfen, also

$$A \, . \, B = mA \, . \, \frac{B}{m}$$

gesetzt werden kann, wenn m irgend eine Zahlengrösse darstellt. Es bleiben somit bei allen verstatteten Formänderungen die Systeme der beiden Faktoren konstant, und ihre Grösse ändert sich dabei nur in umgekehrtem Verhältnisse. Die Zusammenschauung beider Systeme nebst dem auf beide Faktoren auf multiplikative Weise zu vertheilenden Quantum bildet daher den Werth jenes Produktes.

§ 130—132. **Reale Bedeutung des eingewandten Produktes; der auf ein Hauptmass bezügliche eigenthümliche Werth desselben.**

§ 130.

Sind in dem allgemeineren Falle A und B die beiden Faktoren des eingewandten Produktes, und stellt die Grösse C, deren Stufenzahl c sei, das beiden Faktoren gemeinschaftliche System dar, so wird, wenn B gleich CD gesetzt wird, AD nach § 126 | das nächstum- 189 fassende System, also auch nach § 128, wenn das Produkt nicht null ist, das Beziehungssystem darstellen.*)

Nun zeigten wir in § 129, dass dann ausser der allgemeinen multiplikativen | nur die Formänderung verstattet ist, dass der eine 190 Faktor CD um ein Stück wachse, welches von dem andern Faktor A in einem höheren als dem c-ten Grade abhängig ist. Es ist klar, dass dies Stück nicht mit CD gleichartig sein dürfe, weil ein solches mit A in demselben Grade der Abhängigkeit stehen würde, wie CD selbst; es muss also mit CD ungleichartig angenommen werden. Für die Addition der ungleichartigen Grössen hatten wir einen realen und einen formalen Begriff aufgestellt, von denen der erstere dann eintrat, wenn beide zu addirenden Grössen auf eine solche Weise in einfache Faktoren zerlegt werden können, dass sie alle bis auf Einen Faktor gemeinschaftlich enthalten. Da nun die formale Addition nur als abgekürzte Schreibart auftrat, so werden wir die Bedeutung unseres Produktes schon auffinden, wenn wir nur die reale Addition berücksichtigen, und

*) Wir setzen hier natürlich voraus, dass das Produkt nicht null sei, weil für den Fall, dass es null ist, keine Ermittelung seines Werthes mehr nöthig ist.

also annehmen, das hinzuzuaddirende Stück habe mit CD alle einfachen Faktoren mit Ausschluss Eines solchen gemeinschaftlich. Dieser Eine einfache Faktor nun wird, da das hinzuzuaddirende Stück von A in einem höheren als dem c-ten Grade abhängen soll, nothwendig dem Systeme von A angehören, während unter den übrigen einfachen Faktoren nothwendig die sämmtlichen einfachen Faktoren von C vorkommen müssen. Es wird sich also dies Stück in der Form CE darstellen lassen müssen, wo E von A abhängig ist. Hiernach wird nun das Produkt in der Form

$$A \,.\, (CD + CE)$$

oder

$$A \,.\, C\,(D + E)$$

erscheinen, wo E von A abhängig ist. Vergleichen wir nun die beiden Produkte

$$A \,.\, CD = A \,.\, C\,(D + E),$$

so stellt AD das nächstumfassende System für die Faktoren des ersten, $A\,(D + E)$ das für die Faktoren des zweiten Produktes dar; und da E von A abhängig, also

$$AD = A\,(D + E)$$

190 ist, so ist auch das nächstumfassende System für beide Produkte dasselbe.

Ausser dieser Formänderung ist nur noch die allgemein multiplikative verstattet, dass die Faktoren sich in umgekehrtem Zahlenverhältnisse ändern. Da hierdurch die Systeme der Faktoren nicht ge-
191 ändert werden, also das gemeinschaftliche und das | nächstumfassende System auch bei dieser Formänderung dieselben bleiben, so bleiben die genannten Systeme überhaupt bei jeder Formänderung des Produktes dieselben und gehören also zu demjenigen, was den konstanten Werth dieses Produktes ausmacht. Setzt man den gemeinschaftlichen äusseren Faktor C als den mittleren, so dass das Produkt, wie wir es schon oben darstellten, in der Form

$$A \,.\, CD$$

erscheint, so giebt das Produkt der äusseren Faktoren AD das nächstumfassende System; und es stellen dann also sowohl der mittlere Faktor als das Produkt der beiden äusseren AD konstante Systeme dar.

Vergleichen wir beide Grössen C und AD auch ihrem Werthe nach, so haben wir nicht bloss diejenigen Umgestaltungen zu berücksichtigen, durch welche der Werth der eingewandten Faktoren A und CD, aber nicht der ihres Produktes $A \,.\, CD$ geändert wird, sondern auch diejenigen, welche den Werth des äusseren Produktes CD und das System seines ersten Faktors ungeändert lassen. Vermöge der ersten Art der

Umgestaltung konnte CD um ein Stück CE wachsen, in welchem E von A abhängig ist, vermöge der zweiten kann D um ein von C abhängiges Stück wachsen, welches dann gleichfalls von A abhängig sein muss, weil C dem A untergeordnet ist. Bezeichnen wir daher auch dies Stück mit E, so verwandelt sich in beiden Fällen das Produkt $A \,.\, CD$ in das ihm gleiche $A \,.\, C(D+E)$. Da nun E von A abhängig, also

$$A(D+E) = AD$$

ist, so ist in beiden Produkten sowohl der Werth des mittleren Faktors, als auch der Werth des Produktes aus den äusseren Faktoren derselbe geblieben. Ausserdem ist nun bei beiden Arten der Umgestaltung nur noch die allgemeine multiplikative Formänderung, nach welcher sich die Faktoren in umgekehrtem Verhältnisse ändern können, anwendbar. Wendet man diese Aenderung bei beiden Arten der Umgestaltung an, so wird jedesmal, wenn dem einen Faktor eine Zahl als Faktor hinzugefügt wird, einem andern dieselbe | Zahl als Divisor 191 hinzugefügt werden müssen; also auch, wenn von den drei Faktoren des Produktes einer, zum Beispiel C, m-mal grösser wird, so muss das Produkt der beiden andern m-mal kleiner werden, das heisst, C und AD müssen sich dann im umgekehrten Verhältnisse | ändern.*) 192 Da nun hierin zugleich schon liegt, dass ihre Systeme konstant bleiben, so können wir als Resultat der bisherigen Entwickelung den Satz aussprechen, „dass, wenn ein eingewandtes Produkt auf den Ausdruck $A \,.\, CD$ gebracht ist, in welchem der mittlere Faktor C das den beiden Faktoren des eingewandten Produktes, A und CD, gemeinschaftliche System darstellt, dann C und AD, das heisst der mittlere Faktor und das Produkt der beiden äussern sich nur im umgekehrten Verhältnisse ändern können, wenn das ganze Produkt konstanten Werth behalten soll.“

§ 131.

Um die Bedeutung des eingewandten Produktes vollständig zu gewinnen, bleibt noch die Frage zu beantworten, ob diese beiden Systeme, die durch den mittleren und durch das Produkt der äusseren Faktoren dargestellt sind, nebst dem auf sie in multiplikativer Weise zu vertheilenden Quantum, dasjenige, was bei ungeändertem Werthe

---

*) Geht zum Beispiel A über in mA, so wird CD übergehen in $\frac{CD}{m}$ oder $C\frac{D}{m}$; geht zugleich C über in nC, so geht $\frac{D}{m}$ über in $\frac{D}{mn}$; das Produkt der äusseren Faktoren AD ist dann übergegangen in $\frac{AD}{n}$, während C in nC übergegangen ist.

des eingewandten Produktes konstant bleibt, vollständig darstellen, oder mit andern Worten, ob, wenn sich jene Grössen C und AD in umgekehrtem Verhältnisse ändern, das Produkt $A.CD$ stets konstanten Werth behalte, vorausgesetzt, dass der mittlere Faktor C unausgesetzt das den beiden Faktoren A und CD gemeinschaftliche System darstelle.

Dass dies in der That der Fall sei, können wir leicht beweisen, wenn wir noch voraussetzen, dass die eingewandten Faktoren gleiche Stufenzahl behalten. Zu dem Ende seien $A.CD$ und $A'.C'D'$ zwei solche Produkte, in welchen der mittlere Faktor C oder C' das den beiden eingewandten Faktoren A und CD oder A' und $C'D'$ gemeinschaftliche System darstellt. Wir setzen voraus, dass beim Uebergange aus dem einen Ausdrucke in den andern AD sich im umgekehrten 192 Verhältnisse geändert habe | wie C (worin schon liegt, dass ihre Systeme konstant geblieben sind), und dass die Stufenzahl von A und die von CD dieselben geblieben seien. Wir wollen zeigen, dass beide Produkte $A.CD$ und $A'.C'D'$ einander gleich seien.

193 Zunächst können wir | das letztere auf die Form bringen, dass der mittlere Faktor derselbe sei, wie in dem ersten Produkte, wodurch dann auch das Produkt der beiden äusseren in beiden gleichen Werth erhalten wird. Es sei dann das letztere Produkt übergegangen in $A_1.CD_1$, so haben wir nun die einfachere Voraussetzung, dass

$$AD = A_1 D_1$$

ist, und A und A_1 ebenso wie D und D_1 von gleicher Stufe sind; und zu beweisen bleibt dann nur, dass

$$A.CD = A_1.CD_1$$

sei. Zwei gleiche äussere Produkte, deren entsprechende Faktoren gleiche Stufenzahlen haben (wie hier AD und A_1D_1), müssen aber durch eine Reihe von Formänderungen aus einander erzeugbar sein, welche theils darin bestehen, dass die Faktoren sich in umgekehrtem Verhältnisse ändern, theils darin, dass der eine Faktor um ein von dem andern abhängiges Stück wächst. Bei der ersten Aenderungsart ist unmittelbar einleuchtend, dass sich auch der Werth des eingewandten Produktes $A.CD$ nicht ändere. Bei der letzten kann entweder D um ein von A abhängiges Stück, oder A um ein von D abhängiges wachsen. Geht also zuerst D in $D+E$ über, wo E von A abhängig ist, so geht $A.CD$ in $A.C(D+E)$ oder in $A.(CD+CE)$ über. Da hier E von A abhängig, C aber dem A untergeordnet, also im c-ten Grade von ihm abhängig ist, so ist CE in einem höheren als dem c-ten Grade von A abhängig, kann also als Stück des andern Faktors weggelassen werden, es ist also der Werth des Produktes noch derselbe

geblieben. Zweitens konnte der Faktor A um ein von D abhängiges Stück wachsen. Es sei A gleich CF, so muss nun, wenn C noch immer, wie wir voraussetzten, das gemeinschaftliche System darstellen soll, das Wachsen des Faktors A um ein von D abhängiges Stück dadurch bewirkt werden, dass F um ein von D abhängiges Stück wächst; dies wird dann, aus demselben Grunde wie vorher der Zuwuchs von D, den Werth des ganzen Produktes ungeändert lassen.

Somit sehen wir, dass bei allen Aenderungen, welche den Werth des mittleren Faktors und den des Produktes | der beiden äusseren un- 193 geändert lassen, auch der Werth des gesammten Produktes ungeändert bleibt; oder, indem wir noch einen Schritt weiter zurückgehen, dass, wenn sich jene Grössen C | und AD in umgekehrtem Verhältnisse 194 ändern, der Werth des Produktes $A.CD$ unter der Voraussetzung, dass die Stufenzahlen von A und CD dieselben bleiben, sich nicht ändere. Fassen wir hiermit das Resultat des vorigen Paragraphen zusammen, so können wir sagen, „der Werth eines eingewandten Produktes bestehe, wenn die Stufenzahlen der Faktoren gegeben sind, in dem gemeinschaftlichen und nächstumfassenden Systeme beider Faktoren nebst dem auf beide Systeme multiplikativ zu vertheilenden Quantum."

§ 132.

Es erscheint hiernach der Begriff des eingewandten Produktes noch abhängig von den Stufenzahlen, sofern nach den bisherigen Bestimmungen zwei Produkte noch nicht als gleich betrachtet werden konnten, so lange ihre Faktoren ungleiche Stufenzahl besassen. Diese Abhängigkeit des Begriffes von den Stufenzahlen führt in denselben eine Beschränkung hinein, welche der Einfachheit des Begriffs schadet und der analytischen Behandlung widerstrebt. Indem wir daher diese Beschränkung aufheben, setzen wir fest, *dass zwei eingewandte Produkte von geltendem Werthe* $A.CD$ und $A'.C'D'$, *in welchen die beiden letzten Faktoren durch äussere Multiplikation verknüpft sind, der mittlere aber das den beiden eingewandten Faktoren* (A *und* CD, *oder* A' *und* $C'D'$) *gemeinschaftliche System darstellt, einander gleich seien, sobald überhaupt das Produkt der äussersten Faktoren und der mittlere in beiden Ausdrücken gleich sind, oder in umgekehrtem Verhältnisse stehen*, gleich viel, ob die Stufenzahlen der entsprechenden Faktoren übereinstimmen oder nicht.*) Namentlich können wir durch diese Bestimmung jedes

*) Zu einer solchen erweiterten Definition sind wir berechtigt, da über die Vergleichung von eingewandten Produkten mit ungleichen Stufenzahlen ihrer Faktoren noch nichts festgesetzt ist. Wir sind dazu gedrungen, wenn wir der Wissenschaft die ihr gebührende Einfachheit erhalten wollen.

eingewandte Produkt auf die Form der Unterordnung (s. § 129) bringen.

In der That ist hiernach

$$A \,.\, CD = AD \,.\, C,$$

wenn im ersten Produkte C und D durch äussere, A und CD durch eingewandte Multiplikation verknüpft sind, und C das gemeinschaft-194 liche | System der beiden eingewandten Faktoren darstellt. Denn in dem letzten Ausdrucke kann AD als erster, C als mittlerer und die Einheit als letzter Faktor vorgestellt werden, welcher mit C (nach 195 [Abschn. I,] Kap. 4) durch äussere Multiplikation verknüpft ist, während C noch das gemeinschaftliche System darstellt. In dieser Form aufgefasst bietet der zweite Ausdruck dasselbe Produkt der äussersten Faktoren und denselben mittleren Faktor dar, wie der erste, und beide sind somit einander gleich.

Noch habe ich hier daran zu erinnern, dass, wenn das Produkt der äussersten Faktoren von niederer Stufe ist als das Beziehungssystem, dann beide Produkte gleichzeitig null werden (nach § 127), also auch für diesen Fall ihre Gleichheit bewahrt bleibt. Nehmen wir endlich einen bestimmten Theil H des Hauptsystems als Hauptmass (§ 87) an, so können wir jedes auf jenes Hauptsystem bezügliche eingewandte Produkt auf die Form bringen, dass der erste Faktor das Hauptmass wird. Nämlich wir können nach dem vorher Gesagten jedes solche Produkt, wenn es einen geltenden Werth hat, auf die Form bringen, dass der erste Faktor das Beziehungssystem oder hier das Hauptsystem darstellt, also auch, da wir die Faktoren in umgekehrtem Verhältnisse ändern können, auf die Form, dass der erste Faktor irgend ein bestimmter Theil des Hauptsystems, also auch dass er das Hauptmass wird. Ist das eingewandte Produkt null, so können wir den ersten Faktor beliebig setzen, wenn nur der zweite null ist, also kann auch in diesem Falle das Produkt auf die verlangte Form gebracht werden.

Wir nennen dann, wenn ein Produkt auf diese Form gebracht ist, den zweiten Faktor desselben *den eigenthümlichen (specifischen) Werth oder Faktor jener Produktgrösse in Bezug auf das Hauptmass H*, und sein System, welches zugleich das beiden Faktoren gemeinschaftliche System ist, „das eigenthümliche System jener Grösse;“ seine Stufenzahl, das heisst die Stufenzahl des beiden Faktoren gemeinschaftlichen Systems*), können wir als Stufenzahl der Grösse selbst auffassen. Erst

*) Ist die Produktgrösse also von geltendem Werthe (und nur in diesem Falle lässt sich von einer Stufenzahl derselben reden) so ist die Stufenzahl der Produktgrösse gleich der Stufe der eingewandten Multiplikation.

bei dieser Betrachtungsweise tritt der Werth des eingewandten Produktes in seiner ganzen Einfachheit hervor.

§ 133. Einführung der Ergänzzahlen.

Aus dem im vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Begriffe 195 des eingewandten Produktes können wir nun das | Vertauschungsgesetz *196* ableiten.

Betrachten wir nämlich zwei Produkte von geltendem Werthe,

$$AB \,.\, AC \text{ und } AC \,.\, AB,$$

in welchen der Punkt die eingewandte Multiplikation, das unmittelbare Zusammenschreiben die äussere Multiplikation andeuten soll, und in welchen der Faktor A das gemeinschaftliche System, ABC oder ACB also das nächstumfassende System oder das Beziehungssystem darstellt, so hat man nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$AB \,.\, AC = ABC \,.\, A,$$
$$AC \,.\, AB = ACB \,.\, A.$$

Beide Produkte sind also einander gleich oder entgegengesetzt, je nachdem ABC und ACB es sind, das heisst, je nachdem die äusseren Faktoren B und C sich ohne oder mit Zeichenwechsel vertauschen lassen. Nun hat man bei der Vertauschung zweier äusseren Faktoren, welche auf einander folgen (nach § 55), nur dann (aber auch stets dann) das Vorzeichen zu ändern, wenn die Stufenzahlen beider Faktoren ungerade sind. Man wird also auch die Faktoren jenes eingewandten Produktes mit oder ohne Zeichenwechsel vertauschen können, je nachdem die Stufenzahlen von B und C beide zugleich ungerade sind oder nicht. Die Stufenzahlen von B und C ergänzen aber die der eingewandten Faktoren AC und AB zu der Stufenzahl des Beziehungssystemes ABC. Nennen wir daher diejenige Zahl, welche die Stufenzahl einer Grösse zu der des Beziehungssystemes ergänzt, die *Ergänzzahl* jener Grösse (in Bezug auf jenes System), so haben wir das Gesetz:

Die beiden Faktoren eines eingewandten Produktes lassen sich mit oder ohne Zeichenwechsel vertauschen, je nachdem die Ergänzzahlen der Faktoren beide zugleich ungerade sind oder nicht.

Hierin liegt zugleich, dass ein Faktor, welcher das Beziehungssystem darstellt, sich ohne Zeichenänderung vertauschen lässt, da seine Ergänzzahl null, also gerade ist. — Es entspricht dies Gesetz dem in § 55 für die äussere Multiplikation aufgestellten, womit noch der Satz in § 68 über die willkührliche Stellung der Zahlengrösse zu vergleichen ist.

196 Da hier die Ergänzzahlen in die Stelle der dort vorkommenden Stufenzahlen eintreten, so erscheint es überhaupt als zweckmässig, 197 auch für die übrigen Sätze der äusseren Multiplikation, welche sich auf die Stufenzahlen beziehen, hier die entsprechenden aufzusuchen, was natürlich hier nur geschehen kann in Bezug auf Produkte aus zwei Faktoren.

Es war die Stufenzahl eines äusseren Produktes von geltendem Werthe die Summe aus den Stufenzahlen seiner Faktoren. Bei der eingewandten Multiplikation ist die Stufenzahl des beiden Faktoren gemeinschaftlichen Systems (nach § 132) als die Stufenzahl der Produktgrösse, wenn diese einen geltenden Werth hat, aufgefasst. Sind a und b die Stufenzahlen der Faktoren, und h die des Beziehungssystems, was hier zugleich das nächstumfassende System ist, so ist die des gemeinschaftlichen Systems (g) nach § 126 gleich $a + b - h$. Um hier die Ergänzzahlen einzuführen, kann man der Gleichung folgende Gestalt geben

$$h - g = h - a + h - b,$$

oder, wenn man die Ergänzzahlen mit a', b', g' bezeichnet,

$$g' = a' + b',$$

das heisst, die Ergänzzahl eines eingewandten Produktes von geltendem Werthe ist die Summe aus den Ergänzzahlen seiner beiden Faktoren.

Es bleibt uns noch der Fall, wo das Produkt null ist, zu berücksichtigen. Bei der eingewandten Multiplikation trat dieser Fall (nach § 125) dann ein, wenn das beiden Faktoren gemeinschaftliche System von höherer Stufe war, als die Stufe der eingewandten Multiplikation, das heisst $a + b - h$, betrug, also wenn

$$g > a + b - h,$$

das heisst

$$h - a + h - b > h - g,$$

oder wenn

$$a' + b' > g',$$

und ausserdem nur noch, wenn einer der Faktoren null war, das heisst, *ein eingewandtes Produkt zweier geltenden Werthe ist null, wenn die Ergänzzahlen beider Faktoren zusammengenommen grösser sind, als die Ergänzzahl des beiden Faktoren gemeinschaftlichen Systems.* Ein äusseres Produkt zweier geltenden Werthe hingegen erschien als null, wenn die Stufenzahlen der Faktoren zusammengenommen grösser sind, als die des beide Faktoren zunächst umfassenden Systemes.

Es stimmen also diese Gesetze für beide Multiplikationsweisen 197 überein, wenn man den Begriff der Stufenzahl gegen den der Ergänz-

zahl und den des nächstumfassenden Systems gegen den | des gemein- *198* schaftlichen austauscht; eine Beziehung, welche, wie wir sehen werden, bei der weiteren Entwickelung ihre Gültigkeit beibehält.

§ 134. Multiplikation von Produkten, die in der Form der Unterordnung erscheinen.

Das Produkt von drei und mehr Faktoren, zu welchem wir nun übergehen, kann stets auf das von zwei Faktoren zurückgeführt werden, wenn nur die Multiplikation zweier Faktoren auch für den Fall feststeht, dass diese Faktoren wieder Produkte sind. Da nun, wenn die Faktoren wieder eingewandte Produkte sind, der Sinn ihrer Multiplikation noch nicht festgestellt ist, so bedürfen wir hier einer neuen Definition; und zwar müssen wir festsetzen, welche Bedeutung eine beliebige Produktgrösse als erster Faktor, und welche sie als zweiter Faktor habe.

Wenn eine Grösse als zweiter Faktor auftritt, so wollen wir sagen, es werde mit ihr multiplicirt, wenn als erster, sie selbst werde multiplicirt. Ich setze nun fest, „mit einer Produktgrösse, welche auf die Form der Unterordnung gebracht, das heisst, so dargestellt ist, dass jeder folgende Faktor dem vorhergehenden untergeordnet sei, multipliciren, heisse mit ihren Faktoren fortschreitend*) multipliciren," und ferner „eine Produktgrösse, welche auf die Form der Unterordnung gebracht ist, mit irgend einer Grösse multipliciren, heisse den letzten Faktor der ersteren mit der letzteren multipliciren (ohne die früheren Faktoren zu ändern)". Hierbei muss dann natürlich, damit der Sinn der gesammten Multiplikation klar sei, die Stufe für eine jede der einzelnen Multiplikationen, auf welche jene Eine reducirt wird, bestimmt sein.

Dass diese Definitionen für jedes reale Produkt ausreichen, werde ich sogleich zeigen. Das Produkt wird nämlich als ein reales von geltendem Werthe erscheinen, wenn bei den einzelnen Multiplikationen die Stufe der eingewandten Multiplikation mit dem Grade der Abhängigkeit übereinstimmt; hingegen wird es null werden, wenn der Grad der Abhängigkeit bei irgend einer dieser Multiplikationen die Stufe der Multiplikation | übersteigt, indem dadurch dann einer der 198 Faktoren null wird. Bloss formale Bedeutung wird es haben, wenn der Grad der Abhängigkeit irgendwo | geringer ist, als die Stufe der *199*

*) Fortschreitend mit einer Reihe von Grössen verknüpfen, heisst nach dem schon früher eingeführten Sprachgebrauche, so verknüpfen, dass das jedesmalige Ergebniss der Verknüpfung mit der nächstfolgenden Grösse der Reihe verknüpft wird.

zugehörigen Multiplikation, ohne dass anderswo das entgegengesetzte Verhältniss eintritt.

§ 135. Jedes reale Produkt lässt sich auf die Form der Unterordnung bringen.

Der Nachweis dafür, dass die aufgestellten Definitionen für das reale Produkt ausreichen, fällt zusammen mit dem Beweise des Satzes, dass jedes reale Produkt sich auf die Form der Unterordnung bringen lasse.

In der That lässt sich nach § 132 zunächst das Produkt zweier reiner Faktoren (so können wir solche Faktoren nennen, die nicht wieder als eingewandte Produkte erscheinen) auf die Form der Unterordnung bringen. Kommt nun zu einem solchen Produkt $A.B$, wo B dem A untergeordnet sei, ein dritter reiner Faktor hinzu, welcher mit B im c-ten Grade der Abhängigkeit steht, mit A im $(c+d)$-ten, während seine eigne Stufenzahl $c+d+e$ beträgt, so wird er sich darstellen lassen in der Form CDE, wo C dem B (also auch dem A) untergeordnet ist, und CD dem A, während sonst keine Abhängigkeit stattfindet, vorausgesetzt nämlich, dass c, d, e die Stufenzahlen von C, D, E sind. Ist dann das Produkt ein reales von geltendem Werthe, das heisst, stimmt die Stufe der Multiplikation mit dem Grade der Abhängigkeit überein, so lässt sich zeigen, dass

$$A.B.CDE = AE.BD.C$$

sei.

In der That, da hier die Produktgrösse $A.B$ in der Form der Unterordnung erscheint, so wird sie mit einer andern Grösse CDE multiplicirt, indem man den letzten Faktor mit derselben multiplicirt; also ist

$$A.B.CDE = A.(B.CDE).$$

Es ist aber $B.CDE$, da C dem B untergeordnet, und c der Grad der Multiplikation ist, gleich $BDE.C$ (nach § 132), also jenes Produkt

$$= A.(BDE.C).$$

Da hier C dem B, also auch dem BDE untergeordnet ist, so multiplicirt man nach dem ersten Theil der Definition (§ 134) mit $BDE.C$, indem man zuerst mit BDE und das Ergebniss dieser Multiplikation mit C multiplicirt. Nun ist aber $A.BDE$, da B und D, also auch 199 BD, dem A untergeordnet sind, und $(b+d)$ den Grad | der Multiplikation darstellt, gleich $AE.BD$; also ist der obige Ausdruck

$$= AE.BD.C.$$

200 Dieser Ausdruck hat die Form der Unterordnung, da C dem B,

also auch dem BD, BD aber dem A, also auch dem AE untergeordnet ist.

Somit lässt sich das fortschreitende Produkt von drei reinen Faktoren stets auf die Form der Unterordnung bringen.

Kommt nun noch ein vierter Faktor hinzu, so kann man zuerst die drei ersten auf die Form der Unterordnung bringen. Es sei $A.B.C$ diese Form. Tritt nun ein vierter Faktor hinzu, so muss, damit der Sinn der Multiplikation ein bestimmter sei, festgesetzt sein, in welchem Grade der Abhängigkeit er mit jeder der drei Grössen A, B, C stehen muss, wenn das Produkt einen realen geltenden Werth haben soll; es möge dann der vierte Faktor von C im d-ten Grade abhängig sein, von B im $(d+e)$-ten, von A im $(d+e+f)$-ten Grade, während er selbst zur Stufenzahl $d+e+f+g$ habe, so wird er sich in der Form $DEFG$ darstellen lassen, wo D dem C, E dem B, F dem A untergeordnet ist, und d, e, f, g die Stufenzahlen von D, E, F, G darstellen. Dann kann man zeigen, dass

$$A.B.C.DEFG = AG.BF.CE.D$$

sei. Denn es ist

$$\begin{aligned} A.B.C.DEFG &= A.B.(C.DEFG) \\ &= A.B.(CEFG.D), \end{aligned}$$

da nämlich D dem C untergeordnet ist. Da nun $CEFG.D$ in der Form der Unterordnung erscheint, so kann man mit seinen einzelnen Faktoren $CEFG$ und D fortschreitend multipliciren; B giebt aber mit $CEFG$ multiplicirt, da C und E, also auch CE dem B untergeordnet sind, den Ausdruck $BFG.CE$. Man erhält also den obigen Ausdruck

$$\begin{aligned} &= A.(BFG.CE).D \\ &= A.BFG.CE.D \\ &= AG.BF.CE.D, \end{aligned}$$

da nämlich B und F, also auch BF, dem A untergeordnet sind.

Also erscheint auch das fortschreitende Produkt aus vier reinen Faktoren in der Form der Unterordnung, und es lässt sich schon übersehen, wie ganz auf dieselbe Weise folgt, dass überhaupt ein fortschreitendes | Produkt aus beliebig vielen reinen Faktoren sich auf die 200 Form der Unterordnung bringen lässt. Ist nun aber dies der Fall, so wird, da nach den Definitionen sich die Multiplikation überhaupt | auf 201 die fortschreitende Multiplikation reiner Grössen zurückführen lässt, dasselbe auch von beliebigen realen Produkten gelten, nämlich dass

jedes reale Produkt sich in Form der Unterordnung darstellen lässt.

Es reichen daher in der That die obigen Definitionen für das

reale Produkt aus, und die Form der Unterordnung, als die einfachste, auf die sich das reale Produkt bringen lässt, bestimmt die Bedeutung desselben.

§ 136. Multiplikation mit einander eingeordneten Grössen.

Es entsteht uns nun die Aufgabe, die verschiedenen Umgestaltungen, welche nach der bis hierher geführten Darstellung das eingewandte Produkt zulässt, in ein einfaches Hauptgesetz zusammenzufassen, auf welches wir dann in der Folge stets zurückgehen können, wenn es sich um solche Umgestaltungen handelt.

Wir brauchen, um dazu zu gelangen, nur die im vorigen Paragraphen entwickelten Umgestaltungen weiter fortzuführen und in Worte zu kleiden. Es ergab sich dort, dass

$$A\,.\,B\,.\,CDE = AE\,.\,BD\,.\,C$$

sei, wenn B dem A untergeordnet ist, C das System darstellt, was CDE mit B, also auch mit A gemeinschaftlich hat, und CD das System darstellt, was CDE mit A gemeinschaftlich hat, und überdies die Art der Multiplikation so angenommen ist, dass sie unter diesen Voraussetzungen einen geltenden realen Werth liefert. Unter denselben Voraussetzungen ergiebt sich nämlich auch

$$EDC\,.\,B\,.\,A = EA\,.\,DB\,.\,C.$$

Denn

$$\begin{aligned} EDC\,.\,B\,.\,A &= (EDC\,.\,B)\,.\,A \\ &= (EDB\,.\,C)\,.\,A; \end{aligned}$$

und da $EDB\,.\,C$ in der Form der Unterordnung erscheint, so multiplicirt man es (nach § 134) mit A, indem man C mit A multiplicirt; da C dem A untergeordnet ist, so ist hier nach § 133 die Ordnung gleichgültig; man erhält also den zuletzt gefundenen Ausdruck

$$= EDB\,.\,(A\,.\,C);$$

201 da wieder $A\,.\,C$ auf die Form der Unterordnung gebracht ist, so kann man hier mit A und C fortschreitend multipliciren, und erhält den letzten Ausdruck

202 $$= EA\,.\,DB\,.\,C.$$

Auf dieselbe Form nun führt der Ausdruck

$$EDC\,.\,A\,.\,B \text{ oder } EDC\,.\,(A\,.\,B)$$

zurück; nämlich da $EDC\,.\,A$ gleich $EA\,.\,DC$ ist, so hat man jenen Ausdruck

$$\begin{aligned} EDC\,.\,A\,.\,B &= EA\,.\,DC\,.\,B \\ &= EA\,.\,DB\,.\,C. \end{aligned}$$

Daraus folgt also, dass man in einem Produkte von realem geltenden Werthe mit zwei einander eingeordneten*) Faktoren fortschreitend in beliebiger Ordnung multipliciren, oder auch mit ihrem Produkte auf einmal multipliciren darf.

Wenn c, d, e die Stufenzahlen von C, D, E sind, so ist hier angenommen (s. den vorigen Paragraphen), dass EDC von A im $(c+d)$-ten Grade, von B im c-ten Grade abhänge, und da in beiden Produkten

$$EDC.A.B \text{ und } EDC.B.A$$

die Multiplikationsweise als eine reale von geltendem Werthe angenommen ist, wenn der soeben bezeichnete Grad der Abhängigkeit stattfindet, so wird jedes von beiden Produkten dann aber auch nur dann null werden, wenn der Grad der Abhängigkeit wächst, also wird, wenn eins dieser Produkte null wird, auch das andere null werden müssen. Somit bleibt das angeführte Gesetz auch bestehen, wenn das Produkt nur als ein reales aufgefasst ist; und da es sich von zwei einander eingeordneten Faktoren unmittelbar auf mehrere übertragen lässt, so haben wir den Satz:

Statt mit einem Produkte von einander eingeordneten Faktoren zu multipliciren, kann man mit den einzelnen Faktoren fortschreitend multipliciren und zwar in beliebiger Ordnung.

Hierbei haben wir die Multiplikationsweisen so angenommen, dass das Produkt bei demselben Abhängigkeitsverhältniss in allen diesen Formen gleichzeitig als real erscheint. Dies Gesetz drückt somit eine Erweiterung des ersten Theils der Definition (§ 134) aus, dass man, statt mit einem Produkt, welches in Form der | Unterordnung erscheint, 202 mit den Faktoren desselben fortschreitend multipliciren darf. Das Gesetz, was den zweiten Theil der Definition | (§ 134) verallgemeinert, nämlich, 203 dass man ein Produkt aus einander eingeordneten Faktoren mit einer Grösse multiplicirt, indem man den letzten Faktor mit derselben multiplicirt, ergiebt sich leicht auf ähnliche Weise wie das obige Gesetz, ist aber von geringerer Bedeutung. Uebrigens ist klar, dass in dem obigen Gesetz zugleich das Gesetz über den mittleren Faktor in § 132 liegt; nämlich

$$BA.AC = BAC.A,$$

indem man, statt B fortschreitend mit A und dem ihm übergeordneten AC zu multipliciren, auch in umgekehrter Folge multipliciren darf.

*) Einander eingeordnete Grössen nennen wir solche, von denen die eine der andern untergeordnet ist.

§ 137. Eigenthümlicher Werth eines eingewandten Produktes aus mehreren Faktoren. Reines und gemischtes Produkt.

Wir verlassen den allgemeinen Begriff des eingewandten Produktes und beschränken die Betrachtung auf den Fall, dass die Multiplikation sich stets auf dasselbe Hauptsystem beziehe. Da nun ein jedes solches Produkt nach § 132, wenn es auf die Form der Unterordnung gebracht ist, als ersten Faktor entweder nothwendig eine das Hauptsystem darstellende Grösse hat, oder doch in dieser Form dargestellt werden kann, so folgt, dass, wenn man auf ein Produkt aus mehreren Faktoren, welches sich auf dasselbe Hauptsystem bezieht, das in § 135 mitgetheilte Verfahren anwendet, das Produkt sich auf die Form bringen lässt, dass alle Faktoren mit Ausnahme des letzten das Hauptsystem darstellen.*)

Bringen wir alle jene vorangehenden Faktoren, welche das Hauptsystem darstellen, durch Anwendung der allgemeinen multiplikativen Formänderung auf denselben Grössenwerth, und fassen diesen Werth als Hauptmass auf, so können wir dann den letzten Faktor, wie es in § 132 schon in Bezug auf zwei Faktoren festgestellt ist, „den eigenthümlichen (specifischen) Werth oder Faktor jener Produktgrösse 203 in Bezug auf dies | Hauptmass" und das System desselben „das eigenthümliche System" der Produktgrösse nennen, und die Stufenzahl 204 dieses Systems als Stufenzahl jener Produktgrösse selbst auffassen. Wir können ferner die Grössen, welche durch eingewandte Multiplikation reiner Grössen (s. § 135) hervorgehen, *Beziehungsgrössen* nennen, weil sie nur in ihrer Beziehung auf ein System oder ein Mass eine einfache Bedeutung gewinnen. Als eigenthümlicher Werth einer reinen Grösse erscheint natürlich diese Grösse selbst.

Es gilt hier auch noch das, was wir in § 128 über die Bezeichnung der Multiplikation bei zwei Faktoren sagten, dass es nämlich, wenn einmal das Hauptsystem als Beziehungssystem feststehe, als überflüssig erscheine, die äussere Multiplikation von der eingewandten oder die verschiedenen Grade der letzteren durch die Bezeichnung zu unter-

*) Es sei zum Beispiel $H.A.B$ dies Produkt, in welchem H das Hauptsystem darstelle, indem nämlich das Produkt der beiden ersten Faktoren schon auf die verlangte Form gebracht ist; nun sei $B = CD$, wo im Falle, dass das ganze Produkt geltenden Werth habe, AD das Hauptsystem darstelle. Dann ist jenes ganze Produkt gleich $H.AD.C$, was die verlangte Form hat. Ist das ganze Produkt null, so kann man die ersten Faktoren beliebig setzen, wenn nur der letzte null ist; also kann auch dann das Produkt auf die verlangte Form gebracht werden.

scheiden.*) Dagegen tritt hier ein neuer Unterschied hervor, nämlich der zwischen reinen und gemischten Produkten.

Nämlich reine Produkte nenne ich solche, deren Faktoren fortschreitend stets durch dieselbe Art der Multiplikation verknüpft sind, das heisst, entweder nur durch äussere Multiplikation (äussere Produkte), oder nur durch eingewandte auf ein und dasselbe System bezügliche (reine eingewandte Produkte); gemischte hingegen nenne ich solche, deren Faktoren fortschreitend entweder durch beiderlei Arten der Multiplikation (äussere und eingewandte) verknüpft sind, oder zwar bloss durch eingewandte aber auf verschiedene Systeme bezügliche.

Da die reinen und die gemischten Produkte verschiedenen Gesetzen unterliegen, so ist ihre Unterscheidung sehr wichtig; und obgleich eine Unterscheidung durch die Bezeichnung nicht nothwendig ist, indem durch die Stufenzahlen der Faktoren, wenn das Hauptsystem als Beziehungssystem feststeht, auch schon immer bestimmt ist, ob das Produkt ein reines oder gemischtes sei, so erscheint eine solche Unterscheidung doch in vielen | Fällen als sehr bequem. *Ich will mich* 204 *daher in solchen | Fällen der Punkte bedienen, um durch sie die Faktoren* 205 *des reinen Produktes von einander absusondern, und will daher festsetzen, dass, wo Punkte zur Bezeichnung der Multiplikation angewandt werden, dann auch stets, wenn sie gar keiner oder derselben Klammer eingeordnet sind, durch sie Faktoren eines reinen Produktes von einander abgesondert werden, wobei dann ein Produkt von unmittelbar zusammengeschriebenen Grössen in Bezug auf diese Punkte jedesmal als Ein Faktor erscheint; zum Beispiel bedeutet $AB \,.\, CD \,.\, EF$ ein reines Produkt, dessen Faktoren AB, CD, EF sind.*

§ 138. Gesetz für die Ergänzzahlen reiner Produkte.

Wir können nun die in § 133 für zwei Faktoren erwiesenen Sätze auch auf mehrere Faktoren übertragen.

Zuerst was die Vertauschung betrifft, so zeigt sich, dass auch bei mehreren Faktoren die Stellung eines Faktors, der das Beziehungssystem darstellt, ganz gleichgültig ist; und daraus folgt dann über-

*) Ganz anders würde dies bei der allgemeinen realen Multiplikation sein, indem bei ihr die verschiedenen Grade der Abhängigkeit zwischen den einzelnen Faktoren festgestellt werden müssten, bei denen das Produkt noch einen geltenden Werth hätte. Das Produkt aus mehreren Faktoren würde dann seiner Art nach durch eine Reihe von Zahlen bestimmt sein, welche jene Abhängigkeitsgrade darstellten; diese Bestimmung würde also eine zusammengesetzte sein und nicht mehr einen einfachen Begriff darstellen. Und dies ist der Grund, weshalb wir diesen allgemeinen Fall hier übergangen haben.

haupt, dass man, um zwei Produktgrössen zu multipliciren, nur ihre eigenthümlichen Werthe in Bezug auf irgend ein Hauptmass zu multipliciren, und diesem Produkte das Hauptmass so oft als Faktor hinzuzufügen hat, als es in beiden Grössen zusammengenommen als Faktor vorkommt; zum Beispiel ist $H^m A \,.\, H^n B$, wo H das Hauptmass darstellt, gleich $H^m H^n A \,.\, B$ oder gleich $H^{m+n} A \,.\, B$. Hierin liegt dann, dass zwei Produktgrössen, welche als Faktoren zusammentreten, gleichfalls mit oder ohne Zeichenwechsel vertauschbar sind, je nachdem ihre Ergänzzahlen beide zugleich ungerade sind oder nicht.

Die folgenden Sätze jenes Paragraphen können wir nur auf reine eingewandte Produkte übertragen. Da nämlich bei zwei Faktoren eines eingewandten Produktes von geltendem Werthe die Ergänzzahl des Produktes die Summe ist aus den Ergänzzahlen der Faktoren, so bleibt dies Gesetz bestehen, wenn zu diesem eingewandten Produkte wieder ein eingewandter Faktor hinzutritt und das Produkt wieder geltenden Werth behält; es ist dann die Ergänzzahl des Gesammtproduktes, wie sogleich durch zweimalige Anwendung des für zwei Faktoren bewiesenen Gesetzes einleuchtet, die Summe aus den Ergänzzahlen der Faktoren, und so fort für beliebig viele Faktoren. Da überdies das Produkt zweier Faktoren dann und nur dann als ein eingewandtes erscheint, wenn die Summe der beiden Stufenzahlen grösser, das heisst, die Summe 205 der Ergänzzahlen kleiner ist als die Stufenzahl des Hauptsystems, so 206 wird auch das geltende Produkt aus drei und mehr Faktoren dann und nur dann als ein reines eingewandtes erscheinen, wenn die Summe der Ergänzzahlen stets kleiner bleibt als die Stufenzahl des Hauptsystems, das heisst, wenn die Summe aller Ergänzzahlen der Faktoren noch kleiner bleibt als die Stufenzahl des Hauptsystems.

Um endlich auch den Satz aus § 133 über das Nullwerden hier zu übertragen, erinnern wir daran, dass die Summe der Ergänzzahlen zweier Grössen, welche das Beziehungssystem als nächstumfassendes System haben und also als Produkt einen geltenden Werth darbieten, gleich der Ergänzzahl ihres gemeinschaftlichen Systemes ist; dass aber, wenn das nächstumfassende System niedriger ist als das Beziehungssystem, und das Produkt also null ist, die Stufenzahl des gemeinschaftlichen Systems grösser, seine Ergänzzahl also kleiner wird als die Summe der zu den Faktoren gehörigen Ergänzzahlen. Tritt nun ein Faktor hinzu, so ist das gemeinschaftliche System aller Faktoren dasjenige, was der hinzutretende Faktor mit dem allen vorhergehenden Faktoren gemeinschaftlichen Systeme selbst wieder gemeinschaftlich hat. Es wird also, sobald das gesammte Produkt geltenden Werth behält, die Summe aller Ergänzzahlen gleich der Ergänzzahl des den

sämmtlichen Faktoren gemeinschaftlichen Systemes sein; wenn aber durch irgend einen Faktor, welcher hinzutritt, das Produkt null wird, ohne dass der hinzutretende Faktor selbst null ist, so wird dort die Ergänzzahl des gemeinschaftlichen Systemes kleiner werden, und somit auch, wenn noch neue Faktoren hinzutreten, kleiner bleiben als die jedesmalige Summe aus den Ergänzzahlen der Faktoren. Es wird also ein reines eingewandtes Produkt, dessen Faktoren geltende Werthe haben, dann und nur dann null werden, wenn die Ergänzzahl des allen Faktoren gemeinschaftlichen Systems kleiner ist als die Summe der Ergänzzahlen der Faktoren. Auch liegt in der Art der Beweisführung, dass der eigenthümliche Werth eines solchen Produktes, wenn es nicht null ist, das den sämmtlichen Faktoren gemeinschaftliche System darstellt.

Fassen wir nun die über die Ergänzzahlen aufgestellten Gesetze zusammen und schliessen die entsprechenden Gesetze über die Stufenzahlen äusserer Produkte mit hinein, so erhalten wir den Satz:

Ein Produkt aus beliebig vielen Faktoren von geltenden | Werthen 207 *ist ein reines, wenn entweder die Stufenzahlen oder die | Ergänzzahlen* 206 *der Faktoren zusammengenommen kleiner sind als die Stufenzahl des Hauptsystems, und zwar im ersteren Falle ein äusseres, im letzteren ein eingewandtes, hingegen ein gemischtes, wenn keins von beiden der Fall ist. Das reine Produkt ist null im ersten Falle, wenn die Stufenzahlen der Faktoren zusammengenommen grösser sind als die Stufenzahl des die Faktoren zunächst umfassenden Systemes, im letzteren, wenn die Ergänzzahlen der Faktoren zusammengenommen grösser sind als die Ergänzzahl des den Faktoren gemeinschaftlichen Systemes. Wenn das reine Produkt einen geltenden Werth hat, so stellt der eigenthümliche Werth desselben im ersten Falle das nächstumfassende, im letzteren das gemeinschaftliche System dar; und im ersteren Falle ist die Stufenzahl desselben die Summe aus den Stufenzahlen der Faktoren, im letzteren ist seine Ergänzzahl die Summe aus den Ergänzzahlen der Faktoren.*

§ 139. Die Faktoren eines reinen Produktes lassen sich beliebig zusammenfassen.

Wir schreiten nun zu dem multiplikativen Zusammenfassungsgesetz, das heisst, wir untersuchen, ob und in welchem Umfange

$$PQR = P(QR)$$

gesetzt werden könne. Schon aus dem Satze in § 136 geht hervor, dass für das gemischte Produkt dreier Faktoren jenes Gesetz im All-

gemeinen nicht gelte*); hingegen wollen wir zeigen, dass dasselbe für das reine Produkt im allgemeinsten Sinne gelte, dass also nach der in § 137 eingeführten Bezeichnung allemal

$$P.Q.R = P.(Q.R)$$

sei.

Zunächst leuchtet ein, dass, wenn die Gültigkeit dieses Gesetzes nachgewiesen ist für den Fall, dass P, Q, R reine Grössen sind, sie damit auch zugleich für den Fall, dass dieselben sämmtlich oder zum 208 Theil Beziehungsgrössen sind, nachgewiesen sei. | Denn nach dem vorigen Paragraphen hat man Beziehungsgrössen so mit einander zu multipliciren, dass man ihre eigenthümlichen Werthe in Bezug auf ein 207 und dasselbe Hauptmass mit einander | multiplicirt und dem Produkte, gleichviel auf welcher Stelle, so oft das Hauptmass als Faktor hinzufügt, als es in beiden Grössen zusammen als Faktor enthalten war. Da man hiernach also in einem Produkte überhaupt jeden Faktor, der das Hauptmass darstellt, auf eine beliebige Stelle setzen und beliebig aus einer Klammer heraus oder in eine solche hineinrücken kann, so folgt, dass jenes Gesetz, wenn es für reine Grössen gilt, auch für Beziehungsgrössen, also allgemein gelte. Nun gilt es zunächst nach den Gesetzen der äusseren Multiplikation für äussere Produkte reiner Grössen, also auch für äussere Produkte überhaupt. Es bleibt also nur zu beweisen übrig, dass es auch für das reine eingewandte Produkt reiner Grössen gelte.

In diesem Falle kommt es darauf an, zu zeigen, dass P, Q, R, wenn das eingewandte Produkt einen geltenden Werth hat, sich in den Formen ABC, ABD, ADC darstellen lassen, so dass zugleich $ABCD$ das Hauptsystem darstellt.

Es seien die Ergänzzahlen der Grössen P, Q, R beziehlich d, c, b, so ist die Ergänzzahl des Produktes oder des den drei Faktoren gemeinschaftlichen Systemes A nach § 138 (am Schlusse) gleich der Summe jener Zahlen, also gleich $b + c + d$; und ist also a die Stufenzahl jenes gemeinschaftlichen Systemes, so ist die des Hauptsystemes gleich $a + b + c + d$. Zwei der Faktoren, zum Beispiel P und Q, werden nach demselben Satze ein System gemeinschaftlich haben, dessen Ergänzzahl die Summe ist aus den Ergänzzahlen jener Faktoren, also hier gleich $c + d$ ist; also ist die Stufenzahl dieses gemeinschaftlichen Systemes gleich $a + b$, es wird somit dies System durch ein Produkt

*) Allerdings können Fälle aufgeführt werden, in welchen vermittelst des Satzes in § 136 unser Gesetz auch dann noch seine Anwendung findet; allein diese Fälle sind so vereinzelt, die Bedingungen, unter denen sie eintreten, so zusammengesetzt, dass aus ihrer Aufzählung der Wissenschaft kein Vortheil erwächst.

AB dargestellt werden können, in welchem B von b-ter Stufe und von A unabhängig ist. Ebenso wird das dem P und R gemeinschaftliche System von $(a+c)$-ter Stufe sein, und also eine von A unabhängige Grösse c-ter Stufe C in sich fassen. Und zwar muss dann C von AB unabhängig sein; denn wäre es davon abhängig, das heisst, hätte C mit AB irgend eine Grösse gemeinschaftlich, so würden die drei Faktoren P, Q, R diese Grösse, also eine von A unabhängige Grösse, gemeinschaftlich enthalten, was mit der Annahme streitet.

Somit sind nun der Grösse P drei | von einander unabhängige *209* Grössen A, B, C untergeordnet, also auch ihr Produkt ABC. Es muss sich daher P als Produkt darstellen lassen, dessen einer Faktor ABC ist; da P aber selbst von $(a+b+c)$-ter Stufe ist, so wird der andere Faktor, den P | ausser ABC enthält, von nullter Stufe, 208 das heisst, eine blosse Zahlengrösse sein, also P sich als Vielfaches von ABC darstellen lassen. Q und R endlich werden aus demselben Grunde einen von A unabhängigen Faktor D gemeinschaftlich haben, und so werden sich die Grössen P, Q, R beziehlich als Vielfache von ABC, ABD und ADC darstellen lassen; ja, da für die Grössen A, B, C, D nur die Systeme, welche durch sie dargestellt werden, bestimmt sind, sie selbst also beliebig gross angenommen werden können, so wird man dieselben, wie leicht zu sehen ist, auch so annehmen können, dass die Grössen P, Q, R jenen Werthen selbst gleich sind, also

$$P.Q.R = ABC.ABD.ADC$$

ist. Da das ganze Produkt, wie wir voraussetzten, einen geltenden Werth haben soll, also auch zum Beispiel das Produkt $ABC.ABD$, so muss hier das nächstumfassende System, also $ABCD$, zugleich das Beziehungssystem sein. Es ist daher dies Produkt gleich $ABCD.AB$; also der ganze Ausdruck

$$= ABCD.AB.ADC$$
$$= ABCD.ABDC.A.$$

Auf dieselbe Form nun lässt sich das andere Produkt $P.(Q.R)$ bringen; denn $Q.R$ oder $ABD.ADC$ ist gleich $ABDC.AD$, also

$$P.(Q.R) = ABC.(ABDC.AD).$$

Da nun $ABDC$ das Hauptsystem darstellt, so können wir nach § 138 die eigenthümlichen Werthe unter sich multipliciren und $ABDC$ als Faktor hinzufügen. Wir erhalten aber $ABC.AD$ gleich $ABCD.A$, also ist der obige Ausdruck

$$= ABCD.ABDC.A.$$

Da also die beiden Produkte $P.Q.R$ und $P.(Q.R)$ demselben Ausdrucke gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich.

Wir nahmen bei dieser Beweisführung an, dass die Produkte einen geltenden Werth hatten. Nun können sie aber auch nur gleichzeitig null werden, weil nach § 138 das Nullwerden dann und nur dann eintritt, wenn das den Faktoren gemeinschaftliche System von höherer Stufe ist, als die [Stufenzahl des Beziehungssystems vermindert um *210* die] Summe der Ergänzzahlen beträgt, und | dies bei beiden Produkten nur gleichzeitig eintreten kann. Also bleibt auch für diesen Fall die Gleichheit beider Produkte bestehen. Das Gesetz gilt daher allge-209 mein für reine Grössen, also muss es nun auch, wie wir oben sahen, für Beziehungsgrössen gelten, so dass allgemein für die reine Multiplikation überhaupt

$$P.Q.R = P.(Q.R)$$

ist. Da nun endlich das Zusammenfassungsgesetz, wenn es für drei Faktoren gilt, auch für beliebig viele gelten muss (§ 3), so ergiebt sich der allgemeine Satz:

Die Faktoren eines reinen Produktes lassen sich beliebig zusammenfassen.

§ 140. Beziehung zur Addition und Subtraktion.

Für die Addition der Beziehungsgrössen bietet sich das allgemeine multiplikative Beziehungsgesetz als begriffsbestimmend dar. Man hat dann nur beide auf die Form der Unterordnung zu bringen. Auf diese Form gebracht, erscheinen dann beide als summirbar, wenn einestheils das Hauptmass in beiden gleichvielmal als Faktor erscheint, und anderntheils die Grössen selbst eine gleiche Stufenzahl haben; und zwar werden sie dann addirt, indem man die eigenthümlichen Werthe addirt, und der Summe das Hauptmass so oft als Faktor hinzufügt, als es in jedem der Produkte als Faktor enthalten war.*)

Das allgemeine Beziehungsgesetz ist, dass

$$P.(Q+R) = P.Q + P.R,$$

und

$$(Q+R).P = Q.P + R.P$$

sei. Die Gültigkeit desselben haben wir zunächst nur für den Fall nachzuweisen, dass die Grössen P, Q, R reine sind, indem das Hinzutreten beliebiger Faktoren, die das Hauptmass darstellen, auf welches sich die Grössen beziehen, nichts ändern kann. Wir nehmen daher zuerst an, P, Q, R seien reine Grössen.

---

*) Diese Bestimmung dient eben als Definition, indem wir unter der Summe zweier Beziehungsgrössen die auf die angegebene Weise gebildete Summe verstehen.

Es sei, um die Stücke der Summe

$$P . Q + P . R$$

auf die Form der Unterordnung zu bringen, $Q = AB$, wo A dem P untergeordnet ist, PB aber das Hauptsystem darstellt, auf welches 211 sich die Multiplikation bezieht, und gleich H gesetzt werden mag, und ebenso sei $R = CD$, wo C dem P untergeordnet ist und PD das Hauptsystem darstellt. Da hier D beliebig gross angenommen werden kann (indem C dann nur im umgekehrten Verhältnisse wie D geändert 210 werden muss), so kann man es so annehmen, dass

$$PD = PB = H$$

wird. Dann ist

$$P . Q + P . R = HA + HC = H(A + C),$$

letzteres nach der Definition.

Auf dieselbe Form nun können wir auch $P . (Q + R)$ bringen. Nämlich da PD gleich PB ist, so folgt, dass D auch gleich B plus einer von P abhängigen Grösse, die wir K nennen wollen, gesetzt werden könne; somit ist R, was gleich CD gesetzt war, gleich $C(B + K)$, oder gleich $CB + CK$. Also ist

$$P . (Q + R) = P . (AB + CB + CK).$$

Da hier K von P abhängig ist, CK also von P in einem höheren Grade abhängt als CB, so kann es mit P kein geltendes Produkt liefern, kann also nach § 125 weggelassen werden. Es ist also der obige Ausdruck

$$= P . (AB + CB)$$
$$= P . (A + C) B.$$

Da hier A und C, also auch $(A + C)$ dem P untergeordnet sind, PB aber oder H das Hauptsystem darstellt, so ist der letzte Ausdruck wieder

$$= H(A + C).$$

Also sind die beiden zu vergleichenden Ausdrücke $P . (Q + R)$ und $P . Q + P . R$ demselben dritten Ausdrucke gleich, also auch beide unter sich gleich.

Kommt nun ferner zu P das Hauptmass mehrmals, etwa m-mal, als Faktor hinzu, und ebenso auch zu Q und R, zu den letzteren aber gleichvielmal, damit sie summirbar bleiben, etwa n-mal, so ist das so gut, als käme H zu jedem von den beiden Ausdrücken $(m + n)$-mal als Faktor hinzu, also bleiben sie gleich, wenn sie es vorher waren. Da nun endlich dasselbe sich auch von den beiden Ausdrücken $(Q + R) . P$ und $Q . P + R . P$ sagen lässt, so folgt, dass das multiplikative Be-

ziehungsgesetz auch für diese neuen Arten der Addition und Multi-
212 plikation ganz allgemein | gilt. Somit gelten nun auch alle Gesetze, die darauf gegründet sind, das heisst:

Alle Gesetze, welche die Beziehung der Multiplikation zur Addition und Subtraktion ausdrücken, gelten noch immer allgemein für jede Art der Addition und Multiplikation, die bisher festgestellt ist.

§ 141. Division in Bezug auf ein System; Grad der Beziehungsgrösse.

211 Für die Division*) ergiebt sich sogleich, dass sie nur dann real ist, wenn Divisor und Dividend einander eingeordnet sind, das heisst, wenn entweder der Divisor dem Dividend untergeordnet ist, oder dieser jenem.

Im ersteren Falle ist die Division eine äussere, im letzteren eine eingewandte; wenn daher beide Fälle zugleich eintreten, das heisst, wenn Divisor und Dividend einander gleichartig sind, so kann die Division sowohl als äussere, wie auch als eingewandte aufgefasst werden. Und zwar gelten diese Bestimmungen nicht nur, wenn die zu verknüpfenden Grössen reine Grössen, sondern auch, wenn sie Beziehungsgrössen sind.

In dem letzteren Falle kommt es dann darauf an, dass die eigenthümlichen Werthe in der angegebenen Beziehung stehen, während das Hauptsystem, auf welches sich beide Grössen beziehen, dasselbe ist. Hierbei kann dann der Fall eintreten, dass das Hauptmass im Divisor öfter als im Dividend als Faktor vorkommt; der Quotient erscheint dann als eine reine Grösse, welche mehrmals durch das Hauptmass dividirt ist, oder welche mit einer Potenz des Hauptmasses multiplicirt ist, deren Exponent negativ ist. Wir fassen daher auch diese neue Grösse als Beziehungsgrösse auf, und nennen den Exponenten derjenigen Potenz des Hauptmasses, mit welcher der eigenthümliche Werth einer Beziehungsgrösse durch Multiplikation verbunden ist, den Grad der Beziehungsgrösse. Es ist somit die neue Grösse eine Beziehungsgrösse, deren Grad negativ ist, während der Grad der vorher betrachteten positiv war, und auch die reine Grösse kann nun als Beziehungsgrösse nullten Grades aufgefasst werden.

Hierbei muss ich noch bemerken, dass die Grössen nullter Stufe, und die das Hauptsystem darstellenden Grössen, das heisst die Grössen nullter und h-ter Stufe (wenn h die Stufenzahl des Hauptsystems ist) auf eine zwiefache Weise aufgefasst werden können. Nämlich „eine

*) Vergleiche die Anmerkungen zu Seite 39 und 48. (1877.)

Grösse nullter Stufe und n-ten Grades kann als Grösse h-ter Stufe und $(n-1)$-ten Grades | aufgefasst werden", indem man den eigen- 213 thümlichen Werth jener Grösse, welcher eine blosse Zahlengrösse ist, mit einem der Faktoren, welche das Hauptmass darstellen, multiplicirt denkt und dies Produkt als eigenthümlichen Werth jener Grösse auffasst, wodurch natürlich der Grad derselben um Eins abnimmt. Ebenso kann umgekehrt „jede Grösse h-ter Stufe und n-ten Grades als Grösse 212 nullter Stufe und $(n+1)$-ten Grades aufgefasst werden." Im Allgemeinen wollen wir es vorziehen, eine solche Grösse als Grösse nullter Stufe zu betrachten.

Es kommt uns nun darauf an, die Eindeutigkeit des Quotienten zu untersuchen.

Es sei zu dem Ende A der Dividend, B der Divisor als erster Faktor, C ein Werth des Quotienten, so dass

$$B.C = A$$

ist, und der Quotient in der Form $\frac{A}{B}$ erscheint. Jeder Werth nun, welcher statt C gesetzt jener Gleichung genügt, wird auch als ein besonderer Werth dieses Quotienten aufgefasst werden können. Jeder solche Werth wird aus dem Werthe C durch Addition erzeugt werden können, und zwar muss dann das zu C hinzuaddirte Stück mit B multiplicirt Null geben, wenn das Produkt gleich A bleiben soll, und jedes solche hinzuaddirte Stück wird auch das Produkt gleich A lassen; nun können wir ein solches Stück, was mit B multiplicirt Null giebt, allgemein mit $\frac{0}{B}$ bezeichnen, und daher sagen, wenn C ein besonderer Werth des Quotienten ist, und B der Divisor, so sei der vollständige Werth des Quotienten gleich

$$C + \frac{0}{B},$$

wie wir dies schon für die äussere Division in § 62 dargethan haben. Doch müssen wir hierbei stets festhalten, dass hier unter $\frac{0}{B}$ zugleich eine mit C addirbare Grösse verstanden sein muss, das heisst eine Grösse, welche mit C von gleicher Stufe und gleichem Grade ist. Es wird also der Quotient eindeutig sein, wenn unter dieser Voraussetzung $\frac{0}{B}$ jedesmal 0 ist, das heisst, es keine andere Grösse dieser Art X giebt, die mit B multiplicirt Null giebt, als Null selbst.

Da das Produkt einer Grösse nullter Stufe, welche selbst nicht 214 null ist, oder einer Grösse, die das Hauptsystem darstellt, jedesmal einen geltenden Werth liefert, wenn der andere Faktor einen geltenden

Werth hat, so folgt, dass wenn B einen geltenden Werth hat und zugleich entweder B selbst oder auch X eine Grösse nullter oder h-ter 213 Stufe ist, | allemal X null sein müsse, wenn $B \,.\, X$ null sein soll. Es wird also auch in diesem Falle der Quotient eindeutig sein; aber auch in keinem andern. Denn wenn beide Grössen B und X von mittlerer Stufe sind, das heisst, wenn ihre Stufenzahlen zwischen 0 und h liegen, so wird X, ohne dass es null wird, stets so angenommen werden können, dass B und X von einander abhängig sind, und ihr nächstumfassendes System doch nicht das Hauptsystem selbst ist; es wird also alsdann nach § 128 einen geltenden Werth für X geben, dessen Produkt mit B Null giebt, das heisst, es wird dann der Quotient nicht eindeutig sein.

Ist der Divisor null, so wird, da Null mit jeder Grösse, die wir bisher kennen gelernt haben, zum Produkte verknüpft Null giebt, auch der Dividend null sein müssen, wenn der Quotient eine der bisher entwickelten Grössen sein soll, und zwar wird dann jede dieser Grössen als ein besonderer Werth des Quotienten aufgefasst werden können. Ist der Dividend aber eine Grösse von geltendem Werthe, während der Divisor null ist, so erscheint der Quotient als eine Grösse von ganz neuer Gattung, die wir als *unendliche* Grösse bezeichnen können, während die bisher betrachteten als *endliche* erschienen.

Fassen wir nun die soeben gewonnenen Ergebnisse zusammen, indem wir zugleich bedenken, dass wenn C von nullter oder h-ter Stufe ist, Dividend und Divisor gleichartig sind, so gelangen wir zu dem Satze:

Der Quotient stellt dann und nur dann einen einzigen, endlichen Werth dar, wenn der Divisor von geltendem Werthe ist, und zugleich entweder selbst als Grösse nullter Stufe dargestellt werden kann), oder dem Dividend gleichartig ist. Sind Dividend und Divisor null, so ist der Quotient jede beliebige endliche Grösse. Ist der Divisor null, der Dividend* 215 *nicht, so ist der Quotient unendlich. In jedem andern Falle, das heisst, wenn der Divisor nicht null ist, und zugleich Divisor und Quotient beide von mittlerer Stufe sind, ist der Quotient nur partiell bestimmt, und zwar erhält man dann aus einem besondern Werthe des Quotienten den allgemeinen, indem man den allgemeinen Ausdruck einer Grösse, die mit dem Divisor multiplicirt Null giebt, hinzuaddirt.*

214 Ein besonderes Interesse gewähren hier noch solche Ausdrücke, deren Dividend die Einheit ist, während der Divisor eine Grösse von

*) Denn auch die Grösse h-ter Stufe kann, wie wir oben sahen, als Grösse nullter Stufe dargestellt werden.

geltender Stufe darstellt, zum Beispiel der Quotient $\frac{1}{ab}$. Ist hier $abcd$ oder H das Hauptmass, so ist

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{H}\left(cd + \frac{0}{ab}\right),$$

wo $\frac{0}{ab}$ jede von ab abhängige Grösse zweiter Stufe darstellt.

§ 142. Vollkommene Analogie zwischen äusserer und eingewandter Multiplikation.

Um die Analogie zwischen der äusseren Multiplikation und der reinen eingewandten Multiplikation zu vollenden, bleibt uns noch eine Betrachtung übrig. Nämlich es liessen sich bei der äusseren Multiplikation alle Grössen höherer Stufen als Produkte der Grössen erster Stufe darstellen, und die Gesetze ihrer Verknüpfung liessen sich aus den Verknüpfungsgesetzen für Grössen erster Stufe auf rein formelle Weise ableiten. Den Grössen erster Stufe entsprechen nach § 138 bei der eingewandten Multiplikation Grössen, deren Ergänzzahl Eins ist, das heisst Grössen $(h-1)$-ter Stufe, wenn das Beziehungssystem für alle Grössen und Produkte dasselbe, und zwar ein System von h-ter Stufe ist. Durch ihre Multiplikation entstehen nach § 138 Grössen, deren Ergänzzahlen die Einheit übertreffen, das heisst also, deren Stufenzahlen kleiner sind als $(h-1)$. Es kommt daher, um die vollständige Analogie nachzuweisen, nur darauf an, die Analogie der Gesetze für diese Grössen erster und $(h-1)$-ter Stufe darzuthun.

Die Identität dieser Gesetze, sofern sie nur die allgemeinen Verknüpfungsgesetze der vier Grundrechnungen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) darstellen, haben wir nachgewiesen. Auch haben wir gezeigt, dass die Gesetze der äusseren Multiplikation als solcher, sobald sie nur auf den Begriff der Stufenzahl und des gemeinschaftlichen Systemes | zurückgehen, auch für die eingewandte, auf ein *216* festes Hauptsystem bezügliche Multiplikation gelten, wenn man statt des Begriffs der Stufenzahl den der Ergänzzahl, und statt des Begriffs des gemeinschaftlichen Systems den des nächstumfassenden einführt, und umgekehrt. Sofern daher der Begriff der Abhängigkeit, auf den alle besonderen Gesetze der äusseren Multiplikation, als auf ihre Wurzel, gegründet sind, durch den des gemeinschaftlichen oder nächstumfassenden Systemes bestimmt ist, werden die | Gesetze der äusseren Multi- 215 plikation sich auch auf die reine eingewandte nach jenem Princip übertragen lassen.

Aber der Begriff der Abhängigkeit, welcher zuerst bei Grössen erster Stufe hervortrat, wurde ursprünglich ganz anders bestimmt, und

viele später entwickelten Gesetze gründen sich auf diese ursprüngliche Bestimmung. Nämlich es wurde ursprünglich eine Grösse erster Stufe dann als abhängig von einer Reihe solcher Grössen dargestellt, wenn sich jene als Summe von Stücken ausdrücken lässt, welche diesen gleichartig sind, oder, wie wir es späterhin ausdrückten, wenn sich jene als Vielfachensumme von diesen darstellen lässt; und so nannten wir überhaupt mehrere Grössen erster Stufe von einander abhängig, wenn sich eine derselben als Vielfachensumme der übrigen darstellen lässt, und erst daraus folgte dann vermittelst des ursprünglichen Begriffs des Systemes, dass n Grössen erster Stufe dann und nur dann von einander abhängig sind, wenn sie von einem Systeme von niederer als der n-ten Stufe umfasst werden, und vermittelst des Begriffs der äusseren Multiplikation, dass das Produkt abhängiger Grössen, aber auch nur ein solches, null sei. Wir müssen daher zu jener ursprünglichen Bestimmung auf unserm Gebiete das Analoge suchen.

Wenn zuerst in einem Systeme n-ter Stufe n Grössen erster Stufe gegeben waren, deren äusseres Produkt nicht null ist, so zeigte sich, dass jede andere Grösse erster Stufe, die diesem Systeme angehört, sich als Vielfachensumme jener ersteren darstellen lässt. Der analoge Satz würde hier lauten: *Wenn in einem Systeme n-ter Stufe n Grössen $(n-1)$-ter Stufe gegeben sind, deren eingewandtes auf jenes System bezügliche Produkt nicht null ist, so lässt sich jede andere Grösse $(n-1)$-ter Stufe, welche diesem Systeme angehört, als Vielfachensumme der ersteren darstellen.*

217 Der Beweis dieses Satzes ergiebt | sich aus § 138. Nämlich nach dem angeführten Paragraphen werden je $(n-1)$ von den n Faktoren, welche die im Satze ausgesprochene Beschaffenheit haben, als gemeinschaftliches System ein System erster Stufe haben, während alle n Faktoren kein System von geltender Stufe gemeinschaftlich haben dürfen, wenn das Produkt einen geltenden Werth haben soll. Es wird also im Ganzen n solcher Systeme erster Stufe geben, wovon immer je $(n-1)$ einem der n Faktoren untergeordnet sind. Diese n Systeme erster Stufe müssen aber von einander unabhängig sein; denn wäre 216 eins derselben | von den übrigen $(n-1)$ abhängig, so müsste es in dem durch sie bedingten Systeme liegen (nach dem ursprünglichen Begriffe des Systems); es sind aber diese übrigen einem der n Faktoren untergeordnet, folglich müsste auch jenes erste System diesem Faktor untergeordnet sein; es ist aber jenes erste System das den übrigen $(n-1)$ Faktoren gemeinschaftliche System, folglich würde dies System allen n Faktoren gemeinschaftlich sein, also das Produkt nach § 138 null sein, gegen die Voraussetzung. Es sind also in der That jene n

Systeme erster Stufe von einander unabhängig. Nehmen wir nun n beliebige Grössen erster Stufe an, welche diesen Systemen angehören und also gleichfalls von einander unabhängig sind, so wird zuerst jeder der gegebenen n Faktoren, da ihm $(n-1)$ jener Grössen erster Stufe untergeordnet sind, und er selbst von $(n-1)$-ter Stufe ist, sich als Vielfaches von dem äusseren Produkte jener Grössen darstellen lassen; ferner wird jede Grösse erster Stufe, welche dem Hauptsysteme (n-ter Stufe) angehört, sich als Vielfachensumme jener n Grössen erster Stufe, also auch jede Grösse $(n-1)$-ter Stufe, die jenem Hauptsysteme angehört, sich als äusseres Produkt aus $(n-1)$ solchen Vielfachensummen darstellen lassen. Das Produkt dieser $(n-1)$ Vielfachensummen verwandelt sich aber beim Durchmultipliciren in eine Vielfachensumme von äusseren Produkten zu $(n-1)$ Faktoren aus jenen n Grössen erster Stufe, folglich auch, da diese Produkte den n gegebenen Faktoren gleichartig sind, in eine Vielfachensumme dieser Faktoren.

Wir haben also den oben ausgesprochenen Satz bewiesen. Doch ist damit noch nicht unsere Aufgabe gelöst. Vielmehr beruhte das Wesen der äusseren Multiplikation als äusserer auf dem Satze, dass ein Produkt von Grössen erster Stufe dann | und nur dann null sei, *218* wenn sich eine derselben als Vielfachensumme der übrigen darstellen liess; und ehe wir diesen Satz nicht auf unser Gebiet übertragen haben, ist die Analogie noch nicht vollständig.

Dass ein Produkt von Grössen $(n-1)$-ter Stufe dann allemal null sei, wenn eine derselben als Vielfachensumme der andern darstellbar ist, erhellt sogleich aus dem Gesetze des Durchmultiplicirens, wenn man zugleich festhält, dass das Produkt zweier gleichartiger Grössen $(n-1)$-ter Stufe null ist. Um zu beweisen, dass das Produkt auch nur dann null sei, wenn sich einer der Faktoren als Vielfachensumme der andern darstellen lässt, müssen wir zeigen, | dass, wenn zu einem 217 geltenden Produkt von m Faktoren $(n-1)$-ter Stufe in einem Hauptsysteme n-ter Stufe ein Faktor derselben $(n-1)$-ten Stufe hinzutritt, welcher das Produkt null macht, sich dieser als Vielfachensumme der ersteren darstellen lässt.

Dass ein Produkt aus mehr als n Faktoren dieser Art null wird, liegt schon in dem allgemeinen Satze § 138, ergiebt sich aber auch schon sogleich aus dem vorher bewiesenen Satze. Wenn ferner zu n solchen Faktoren, deren Produkt einen geltenden Werth hat, ein Faktor derselben Stufe hinzukommt, so wird dieser einestheils das Produkt immer null machen, anderntheils sich als Vielfachensumme jener n Faktoren darstellen lassen, wie wir oben zeigten. Es bleibt uns also,

um den Beweis unseres Satzes zu führen, nur der Fall zu berücksichtigen übrig, dass die Anzahl der Faktoren (m) kleiner ist als die Stufe des Hauptsystemes (n).

In diesem Falle können wir zur Führung des Beweises ($n - m$) Faktoren ($n - 1$)-ter Stufe zu Hülfe nehmen, welche mit den gegebenen m Faktoren ein Produkt von geltendem Werthe liefern. Dann wird sich der Faktor ($n - 1$)-ter Stufe, welcher zu dem Produkt der m gegebenen Faktoren (P) hinzutreten und dasselbe null machen soll, nach dem vorher bewiesenen Satze als Vielfachensumme der sämmtlichen n Grössen, deren Produkt geltenden Werth hat, darstellen lassen, das heisst, als Summe, deren eines Stück (A) eine Vielfachensumme der gegebenen m Faktoren, und deren anderes Stück (B) eine Vielfachensumme der zu Hülfe genommenen Faktoren ist, und zu beweisen bleibt, dass dies zweite Stück null sei. Multipliciren wir nun das Produkt der m gegebenen Faktoren (P) mit dieser Summe ($A + B$), so können 219 wir das erste Stück (A) | weglassen, da es als Vielfachensumme von den ersten m Faktoren erscheint, also mit ihnen multiplicirt Null giebt. Da nun das Produkt jener Summe und der m gegebenen Faktoren Null betragen sollte, also $P . (A + B) = 0$ sein sollte, so folgt jetzt, dass das Produkt ihres zweiten Stückes in die m gegebenen Faktoren auch null sein müsse; also

$$P . B = 0.$$

Dies zweite Stück B ist aber eine Vielfachensumme der zu Hülfe genommenen ($n - m$) Faktoren; und wir können zeigen, dass die Koefficienten dieser Vielfachensumme sämmtlich Null betragen müssen, sie 218 selbst also null sei. Zu dem Ende multiplicire man, statt mit | der Vielfachensumme B, mit ihren Stücken, so erhält man eine Vielfachensumme mit denselben Koefficienten, und zwar enthält jedes Glied ausser den m gegebenen Faktoren einen von den zu Hülfe genommenen. Um nun zu beweisen, dass der Koefficient zu irgend einem solchen Gliede null sei, hat man nur noch mit denjenigen ($n - m - 1$) von den zu Hülfe genommenen Faktoren, welche diesem Gliede fehlen, beide Seiten der obigen Gleichung, oder vielmehr deren Glieder zu multipliciren; so ist klar, dass dann alle jene Glieder ausser dem Einen wegfallen, und die Gleichung dann aussagt, dass dies Glied, also auch sein Koefficient null sei. Es sind somit sämmtliche Koefficienten der Vielfachensumme B null, also sie selbst null; also [ist] der hinzutretende Faktor, welcher gleich $A + B$ gesetzt war, gleich A, das heisst, eine Vielfachensumme der m gegebenen Faktoren, was wir beweisen wollten. Fassen wir daher die gewonnenen Resultate zusammen, so gelangen wir zu dem Satze:

Ein Produkt von Grössen $(n-1)$-ter Stufe in Bezug auf ein Hauptsystem n-ter Stufe ist dann und nur dann null, wenn sich eine derselben als Vielfachensumme der übrigen darstellen lässt.

Durch dies Gesetz ist nun die Analogie zwischen eingewandter und äusserer Multiplikation, sobald das Beziehungssystem ein und dasselbe ist und zugleich das Hauptsystem darstellt, dem alle in Betracht gezogenen Grössen angehören, vollendet. Und alle Gesetze der äusseren Multiplikation, so weit die nachgewiesene Analogie reicht, das heisst, welche auf die allgemeinen Verknüpfungsbegriffe, oder auf die Begriffe von Ueberordnung und Unterordnung der | Grössen und auf die Stufen- 220 zahlen zurückgehen, werden in analoger Form, indem man nämlich die Begriffe der Ueberordnung und Unterordnung vertauscht, den Begriff der Stufenzahl aber durch den der Ergänzzahl ersetzt, auch für die eingewandte auf das Hauptsystem bezügliche Multiplikation gelten. Und da auch das Hinzufügen von Faktoren, die das Hauptsystem darstellen, wenn es nur in allen Gliedern einer Gleichung gleich vielmal geschieht, die Gleichung nicht ändert, so bestehen jene Gesetze auch noch, wenn man statt der reinen Grössen die Beziehungsgrössen setzt, deren Beziehungssystem gleichfalls das Hauptsystem ist.

§ 143*). Doppelsystem und darauf bezügliches Produkt.

Nachdem ich nun die vollkommene Analogie zwischen äusserer 219 und eingewandter Multiplikation dargethan habe, will ich noch auf eine Erweiterung der bisherigen Betrachtungsweise aufmerksam machen.

Hat man nämlich mehrere Grössen, welche demselben Systeme a-ter Stufe übergeordnet und demselben Systeme $(a+b)$-ter Stufe untergeordnet sind, so kann man dieselben als Produkte darstellen, deren einer Faktor (A) von a-ter Stufe und in allen derselbe ist, während die andern Faktoren demselben Systeme b-ter Stufe, B, welches von A unabhängig ist, angehören. Dann leuchtet sogleich ein, dass jede Zahlenrelation, welche zwischen diesen Faktoren, die dem Systeme B angehören, statt findet, auch zwischen den ursprünglichen Grössen (da sie durch Multiplikation der letzteren mit A hervorgehen) herrschen müsse, und umgekehrt, dass jede Zahlenrelation, welche zwischen diesen letzteren herrscht, auch zwischen den ersteren herrschen müsse (da man nach § 81 in den Gleichungen, welche jene Zahlenrelation darstellen, den Faktor A weglassen darf). Nehmen wir namentlich Grössen

*) Auch die hier angedeutete Erweiterung des Begriffes ist in der Ausgabe von 1862 von mir aufgegeben worden. (1877.)

$(a+1)$-ter Stufe an, zum Beispiel Ac, Ad, ..., wo c, d, ... dem Systeme B angehören, so werden zwischen Ac, Ad, ... dieselben Zahlenrelationen herrschen, wie zwischen c, d, ..., und umgekehrt.

Setzt man daher den Begriff des Produktes solcher Grössen Ac, Ad, ... so fest, dass es null wird, wenn das Produkt der entsprechenden Grössen c, d, ... es wird; so wird man nun alle Begriffe und Gesetze von Grössen erster Stufe in einem Systeme b-ter Stufe, also auch alle Begriffe und Gesetze von Grössen höherer Stufen in einem solchen Systeme, auf jene Grössen $(a+1)$-ter Stufe und die daraus auf gleiche Weise erzeugten Grössen übertragen können. Hierdurch 221 entwickelt sich eine Reihe neuer Begriffe, von denen ich die wichtigsten hier kurz zusammenstellen will.

Wir können die Vereinigung zweier solcher Systeme, von denen das eine dem andern untergeordnet ist, ein *Doppelsystem* nennen, und sagen, eine Grösse sei diesem Doppelsystem eingeordnet, wenn sie dem einen der beiden Systeme, aus denen das Doppelsystem besteht, übergeordnet, dem andern untergeordnet ist. Wir können das höhere von 220 den beiden Systemen, aus denen das Doppelsystem | besteht, das *Obersystem*, das niedere das *Untersystem* nennen. Dann zeigt sich, wie ein auf ein Doppelsystem bezügliches Produkt zweier geltenden Werthe, die dem Doppelsystem eingeordnet sind, allemal dann, aber auch nur dann null ist, wenn das den beiden Faktoren gemeinschaftliche System von höherer Stufe als das Untersystem, und zugleich das sie zunächst umfassende von niederer Stufe als das Obersystem ist, dass ferner ein Produkt von geltendem Werthe in Bezug auf jenes Doppelsystem als äusseres erscheint, wenn das den Faktoren gemeinschaftliche System das Untersystem ist, und als ein eingewandtes, wenn das sie zunächst umfassende System das Obersystem ist, und dass endlich ein solches Produkt zugleich als äusseres und eingewandtes aufgefasst werden kann, wenn beide Bedingungen zugleich erfüllt sind. Zugleich erweitert sich hierdurch der Begriff der Beziehungsgrösse, indem diese nun in der Form der Unterordnung als Produkt von Grössen erscheinen kann, welche drei verschiedene einander eingeordnete Systeme darstellen, von denen die erste das Obersystem, die letzte das Untersystem, und die mittlere das eigenthümliche System der Grösse ist. Um daher den eigenthümlichen Werth einer solchen Beziehungsgrösse aufzufassen, werden zwei Masse erforderlich sein, von denen das eine dem Obersystem, das andere dem Untersysteme zugehört; und nur in Bezug auf ein solches Doppelmass wird diese neue Beziehungsgrösse einen bestimmten eigenthümlichen Werth darbieten.

Da auch die Beziehungsgrössen, welche sich auf ein einfaches

System beziehen, als auf ein Doppelsystem bezügliche angesehen werden können, dessen Untersystem von nullter Stufe ist, so zeigt sich, dass die neu gewonnene Grössengattung von allgemeinerer Natur ist und jene erstere als besondere Gattung unter sich begreift. Da ferner die Beziehungsgrössen als allgemeinere Grössengattung zu den reinen Elementargrössen, und diese wieder als allgemeinere Grössengattung *222* zu den reinen Ausdehnungsgrössen auftraten, so bilden die Beziehungsgrössen überhaupt die allgemeinste Grössengattung, zu welcher wir auf dieser Stufe gelangen. Da zugleich auch die reine Multiplikation als die allgemeinste Multiplikationsweise sich darstellt, bei welcher noch die allgemeinen multiplikativen Gesetze und namentlich auch das Zusammenfassungsgesetz fortbesteht, so erscheint hier die theoretische Darstellung dieses Theils der Ausdehnungslehre als | vollendet, insofern 221 man nicht auch die Multiplikationsweisen in Betracht ziehen will, für welche das Zusammenfassungsgesetz nicht mehr gilt.*)

Wir schreiten daher zu den Anwendungen, und behalten dem folgenden Kapitel nur noch die specielle Behandlung der Verwandtschaftsverhältnisse vor, welche am geeignetsten erscheint, um die in diesem Theile gewonnenen Ergebnisse in einander zu verflechten, und ihre gegenseitigen Beziehungen aus Licht treten zu lassen.

B. Anwendungen.

§ 144. Eingewandtes Produkt in der Geometrie.

Zunächst ergeben sich aus dem allgemeinen Begriffe für die *Geometrie* folgende Resultate:

Das Produkt zweier Liniengrössen in der Ebene ist der Durchschnittspunkt beider Linien, verbunden mit einem Theil jener Ebene als Faktor; sind zum Beispiel ab und ac, wo a, b, c Punkte vorstellen, die beiden Liniengrössen, so ist ihr Produkt $abc\,.\,a$; ferner das Produkt dreier Liniengrössen in der Ebene ist gleich dem zweimal als Faktor gesetzten doppelten Flächeninhalt des von den Linien eingeschlossenen Dreiecks, multiplicirt mit dem Produkt der drei Quotienten, welche ausdrücken, wie oft jede Seite in der zugehörigen Liniengrösse enthalten ist; denn sind a, b, c jene drei Punkte, und mab, nac, pbc, wo m, n, p Zahlgrössen sind, die drei Liniengrössen, so ist das Produkt derselben gleich

$$mnp\,.\,abc\,.\,abc.$$

*) Wie solche Produkte, welche allerdings auch eine mannigfache Anwendung gestatten, zu behandeln seien, habe ich am Schlusse des Werkes anzudeuten gesucht.

Das Produkt zweier Plangrössen im Raume ist ein Theil der Durchschnittskante multiplicirt mit einem Theil des Raumes, zum Beispiel $abc \,.\, abd = abcd \,.\, ab$, ferner das Produkt dreier Plangrössen ist der 223 Durchschnittspunkt der drei Ebenen multiplicirt mit zwei Theilen des Raumes, zum Beispiel $abc \,.\, abd \,.\, acd = abcd \,.\, abcd \,.\, a$. Das Produkt von vier Plangrössen stellt drei als Faktoren verbundene Theile des Raums dar, zum Beispiel

$$mabc \,.\, nabd \,.\, pacd \,.\, qbcd = mnpq \,.\, abcd \,.\, abcd \,.\, abcd.$$

Dies letzte Produkt wird null, wenn eine der Grössen $m, \ldots q$ es wird, oder wenn der eingeschlossene Körperraum null wird, das heisst, die vier Ebenen sich in einem Punkte schneiden, wie dies auch schon im Begriff liegt. Das Produkt einer Liniengrösse und einer Plangrösse 222 ist ein Theil des Raumes multiplicirt mit dem Durchschnittspunkt, zum Beispiel $ab \,.\, acd = abcd \,.\, a$.

Ich habe oben (§ 118) die Methode, die Kurven und Oberflächen durch Gleichungen darzustellen, mit unserer Wissenschaft in Beziehung gesetzt, und gezeigt, wie zum Beispiel eine Oberfläche als geometrischer Ort eines Punktes dargestellt werden kann, zwischen dessen Zeigern (in Bezug auf irgend ein Richtsystem) eine Gleichung statt findet. Ich habe dort gezeigt, wie die Oberfläche auch als Umhülle einer veränderlichen Ebene oder vielmehr Plangrösse dargestellt werden kann, zwischen deren Zeigern eine Gleichung n-ten Grades statt findet, und ich habe dort angedeutet, dass die umhüllte Oberfläche dann eine Oberfläche n-ter Klasse sei; dies hängt davon ab, dass die Gleichung zwischen den Zeigern einer veränderlichen Ebene, welche einen festen Punkt umhüllt, dann von erstem Grade ist.

In der That, ist a dieser Punkt und P die Ebene, so hat man sogleich für den Fall, dass P durch a geht, die Gleichung

$$P \,.\, a = 0.$$

Sind A, B, C, D die vier Richtmasse dritter Stufe, als deren Vielfachensumme P erscheint, und wird einer der Zeiger, zum Beispiel der von D, gleich Eins gesetzt (was immer, da es auf den Masswerth*) von P nicht ankommt, verstattet ist), und ist

$$P = xA + yB + zC + D,$$

so erhält man

$$0 = Pa = xAa + yBa + zCa + Da,$$

was eine Gleichung ersten Grades ist; somit erscheint, wie es sein 224 muss, der Punkt als Oberfläche erster Klasse.

*) So nenne ich das Quantum der Grösse, wenn ihr System schon feststeht.

Will man die Gleichung eines Punktes aufstellen, der durch drei feste Ebenen bestimmt ist, oder, was dasselbe ist, will man die Bedingung aufstellen, unter welcher eine Ebene P mit drei andern A, B, C durch denselben Punkt geht, so hat man sogleich

$$P . A . B . C = 0,$$

eine Gleichung, welche die höchst verwickelten Gleichungen, zu | denen 223 die gewöhnliche Koordinatenmethode führt, vollkommen ersetzt.

§ 145. Allgemeiner Satz über algebraische Kurven und Oberflächen.

Die Gleichungen für die Kurven und krummen Oberflächen, wie wir sie bisher darstellten, waren, da sie zwischen den Zeigern der veränderlichen Grösse statt fanden, rein arithmetischer Natur, und bezogen sich jedesmal auf bestimmte, mit der Natur des durch die Gleichung dargestellten Gebildes in keinem Zusammenhang stehende Richtsysteme; und nur die Gleichungen ersten Grades stellten wir in rein geometrischer Form dar. In der That konnten auch nur diese, wenn wir bei dem reinen Produkte stehen blieben, in geometrischer Form dargestellt werden, indem die veränderliche Grösse dann nur einmal als Faktor vorkommen konnte. Dagegen bietet uns das gemischte Produkt ein ausgezeichnetes Mittel dar, um die Kurven und Oberflächen höherer Grade in rein geometrischer Form darzustellen.

Es ist nämlich sogleich klar, *dass, wenn wir eine beliebige Gleichung zwischen Ausdehnungsgrössen haben, deren Glieder gemischte Produkte sind, der Grad der Gleichung in Bezug auf eine derselben (P) stets so hoch ist, als die Anzahl (m) beträgt, wie oft diese Ausdehnungsgrösse (P) in einem und demselben Gliede von geltendem Werthe höchstens als Faktor vorkommt, das heisst, dass sie durch Zahlengleichungen ersetzt wird, von denen wenigstens Eine in Bezug auf die Zeiger der veränderlichen Ausdehnungsgrösse einen Grad erreicht, welcher jener Anzahl gleich ist.*

Dies folgt unmittelbar, da man, um zu den ersetzenden Zahlengleichungen zu gelangen, nur statt jeder Grösse die Summe aus den Produkten ihrer Zeiger in die zugehörigen Richtmasse zu setzen, dann die Gesetze der Multiplikation bei jedem Gliede der gegebenen Gleichung anzuwenden hat, indem man, statt mit der Summe zu multipliciren, mit den einzelnen Stücken multiplicirt, und dann die Glieder, welche demselben Richtgebiete gleichartig ¦ sind, jedesmal zu Einer 225 Gleichung vereinigt. Es ist klar, dass dabei die Zeiger der veränderlichen Grösse P in einem Gliede so oft als Faktoren erscheinen, als

P in dem Gliede, aus welchem das erstere hervorging, als Faktor vorkam. Somit kann also der Grad dieser Zeigergleichungen nie höher sein, als die oben bezeichnete Anzahl (m) beträgt. Aber es muss auch wenigstens eine derselben diesen Grad (m) wirklich erreichen; denn 224 wäre dies nicht der Fall, so müssten die sämmtlichen Glieder, welche aus demjenigen Gliede hervorgehen, was jene Grösse in höchster Anzahl als Faktor enthält, null werden, also auch jenes Glied selbst null sein, wider die Voraussetzung. Es ist also die Geltung des oben aufgestellten Satzes bewiesen.

Hierbei haben wir noch zu bemerken, dass die Gleichung im Allgemeinen nicht nur das System der veränderlichen Grösse bestimmt, sondern auch ihren Masswerth. Bei der gewöhnlichen Betrachtung der Kurven und Oberflächen kommt es aber nur auf die Bestimmung des Systems an*), obgleich auch der Masswerth für die Theorie nicht ohne Interesse ist. Wollen wir also uns der gewöhnlichen Betrachtungsweise annähern, so haben wir die allgemeine Gleichung so zu specialisiren, dass dadurch der Masswerth nicht mit bestimmt ist, das heisst, dass, wenn irgend eine Ausdehnungsgrösse der (ursprünglichen) Gleichung genügt, auch jede ihr gleichartige, das heisst, deren Zeiger denen der ersteren proportional sind, derselben genügen wird. Es ist sogleich einleuchtend, dass dann in allen Gliedern der Gleichung die Grösse P in gleicher Anzahl (m) als Faktor vorkommen muss, und dass dann auch die Zeigergleichung eine symmetrische desselben Grades wird, das heisst, in allen Gliedern ebenso viele (m) Zeiger von P als Faktoren vorkommen werden. Dividirt man dann die Gleichung durch die m-te Potenz von einem der Zeiger, so erhält man (unter der Voraussetzung, dass jener Zeiger nicht null ist) die Gleichung in der gewöhnlichen Form, in welcher sie ein Gebilde m-ten Grades bestimmt.

§ 146—148. Allgemeiner Satz über Kurven in der Ebene und Anwendung desselben auf die Kegelschnitte.

§ 146.

226 Wir beschränken uns, um die Bedeutung dieses bisher noch unbekannten Satzes, welcher über den Zusammenhang der Kurven und Oberflächen ein bisher wohl kaum geahntes Licht verbreitet, zur An-

*) Zum Beispiel, wenn eine Kurve als geometrischer Ort eines Punktes bestimmt werden soll, so kommt es nur auf die Lage dieses Punktes, nicht auf das ihm anhaftende Gewicht an; oder soll die Kurve als Umhülle einer veränderlichen geraden Linie aufgefasst werden, so kommt es eben nur auf die Lage jener Linie an, nicht auf deren Länge, also überall auf das System, nicht auf den Masswerth.

schauung zu bringen, auf die Kurven in der Ebene, indem die analoge Betrachtung der Kurven im Raume und der krummen Oberflächen dann kaum noch einer Erläuterung bedarf.

Es zeigt sich sogleich, dass die geometrische Gleichung nur dann eine Kurve darstellen wird, wenn sie durch Eine arithmetische ersetzt 225 wird, das heisst, wenn sie, da die Ebene ein Elementarsystem dritter Stufe ist, gleichfalls von dritter Stufe ist. Hierdurch ergeben sich dann aus dem allgemeinen Satze des vorigen Paragraphen folgende Specialsätze:

Wenn die Lage eines Punktes (p) in der Ebene dadurch beschränkt ist, dass drei Punkte, welche durch Konstruktionen vermittelst des Lineals aus jenem Punkte (p) und aus einer gegebenen Reihe fester gerader Linien oder Punkte hervorgehen, in Einer geraden Linie liegen (oder drei solche Gerade durch Einen Punkt gehen), so ist der Ort jenes Punktes (p) eine algebraische Kurve, deren Ordnung man durch blosses Nachzählen findet. Nämlich man hat nur nachzuzählen, wie oft bei den angenommenen Konstruktionen auf den beweglichen Punkt (p) zurückgegangen wird, ohne dass man auf einen andern beweglichen Punkt zurückgeht; die so erhaltene Zahl (m) ist dann die Ordnungszahl der Kurve.

Es ist hierbei klar, dass, wenn man auf einen andern beweglichen Punkt zurückgeht, bei dessen Erzeugung p selbst n-mal angewandt ist, es dasselbe ist, als wäre man auf p selbst n-mal zurückgegangen.

Der Beweis besteht nur darin, dass ich zeige, wie daraus eine geometrische Gleichung hervorgeht, in der p so oft als Faktor eines Gliedes erscheint. Jede Konstruktion vermittelst des Lineals in der Ebene besteht nämlich darin, dass entweder zwei Punkte durch eine gerade Linie verbunden, oder der Durchschnittspunkt zweier gerader Linien bestimmt wird; die gerade Linie zwischen den beiden Punkten ist aber das Produkt derselben, und der Durchschnittspunkt zweier gerader Linien, wenn es nicht auf das Gewicht ankommt, gleichfalls ihr Produkt; folglich kann ich jeder linealen Konstruktion, bei welcher ein Punkt oder eine Linie angewandt wird, eine Multiplikation mit diesem Punkte oder dieser Linie | substituiren; die drei Punkte oder 227 Geraden, welche somit durch lineale Konstruktionen aus den gegebenen und der veränderlichen Grösse erfolgen, werden als Produkte derselben erscheinen; und da jene drei Punkte in einer geraden Linie liegen, oder jene drei Linien durch einen Punkt gehen sollen, so heisst das, ihr Produkt ist null, also hat man eine geometrische Gleichung aus einem Gliede, in welchem p so oft als Faktor erscheint, als es bei jenen Konstruktionen angewandt ist, | also ist die entstehende Kurve 226 von eben so vielter Ordnung.

Den entsprechenden Satz für die durch eine veränderliche Gerade umhüllte Kurve erhält man aus dem obigen, wenn man die Ausdrücke Punkt und Gerade verwechselt, und statt des Ausdrucks „Ordnung“ den Ausdruck „Klasse“ einführt. Ich will hier noch bemerken, dass diese Sätze ohne alle Einschränkung gelten, wenn man nur festhält, dass der Ort eines Punktes, dessen Koordinaten durch eine Gleichung m-ten Grades von einander abhängen, ohne Ausnahme als Kurve m-ter Ordnung aufzufassen ist, mag diese Kurve nun eine Gestalt annehmen, welche sie will, mag sie zum Beispiel in ein System von m geraden Linien übergehen, und mögen selbst beliebig viele dieser Geraden zusammenfallen.

§ 147.

Um diesen Satz auf einen noch specielleren Fall zu übertragen, will ich die *geometrische Gleichung für die Kurven zweiter Ordnung* aufstellen.

Ist p der veränderliche Punkt, so hat man als Gleichung des zweiten Grades, wenn die kleinen Buchstaben Punkte, die grossen Linien vorstellen,

$$paBcDep = 0,$$

oder, in Worten ausgedrückt, „wenn die Seiten eines Dreiecks sich um drei feste Punkte a, c, e schwenken, während zwei Ecken sich in zwei festen Geraden B und D bewegen, so beschreibt die dritte Ecke einen Kegelschnitt.“

Die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher durch fünf Punkte a, b, c, d, e geht, ist

$$(pa \,.\, bc)\,(pd \,.\, ce)\,(db \,.\, ae) = 0;$$

dass sie nämlich ein Kegelschnitt sei, folgt aus dem allgemeinen Satze; dass die fünf Punkte a, b, c, d, e in ihm liegen, ergiebt sich leicht, indem jeder derselben statt p gesetzt der Gleichung genügt.

Nämlich zuerst ist klar, dass, wenn man p gleich a oder d setzt, auch ein Faktor, nämlich pa oder pd null wird, also das ganze Produkt null wird; also sind a und d Punkte des Kegelschnittes. Ferner, 228 wenn p gleich c ist, so stellen die beiden ersten Faktoren des ganzen Produktes beide den Punkt c dar, also ist ihr Produkt null; ist p gleich b, so stellt der erste Faktor des ganzen Produktes die Grösse b dar, das Produkt der beiden letzten die Grösse bd, und bbd ist null; ist p gleich e, so stellt der mittlere Faktor die Grösse e dar, das Produkt der beiden andern stellt die Grösse ae dar, und eae ist wieder 227 null. Also liegen alle fünf Punkte in jenem Kegelschnitt, und | es ist

also die Aufgabe, die Gleichung eines durch fünf Punkte bestimmten **Kegelschnittes** aufzufinden, dadurch gelöst.

Uebrigens stellt jene Gleichung nichts anders als die bekannte Eigenschaft des mystischen Sechsecks dar.

§ 148.

Ich kann mich hier nicht auf die Entwicklung der neuen Kurventheorie einlassen, welche durch den von mir aufgestellten allgemeinen Satz bedingt ist; ich muss mich hier damit begnügen, den Satz selbst in seiner Allgemeinheit hingestellt, und durch seine Anwendung auf die einfachsten Fälle seine Bedeutung anschaulich gemacht zu haben.

Ich bin überzeugt, dass schon hierdurch sowohl die Einfachheit als auch die ausgezeichnete Allgemeinheit jenes Satzes klar geworden sein wird; indem ja in der That alle Sätze, welche auf die Abhängigkeit der Kurven von linealen Konstruktionen sich beziehen, hieraus mit der grössten Leichtigkeit hervorströmen, während ihre Ableitung bisher, wenn jene Sätze überhaupt bekannt waren, vermittelst weitläuftiger Theorien erfolgte, und jeder dieser Sätze eine eigne Ableitung erforderte. Es ist auch klar genug, wie man jetzt diesen allgemeinen Satz auch ohne Hülfe der von mir angewandten Analyse ohne Schwierigkeit beweisen kann; aber erst durch sie tritt der Satz in seiner unmittelbaren Klarheit hervor, wie er auch durch sie aufgefunden ist; und zugleich bietet diese Analyse den höchst wichtigen Vortheil dar, die durch lineale Konstruktionen bestimmten Kurven auf gleich einfache Weise durch Gleichungen darzustellen.

Wie der Satz ebenso auf Kurven im Raume und auf krumme Oberflächen übertragen werden kann, bedarf keiner Auseinandersetzung, da der allgemeine Satz in § 145 dies schon in viel grösserer Allgemeinheit für die abstrakte Wissenschaft leistet.

Viertes Kapitel.

Verwandtschaftsbeziehungen.

§ 149—151. Allgemeiner Begriff der (äusseren und eingewandten) Abschattung und Projektion.

§ 149.

Wir knüpfen die Darstellung der Verwandtschaftsbeziehungen an 229 den Begriff der *Abschattung*.

Unter der Abschattung einer Grösse A auf ein Grundsystem G nach einem Leitsysteme L verstanden wir (§ 82) diejenige Grösse A', 228 welche dem Grundsysteme | G zugehört, und mit einem Theile des Leitsystemes (L) gleiches Produkt liefert, wie die abgeschattete Grösse (A), wobei vorausgesetzt wurde, dass G von L unabhängig ist, und das System LG das Hauptsystem darstellt, auf welches sich jenes Produkt bezieht.

Diese Erklärung stellten wir dort (in § 82) nur für den Fall fest, dass unter den Grössen A, L, G reine Ausdehnungsgrössen verstanden seien, und die Multiplikation eine äussere, also A' dem Grundsysteme G untergeordnet sei. Diese Erklärung erweiterten wir in § 108, indem wir statt der Ausdehnungsgrössen eine allgemeinere Grössengattung, die Elementargrössen einführten, und in § 142 deuteten wir eine noch weiter reichende Verallgemeinerung an, indem statt der äusseren Multiplikation mit den nöthigen Veränderungen und Beschränkungen die eingewandte eingeführt werden konnte.

Halten wir die Bestimmung fest, dass zwei Grössen einander eingeordnet genannt werden, wenn eine von ihnen der andern untergeordnet ist, so können wir sagen: *Unter der Abschattung einer reinen Grösse A auf ein Grundsystem G nach einem Leitsysteme L verstehen wir diejenige Grösse A', welche dem Grundsysteme G eingeordnet ist, und mit einem Theile von L in Bezug auf das aus Grundsystem und Leitsystem kombinirte System LG multiplicirt dasselbe Produkt liefert, wie die abgeschattete Grösse A.* Dabei ist also vorausgesetzt, dass LG ein äusseres Produkt darstellt und das Hauptsystem ist, dem auch die Grösse A angehört, und auf welches sich die Multiplikation bezieht.

Es ergiebt sich hieraus sogleich im allgemeinsten Sinne die höchst einfache Gleichung

$$A' = \frac{LA \,.\, G}{LG}.$$

230 In der That, da LA nach der Definition gleich LA' ist, so ist auch

$$LA \,.\, G = LA' \,.\, G;$$

und da hier gleichfalls nach der Definition A' und G einander eingeordnet sind, so kann man A' und G nach § 136 vertauschen und erhält somit den Ausdruck der rechten Seite

$$= LG \,.\, A'.$$

Somit ist nun, indem man durch LG die gewonnene Gleichung

$$LA \,.\, G = LG \,.\, A'$$

dividirt, die Richtigkeit der oben aufgestellten Gleichung

$$A' = \frac{LA.G}{LG}$$ 229

erwiesen, das heisst,

man erhält die Abschattung einer Grösse, wenn man das Leitsystem mit ihr und dem Grundsysteme fortschreitend multiplicirt, und das Resultat durch das Produkt des Leitsystems in das Grundsystem dividirt.

Hierdurch ist die in § 85 gestellte Aufgabe, die Abschattung analytisch auszudrücken, wenn die abzuschattende Grösse und der Sinn ihrer Abschattung, das heisst Grundsystem und Leitsystem gegeben sind, für reine Grössen allgemein gelöst.

§ 150.

Für Beziehungsgrössen haben wir nur festzusetzen, dass ihre Abschattung gefunden wird, wenn man sowohl ihren eigenthümlichen Werth in Bezug auf irgend ein Mass, als auch dies Mass abschattet, und in den Ausdruck der Beziehungsgrösse diese Abschattungen statt jener Grössen einführt. Ist zum Beispiel $H^3 . A$ die Beziehungsgrösse, H ihr Hauptmass und sind H', A' die Abschattungen von H und A nach irgend einem Richtsysteme genommen, so ist $H'^3 . A'$ die Abschattung der Beziehungsgrösse $H^3 . A$ nach demselben Richtsysteme.

Es liegt übrigens in der ursprünglichen Definition, dass die Abschattung einer Zahlengrösse sowohl, als einer Grösse, die das Hauptsystem LG darstellt, der abgeschatteten Grösse selbst gleich ist. Daraus folgt, dass, wenn das Beziehungssystem einer Beziehungsgrösse mit dem Hauptsysteme LG zusammenfällt, man dann, um die Beziehungsgrösse abzuschatten, nur ihren eigenthümlichen Werth abzuschatten braucht, und dass dann für die Abschattung der Beziehungsgrösse noch die für reine Grössen aufgestellte Definition der Abschattung gilt.

Wir wollen die Abschattung eine äussere oder [eine] eingewandte *231* nennen, je nachdem das Produkt LA ein äusseres oder [ein] eingewandtes, das heisst, je nachdem die abzuschattende Grösse von niederer oder höherer Stufe ist, als das Grundsystem. Ist sie von gleicher Stufe, so kann LA als äusseres und auch als eingewandtes Produkt aufgefasst, die Abschattung dann also gleichfalls auf beiderlei Arten benannt werden.

§ 151.

Nennt man das System des Produktes zweier Grössen | die Kombination*) dieser Grössen oder ihrer Systeme, und nennt man das 230

*) Nach diesem Begriffe ist die Kombination, wenn das entsprechende Produkt null ist, unbestimmt.

System der Abschattung die **Projektion** des Systems der abgeschatteten Grösse, so kann man sagen, *die Projektion eines Systemes werde gefunden, wenn man das System fortschreitend mit dem Leitsysteme und dem Grundsysteme kombinirt.* Indem wir dann die Projektion irgend einer Gesammtheit von Elementen, deren umfassendes System von gleicher oder niederer Stufe ist als das Grundsystem, als Gesammtheit der Projektionen dieser Elemente definiren, so haben wir den gewöhnlichen Begriff der Projektion, nur in etwas erweiterter Form; und es zeigt sich, wie sich die Projektion von der Abschattung nur durch den Masswerth unterscheidet, während das System dasselbe ist.

Um dies auf die *Geometrie* anzuwenden, wollen wir zuerst als Grundsystem eine Linie G, als Leitsystem eine davon unabhängige Elementargrösse erster Stufe l, das heisst, da es nur auf das System ankommt, entweder einen Punkt oder eine Richtung setzen. Die Projektion eines Punktes a ist dann der Durchschnitt der Linie al mit G (Fig. 13), während die Abschattung a' gleich $\frac{la\,.\,G}{lG}$ ist. Ist l eine Richtung (oder eine mit dieser Richtung begabte Strecke), so ist die Projektion der Durchschnitt einer von a aus nach dieser Richtung gezogenen Linie mit der Grundlinie G.

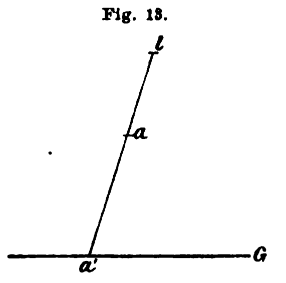


Fig. 13.

Ist das Grundsystem ein Punkt g, das Leitsystem eine Linie L, so wird eine Linie A projicirt, indem man den Durchschnitt zwischen A und L mit g verbindet (s. Fig. 14)*). Die Abschattung eines Theiles jener Linie, | den wir gleichfalls mit A bezeichnen, wird dann dargestellt durch die Gleichung

232

$$A' = \frac{LA\,.\,g}{Lg}.$$

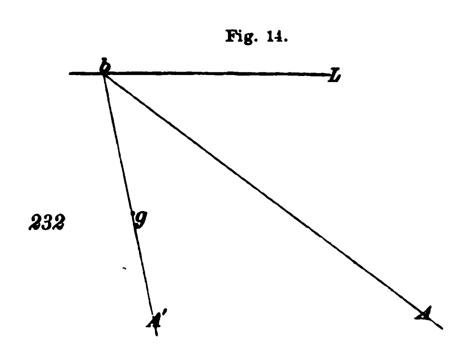


Fig. 14.

Nach dieser Analogie wird man sich leicht eine Anschauung bilden können von der Projektion eines Punktes oder einer Linie, wenn das Grundsystem eine Ebene, das Leitsystem ein Punkt oder eine Richtung

*) Man ist zwar nicht gewohnt, die so entstehende Linie als Projektion zu betrachten; allein die Analogie fordert diese Betrachtungsweise. Die Projektion ist hier nämlich eine eingewandte, s. oben.

ist; ferner von der eines Punktes oder einer Ebene, wenn Leitsystem 231 und Grundsystem Linien sind; endlich von der einer Linie oder Ebene, wenn das Grundsystem ein Punkt, das Leitsystem eine Ebene ist. Ist die abzuschattende Grösse von gleicher Stufe mit dem Grundsystem, so zeigt sich leicht, dass die Projektion ihres Systemes das Grundsystem selbst ist, dass also das Wesen der Abschattung dann nur in dem Masswerthe derselben beruht.

§ 152. Abschattung der Summe.

Wir haben nun die Geltung der im fünften Kapitel des I. Abschnittes (von § 81 an) für die dort behandelte Art der Abschattung erwiesenen Gesetze auch für den soeben dargestellten allgemeineren Begriff derselben zu untersuchen.

Dass diese Sätze noch gelten, wenn man statt der Ausdehnungsgrössen Elementargrössen setzt, folgte schon aus der vollkommenen Uebereinstimmung zwischen den Gesetzen, die für beiderlei Grössen gelten (s. § 108). Es ist also die Geltung derselben nur noch für die eingewandte Abschattung darzulegen, und zugleich sind jene Sätze noch so zu erweitern, dass man auch statt der äusseren Multiplikation die eingewandte einführt.

Vergleichen wir den von § 81 an gewählten Gang der Entwickelung, so können wir zunächst den am Schlusse jenes Paragraphen aufgestellten Satz für das eingewandte Produkt in folgender Form darstellen:

Wenn die Glieder einer Gleichung sämmtlich eingewandte Produkte zu zwei Faktoren sind, und entweder der erste oder der letzte Faktor (L) in allen diesen Gliedern derselbe ist, die ungleichen Faktoren aber demselben Systeme (G) übergeordnet sind, und dies System (G) mit dem gleichen Faktor L multiplicirt das Hauptsystem liefert, so kann man den Faktor L in allen Gliedern weglassen.

In der That werden sich dann die ungleichen Faktoren in den Formen AG, BG, ... darstellen lassen, wo A, B, ... dem L unter- 233 geordnet und die Produkte äussere sind; dann wird die Gleichung in der Form

$$L \,.\, AG + L \,.\, BG + \cdots = 0$$

erscheinen, oder da

$$L \,.\, AG = LG \,.\, A$$

ist, weil A dem L untergeordnet, G aber und L kombinirt das Hauptsystem darstellen, und ebenso

$$L \,.\, BG = LG \,.\, B, \ldots, \qquad 232$$

so erhält man

$$LG . A + LG . B + \cdots = 0,$$

das heisst,

$$LG (A + B + \cdots) = 0,$$

welcher Gleichung, da LG das Hauptsystem darstellt, nur genügt wird, wenn

$$A + B + \cdots = 0,$$

also auch

$$(A + B + \cdots) G,$$

das heisst

$$AG + BG + \cdots$$

gleich Null ist, und somit ist jener Satz bewiesen.

Aus diesem Satze folgen nun ganz auf dieselbe Weise, wie in § 82, die Sätze:

Eine Gleichung bleibt als solche bestehen, wenn man alle ihre Glieder in demselben Sinne abschattet,

und

Die Abschattung einer Summe ist gleich der Summe aus den Abschattungen der Stücke.

In der That erhält man, wenn man die gegebene Gleichung gliedweise mit dem Leitsystem (L) multiplicirt, und statt der Glieder der ursprünglichen Gleichung nun in diese neue Gleichung ihre Abschattungen auf dasselbe Grundsystem G setzt (was nach der Definition der Abschattung verstattet ist), die Gleichung in der Form, dass man nach dem zuletzt bewiesenen Satze den Faktor L weglassen darf; wodurch dann der erste jener beiden Sätze erwiesen ist, und somit auch der zweite, welcher nur eine andere Ausdrucksweise desselben Satzes darstellt *).

§ 153. Abschattung des Produktes.

234 Die Sätze in § 84 setzen die Abschattung eines äusseren Produktes in Beziehung mit den Abschattungen seiner Faktoren, und wir haben die entsprechenden Sätze aufzustellen, sowohl wenn das Produkt ein eingewandtes, als auch wenn die Abschattung eine eingewandte wird.

Ist das Produkt ein eingewandtes, dessen Beziehungssystem zugleich das Hauptsystem der Abschattung ist, und ist die Abschattung durchweg eine eingewandte, das heisst nicht nur die der Faktoren jenes 233 Produktes, sondern auch ins Besondere [die] des | Produktes selbst,

*) Was dem in § 83 dargestellten Satze entspricht, ist seinem wesentlichen Gehalte nach schon früher da gewesen, und kann daher hier übergangen werden.

so gilt der in § 84 dargestellte Satz, dass die Abschattung eines Produktes das Produkt ist aus den Abschattungen seiner Faktoren, auch für den soeben bezeichneten Fall, indem die Beweisführung genau dieselbe ist, wie in jenem Paragraphen. Nämlich, sind A, B die Faktoren des Produktes, L das Leitsystem, G das Grundsystem, so ist das Produkt $L \,.\, (A \,.\, B)$ ein eingewandtes aus drei Faktoren in Bezug auf dasselbe Hauptsystem; da man hier beliebig zusammenfassen und mit Beobachtung der Vorzeichen vertauschen kann, so wird der Werth jenes Produktes nicht geändert, wenn man statt A und B Grössen setzt, die mit L dieselben Produkte liefern, also zum Beispiel ihre Abschattungen A' und B' auf das Grundsystem G; es ist also dann

$$L \,.\, (A' \,.\, B') = L \,.\, (A \,.\, B),$$

und da A' sowohl, als B' als eingewandte Abschattungen dem Grundsysteme übergeordnet sind, so ist es auch ihr gemeinschaftliches System, das heisst ihr Produkt, also ist $A' \,.\, B'$ die Abschattung von $A \,.\, B$ auf G nach dem Leitsysteme L.

Es ist also die Geltung des Satzes für den bezeichneten Fall bewiesen; allein es zeigt sich bald, dass derselbe allgemein gilt, sobald nur die Abschattungen des Produktes und der beiden Faktoren entweder alle drei eingewandte, oder alle drei äussere sind, mag nun das Produkt ein äusseres oder eingewandtes sein.

Wir setzen zuerst voraus, dass das Produkt einen geltenden Werth habe und seine beiden Faktoren reine Grössen seien; und zwar wollen wir die Geltung des Satzes zuerst für den Fall beweisen, dass die Abschattung durchweg eine äussere, das Produkt ein eingewandtes ist. Es seien die beiden Faktoren dieses Produktes M und N, B stelle ihr gemeinschaftliches System dar; dann werden sich M und N als äussere Produkte in den Formen AB und BC darstellen lassen; und zwar muss dann ABC als | äusseres Produkt einen geltenden Werth haben, *235* weil C mit AB keinen Faktor von geltender Stufe gemeinschaftlich haben kann; denn hätten sie einen solchen gemeinschaftlich, so würden auch M und N, wie leicht zu sehen ist, ein System höherer Stufe gemeinschaftlich haben, als B ist, gegen die Voraussetzung. Nun ist

$$M \,.\, N = AB \,.\, BC = ABC \,.\, B,$$

indem B und BC einander eingeordnete Faktoren sind, welche man daher bei der fortschreitenden Multiplikation nach § 136 vertauschen kann. Wir haben nun vorausgesetzt, dass die Abschattung durchweg **234** eine äussere sei, sowohl für die Faktoren M und N, als auch für deren Produkt, das heisst für ihr gemeinschaftliches System B und ihr nächstumfassendes ABC. Sind nun A', B', C', M', N' beziehlich die äusseren

Abschattungen von A, B, C, M, N, so sind (nach § 84) $A'B'$, $B'C'$, $A'B'C'$ die Abschattungen von AB, BC, ABC. Ferner da $M.N$ gleich $ABC.B$ ist, so ist nach der in § 150 aufgestellten Definition die Abschattung von $M.N$ gleich dem Produkt der Abschattungen von ABC und B, also gleich $A'B'C'.B'$. Ferner ist

$$M'.N' = A'B'.B'C' = A'B'C'.B',$$

also das Produkt der Abschattungen $M'.N'$ gleich der Abschattung des Produktes $M.N$. Somit ist für den in Betracht gezogenen Fall die Gültigkeit des obigen Gesetzes nachgewiesen.

Es bleibt also das Fortbestehen dieses Gesetzes nur noch für den Fall zu beweisen, dass die Abschattung durchweg eine eingewandte ist. Der Beweis für diesen Fall ist genau derselbe, wie für den soeben betrachteten Fall, wenn man nur nach dem in § 142 aufgestellten Princip statt der äusseren Multiplikation die auf das Hauptsystem der Abschattung bezügliche eingewandte Multiplikation einführt, und die dort entwickelten Umänderungen, welche durch diese Einführung bedingt sind, eintreten lässt. Namentlich ist festzuhalten, dass, wie jede Grösse, welche einer andern untergeordnet ist, als äusserer Faktor derselben dargestellt werden kann, so auch jede Grösse, welche einer andern übergeordnet ist, als eingewandter Faktor derselben in Bezug auf das Hauptsystem dargestellt werden könne. Um jedoch die Art dieser Umänderung an einem ziemlich zusammengesetzten Beispiele klar an's Licht treten zu lassen, will ich die Uebertragung des obigen 236 Beweises hier ausführlich folgen | lassen.

Es seien die beiden Faktoren des eingewandten Produktes M und N, B stelle ihr nächstumfassendes System dar; dann werden sich M und N als eingewandte, auf das Hauptsystem der Abschattung bezügliche Produkte in den Formen AB und BC darstellen lassen*); und 235 zwar muss dann ABC als | eingewandtes, auf das Hauptsystem der Abschattung bezügliches Produkt einen geltenden Werth haben, weil AB und C von keinem niederen Systeme als dem Hauptsysteme umfasst werden können**); denn würden sie von einem solchen Systeme

---

*) In der That, wenn S ein System darstellt, welches das System von B zum Hauptsysteme der Abschattung ergänzt, so wird man nur

$$A = \frac{SM}{SB} \text{ und } C = \frac{NS}{BS}$$

zu setzen haben.

**) Hier tritt die Analogie in dem Wortausdrucke nicht so klar hervor. Sollte sie klar hervortreten, so müsste man im ersten Falle sagen: „weil das System, welches AB und C gemeinschaftlich haben, von keiner höheren Stufe als der

umfasst, so würden auch M und N, wie leicht zu sehen ist*), von einem Systeme niederer Stufe umfasst werden, als B ist, gegen die Voraussetzung. Nun ist

$$M . N = AB . BC = ABC . B,$$

indem B und BC einander eingeordnete Faktoren sind, welche man daher bei der fortschreitenden Multiplikation nach § 136 vertauschen kann. Wir haben nun vorausgesetzt, dass die Abschattung durchweg eine eingewandte sei, sowohl für die Faktoren M und N, als auch für deren Produkt, das heisst, für ihr nächstumfassendes System B und ihr gemeinschaftliches ABC. Sind nun A', B', C', M', N' be- 237 ziehlich die eingewandten Abschattungen von A, B, C, M, N, so sind (nach § 153) $A'B'$, $B'C'$, $A'B'C'$ die Abschattungen von AB, BC, ABC. Ferner, da $M . N$ gleich $ABC . B$ ist, so ist nach der in § 150 aufgestellten Definition die Abschattung von $M . N$ gleich dem Produkt der Abschattungen von ABC und B, also gleich $A'B'C' . B'$. Ferner ist

$$M' . N' = A'B' . B'C' = A'B'C' . B',$$

also das Produkt der Abschattungen $M' . N'$ gleich der Abschattung des Produktes $M . N$. Somit ist auch für diesen Fall die Gültigkeit des obigen Gesetzes nachgewiesen. 236

Wir setzten in beiden Fällen noch voraus, dass das abzuschattende Produkt einen geltenden Werth habe, und die Faktoren reine Grössen seien. Ist das abzuschattende Produkt null, so ist, um die Geltung jenes Gesetzes auch für diesen Fall zu erweisen, nur zu zeigen, dass das Produkt aus den Abschattungen der beiden Faktoren auch null sei.

Wenn einer der ursprünglichen Faktoren null ist, so ist auch seine Abschattung null, also auch das Produkt der Abschattungen null. Wenn aber die beiden Faktoren geltende Werthe haben, und das Produkt dennoch null ist, so muss, da

---

nullten sein kann", und im letzteren Falle: „weil das System, welches AB und C umfasst, von keiner niederen Stufe als der h-ten sein kann", indem nämlich h die Stufe des Hauptsystems bezeichnet.

*) Nämlich, wenn D jenes System darstellte, was AB, oder M, und C umfassen sollte und doch niedriger wäre als das Hauptsystem, so würde sich C als eingewandtes, auf das Hauptsystem bezügliches Produkt in der Form $D . E$ darstellen lassen, und es würde $N = B . C = B . (D . E)$, oder da dies Produkt ein reines ist, $= (B . D) . E$ sein, wo das nächstumfassende System zu B und D das Hauptsystem sein muss; es wird also das den Grössen B und D gemeinschaftliche System die Grösse N umfassen, und auch die Grösse M, da diese sowohl von B als von D umfasst wird. Das gemeinschaftliche System von B und D umfasst also M und N, ist aber von niederer Stufe als B, da D nicht das Hauptsystem ist, und B und D als nächstumfassendes System das Hauptsystem haben.

$$M \,.\, N = ABC \,.\, B$$

ist, und B nicht null ist, $ABC.B$ als Produkt in der Form der Einordnung aber nicht anders null werden kann, als wenn einer der Faktoren null wird, nothwendig ABC null sein, also auch seine Abschattung, das heisst

$$A'B'C' = 0;$$

also muss auch $A'B'C' \,.\, B'$, das heisst $M' \,.\, N'$ oder das Produkt der Abschattungen null sein. Es bleibt also auch noch in diesem Falle die Abschattung des Produktes gleich dem Produkt aus den Abschattungen der Faktoren.

Es ist nun, um das Gesetz in seiner ganzen Allgemeinheit darzustellen, nur noch die Beschränkung aufzuheben, dass die Faktoren des abzuschattenden Produktes reine Grössen sind.

Sind dieselben Beziehungsgrössen, deren Beziehungssystem (K) identisch ist mit dem Beziehungssysteme des eingewandten Produktes, und sind μ und ν die Gradzahlen jener Beziehungsgrössen, M und N ihre eigenthümlichen Werthe in Bezug auf das Mass K, so wird sich das Produkt in der Form

$$K^{\mu} M \,.\, K^{\nu} N$$

238 darstellen lassen. Dies Produkt ist nun nach § 138 gleich $K^{\mu+\nu} M \,.\, N$ oder, wenn $M \,.\, N$ gleich $K \,.\, I$ ist, gleich $K^{\mu+\nu} K \,.\, I$. Bezeichnen wir die Abschattungen mit Accenten und nehmen dieselben entweder durchweg als äussere oder durchweg als eingewandte an, so ist die Abschattung des obigen Produktes

$$= K'^{\mu+\nu} K' \,.\, I',$$
$$= K'^{\mu+\nu} M' \,.\, N',$$
$$= K'^{\mu} M' \,.\, K'^{\nu} N',$$

das heisst, gleich dem Produkte der Abschattungen. Also gilt nun das 237 Gesetz auch noch, wenn die Faktoren Beziehungsgrössen sind, deren Beziehungssystem mit dem Beziehungssysteme des eingewandten Produktes zusammenfällt. Daraus folgt nun auch, dass es für reine eingewandte Produkte aus beliebig vielen Faktoren gilt.

Nachdem wir nun alle überflüssigen Beschränkungen aufgehoben haben, können wir das Gesetz in seiner ganzen Allgemeinheit hinstellen:

Die Abschattung des Produktes ist gleich dem Produkte aus den Abschattungen seiner Faktoren, wenn für alle abzuschattenden Grössen sowohl der Sinn der Abschattung als auch das Beziehungssystem dasselbe ist.

Wir sagen nämlich, dass der Sinn der Abschattung mehrerer Grössen derselbe sei, wenn nicht nur Grundsystem und Leitsystem dieselben sind, sondern auch die Abschattungen entweder sämmtlich äussere oder sämmtlich eingewandte sind.

§ 154. **Affinität. Bildung affiner Vereine.**

Daraus, dass jede Gleichheit, welche zwischen den Vielfachensummen einer Reihe von Grössen stattfindet, auch bestehen bleibt, wenn man statt der Grössen ihre Abschattungen setzt, oder mit andern Worten, dass die Abschattungen in derselben Zahlenrelation stehen wie die abgeschatteten Grössen, folgt, dass die Verwandtschaft zwischen den Abschattungen und den abgeschatteten Grössen eine besondere Art einer allgemeineren Verwandtschaft ist, welche darin besteht, dass die zwischen einer Reihe von Grössen herrschenden Zahlenrelationen auch für die entsprechenden Grössen der zweiten Reihe gelten; und wir wollen daher diese allgemeinere Verwandtschaft der Betrachtung unterwerfen.

Es tritt jedoch diese Verwandtschaft erst in ihrer ganzen Einfachheit hervor, wenn die Beziehung eine gegenseitige ist, das heisst, wenn jede Zahlenrelation, welche zwischen Grössen der einen | Reihe, *239* welche von beiden es auch sei, stattfindet, auch zwischen den Grössen der andern Reihe herrscht; und zwei solche Vereine von entsprechenden Grössen, welche in dieser gegenseitigen Beziehung zu einander stehen, nennen wir affin*).

Diese Gegenseitigkeit der Beziehung führt das Gesetz herbei, welches überall jede einfache Beziehung auszeichnet, dass nämlich, wenn zwei 238 Vereine von Grössen A und B mit einem dritten C affin sind, sie es auch unter sich sind. In der That, da dann jede Relation in A auch in C stattfindet, und jede Relation, die in C stattfindet, auch in B herrscht, so muss auch jede Relation in A zugleich in B stattfinden, und aus demselben Grunde jede Relation, die in B herrscht, zugleich in A stattfinden, das heisst, A und B sind einander affin.

Es fragt sich nun, wie man zu einem beliebigen Vereine von Grössen überhaupt einen andern Verein bilden kann, welcher mit jenem in derselben Zahlenrelation stehe, und ins Besondere einen solchen,

*) Der Begriff der Affinität, wie wir ihn hier aufstellten, stimmt mit dem gewöhnlichen Begriff derselben in sofern überein, als er, auf dieselben Grössen angewandt, auch dieselbe Beziehung darstellt; ihr Begriff ist hier nur in sofern allgemeiner gefasst, als er sich auch auf andere Grössen übertragen lässt.

bei welchem diese Beziehung eine gegenseitige ist, das heisst, welcher dem ersteren affin sei.

Hat man in dem gegebenen Vereine n Grössen (derselben Stufe), zwischen denen keine Zahlenrelation stattfindet, als deren Vielfachensummen sich aber die übrigen Grössen jenes Vereins darstellen lassen, so lässt sich zeigen, dass man, um zu einem zweiten Vereine zu gelangen, welcher dieselben Zahlenrelationen darbietet, die in dem ersten Vereine herrschen, in dem zweiten Vereine n beliebige Grössen, welche unter sich von gleicher Stufe sind, als jenen n Grössen entsprechende annehmen kann, dann aber zu jeder andern Grösse des ersten Vereins die entsprechende im zweiten findet, indem man die erste als Vielfachensumme jener n Grössen der ersten Reihe darstellt und dann in dieser Vielfachensumme statt jener n Grössen die entsprechenden der zweiten setzt, dass aber diese Beziehung nur dann und immer dann eine gegenseitige ist, die Vereine also einander affin sind, wenn zugleich die n Grössen des zweiten Vereins keine Zahlenrelation unter sich zulassen.

240 Die Richtigkeit | dieser Behauptung beruht darauf, dass, wenn n Grössen in keiner Zahlenrelation stehen, das heisst, keine derselben sich als Vielfachensumme der übrigen darstellen lässt, und dennoch eine Vielfachensumme dieser Grössen gleich Null sein soll, nothwendig alle Koefficienten dieser Vielfachensumme einzeln genommen gleich Null sein müssen; denn hätte einer von ihnen einen geltenden Werth, so würde die Grösse, der er zugehört, sich als Vielfachensumme der übrigen darstellen lassen, was gegen die Voraussetzung ist. Aus diesem Satze nun ergiebt sich die Richtigkeit der obigen Behauptung sogleich. Denn sind $a, b, c, \ldots$ irgend welche Grössen des ersten Vereins, zwischen denen eine Zahlenrelation

239 $$\alpha a + \beta b + \cdots = 0$$

statt findet, und man drückt $a, b, \ldots$ als Vielfachensummen jener n Grössen des ersten Vereins $r_1, \ldots r_n$ aus, so wird sich jene Gleichung in der Form

$$\varrho_1 r_1 + \varrho_2 r_2 + \cdots = 0$$

darstellen lassen, in welcher nach dem soeben erwiesenen Satze alle Koefficienten null sein müssen; also

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = 0, \cdots.$$

Diese Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ sind nur von den Koefficienten $\alpha, \beta, \ldots$ und von den Koefficienten der Vielfachensummen, in welchen $a, b, \ldots$ dargestellt sind, abhängig. Sind nun $a', b', \ldots$ und $r'_1, r'_2, \ldots$ die entsprechenden Grössen des zweiten Vereins, so müssen $a', b', \ldots$ aus

a, b, ... dadurch hervorgehen, dass man in den Vielfachensummen, welche a, b, ... darstellen, statt r_1, r_2, ... die entsprechenden Grössen r'_1, r'_2, ... setzt. Folglich wird der Ausdruck

$$\alpha a' + \beta b' + \cdots = \varrho_1 r'_1 + \varrho_2 r'_2 + \cdots$$

sein, und also, da ϱ_1, ϱ_2, ... einzeln genommen null sind, selbst gleich Null sein müssen, also

$$\alpha a' + \beta b' + \cdots = 0,$$

das heisst, zwischen den Grössen des zweiten Vereins bleibt jede Zahlenrelation bestehen, welche zwischen denen des ersten besteht. Sind nun die Grössen r'_1, ... r'_n gleichfalls von der Beschaffenheit, dass zwischen ihnen keine Zahlenrelation stattfindet, so lässt sich ebenso der Rückschluss machen, die Beziehung ist also dann eine gegenseitige, und die beiden Vereine von Grössen sind einander affin. Hingegen, herrscht zwischen diesen Grössen r'_1, ... r'_n eine | Zahlenrelation, so ist klar, 241 dass man, da diese Relation zwischen den entsprechenden Grössen des ersten Vereins nicht stattfindet, auch nicht von dem Herrschen einer Relation innerhalb des zweiten Vereins einen Schluss auf das Fortbestehen derselben im ersten machen darf, dass vielmehr die Beziehung dann nur eine einseitige ist.

§ 155, 156. Entsprechen der Produkte entsprechender Grössen aus zwei affinen Vereinen.

§ 155.

Wenn nun zwei Vereine entsprechender Grössen einander affin sind, so werden auch die Produkte aus den Grössen des einen Vereins den entsprechend gebildeten Produkten des andern Vereins affin sein, wenn nur die Multiplikationsweise, durch welche diese entsprechenden Produkte gebildet sind, in beiden Vereinen in dem Sinne genommen 240 ist, dass das Produkt dann, aber auch nur dann als null erscheint, wenn die Faktoren in einer Zahlenrelation zu einander stehen.

Ist nämlich die Multiplikation in dieser Weise angenommen, so kann zuerst zwischen den verschiedenen Produkten, welche sich aus den n Grössen A_1, ... A_n des einen Vereins, die in keiner Zahlenrelation zu einander standen, bilden lassen, gleichfalls keine Zahlenrelation stattfinden; das heisst, es kann keins dieser Produkte sich als Vielfachensumme der übrigen darstellen lassen. Denn gesetzt, es wäre dies der Fall, so könnte man in der Gleichung, welche jenes Produkt, zum Beispiel $A_1 A_2 A_3$, als Vielfachensumme der übrigen darstellt, jedes Glied mit den sämmtlichen Faktoren $A_4 \ldots A_n$ multipliciren, die jenes

Produkt nicht enthält; durch diese Multiplikation werden dann alle übrigen Produkte mit Ausnahme dessen, was als Vielfachensumme der übrigen erscheinen soll, null, weil in ihnen wenigstens einer von den hinzutretenden Faktoren schon unter den vorhandenen Faktoren vorkommt, also nun zwischen den Faktoren Gleichheit, also auch eine Zahlenrelation statt findet; man erhält daher die Gleichung

$$A_1 . A_2 \ldots A_n = 0,$$

das heisst, zwischen $A_1, \ldots A_n$ würde eine Zahlenrelation statt finden müssen, was wider die Voraussetzung ist.

Betrachtet man nun ferner ein Produkt PQR, dessen Faktoren Grössen jenes Vereins, also als Vielfachensummen von $A_1, \ldots A_n$ darstellbar sind, so wird auch dies Produkt, wenn man die einzelnen Faktoren als Vielfachensummen darstellt, gliedweise durchmultiplicirt und die Faktoren der einzelnen Glieder gehörig ordnet, als Vielfachen-242summe | der aus den Faktoren $A_1, \ldots A_n$ gebildeten Produkte erscheinen. Sind nun in dem andern Vereine $A'_1, \ldots A'_n$ als die den Grössen $A_1, \ldots A_n$ entsprechenden angenommen, und werden als die ihren Produkten $A_1 A_2 A_3, \ldots$ entsprechenden Grössen die Produkte der entsprechenden Faktoren $A'_1 A'_2 A'_3, \ldots$ angenommen (was verstattet ist, da zwischen jenen Produkten des ersten Vereins keine Zahlenrelation stattfindet), so wird dem Produkte PQR das Produkt $P'Q'R'$ der entsprechenden Faktoren gleichfalls entsprechen. Denn man erhält aus PQR das Produkt $P'Q'R'$, wenn man, nachdem P, Q, R als Vielfachensummen von $A_1, \ldots A_n$ dargestellt sind, statt $A_1, \ldots A_n$ die 241 entsprechenden Grössen $A'_1, \ldots A'_n$ setzt. Das Gesetz des | Durchmulticirens ist nun für beide Produkte dasselbe, jedes Produkt ferner zwischen $A_1, \ldots A_n$, was gleiche Faktoren enthält und somit null wird, hat auch zum entsprechenden Produkte ein solches, was null wird; und darin liegt, dass auch dasselbe Vertauschungsgesetz herrscht, indem $(A + B)(A + B)$ oder $AB + BA$ in beiden Fällen null ist, also die Faktoren nur mit Zeichenwechsel vertauschbar sind. Daraus nun folgt, dass, wenn PQR als Vielfachensumme der aus den Faktoren $A_1, \ldots A_n$ gebildeten Produkte erscheint, man daraus $P'Q'R'$ erhält, indem man statt $A_1, \ldots A_n$ die entsprechenden Grössen $A'_1, \ldots A'_n$, oder statt der aus den ersteren gebildeten Produkte die aus den letzteren gebildeten setzt.

Hierin liegt nun vermittelst des obigen Gesetzes, dass die Produkte des zweiten Vereins in derselben Zahlenrelation stehen, wie die entsprechenden des ersten, und dass also, wenn die beiden Vereine einander affin sind, auch die Produkte des einen Vereins den entsprechenden des andern affin sind.

§ 156.

Es giebt unter den bisher betrachteten Multiplikationsweisen nur zwei, welche der im vorigen Paragraphen ausgesprochenen Bedingung genügen, dass nämlich das Produkt dann und nur dann als null erscheinen soll, wenn zwischen den Faktoren eine Zahlenrelation herrscht, das sind nämlich erstens die äussere Multiplikation von Grössen erster Stufe und zweitens die eingewandte Multiplikation von Grössen $(n-1)$-ter Stufe in einem Hauptsysteme n-ter Stufe und in Bezug auf dasselbe.

Dass die übrigen Multiplikationsweisen, welche wir bisher kennen gelernt haben, nicht den Bedingungen des vorigen Paragraphen genügen, leuchtet sehr | bald ein. Zwar würde das in jenem Paragraphen 243 dargestellte Verwandtschaftsgesetz ein vortreffliches Mittel darbieten, um in die Bedeutung des formalen Produktes, welches wir bisher nicht der Betrachtung unterworfen hatten, hineinzudringen; doch wollen wir uns durch solche Betrachtungen, welche uns jedenfalls in schwierige und weitläuftige Untersuchungen verwickeln würden, nicht den Raum für andere, wichtigere Gegenstände verkürzen; und wir bleiben daher bei den beiden Fällen stehen, auf welche unser Gesetz direkte Anwendung erleidet.

§ 157. **Direkte und reciproke Affinität. Allgemeiner Satz.**

Wir gelangen durch Anwendung des in § 155 dargestellten Gesetzes auf die beiden in § 156 aufgeführten Multiplikationsweisen zu zwei Hauptgattungen der Affinität, nämlich der d i r e k t e n und der r e c i p r o k e n, indem eines Theils den Grössen | erster Stufe des einen 242 Vereins Grössen erster Stufe des andern entsprechen; und andern Theils den Grössen erster Stufe des einen Vereins Grössen $(n-1)$-ter Stufe des andern entsprechen, wenn jeder Verein ein System n-ter Stufe als Hauptsystem darbietet. Wir können daher folgenden Hauptsatz der Affinität aussprechen:

Wenn man zu n von einander unabhängigen Grössen erster Stufe n gleichfalls von einander unabhängige Grössen erster Stufe oder n Grössen $(n-1)$-ter Stufe, welche einem System n-ter Stufe angehören, deren eingewandtes Produkt aber einen geltenden Werth hat, als entsprechende nimmt, so bilden die aus den entsprechenden Grössen durch dieselben Grundverknüpfungen gebildeten Grössen zwei einander affine Vereine von Grössen, und jede Grundgleichung, welche zwischen den Grössen des einen Vereins besteht, bleibt auch bestehen, wenn man statt dieser Grössen die entsprechenden des andern setzt. Im ersten Falle heissen beide Vereine d i r e k t a f f i n, im zweiten r e c i p r o k a f f i n.

Dieser Satz ist von so allgemeiner Geltung, dass er, wie wir späterhin zeigen werden, die allgemeinsten linearen Verwandtschaften, wie die Kollineation und Reciprocität, unter sich begreift und den vollständigen Begriff dieser Verwandtschaften, welche bei der gewöhnlichen Auffassungsweise nur in unvollkommener Gestalt hervortreten, darstellt. Namentlich liegt in diesem Satze, dass, wenn m Grössen des einen Vereins irgend einem System angehören, dann auch die ent-244sprechenden Grössen des andern Vereins bei der direkten | Affinität einem System derselben Stufe angehören, bei der reciproken einem System von ergänzender Stufe, weil nämlich das Produkt derselben gleichzeitig null wird.

§ 158. Zusammenhang zwischen Abschattung und Affinität.

Wir haben nun die Abschattung als besondere Art der konstanten Zahlenrelation und der Affinität darzustellen, und anzugeben, in welchem Falle die allgemeine Verwandtschaft in diese besondere übergeht.

Wenn zuerst zwischen den Grössen erster Stufe eines Vereins A dieselben Zahlenrelationen statt finden, welche zwischen den entsprechenden Grössen erster Stufe eines andern Vereines B herrschen, so fragt sich, welcher Bedingung beide Vereine unterworfen sein müssen, wenn 243 der erste Verein A zugleich die Abschattung des | zweiten B sein soll.

Nennen wir das System, welches einen Verein von Grössen erster Stufe zunächst umfasst, *das System dieses Vereins*, so leuchtet ein, dass A nur dann die Abschattung von B sein könne, wenn in demjenigen Systeme C, welches den Systemen beider Vereine gemeinschaftlich ist, die entsprechenden Grössen beider Vereine zusammenfallen, das heisst, einander gleich sind, wie dies unmittelbar aus der Idee der Abschattung hervorgeht. Wir können aber auch zeigen, dass, wenn diese Bedingung eintritt, auch jedesmal der Verein A als Abschattung des Vereines B aufgefasst werden könne, und der Sinn der Abschattung dann bestimmt sei.

Um dies zu beweisen, können wir zuerst das System von B als Kombination des gemeinschaftlichen Systemes C mit einem davon unabhängigen Systeme darstellen. Dies System, welches dann zugleich von dem Systeme des Vereines A unabhängig sein wird, sei von m-ter Stufe, das heisst, es sei durch das äussere Produkt von m Grössen erster Stufe $b_1, \ldots b_m$ dargestellt, welche alle von einander unabhängig sind. Wird nun vorläufig L als das Leitsystem angenommen, und sind $a_1, \ldots a_m$ die den Grössen $b_1, \ldots b_m$ entsprechenden Grössen des ersten Vereins A, so erhält man, wenn zugleich $a_1, \ldots a_m$ die Abschattungen von $b_1, \ldots b_m$ nach dem Leitsysteme L sein sollen, die Gleichungen:

$$L \,.\, a_1 = L \,.\, b_1, \;\ldots,\; L \,.\, a_m = L \,.\, b_m,$$

oder

$$L \,.\, (a_1 - b_1) = 0, \;\ldots,\; L \,.\, (a_m - b_m) = 0,$$

das heisst, die Grössen $(a_1 - b_1), \ldots, (a_m - b_m)$ sind dem Leitsysteme untergeordnet. Es sind aber diese Grössen sowohl von einander, als 245 von dem Systeme des Vereins A unabhängig. Denn fände eine solche Abhängigkeit statt, so würde auch eine Vielfachensumme von $a_1, \ldots a_m$ und den andern Grössen erster Stufe, die dem Vereine A angehören, als gleich erscheinen einer Vielfachensumme der Grössen $b_1, \ldots b_m$, das heisst, es würde in dem Systeme $b_1 \,.\, b_2 \ldots b_m$ eine Grösse geben, welche den Systemen beider Vereine gemeinschaftlich wäre, das heisst, dem Systeme C angehörte, was wider die Voraussetzung ist, indem jenes Produkt von C unabhängig angenommen ist. Da nun die Grössen $(a_1 - b_1), \ldots, (a_m - b_m)$ von einander unabhängig und dem Systeme L untergeordnet sind, so ist auch ihr äusseres Produkt diesem Systeme untergeordnet; und wenn wir annehmen, dass das Leitsystem nicht von höherer als m-ter Stufe ist, so folgt, dass es durch jenes ¦ Pro- 244 dukt dargestellt, also vollkommen bestimmt ist, oder mit andern Worten, es ist dann der Sinn der Abschattung bestimmt. Setzen wir daher L jenem Produkte gleich, so folgt auch umgekehrt die Gültigkeit der Gleichungen

$$L \,.\, a_1 = L \,.\, b_1, \;\ldots,$$

und da L von dem Systeme von A unabhängig ist, so folgt, dass $a_1, \ldots a_m$ in der That die Abschattungen von $b_1, \ldots b_m$ auf das System von A nach dem Leitsysteme L sind. Nimmt man nun in dem Systeme von B irgend eine andere Grösse erster Stufe b an, so wird sich dieselbe als Vielfachensumme von den Grössen $b_1, \ldots b_m$ und von Grössen, die dem Systeme C angehören, darstellen lassen. Dann wird die entsprechende Grösse a des ersten Vereins sich als entsprechende Vielfachensumme von den entsprechenden Grössen ihres Vereins darstellen lassen, das heisst, als entsprechende Vielfachensumme von den Abschattungen jener Grössen erscheinen, oder, sie selbst ist die Abschattung jener ersteren. Wir haben somit den Satz gewonnen:

Wenn zwischen den Grössen erster Stufe eines Vereins (A) dieselben Zahlenrelationen stattfinden, welche zwischen den entsprechenden Grössen erster Stufe eines andern Vereins (B) herrschen: so ist der erste Verein (A) dann und nur dann als Abschattung des zweiten (B) aufzufassen, wenn in dem gemeinschaftlichen Systeme beider Vereine die entsprechenden Grössen zusammenfallen; und zwar ist dann der Sinn der Abschattung vollkommen bestimmt.

Als unmittelbare Folgerung aus diesem Satze geht hervor, „dass 246

von zwei affinen Vereinen dann und nur dann der eine als Abschattung des andern erscheint, wenn in dem gemeinschaftlichen Systeme beider Vereine je zwei entsprechende Grössen zusammenfallen, und dass dann jeder von beiden Vereinen als Abschattung des andern aufgefasst werden kann.

§ 159. Affinität in der Geometrie.

Um die gewonnenen Resultate durch geometrische Anschauungen zu verdeutlichen, wird es genügen, affine Vereine beiderlei Art in der Ebene zu betrachten.

Es ist klar, wie man dann zu drei nicht in gerader Linie liegenden Punktgrössen (die aber auch in Strecken übergehen können) drei beliebige ebenfalls nicht in gerader Linie liegende Punktgrössen als entsprechende annehmen, und daraus zwei einander direkt affine Ver-245eine ableiten kann, indem man die | aus jenen entsprechenden Grössen auf gleiche Weise gebildeten Vielfachensummen, oder deren auf gleiche Weise gebildete Produkte als entsprechende Grössen setzt. Ebenso erhält man zwei reciprok affine Vereine, wenn man zu drei Elementargrössen erster Stufe, die nicht in gerader Linie liegen, drei Liniengrössen, deren Linien ein Dreieck begränzen, als entsprechende annimmt, und ausserdem je zwei durch dieselben Grundverknüpfungen aus ihnen erzeugte Grössen als entsprechende setzt.

Es ist aus dem Früheren klar, wie im ersten Falle dreien Punktgrössen des einen Vereins, die in gerader Linie liegen, auch drei des andern entsprechen, die gleichfalls in gerader Linie liegen, und ebenso dreien Liniengrössen des einen, die durch Einen Punkt gehen, drei des andern entsprechen, welche gleichfalls durch Einen Punkt gehen; wie ferner im zweiten Falle dreien Punktgrössen des einen Vereins, die in Einer geraden Linie liegen, drei Liniengrössen des andern entsprechen, die durch Einen Punkt gehen, und umgekehrt. Dabei ist jedoch festzuhalten, dass die Punktgrössen auch in Strecken, die Liniengrössen in Flächenräume umschlagen können.

§ 160. Lineäre Verwandtschaft, Kollineation und Reciprocität nach dem Princip der gleichen Zeiger.

Unsere bisherige Betrachtungsweise unterscheidet sich von der gewöhnlichen geometrischen Anschauungsweise dadurch, dass wir die Punkte nicht für sich, sondern behaftet mit gewissen Zahlenkoefficienten, die wir Gewichte nannten, auffassten; und dies war nothwendig, damit sie eben als Grössen erscheinen konnten. Der Punkt selbst erschien

entweder als solche Grösse mit dem | Gewichte Eins, oder als System, 247 dem die Grösse angehörte. Ebenso mussten die Linie, die Ebene, der Raum, wenn sie als Grössen erscheinen sollten, einen bestimmten Masswerth darbieten, und so als Liniengrösse, Plangrösse und begränzter Körperraum aufgefasst werden.

Es ist besonders die erste Betrachtungsweise (der Punkte als Grössen), welche von der gewöhnlichen gänzlich abweicht. Es bleibt uns daher jetzt noch besonders übrig, für die in diesem Kapitel dargestellten Gesetze jene Differenz auszugleichen.

Wir knüpfen diese Betrachtung an die allgemeine Verwandtschaft der Affinität, und nennen zunächst die entsprechenden Systeme zweier affiner Vereine *lineär verwandt*, und zwar, wenn jene Vereine direkt affin sind, so nennen wir die Vereine ihrer Systeme *kollinear verwandt*, und wenn sie reciprok affin sind, *reciprok verwandt*; oder um diese Begriffe | sogleich auf die Geometrie zu übertragen: wenn zwei Ver- 246 eine von Grössen (Elementargrössen, Liniengrössen, Plangrössen) in direkter oder reciproker Affinität stehen, so nennen wir die Vereine der ihnen zugehörigen Systeme (Punkte, Linien, Ebenen) kollinear oder reciprok verwandt. Wir haben nun nachzuweisen, dass diese Begriffe mit den sonst unter den aufgeführten Namen verstandenen Begriffen zusammen fallen.

Möbius, der Begründer dieser allgemeinen Verwandtschaftstheorie, stellt als den Begriff der Kollineation auf*), dass bei zwei ebenen oder körperlichen Räumen, welche in dieser Verwandtschaft stehen, jedem Punkte des einen Raumes ein Punkt in dem andern Raume dergestalt entspricht, dass, wenn man in dem einen Raume eine beliebige Gerade zieht, von allen Punkten, welche von dieser Geraden getroffen werden, die entsprechenden Punkte des andern Raumes gleichfalls durch eine Gerade verbunden werden können. Hieraus folgt vermöge der in den vorigen Paragraphen dargelegten Gesetze, dass in der That die Systeme, welche den entsprechenden Grössen zweier direkt affiner Vereine zugehören, zwei kollineare Vereine in dem von Möbius dargestellten Sinne bilden; aber auch umgekehrt lässt sich zeigen, dass, wenn zwei Räume in diesem Sinne als kollinear verwandt erscheinen, die entsprechenden Punkte auch mit solchen Gewichten behaftet werden können, dass die Vereine | der so gebildeten Grössen einander affin 248 sind; oder mit andern Worten, dass zwei Räume, welche nach dem Princip der gleichen Konstruktionen einander kollinear sind, es auch nach dem Princip der gleichen Zeiger sind.

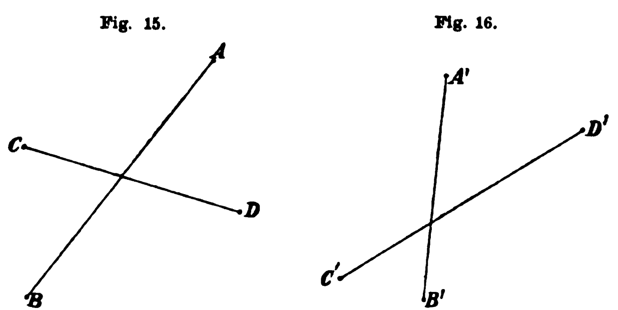
*) in seinem barycentrischen Kalkül, § 217 [ges. Werke, Bd. I, S. 266].

§ 161, 162. Kollineation nach dem Princip der gleichen Zeiger und nach dem Princip der gleichen Konstruktion. Identität beider Begriffe.

§ 161.

Um dies zuerst für die Ebene zu beweisen, nehme man irgend vier Punkte in der einen Ebene an, von denen keine drei in gerader Linie liegen, und ebenso in der andern auch vier solche Punkte, und setze sie einander entsprechend, was nach dem Princip der gleichen Konstruktionen verstattet ist, weil der vierte Punkt von den drei ersten durch keine lineäre Konstruktion abhängt: Nun kann man in jeder Ebene dreien von den Punkten solche Gewichte hinzufügen, dass der vierte Punkt als Summe der so gebildeten drei Elementargrössen erscheint; denn wenn man nur jene drei Punkte als Richtelemente annimmt, so sind die drei Richtstücke des vierten Punktes die verlangten 247 Elementargrössen; nimmt man nun diese drei Paare von Elementargrössen als einander entsprechende Grössen zweier affiner Vereine an, so sind auch die beiden vierten Punkte entsprechende Grössen derselben Vereine. Nun erhält man nach dem Princip der gleichen lineären

Fig. 15. Fig. 16.



Konstruktion aus vier entsprechenden Punktenpaaren $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zweier kollinearer ebenen Räume (Fig. 15 u. 16) ein neues Paar durch das Kreuzen der entsprechenden Linien AB und CD einerseits, und $A'B'$ und $C'D'$ andererseits, indem der eine Kreuzpunkt, da er zweien Geraden des einen Vereines angehört, auch als entsprechenden Punkt denjenigen Punkt haben muss, welcher den entsprechenden Geraden des andern Vereines angehört, also den Kreuzpunkt beider Geraden. Sind nun die zu jenen Elementen gehörigen Elementargrössen a, b, c, d und a', b', c', d' einander affin, so sind es auch die Produkte $ab \,.\, cd$ und $a'b' \,.\, c'd'$ (§ 157), und die Elemente dieser Produkte, das heisst, die oben bezeichneten Kreuzpunkte, sind also dann auch nach dem Princip der gleichen Zeiger einander kollinear. Also je zwei Elemente, welche in der Ebene sich als entsprechende nach dem Princip der gleichen Konstruktion nachweisen lassen, sind es auch nach dem Princip der gleichen Zeiger.

§ 162.

Entsprechend lässt sich der Satz für Körperräume nachweisen, indem man dann nur statt jener vier Punktenpaare | fünf solche nimmt, *249* von denen keine vier in Einer Ebene liegen. Dann zeigt sich, wie nach dem Princip der gleichen Konstruktion jeden vier Punkten des einen Vereins, welche in Einer Ebene liegen, auch vier Punkte des andern entsprechen müssen, welche gleichfalls in Einer Ebene liegen.

Denn vier Punkte, welche in derselben Ebene liegen, müssen sich so verbinden lassen, dass ihre Verbindungslinien sich kreuzen; diesem Kreuzpunkte muss dann auch ein Kreuzpunkt der entsprechenden Verbindungslinien des andern Raumes entsprechen, also müssen auch diese Verbindungslinien, also auch die Punkte, welche durch sie verbunden werden, in Einer Ebene liegen. Sind nun A, B, C, D, E und A', B', C', D', E' die fünf entsprechenden Punktenpaare, so wird nach dem Princip der gleichen Konstruktion dem Durchschnitte der Ebene ABC mit der geraden Linie DE der Durchschnitt von $A'B'C'$ mit $D'E'$ entsprechen.

Nun können wir ganz auf dieselbe Weise, wie vorher, den fünf Punktenpaaren solche Gewichte geben, dass die so entstehenden Elementargrössen a, b, c, d, e | und a', b', c', d', e' einander affin werden, 248 indem man nur in jedem Vereine einen jener Punkte als Vielfachensumme der übrigen desselben Vereins darzustellen, und diese Vielfachen als die entsprechenden Elementargrössen zu setzen braucht. Dann sind nach § 157 auch die Produkte $abc\,.\,de$ und $a'b'c'\,.\,d'e'$ einander entsprechende Grössen jener affinen Vereine; die Elemente dieser Produkte, das heisst, die oben bezeichneten Durchschnittspunkte, sind also dann auch nach dem Princip der gleichen Zeiger einander kollinear entsprechend.

Somit wieder, wenn irgend fünf Elemente des einen Vereines nach beiden Principien fünf Elementen des andern entsprechen, so wird auch jedes sechste Elementenpaar, was nach dem Princip der gleichen Konstruktion sich als entsprechendes nachweisen lässt, sich auch nach dem Princip der gleichen Zeiger als solches nachweisen lassen.

Es ist also in der That die Identität beider Principien für ebene sowohl als körperliche Räume nachgewiesen. Bei Punkten einer geraden Linie reicht das Princip der gleichen Konstruktionen nur dann aus, wenn man mit den Konstruktionen aus der geraden Linie herausgeht, und also ein entsprechendes Punktenpaar ausserhalb derselben annimmt; das Princip der gleichen Zeiger | hat hingegen auch dann noch, *250* wie überhaupt immer, seine direkte Anwendung.

§ 163. Identität der Reciprocität nach beiden Principien.

Nach dem Princip der gleichen Konstruktion nennen wir zwei Vereine einander reciprok, wenn jedem Punkte des ersten Vereins eine Gerade des andern dergestalt entspricht, dass, wenn man in der Ebene des ersten Vereines eine Gerade zieht, von allen Punkten, welche in dieser Geraden liegen, die entsprechenden Geraden des andern Vereines durch einen Punkt gehen, und umgekehrt zu allen Geraden des zweiten Vereines, welche durch denselben Punkt gezogen werden können, die entsprechenden Punkte des ersten in einer geraden Linie liegen.

Ebenso werden zwei räumliche Vereine einander nach dem Princip der gleichen Konstruktion reciprok sein, wenn die Ebenen des zweiten Vereins, welche den sämmtlichen Punkten einer Geraden im ersten entsprechen, sich in einer und derselben Geraden schneiden, und umgekehrt die Punkte des ersten Vereins, welche den sämmtlichen Ebenen [entsprechen], die durch dieselbe gerade Linie gehen und dem zweiten Vereine angehörig gedacht werden, sich durch eine gerade Linie verbinden lassen.

Es bedarf kaum noch einer Auseinandersetzung, dass die auf 249 diese Weise | reciproken Gebilde es auch nach dem Princip der gleichen Zeiger sind, indem sich dies genau auf dieselbe Weise ergiebt, wie es sich oben für die Kollineation ergab.

§ 164. Identität des Affinitätsbegriffes nach beiden Principien für Punktvereine.

Setzen wir drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, entsprechend mit drei Punkten, die auch nicht in gerader Linie liegen, und bilden daraus durch gleiche Zeiger zwei Vereine entsprechender Grössen: so wird das Gewicht einer jeden Grösse die Summe ihrer drei Zeiger, also das Gewicht zweier entsprechender Grössen dasselbe sein; es erscheinen also auch die Punkte selbst überall als entsprechende Grössen, und es herrscht also zwischen den Vereinen der entsprechenden Punkte selbst Affinität. Daraus folgt, dass, wenn a, b, c drei in gerader Linie liegende Punkte, a', b', c' drei ihnen entsprechende Punkte eines affinen Punktgebildes sind, dann nicht nur auch a', b', c' in gerader Linie liegen, sondern auch die zwischen ihnen befindlichen Abschnitte proportional sein müssen, denn wenn

$$ab = mbc,$$

251 ist, wo m eine Zahl vorstellt, so wird auch nach dem allgemeinen Gesetz der Affinität

$$a'b' = mb'c'$$

sein, und nach der Annahme sollten auch a', b', c' Punkte sein, wenn a, b, c es waren. Es fällt somit unser Begriff der Affinität mit dem sonst üblichen Begriff derselben zusammen, sobald er auf dieselben Grössen, nämlich auf blosse Punkte (mit gleichen Gewichten) angewandt wird.

Die Erzeugung affiner Punktvereine tritt noch klarer hervor, wenn wir Parallelkoordinaten zu Grunde legen, oder nach unserer Benennungsweise, wenn wir zu einem Punkt und zwei Strecken des einen Vereins in dem andern Vereine einen Punkt und zwei Strecken als entsprechende setzen, und dann die entsprechenden Grössen durch gleiche Zeiger erzeugen: dann wird das Gewicht dieser Grössen gleich dem zu jenem Punkte gehörigen Zeiger sein, und also gleich Eins erscheinen, wenn jener Zeiger der Einheit gleich wird. Zieht man somit in dem einen Gebilde von einem Punkte aus zwei Strecken, und in dem andern von dem entsprechenden Punkte aus zwei entsprechende Strecken, und setzt diese Strecken als Richtmasse für die Richtstücke der demselben Gebilde zugehörigen Punkte, so haben die entsprechenden Punkte beider Vereine stets gleiche Gewichte; und zugleich sind dadurch aus drei Paaren entsprechender | Punkte alle übrigen entsprechenden Punkten- 250 paare zweier affiner Punktgebilde bestimmt.

§ 165. Die metrischen Relationen zweier kollinearer Punktgebilde.

Was die metrischen Relationen zweier kollinearer Punktgebilde betrifft, so sind diese auf eine höchst einfache Weise dadurch ausgedrückt, dass

jede Grundgleichung, welche unabhängig ist von den Masswerthen der darin vorkommenden Grössen, bestehen bleibt, wenn man statt der Grössen die entsprechenden eines kollinearen Vereines setzt.

Nämlich, da man diese Masswerthe auch so setzen kann, dass beide Vereine von Grössen affin werden, und für affine Grössenvereine die Geltung dieses Satzes erwiesen ist, so gilt er nun unter jener Voraussetzung auch für kollineare Vereine.

Eine specielle Folgerung dieses allgemeinen Satzes, welcher die metrischen Relationen, welche zwischen kollinearen Gebilden herrschen, in ihrer ganzen Vollständigkeit umfasst, ist zum Beispiel die, dass jeder Doppelquotient | zwischen vier Grössen A, B, C, D, welcher 252 einen Zahlenwerth darstellt, auch denselben Zahlenwerth behält, wenn man statt A, B, C, D die entsprechenden Grössen A', B', C', D' eines kollinear verwandten Gebildes setzt; nämlich ein solcher Doppelquotient, da er sich in der Form

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} = m$$

darstellen lässt, ist unabhängig von dem Masswerthe der vier Grössen A, B, C, D, weil jede im Zähler und Nenner einmal vorkommt, folglich wird, wenn man diesen gleich einer Zahl m setzt, diese Gleichung auch fortbestehen, wenn man statt der Grössen A, B, C, D die ihnen kollinear entsprechenden Grössen A', B', C', D' setzt, und man hat somit

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} = \frac{A'B'}{B'C'} \cdot \frac{C'D'}{D'A'}.$$

Namentlich hat man, wenn a, b, c, d Punkte einer geraden Linie sind, und a', b', c', d' die entsprechenden,

$$\frac{ab}{bc} \cdot \frac{cd}{da} = \frac{a'b'}{b'c'} \cdot \frac{c'd'}{d'a'}.$$

Ebenso ist, wenn A eine Linie, b, c, d aber Punkte sind, welche mit A in derselben Ebene liegen und selbst unter einander in derselben geraden Linie liegen,

251

$$\frac{bA}{Ac} \cdot \frac{cd}{db} = \frac{b'A'}{A'c'} \cdot \frac{c'd'}{d'b'}.$$

Ferner, wenn A und C gerade Linien, b und d Punkte sind, und A, C, b, d in derselben Ebene liegen, so ist

$$\frac{Ab}{bC} \cdot \frac{Cd}{dA} = \frac{A'b'}{b'C'} \cdot \frac{C'd'}{d'A'}.$$

Ferner, wenn A und C Ebenen, b und d Punkte sind, so ist

$$\frac{Ab}{bC} \cdot \frac{Cd}{dA} = \frac{A'b'}{b'C'} \cdot \frac{C'd'}{d'A'}.$$

Endlich, wenn A, B, C, D Linien im Raume sind, so ist

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} = \frac{A'B'}{B'C'} \cdot \frac{C'D'}{D'A}.$$

Die hinzugefügten Bedingungen entsprechen nämlich der in dem allgemeineren Satze hinzugefügten Bedingung, dass der Doppelquotient eine Zahl darstellen soll.

§ 166. Zusammenhang zwischen Kollineation und Projektion. (Perspektivität).

253 Wie sich nun die Kollineation zur Affinität verhält, so verhält sich die Projektion zur Abschattung, indem, wie wir oben zeigten, bei Elementargrössen das System der Abschattung die Projektion darstellte. Es werden also auch alle Grundgleichungen, welche von dem Masswerthe ihrer Grössen unabhängig sind, bestehen bleiben, wenn man statt der Grössen ihre Projektionen setzt; namentlich werden auch jene Doppelquotienten bei der Projektion denselben Werth beibehalten.

Wie ferner die durch Abschattung aus einander erzeugbaren Vereine eine besondere Art der Affinität darstellten, so werden nun auch die durch Projektion aus einander erzeugbaren Vereine eine besondere Art der Kollineation darstellen, und zwar können wir, wenn wir die durch Projektion aus einander erzeugbaren Vereine *perspektivische* nennen, den Satz aufstellen:

Zwei kollineare Vereine sind dann und nur dann perspektivisch, wenn in dem Durchschnitte der beiden Systeme, dem jene Vereine angehören, je zwei entsprechende Punkte zusammenfallen, und der Sinn der Projektion ist dann bestimmt.

Dieser Satz ist eben nur eine Uebertragung des in § 158 für die Abschattung aufgestellten Satzes. Namentlich folgt daraus auch, dass zwei kollineare Linien, welche nicht in Einer Ebene liegen, stets perspektivisch sind, weil sie sich nicht schneiden. Endlich wird in demselben Falle, in welchem die kollinearen Vereine zugleich | affin werden, 252 die Projektion mit der Abschattung identisch werden; nämlich, wenn die Abschattung und die abgeschattete Grösse Punkte oder überhaupt Elementargrössen erster Stufe mit gleichen Gewichten darstellen. Dies wird der Fall sein, wenn das Leitsystem ein Ausdehnungssystem ist (oder anders ausgedrückt, als Elementarsystem ins Unendliche fällt). Dieser Fall trat im ersten Abschnitte (§ 82) ein, weshalb dort Projektion und Abschattung zusammenfielen.

§ 167. Harmonische Gleichungen, Konstruktion der harmonischen Mitte. Harmonische Summe, harmonische Koefficienten. Polsystem.

Fragen wir überhaupt danach, welche Gleichungen unabhängig sind von dem Masswerthe der Grössen geltender Stufe, die darin vorkommen, und welche also in der Projektion und überhaupt in der Kollineation bestehen bleiben, so sind es diejenigen, bei welchen jede Grösse von geltender Stufe in demselben Gliede eben so oft als Faktor des Nenners vorkommt, wie als Faktor des Zählers, und nur diejenigen Faktoren, welche sämmtlichen Zählern | oder Nennern gemeinschaft- 254 lich sind, können in den Gliedern beliebig oft vorkommen, wenn nur in allen gleich oft.

Die einfachste Form einer solchen Gleichung ist daher

$$\frac{\alpha QA}{PA} + \frac{\beta QB}{PB} + \cdots = 0,$$

wo α, β, ... Zahlengrössen vorstellen, und wobei wir, damit die Gleichung einen bestimmten Sinn gewinne, annehmen müssen, dass die Nenner PA, PB, ... einander gleichartig sind, ohne null zu werden.

Setzen wir dies voraus, und nehmen wir Q gleich der Einheit, wodurch die Gleichung übergeht in

$$\frac{\alpha A}{PA} + \frac{\beta B}{PB} + \cdots = 0,$$

so nennen wir dieselbe eine **harmonische** Gleichung, α, β, ... die *harmonischen Koefficienten* (harmonischen Gewichte), die Systeme von A, B, ... die *harmonischen Systeme*, P das *Polsystem*. Verstehen wir unter A, B, ... blosse Systeme, so schreiben wir die Gleichung auch so:

$$\overset{P}{\alpha A + \beta B + \cdots = 0},$$

und sagen, der Ausdruck $\alpha A + \beta B + \cdots$ sei in Bezug auf P gleich Null.

Die Bedingung, dass die Grössen PA, PB, ... alle einander gleichartig sein müssen, ohne null zu werden, können wir auch so ausdrücken, dass für alle diese Produkte das nächstumfassende System 253 und das gemeinschaftliche System der Faktoren dieselben sein müssen. Wenn das nächstumfassende System in allen dasselbe sein soll, so heisst das, es muss dasselbe zusammenfallen mit demjenigen Systeme, was die sämmtlichen Grössen P, A, B, ... zunächst umfasst, das heisst, mit dem Hauptsysteme der Gleichung. Wenn das gemeinschaftliche System in einem jener Produkte, also auch in allen von nullter Stufe ist, so sind die Produkte äussere, und dann, aber auch nur dann sind die Werthe der Quotienten $\frac{\alpha A}{PA}$, ... bestimmte Grössen (§ 141). In diesem Falle nennen wir die harmonische Gleichung *eine harmonische von reiner Form.* Aber obgleich in dem andern Falle die Quotienten $\frac{\alpha A}{PA}$ nur partiell bestimmte Werthe darstellen, so behält die harmo- 255 nische Gleichung | dennoch auch dann ihre bestimmte Bedeutung, welche wir nun aufsuchen wollen.

Da PA, PB, ... einander gleichartig sind, ohne null zu werden, so müssen sich solche Masswerthe von A, B, ... annehmen lassen, dass

$$PA = PB = \cdots$$

ist; dann wird die Gleichung in der Form

$$\frac{\alpha A + \beta B + \cdots}{PA} = 0$$

erscheinen, woraus man durch Multiplikation mit PA die absolute Gleichung

$$\alpha A + \beta B + \cdots = 0$$

erhält. Multiplicirt man diese Gleichung mit P, so erhält man

$$(\alpha + \beta + \cdots)\, AP = 0,$$

das heisst

$$\alpha + \beta + \cdots = 0,$$

oder:

in einer harmonischen Gleichung ist die Summe der harmonischen Koefficienten auf beiden Seiten gleich.

Zugleich erhält man hierdurch ein Mittel, um den Werth σS, welcher der Gleichung

$$\alpha A + \beta B + \cdots \overset{P}{=} \sigma S$$

genügt, zu konstruiren, das heisst, den harmonischen Koefficienten und das harmonische System dieses Gliedes zu finden; nämlich, erstens ist

$$\sigma = \alpha + \beta + \cdots,$$

zweitens ist, wenn A, B, ... so gross gemacht sind, dass die Pro- 254 dukte mit P einander gleich sind, und auch S in solcher Grösse angenommen wird, nach dem Vorigen

$$\alpha A + \beta B + \cdots = \sigma S$$

oder

$$S = \frac{\alpha A + \beta B + \cdots}{\sigma},$$

wodurch S selbst, wenn nicht etwa σ null ist*), bestimmt, also auch 256 das System von S bestimmt, die Bedeutung der harmonischen Gleichung somit nachgewiesen ist.

Wir nennen das System von S die *harmonische Mitte* zwischen den Systemen A, B, ... in Bezug auf die zugehörigen Koefficienten α, β, ... und das Polsystem P, und dies System, verbunden mit dem harmonischen Koefficienten $(\alpha + \beta + \cdots)$, nennen wir die auf P bezügliche *harmonische Summe* von αA, βB, ...

§ 168. **Umgestaltung reiner harmonischer Gleichungen.**

Im vorigen Paragraphen haben wir gezeigt, dass eine harmonische Gleichung auch als absolute besteht, wenn man den Systemen solche Masswerthe beilegt, dass ihre Produkte mit dem Polsysteme einander gleich werden. Wir können nun auch umgekehrt schliessen und sagen, *eine Gleichung zwischen Vielfachensummen von Grössen, deren Produkte mit einer und derselben Grösse P gleichen Werth liefern, sei eine har-*

*) Ist σ null, und auch $\alpha A + \beta B + \cdots = 0$, so ist S gänzlich unbestimmt, wie dies auch in der Idee der harmonischen Gleichung liegt. Ist σ null, und $\alpha A + \beta B + \cdots$ stellt einen geltenden Werth dar, so giebt es keinen (endlichen) Werth von S, welcher der Gleichung genügt; da dann auch $(\alpha A + \beta B + \cdots)\,P$ gleich Null ist, so ist klar, dass das System, was jener Summe entspricht, auch nicht der Bedingung, mit P ein Produkt von geltendem Werthe zu liefern, genügt.

monische, wenn man die Koefficienten jener Grössen als harmonische Koefficienten der durch sie dargestellten Systeme, das System von P aber als Polsystem setzt.

In der That, ist
$$\alpha A + \beta B + \cdots = \sigma S$$
die gegebene Gleichung, und ist
$$PA = PB = \cdots = PS,$$
so erhält man, indem man mit PS dividirt, und links, statt die Summe zu dividiren, die Stücke dividirt, indem man dann statt PS die ihm gleichen Ausdrücke setzt, die harmonische Gleichung

255 $$\frac{\alpha A}{PA} + \frac{\beta B}{PB} + \cdots = \frac{\sigma S}{PS},$$
oder
$$\overset{P}{\alpha A + \beta B + \cdots = 0},$$
wo A, B, ... nur noch blosse Systeme vorstellen.

Durch diese Sätze ergeben sich nun leicht die Umwandlungen, welcher eine harmonische Gleichung, welche in reiner Form erscheint, fähig ist.

Zuerst leuchtet unmittelbar ein, dass man einestheils die sämmtlichen harmonischen Systeme, andererntheils das Polsystem mit einem 257 Systeme L äusserlich kombiniren darf, welches von dem | Hauptsysteme der ursprünglichen Gleichung unabhängig ist, ohne dass die Gleichung aufhört, eine harmonische zu sein. Denn, wenn
$$\alpha A + \beta B + \cdots = 0$$
und
$$PA = PB = \cdots$$
ist, so ist klar, dass, wenn L von PA unabhängig ist und PA, wie wir voraussetzten, ein äusseres Produkt ist, auch
$$LPA = LPB = \cdots$$
sei, also auch LP als Polsystem angenommen werden könne, dass ferner
$$\alpha AL + \beta BL + \cdots = 0$$
und
$$PAL = PBL = \cdots$$
sei, also diese mit L kombinirte Gleichung noch in Bezug auf dasselbe Polsystem P eine harmonische sei.

Ohne Vergleich wichtiger als diese Umwandlungen sind diejenigen, bei welchen man nicht aus dem Hauptsysteme der ursprünglichen Gleichung herausgeht. Setzt man nämlich P gleich $Q.R$, sei es nun, dass $Q.R$ ein äusseres, oder dass es ein, auf das Hauptsystem der



Gleichung bezügliches, eingewandtes Produkt darstelle, so wird, da $P.A$ als äusseres oder auch als eingewandtes Produkt nullter Stufe betrachtet werden kann, das Produkt $Q.R.A$ ein reines, also (nach § 139) gleich $Q.(R.A)$ sein. Multiplicirt man daher die ursprüngliche Gleichung

$$\alpha A + \beta B + \cdots = 0,$$

zu welcher die Bedingungsgleichungen

$$P.A = P.B = \cdots,$$ 256

oder

$$Q.(R.A) = Q.(R.B) = \cdots$$

gehören, mit R, so erhält man

$$\alpha RA + \beta RB + \cdots = 0,$$

welche vermöge der Bedingungsgleichungen in Bezug auf Q harmonisch ist. Also:

Stellt man das Polsystem einer reinen harmonischen Gleichung als Kombination dar, sei es als äussere, oder als eingewandte auf das Hauptsystem der Gleichung bezügliche: so bleibt die Gleichung eine reine harmonische, wenn man das | eine Glied jener Kombination mit den harmoni- 258 *schen Systemen kombinirt, das andere als Polsystem setzt, alles übrige aber unverändert lässt.*

Um die Allgemeinheit dieses Satzes und den Reichthum der Beziehungen zu übersehen, welchen er in sich fasst, haben wir auch diejenigen harmonischen Gleichungen in Betracht zu ziehen, welche nicht in reiner Form erscheinen.

§ 169. Umwandlung des Polsystems einer harmonischen Gleichung.

Ist die Gleichung

$$\alpha A + \beta B + \cdots = 0$$

mit den Bedingungsgleichungen

$$PA = PB = \cdots$$

gegeben, und sind die Produkte PA, ... eingewandte, so lässt sich die harmonische Gleichung, welche daraus hervorgeht, in reiner Form darstellen. In der That, wenn E das System darstellt, welches den Faktoren eines jeden dieser Produkte gemeinschaftlich ist, so wird P sich als äusseres Produkt in der Form QE darstellen lassen, und man hat

$$PA = QE.A = QA.E;$$

also gehen die Bedingungsgleichungen über in

$$QA.E = QB.E = \cdots,$$

oder, da E dem $QA, \dots$ untergeordnet ist, in

$$QA = QB = \cdots,$$

wo $QA, \dots$ äussere Produkte sind; und die Gleichung ist also auch harmonisch in Bezug auf Q, das heisst

$$\alpha A + \beta B + \cdots \overset{Q}{=} 0,$$

257 und sie ist nun in reiner Form dargestellt.

Also „eine unreine harmonische Gleichung bietet stets ein System (E) dar, welches den sämmtlichen harmonischen Systemen und dem Polsysteme derselben (P) gemeinschaftlich ist, und man kann die Gleichung in reiner Form darstellen, indem man als Polsystem irgend ein System (Q) setzt, dessen äussere Kombination mit jenem gemeinschaftlichen Systeme (E) das ursprüngliche Polsystem (P) liefert.“

Da man nun aus den zuletzt gefundenen Bedingungsgleichungen

$$QA = QB = \cdots$$

für den Fall, dass $A, B, \dots$ das gemeinschaftliche System E haben, 259 und E_1 dem E untergeordnet ist, die neuen Bedingungsgleichungen

$$QA \,.\, E_1 = QB \,.\, E_1 = \cdots,$$

oder, da E_1 auch dem $A, B, \dots$ untergeordnet ist, die Bedingungsgleichungen

$$QE_1 \,.\, A = QE_1 \,.\, B = \cdots$$

ableiten kann, so folgt, dass dieselbe Gleichung auch noch harmonisch ist in Bezug auf QE_1. Daraus folgt, dass man in einer reinen harmonischen Gleichung das Polsystem mit einem Systeme, welches allen harmonischen Systemen untergeordnet ist, kombiniren und diese Kombination als Polsystem setzen kann, oder allgemeiner:

Wenn die harmonischen Systeme einer Gleichung ein System von geltender Stufe gemeinschaftlich haben, so kann man das Polsystem beliebig ändern, wenn nur dasjenige System, welches jenes gemeinschaftliche System und dieses Polsystem zunächst umfasst, dasselbe bleibt.

Nehmen wir ferner an, dass in einer reinen harmonischen Gleichung das Polsystem demjenigen Systeme R, was die sämmtlichen harmonischen Systeme zunächst umfasst, nicht untergeordnet sei, sondern mit ihm nur ein System E gemeinschaftlich habe und sich also in der Form QE darstellen lasse, wo Q von jenem nächstumfassenden Systeme unabhängig ist, so kann man statt der Bedingungsgleichungen

$$QEA = QEB = \cdots$$

auch, da Q von dem Systeme, welches die Faktoren $EA, EB, \dots$

zunächst umfasst, unabhängig ist, nach § 81 mit Weglassung des Faktors Q die Gleichungen

$$EA = EB = \cdots$$ 258

setzen, das heisst, die Gleichung ist auch harmonisch in Bezug auf E; da man nun nach § 168 auch E wieder mit jedem von R unabhängigen Systeme äusserlich kombiniren darf, so haben wir den Satz:

Man kann in einer reinen harmonischen Gleichung das Polsystem beliebig in der Art ändern, dass dasjenige System, welches es mit dem, alle harmonischen Systeme zunächst umfassenden Systeme gemeinschaftlich hat, dasselbe bleibt.

Dieser Satz entspricht dem vorhergehenden und lässt sich, wenn 260 man will, in die ganz entsprechende Form kleiden. Auch übersieht man leicht, wie man durch Kombination dieser beiden Gesetze ein allgemeineres Gesetz ableiten könnte, welches jedoch wegen seiner verwickelten Form von geringerer Bedeutung ist*).

§ 170. Umwandlung harmonischer Gleichungen bei unverändertem Polsysteme. Allgemeiner Satz über harmonische Mitten.

Vermittelst dieser Sätze nun können wir den Satz aus § 168 noch in einer etwas einfacheren und für die Anwendung bequemeren Form darstellen.

Nämlich, wenn wir die dort gewählte Bezeichnung wieder aufnehmen, so können wir in der harmonischen Gleichung

$$\alpha RA + \beta RB + \cdots \overset{Q}{=} 0$$

nach den beiden Sätzen des vorigen Paragraphen statt Q auch QR, das heisst P setzen, und haben somit den Satz:

In einer reinen harmonischen Gleichung kann man ohne Aenderung des Polsystems die harmonischen Glieder mit jedem, dem Polsystem eingeordneten Systeme kombiniren.

In diesem Satze liegen die sämmtlichen Sätze über die harmonischen Mitten (*centres de moyennes harmoniques*), welche Poncelet aufgestellt hat**).

---

*) Es würde dies Gesetz etwa so ausgedrückt werden können: Wenn man ein veränderliches Polsystem mit dem die harmonischen Systeme zunächst umfassenden Systeme kombinirt, und dabei dasjenige System, welches diese Kombination und das allen harmonischen Systemen gemeinschaftliche System zunächst umfasst, konstant bleibt, so bleibt die harmonische Gleichung als solche in Bezug auf jenes veränderliche Polsystem bestehen.

**) In seinem *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques*, welches im

In der That, hat man zum Beispiel in einer Ebene die harmonische 259 Mitte mehrerer Linien in Bezug auf gewisse harmonische Koefficienten und einen Punkt der Ebene als Pol, und man zieht durch diesen Punkt eine gerade Linie, so wird zwischen den Durchschnittspunkten dieser Linie mit den ersteren nach dem zuletzt angeführten Satze in Bezug auf denselben Pol auch dieselbe harmonische Gleichung herr- *261* schen; oder, anders ausgedrückt, wenn | man durch einen festen Punkt eine veränderliche Gerade zieht, welche eine Reihe von n festen Geraden derselben Ebene schneidet, und man bestimmt in Bezug auf jenen Punkt als Pol die harmonische Mitte zwischen den mit konstanten harmonischen Koefficienten behafteten Durchschnittspunkten, so liegt dieselbe in einer festen Geraden, und zwar ist diese Gerade die harmonische Mitte jener n Geraden in Bezug auf denselben Pol und dieselben harmonischen Koefficienten. Hat man auf der andern Seite in Bezug auf eine Axe die harmonische Mitte zwischen einer Reihe von n Punkten derselben Ebene, und man legt durch irgend einen Punkt der Axe und jene n Punkte gerade Linien, so findet zwischen ihnen nach dem angeführten Satze in Bezug auf die Axe dieselbe harmonische Gleichung statt, wie zwischen jenen n Punkten. Oder, verbindet man einen, in einer festen Geraden liegenden, veränderlichen Punkt mit n festen Punkten derselben Ebene, so geht die harmonische Mitte dieser Verbindungslinien in Bezug auf jene Gerade als Axe und in Bezug auf eine Reihe konstanter Koefficienten, welche jenen Punkten zugehören, durch einen festen Punkt, und zwar ist dieser Punkt die harmonische Mitte der gegebenen n Punkte in Bezug auf dieselbe Axe.

Wollen wir die zweite Ausdrucksform in ihrer ganzen Allgemeinheit darstellen, so gelangen wir zu folgender neuen Form des oben aufgestellten Satzes:

Kombinirt man ein veränderliches System R, welches einem festen Systeme P als Polsysteme eingeordnet ist, mit n festen Systemen $A, B, \ldots$, deren jedes, mit dem Polsysteme kombinirt, das Hauptsystem liefert: so ist die harmonische Mitte jener n Kombinationen in Bezug auf n zugehörige feste Koefficienten $\alpha, \beta, \ldots$, deren Summe nicht null ist, und auf jenes 260 *Polsystem P | einem festen Systeme Q eingeordnet, und zwar ist dies feste*

---

dritten Bande des Crelle'schen Journals [S. 213—272] abgedruckt ist. — Eine Erweiterung dieser Poncelet'schen Theorie habe ich in einer Abhandlung „Theorie der Centralen", welche im 24-ten Bande desselben Journals [auf S. 262—282 und 372—380] abgedruckt ist, versucht. [Die Poncelet'sche Arbeit ist in dem „Traité des propriétés projectives des figures" wieder abgedruckt und zwar in Bd. 2 auf S. 1—56.]

System Q die harmonische Mitte der n festen Systeme $A, B, \ldots$ in Bezug auf dieselben Koefficienten α, β, ... und auf dasselbe Polsystem P.

Diese Ausdrucksform ergiebt sich aus der ersteren (im vorigen Paragraphen aufgestellten) mit vollkommener Schärfe, wenn man von dem Satze Gebrauch macht, dass wenn das Polsystem, die harmonischen Systeme, deren jedes mit dem Polsysteme kombinirt das Hauptsystem liefert, und die zugehörigen harmonischen Koefficienten, | deren Summe 262 aber nicht null sein darf, gegeben sind, die harmonische Mitte jedesmal bestimmt ist.

Die letzte Bestimmung in diesen Sätzen, dass nämlich das feste System Q, dem jene harmonischen Mitten eingeordnet sind, selbst als harmonische Mitte erscheint, fehlt in der Poncelet'schen Darstellung, und es bieten daher die hier gefundenen Ausdrucksformen, da die harmonische Mitte nach § 167 leicht konstruirt werden kann, zugleich neue und einfache geometrische Beziehungen dar.

§ 171. Anwendung auf die Krystallgestalten.

Ich will diese Darstellung mit einer der schönsten Anwendungen schliessen, die sich von der behandelten Wissenschaft machen lässt, nämlich mit der *Anwendung auf die Krystallgestalten.* Doch will ich mich hier auf die Mittheilung der Resultate beschränken, indem ich die Ableitung derselben dem Leser überlasse.

Bekanntlich stellen die Krystallgestalten jede ein System von Ebenen dar, welche ihrer Lage nach veränderlich, ihren Richtungen nach aber konstant sind; das heisst, statt jeder Ebene, die an einer Krystallgestalt hervortritt, kann auch die ihr parallele hervortreten, ohne dass dadurch die Krystallgestalt als solche geändert wird. Die Abhängigkeit, in welcher die Richtungen dieser Ebenen unter einander stehen, können wir vermittelst der durch unsere Wissenschaft festgestellten Begriffe so ausdrücken:

Wenn man vier Flächen eines Krystalles ohne Aenderung ihrer Richtungen so legt, dass sie einen Raum einschliessen), und die Stücke, welche dadurch von dreien derselben abgeschnitten werden, zu Richtmassen macht, so lässt sich jede andere Fläche | des Krystalles als Vielfachensumme* 261 *dieser Richtmasse rational ausdrücken.*

Darin, dass der Ausdruck ein rationaler ist, liegt, dass die Zeiger sich als rationale Brüche, und also, da es nur auf ihr Verhältniss ankommt, sich als ganze Zahlen darstellen lassen. Hierbei bemerken

*) Hierin liegt schon, dass die Flächen keine parallelen Kanten haben dürfen.

wir noch, dass im Allgemeinen diejenigen Ebenen am häufigsten am Krystalle hervorzutreten pflegen, deren Zeiger sich durch die kleinsten ganzen Zahlen ausdrücken lassen, und dass es schon äusserst selten 263 ist, wenn die Zeiger einer Krystallfläche sich nur | durch ganze Zahlen ausdrücken lassen, unter denen grössere als sieben vorkommen. Namentlich lässt sich die abschneidende Ebene, da ihre drei Projektionen im Sinne des Richtsystemes die drei Richtmasse geben, als Summe derselben darstellen, das heisst, ihre Zeiger sind 1, 1, 1.

Aufgabe. Es sind in Bezug auf vier Ebenen A, B, C, D, von denen die letztere die abschneidende ist, die Zeiger von vier anderen Ebenen Q_1, Q_2, Q_3, Q und die Zeiger einer Ebene P gegeben, man soll die Zeiger x, y, z von P suchen, wenn Q_1, Q_2, Q_3 und Q als die ursprünglichen Ebenen, und zwar Q als die abschneidende betrachtet werden sollen.

Auflösung. Es ist, wenn x, y, z sich auf Q_1, Q_2, Q_3 beziehen,

$$x = \frac{P \cdot Q_2 \cdot Q_3}{Q \cdot Q_2 \cdot Q_3}, \quad y = \frac{Q_1 \cdot P \cdot Q_3}{Q_1 \cdot Q \cdot Q_3}, \quad z = \frac{Q_1 \cdot Q_2 \cdot P}{Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q}.$$

Diese Auflösung, welche sich durch die Gesetze unserer Analyse 262 264 auf's Leichteste ergiebt*), erscheint in höchst einfacher Gestalt, || während bei der gewöhnlichen analytischen Methode sowohl die Endformel als auch die Mittelglieder in sehr verwickelten Formen erscheinen. Aus dieser Auflösung fliesst sogleich der Satz:

*) Sind nämlich P_1, P_2, P_3 die durch Q von Q_1, Q_2, Q_3 abgeschnittenen Stücke, so hat man die Zeiger x, y, z zu suchen, welche der Gleichung

$$P = x P_1 + y P_2 + z P_3$$

genügen. Ist nun

$$P_1 = u Q_1, \; P_2 = v Q_2, \; P_3 = w Q_3,$$

also

$$1) \quad Q = u Q_1 + v Q_2 + w Q_3,$$

und ist ferner

$$2) \quad P = x' Q_1 + y' Q_2 + z' Q_3,$$

so ist auch

$$P = \frac{x'}{u} P_1 + \frac{y'}{v} P_2 + \frac{z'}{w} P_3,$$

also $x = \frac{x'}{u}$, und so weiter.

Nun ist aus 1)

$$u = \frac{Q \cdot Q_2 \cdot Q_3}{Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3},$$

und aus 2)

$$x' = \frac{P \cdot Q_2 \cdot Q_3}{Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3},$$

also

$$x = \frac{x'}{u} = \frac{P \cdot Q_2 \cdot Q_3}{Q \cdot Q_2 \cdot Q_3}, \ldots$$

Wenn sich eine Reihe von Ebenen aus vier Ebenen, die einen Raum einschliessen, auf die angegebene Weise rational ableiten lässt, so lässt sich auch dieselbe Reihe von Ebenen aus jeden vier andern Ebenen dieser Reihe, welche einen Raum einschliessen, gleichfalls rational ableiten.

Jede Kante der Krystallgestalt erscheint als Produkt der Flächen, welche sie bilden, und dadurch ergiebt sich die Lösung der Aufgabe: „Wenn die Zeiger zweier Flächen P, P_1 in Bezug auf vier Ebenen A, B, C, D, von denen die letzte die abschneidende ist, gegeben sind, dann ihre Kante als Vielfachensumme der von den Ebenen A, B, C gebildeten und durch D begränzten Kanten zu finden." Man erhält, wenn A, B, C die durch D begränzten Flächenräume darstellen, als die Zeiger dieser Kante die Ausdrücke

$$\frac{P.P_1.C}{A.B.C}, \quad \frac{A.P.P_1}{A.B.C}, \quad \frac{P_1.B.P}{A.B.C},$$

welche sich auf die durch die Produkte AB, BC, CA dargestellten Kanten beziehen*). Hieraus fliesst, da man beliebige vier raumbegränzende Krystallflächen als Fundamentalflächen annehmen kann, 263 der Satz:

Wenn man drei Kanten eines Krystalles, welche nicht in derselben Ebene liegen, ohne Aenderung ihrer Richtung an einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt legt, und als ihre Endpunkte | ihre Durchschnitte mit 265 *irgend einer Krystallfläche setzt, so lässt sich jede andere Kante des Krystalles als Vielfachensumme dieser Strecken rational ausdrücken.*

Da die hindurchgelegte Ebene D mit den drei Kanten a, b, c gleiche Produkte liefert, so wird man auch jede Grösse p, welche als Vielfachensumme von a, b, c dargestellt ist, als harmonische Viel-

---

*) Nämlich, es ist

$$\frac{P.P_1.C}{A.B.C} A.B$$

die Projektion von $P.P_1$ auf $A.B$ nach C, und so weiter, und daraus folgt

$$P.P_1 = \frac{P.P_1.C}{A.B.C} AB + \frac{A.P.P_1}{A.B.C} BC + \frac{P_1.B.P}{A.B.C} CA.$$

Nun stellen AB, BC, CA jene drei Kanten dar, welche zwischen A, B, C liegen und durch die Ebene D begränzt werden; denn es seien c, a, b diese drei Kanten, so werden die Flächenräume bc, ca, ab den drei Flächenräumen A, B, C proportional sein (da diese die Hälften von jenen sind), und also AB, BC, CA den Produkten $bc \,.\, ca$, $ca \,.\, ab$, $ab \,.\, bc$, das heisst den Produkten $abc \,.\, c$, $abc \,.\, a$, $abc \,.\, b$ oder den Grössen c, a, b proportional sein, und diese Grössen können also statt jener Produkte gesetzt werden.

fachensumme von a, b, c in Bezug auf D darstellen können. Somit hat man den Satz:

Nimmt man drei Kanten einer Krystallgestalt und eine Fläche derselben (ohne dass die Kombination der drei Kanten, oder der Fläche mit einer derselben Null giebt), so lässt sich jede andere Kante des Krystalles als harmonische Vielfachensumme jener Kanten in Bezug auf jene Ebene rational ausdrücken.

Dies Gesetz ist dadurch interessant, dass es die Beziehung der Richtungen (ohne Rücksicht auf hypothetische Masswerthe) rein ausdrückt. Ebenso ergiebt sich leicht, da die Flächen ab, bc, ca mit der Kante $a + b + c$ gleiches Produkt liefern, der Satz:

Nimmt man drei Flächen einer Krystallgestalt und eine Kante derselben (ohne dass die Kombination der drei Flächen oder der Kante mit einer derselben Null giebt), so lässt sich jede andere Fläche des Krystalles als harmonische Vielfachensumme jener Flächen in Bezug auf jene Kante rational darstellen.

Da die sämmtlichen Ausdehnungsgrössen im Raume als Elementargrössen, die der unendlich entfernten Ebene angehören, aufgefasst werden können, so werden die Abschattungen auf irgend eine Grundebene nach irgend einem Leitpunkte ein dem ersteren affines System darstellen, und also zwischen ihnen genau dieselben Gleichungen stattfinden, wie zwischen den abgeschatteten Grössen; und umgekehrt jede Gleichung, welche zwischen den Abschattungen stattfindet, wird auch zwischen den abgeschatteten Grössen stattfinden, und der Verein dieser Abschattungen wird daher alle in der Krystallgestalt herrschenden Be-264 ziehungen vollkommen treu darstellen; die Krystallflächen | werden durch Liniengrössen, die Krystallkanten durch Punktgrössen, oder sofern beide bloss ihren Richtungen nach gegeben waren, durch Linien und Punkte dargestellt sein. Diese Darstellung in der Ebene, da sie alles, was bei den Krystallgestalten als wesentliches vorkommt, rein 266 und treu | abbildet, ohne das zufällige mit aufzunehmen, eignet sich besonders schön, um die Krystallgestalten in der Ebene zu entwerfen.

Diese Andeutungen mögen genügen, um die Fruchtbarkeit der neuen Analyse auch nach dieser Seite hin nachzuweisen.

§ 172. Anmerkung über offne Produkte.

Ich habe mich in der obigen Darstellung hauptsächlich auf solche Produkte beschränkt, in denen sich die Faktoren ohne Werthänderung des ganzen Produktes beliebig zu besonderen Produkten zusammen-

fassen lassen (§ 143); und es schien mir diese Beschränkung nothwendig, damit der schon überdies so mannigfaltige Stoff mehr zusammengehalten werde, und der Leser nicht durch die immer wieder neu hervortretenden Begriffe ermüde. Ueberdies erfordern die Produkte, für welche jene Bedingung nicht mehr gilt, eine ganz differente Behandlung, neue und verwickeltere Grössen treten in ihnen hervor, und wenn gleich dieselben eine reiche Anwendung namentlich auf die Mechanik und Optik gestatten, so kann doch diese Anwendbarkeit hier nicht ganz zur Anschauung gebracht werden, indem dazu erst die in dem folgenden Theile zu entwickelnden Gesetze erforderlich sein würden. Doch will ich die Art ihrer Behandlung hier wenigstens an einem Beispiele erläutern, und zugleich auf die interessanten Grössenbeziehungen hindeuten, welche sich dadurch aufschliessen.

Es war bisher nur das gemischte Produkt (§ 139), welches jenem Zusammenfassungsgesetze nicht unterlag, obgleich die allgemeine multiplikative Beziehung zur Addition, vermöge welcher man statt eines zerstückten Faktors die einzelnen Stücke setzen und die so entstehenden einzelnen Produkte addiren kann, für dasselbe ihre Geltung behielt. Aber auch diese Beziehung erscheint hier | noch als eine einseitige, in- 265 sofern zwar gemischte Produkte, in welchen Ein Faktor verschieden ist, während die übrigen gleichartig sind, danach zu Einem Produkte vereinigt werden können, aber nicht solche, in welchen mehr als Ein Faktor verschiedenartig ist, es müsste denn sein, dass diese verschiedenartigen | Faktoren schon zu einem Produkte zusammengefasst 267 seien. In der Aufhebung dieser Einseitigkeit nun liegt das Princip der Behandlung jener Produkte.

Es sei $A_1 P . B_1 + A_2 P . B_2$ eine solche Summe zweier gemischten Produkte, in welchen P der gemeinschaftliche Faktor ist, und die beiden letzten Faktoren nicht zu Einem Produkt vereinigt werden dürfen; so kann man statt dessen auch nicht $\mp (A_1 B_1 + A_2 B_2) . P$ setzen; sondern, wenn wir einen solchen Ausdruck, wie es die Analogie der Multiplikation fordert, einführen wollen, so müssen wir die Stelle des Produktes, in welche P einrücken soll, bezeichnen. Es sei diese Stelle durch eine leer gelassene Klammer bezeichnet, so dass

$$[A\,() . B]\, P = AP . B$$

und

$$[A_1\,() . B_1 + A_2\,() . B_2 + \cdots]\, P = A_1 P . B_1 + A_2 P . B_2 + \cdots$$

sei, und es werde ein solches Produkt mit leer gelassener Stelle ein *offnes* genannt. Treten mehrere Faktoren hinzu, von denen nur Einer in die Lücke eintreten soll, so kann dieser durch dieselbe Klammer ausgezeichnet werden, durch welche die Lücke bezeichnet ist. Sind

zwei oder mehr Lücken in dem Produkte, so müssen die Klammerbezeichnungen verschieden sein, wenn verschiedene Faktoren in dieselben eintreten sollen.

Wir betrachten hier indessen nur die Produkte mit Einer Lücke, deren Summe formell dadurch bestimmt ist, dass die multiplikative Beziehung bestehen bleibt. Wir werden daher zwei Summen von offnen Produkten, da sie nur durch ihre Multiplikation mit andern Grössen ihrem Begriffe nach bestimmt sind, dann und nur dann als gleich zu setzen haben, wenn sie mit jeder beliebigen, aber beide mit derselben Grösse multiplicirt, gleiches Produkt liefern.*) Es kommt also darauf an, die konstanten Beziehungen zwischen den in jenem Summenausdrucke vorkommenden Grössen, die wir als veränderlich setzen können, auszumitteln, wenn eben der Summenwerth konstant bleiben soll. Je 266 einfacher und | anschaulicher diese konstanten Beziehungen aufgefasst sein werden, desto einfacher und anschaulicher wird der Begriff jener 268 Summe sein, welcher eben als die | Gesammtheit jener konstanten Beziehungen selbst aufgefasst werden kann.

Es lassen sich sehr leicht diese konstanten Beziehungen als Zahlenbeziehungen in Bezug auf irgend ein zu Grunde gelegtes Richtsystem darstellen. Nämlich man hat dann nur die sämmtlichen Grössen in jenem Summenausdruck S, so wie auch die Grösse P, mit welcher multiplicirt werden soll, als Vielfachensummen der Richtmasse von gleicher Stufe darzustellen, dann das Produkt SP gleichfalls als Vielfachensumme von Richtmassen zu gestalten, so wird in diesem Produkte der Koefficient eines jeden Richtmasses (nach § 89) konstant sein, wie sich auch die Grössen in S ändern mögen, wenn eben jenes Produkt oder jene Vielfachensumme, auf welche dasselbe zurückgeführt ist, konstant bleiben soll. Ein jeder solcher Koefficient kann wiederum als Vielfachensumme von den Zeigern der Grösse P dargestellt werden; und da für jeden bestimmten Werth dieser Zeiger jene Vielfachensumme konstant bleiben soll, so muss auch in ihr der Koefficient eines jeden Zeigers von P konstant sein.

Es ist nun sogleich einleuchtend, dass hierdurch die konstanten Beziehungen zwischen den Grössen in S vollständig dargestellt sind, indem aus ihnen die Beständigkeit des Summenausdruckes mit Nothwendigkeit hervorgeht. Wir erläutern dies an einem Beispiele.

Es sei die Summe

$$S = e_1\,() \cdot \epsilon_1 + e_2\,() \cdot \epsilon_2 + \cdots = \Sigma[e\,() \cdot \epsilon]$$

*) Wenn auch nur mit jeder Grösse von gegebener Stufe, wobei dann jener Summenwerth zugleich von der Stufenzahl abhängig bleibt.

zu behandeln, in welcher e, e_1, e_2, ... Strecken im Raume vorstellen, und wo bei der letzteren Bezeichnung das Summenzeichen sich auf die verschiedenen Anzeiger 1, 2, ... bezieht. Es ist klar, dass, wenn die Strecken e nicht etwa Einer Ebene angehören, die Grösse P, welche mit jener Summe multiplicirt werden soll, von zweiter Stufe, das heisst ein Flächenraum sein muss, sobald die Produkte der einzelnen Glieder summirbar bleiben sollen, ohne null zu werden. Es seien nun a, b, c die Richtmasse erster Stufe des zu Grunde gelegten Richtsystems, bc, ca, ab also die Richtmasse zweiter Stufe, und

$$e = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$
$$P = xbc + yca + zab,$$

so hat man

$$SP = \Sigma(eP \, . \, e) = \Sigma(eP \, . \, (\alpha a + \beta b + \gamma c)).$$

Hier müssen die zu den Richtmassen a, b, c gehörigen Zeiger des ganzen Ausdrucks konstant sein; das heisst, es müssen 267

$$\Sigma(eP \, . \, \alpha), \quad \Sigma(eP \, . \, \beta), \quad \Sigma(eP \, . \, \gamma)$$ 269

konstant sein für jeden Werth von x, y, z, wobei

$$eP = abc\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

ist. Daraus ergeben sich folgende sechs konstante Grössen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \Sigma(\alpha^2), & \Sigma(\beta^2), & \Sigma(\gamma^2), \\ \Sigma(\beta\gamma), & \Sigma(\gamma\alpha), & \Sigma(\alpha\beta). \end{cases}$$

Bezeichnen wir diese sechs Grössen beziehlich mit

$$A, \; B, \; C$$
$$A', \; B', \; C',$$

so ist

$$(2) \qquad \begin{cases} SP = abc\,(Ax + C'y + B'z)\,a + \\ \quad + abc\,(C'x + By + A'z)\,b + \\ \quad + abc\,(B'x + A'y + Cz)\,c. \end{cases}$$

Es hat demnach jene Summe S dann und nur dann einen konstanten Werth, wenn in Bezug auf irgend ein festes Richtsystem diese sechs Zahlengrössen konstant sind. So haben wir nun zwar die konstanten Beziehungen, welche zwischen den in jener Summe vorkommenden Grössen herrschen müssen, wenn die Summe konstant bleiben soll, bestimmt; allein der einfache Begriff jener Summe ist dadurch noch nicht gefunden, weil in diese Bestimmungen ein ganz fremdartiges, mit dem Begriffe jener Summe in keinerlei Beziehung stehendes Element, nämlich das zu Grunde gelegte Richtsystem, eingeführt ist. Es dienen daher jene sechs Grössen nur zur Uebertragung auf ge-

gebene Richtsysteme, während der einfache Begriff der Summe noch zu realisiren ist.

Wir können, um uns der Lösung dieser Aufgabe zu nähern, zuerst versuchen, jene Summe auf eine möglichst geringe Anzahl von Gliedern zurückzuführen.

Da jede Strecke drei Zeiger darbietet, so scheint für den ersten Anblick jene Summe auf zwei Glieder reducirbar, in sofern zur Bestimmung der sechs Zeiger jener Strecken sechs Gleichungen erscheinen; allein es erhellt leicht, dass, wenn nicht etwa sämmtliche Grössen in S derselben Ebene angehören, jene sechs Zeiger nicht so gewählt werden können, dass diesen sechs Gleichungen genügt wird. Denn, da das Richtsystem willkührlich ist, so kann es auch so genommen werden, dass jene zwei Strecken mit zweien der Richtmasse, etwa mit a und b zusammenfallen; dann ist klar, wie

268 $$SP = aP \,.\, a + bP \,.\, b$$

270 stets eine Strecke der Ebene ab darstellt; es müsste also das Glied von SP, was der dritten Axe c angehört, stets null sein, das heisst, B', A', C müssten null sein. C aber, was die Summe der Quadrate von γ vorstellt, kann nicht [anders] null werden, als wenn sämmtliche Werthe von γ null sind, das heisst, sämmtliche Werthe e der Ebene ab angehören. Es lässt sich daher die Summe S auf keine geringere Anzahl reeller Glieder zurückführen als auf drei. Da aber drei Strecken neun Zeiger darbieten, so werden dieselben durch jene sechs Gleichungen nicht bestimmt sein, sondern noch für drei Zahlenbestimmungen Raum lassen.

Um nun eine gegebene Summe S von der Form $\Sigma[e\,()\,.\,e]$, in welcher die verschiedenen Grössen e nicht derselben Ebene angehören sollen, das heisst, A, B, C stets geltende (positive) Werthe darstellen, auf drei Glieder zu reduciren, gehen wir auf die Gleichung (2) zurück. Setzen wir hier

$$P = ab,$$

das heisst

$$x = y = 0, \quad z = 1,$$

so ist

$$SP = S\,(ab) = abc\,(B'a + A'b + Cc).$$

Da hier C nicht null werden kann, so ist $S\,(ab)$ nie der Ebene ab parallel. Also können wir, da die Annahme des Richtsystems willkührlich ist, wenn nur die drei Richtaxen von einander unabhängig sind, die dritte Richtaxe c parallel $S\,(ab)$ annehmen. Dann wird

$$A' = B' = 0$$

und $S\,(ab)$ gleich $abc\,.\,Cc$. Da auch der Masswerth c willkührlich ist,

und C positiv ist, so kann man c so annehmen, dass C gleich Eins ist*); dann ist

$$S(ab) = abc \, . \, c.$$

Nimmt man nun ferner

$$P = ca, \quad z = x = 0, \quad y = 1,$$

so ist

$$S(ca) = abc\,(C'a + Bb)^{**}),$$

was nothwendig in der Ebene ab liegen muss, aber da B nicht null werden kann, von a unabhängig ist. Da nun b innerhalb der Ebene 269 ab willkührlich angenommen werden kann, wenn es nur von a unab- 271 hängig bleibt, so kann man b selbst diesem Ausdrucke $S(ca)$ parallel setzen. Man hat dann noch $C' = 0$, also

$$A' = B' = C' = 0,$$

und $S(ca)$ wird gleich $abcB\,.\,b$, oder, wenn man wieder den Masswerth von b so annimmt, dass B gleich Eins wird,

$$S(ca) = abc \, . \, b.$$

Endlich wird $S(bc)$ gleich $abcA\,.\,a$, oder bei einer solchen Annahme von a, dass A gleich Eins wird,

$$S(bc) = abc \, . \, a.$$

Die Bedingungsgleichungen, die wir auf solche Weise realisirt haben, sind also

$$(3) \qquad \begin{cases} A' = B' = C' = 0 \\ A = B = C = 1, \end{cases}$$

woraus folgt

$$(4) \qquad S = a\,()\,.\,a + b\,()\,.\,b + c\,()\,.\,c.$$

Es ist also auf die angegebene Weise jene Summe in der That auf drei reale Glieder zurückgeführt; und für die Grössen c, b, a haben wir die Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{cases} S(ab) = abc \, . \, c \\ S(ca) = abc \, . \, b \\ S(bc) = abc \, . \, a. \end{cases}$$

Zu diesen Gleichungen (5) würde man direkt gelangen, wenn man einmal voraussetzt, dass sich jene Summe auf drei Glieder zurückführen lässt. Denn, sind a, b, c die diesen Gliedern zugehörigen Strecken,

---

*) Man hat zu dem Ende nur statt c zu setzen $\frac{c}{\sqrt{C}}$, dann verwandelt sich y^2 in $\frac{y^2}{C}$ und $\Sigma(y^2)$ in $\frac{\Sigma(y^2)}{C}$, das heisst, in 1.

**) Da A' gleich Null ist.

so hat man aus (4) sogleich durch Multiplikation mit ab, ca, bc die Gleichungen (5). Betrachtet man eine dieser Gleichungen, zum Beispiel die erste, so ist sie von dem Masswerthe des Faktors (ab), mit welchem S multiplicirt ist, unabhängig; setzt man daher irgend eine mit ab parallele Grösse gleich Q, so hat man

$$(6) \qquad SQ = Qc \,.\, c = (c\,() \,.\, c)\, Q,$$

und da Q ursprünglich willkührlich angenommen werden konnte, so wird jede Grösse c, welche dieser Gleichung für irgend ein Q genügt, als eine der drei Strecken betrachtet werden können, auf welche sich S zurückführen lässt; dann ist Q selbst die Ebene der beiden andern, und in ihr kann dann noch die eine der beiden andern Strecken von willkührlicher Richtung angenommen werden, | wodurch dann alles bestimmt ist. Jene willkührliche Annahme der Richtung der Ebene Q und der Richtung der einen Strecke in ihr vertritt die Stelle der drei willkührlich anzunehmenden Zahlenbestimmungen, von denen oben die Rede war.

270
272

Um nun den Begriff zu vollenden, haben wir die Beziehung zwischen je drei solchen Strecken aufzustellen; dies wird geschehen, indem wir die Gleichung der Oberfläche, deren Punktträger jene Strecken sind, wenn sie an denselben Anfangspunkt gelegt sind, aufstellen, und zwar in Bezug auf je drei beliebige Strecken, auf die S zurückgeführt werden kann.

Man hat, wenn p dieser Träger ist, und in die Gleichung (6) p statt c gesetzt wird,

$$(7) \qquad SQ = Qp \,.\, p.$$

Ist nun

$$p = xa + yb + zc$$
$$S = a\,() \,.\, a + b\,() \,.\, b + c\,() \,.\, c$$
$$Q = x'bc + y'ca + z'ab,$$

so ist

$$SQ = abc \,.\, (x'a + y'b + z'c).$$

Aus (7) folgt also, dass $x'a + y'b + z'c$ parallel p ist, das heisst, dass $x' : y' : z' = x : y : z$ ist. Da nun in der Gleichung (7) statt Q jede mit Q parallele Grösse gesetzt werden kann, so können wir nun

$$Q = xbc + yca + zab$$

setzen, dann erhalten wir aus (7)

$$abc = Qp = (x^2 + y^2 + z^2)\, abc,$$

das heisst

$$(8) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Dies ist aber die Gleichung eines Ellipsoides, in welchem die Grundmasse a, b, c konjugirte Halbmesser sind.*) Nennen wir einen Ausdruck wie $a().a$ ein offnes Quadrat von a, so können wir die gewonnenen Resultate in folgendem Satze darstellen:

Eine Summe von offnen Quadraten im Raume ist gleich der Summe aus den offnen Quadraten von je drei beliebigen konjugirten Halbmessern, welche einem konstanten Ellipsoid angehören.

Da dies Ellipsoid demnach der vollkommen treue Ausdruck jener Summe ist, so können wir auch sagen, diese Summe sei eine solche Grösse, die ein Ellipsoid darstellt und selbst als Ellipsoid gedacht werden könne. Auf diese Weise nun ist der Begriff jener Summe, welcher Anfangs bloss formell auftrat, auf seine reale Bedeutung zurückgeführt.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Gleichung des Ellipsoids, welches zu einem gegebenen Summenausdruck

$$S = \Sigma(e().e)$$

gehört, zu finden. Wir haben zu dem Ende in der Gleichung (7)

$$SQ = pQ.p$$

nur entweder p oder Q zu eliminiren, indem p der Träger eines Punktes der Oberfläche ist, Q aber, da es die Ebene der zu p gehörigen konjugirten Halbmesser darstellt, der Tangentialebene parallel ist. Um im ersteren Falle (wenn p eliminirt ist) das Ellipsoid als Umhüllte dar zustellen, können wir uns der in § 144 erwähnten Methode bedienen, wonach der Masswerth von Q so angenommen wurde, dass, wenn Q in die Lage der Tangentialebene versetzt wird, seine Abweichung vom Ursprung der Träger eine konstante Grösse ist, die wir der Einheit gleich setzen können. Es ist aber jene Abweichung gleich pQ, also pQ gleich der Einheit. Multiplicirt man daher obige Gleichung mit Q, so hat man

$$SQ.Q = pQ.pQ = 1,$$

was die geometrische Gleichung jenes Ellipsoids als umhüllter Fläche ist. Es ist aber

*) Wenn man unter x', y', z' die Koordinaten selbst versteht, welche zu den Zeigern x, y, z gehören, so hat man $x' = xa$, ..., oder $x = \frac{x'}{a}$, ... und die Gleichung (8) wird dann

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

was die gewöhnliche Form der Gleichung eines Ellipsoids ist.

$$S Q . Q = \Sigma (e Q . e) . Q = \Sigma (e Q)^2,$$

und die Gleichung des Ellipsoids ist also

$$\Sigma (e Q)^2 = 1. \quad (9)$$

Will man diese Gleichung auf ein gegebenes Richtsystem a, b, c zurückführen, so nehme man

$$Q = xbc + yca + zab$$

an, und

$$e = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

also

272
274

$$e Q = (\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

wenn abc (das Hauptmass) der Einheit gleich gesetzt ist, und man hat also

$$\Sigma (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 1,$$

oder, mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy = 1.$$

Wir haben bisher nur die Summe von offenen Quadraten betrachtet. Nehmen wir auch die Differenzen in die Betrachtung auf, so können die Ellipsoide auch übergehen in Hyperboloide, und wir gelangen dann zu dem allgemeinen Begriffe einer Grösse, die im Raume durch eine Oberfläche, in der Ebene durch eine Kurve zweiter Ordnung dargestellt wird, und die wir, da sie ursprünglich als Ellipsoid oder Ellipse erscheint, eine elliptische Grösse nennen könnten. Doch scheint es kaum nöthig, dies noch weiter auszuführen, indem der Gang der weitern Entwickelung keine Schwierigkeiten mehr darbietet. Auch übersieht man leicht, wie die ganze Entwickelung so hätte geführt werden können, dass gar nicht auf willkührliche Koordinatensysteme zurückgegangen [worden] wäre; und ich habe den eingeschlagenen Weg nur darum gewählt, um zugleich die Behandlungsweise für die offenen Produkte überhaupt hindurchblicken zu lassen.

Anhang I. (1877.)

Ueber das Verhältniss der nichteuklidischen Geometrie zur Ausdehnungslehre.

(Vgl. § 15—23.)

Es ist die ganze Darstellung in § 15—23 zum Schaden der Wissen- 273 schaft bisher fast ganz unbeachtet geblieben. Weder Riemann in seiner Habilitationsschrift *) vom Jahre 1854, die zuerst 1867 veröffentlicht wurde, noch Helmholtz**) in seiner Abhandlung „Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. 1868“, noch auch in seinem vortrefflichen Vortrage „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. 1876“ thut derselben Erwähnung, obgleich darin die Grundlagen der Geometrie in viel einfacherer Weise zur Anschauung kommen als in jenen späteren Schriften.

In der Ausdehnungslehre erscheint ganz speciell und im Gegensatz gegen Euklid die gerade Linie als Grundlage der geometrischen Definitionen. Die Ebene wird in § 16 definirt als Gesammtheit der Parallelen, welche eine gerade Linie schneiden, und der Raum als Gesammtheit der Parallelen, welche eine Ebene schneiden, und weiter kann die Geometrie nicht fortschreiten, während die abstrakte Wissenschaft keine Gränzen kennt. Da alle Punkte einer geraden Linie sich aus zwei Punkten derselben numerisch ableiten lassen, so erscheint die gerade Linie als einfaches Elementargebiet zweiter Stufe und entsprechend die Ebene als einfaches Elementargebiet dritter, der Raum als ein solches vierter Stufe***).

---

*) [Gemeint ist seine Habilitationsrede: Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Ges. Werke, 1. Ausg. S. 254 ff., 2. Ausg. S. 272 ff.]

**) [Die Abhandlung steht in den Göttinger Nachrichten von 1868, S. 193—221, s. auch seine ges. wiss. Abh. Bd. II, S. 618—639. Den Vortrag findet man in seinen „Vorträgen und Reden“, Bd. II, S. 1 ff., Braunschweig 1884.]

***) Um Verwechselungen vorzubeugen, bemerke ich, dass die Strecken einer Ebene ein einfaches Ausdehnungsgebiet zweiter Stufe, die des Raumes ein einfaches Ausdehnungsgebiet dritter Stufe und überhaupt die Strecken eines einfachen Elementargebietes $(n+1)$-ter Stufe ein einfaches Ausdehnungsgebiet n-ter Stufe bilden.

274 Es sind also zum Beispiel | die Punkte einer Ebene aus drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten numerisch ableitbar, etwa durch die Zahlen x_1, x_2, x_3. Wird nun zwischen diesen drei Zahlen eine homogene Gleichung festgesetzt, so reducirt sich die Gesammtheit der Punkte, welche der Gleichung genügen, auf ein Gebiet zweiter Stufe. Ist diese homogene Gleichung vom ersten Grade, so wird das so bestimmte Gebiet zweiter Stufe ein einfaches, das heisst, eine gerade Linie; ist aber jene Gleichung von höherem Grade, so entstehen krumme Linien, für welche nur ein Theil der für die gerade Linie gültigen longimetrischen Gesetze gelten wird.

Geht man zum Raum über, so ist jeder Punkt desselben aus vier Punkten, welche ein Tetraeder bilden, durch vier Zahlen $x_1, \ldots x_4$ numerisch ableitbar. Herrschen zwischen diesen vier Grössen zwei von einander unabhängige homogene Gleichungen, von denen keine vom ersten Grade ist, so erhalten wir Linien doppelter Krümmung, für welche wieder nur ein Theil jener longimetrischen Gesetze gilt.

Schreiten wir nun vom Raume, als einem Gebiet vierter Stufe, zu einem Gebiet fünfter Stufe vor (welches nicht mehr geometrisch existirt), so hat man für dasselbe fünf Ableitungszahlen $x_1, \ldots x_5$, und besteht zwischen diesen eine homogene Gleichung ersten Grades, so kommt man auf das einfache Elementargebiet vierter Stufe, das heisst, auf den Euklidischen Raum zurück. Herrscht dagegen zwischen ihnen eine homogene Gleichung höheren Grades, so kommt man zwar auch zu Elementargebieten vierter Stufe, indessen zu solchen, für welche die Euklidischen Axiome nicht mehr gelten, also gewissermassen zu nichteuklidischen Räumen *); ja man kann zu einem Elementargebiete sechster Stufe übergehen und zwischen den sechs Ableitungszahlen zwei höhere homogene Gleichungen annehmen, und erhält so abermals 275 neue Elementargebiete vierter Stufe **) und kann | somit eine unendliche Menge nichteuklidischer Räume bilden, aus deren Gleichungen sofort hervorleuchtet, in wie weit die Euklidischen Axiome noch gelten.

So bietet also die Ausdehnungslehre die vollkommen ausreichende und ganz allgemeine Grundlage auch für diese und ähnliche Betrachtungen.

---

*) So zum Beispiel entsteht der Helmholtz'sche sphärische Raum, wenn man zwischen den genannten fünf Ableitungszahlen eine gewisse homogene Gleichung zweiten Grades annimmt (oder allgemeiner ein gekrümmter Raum bei Annahme einer Gleichung beliebigen Grades).

**) Man könnte einen solchen Raum im Gegensatz zu dem eben genannten (einfach) gekrümmten Raum etwa einen doppelt gekrümmten Raum nennen.

Anhang II. (1877.)

Ueber das eingewandte Produkt.

(Vgl. das dritte Kapitel des zweiten Abschnitts.)

Da in dem ganzen Kapitel nur der Begriff des auf ein Hauptgebiet bezüglichen Produktes zur Evidenz entwickelt ist, und alle übrigen formellen Begriffe nach und nach fallen gelassen sind, so wäre es zweckmässig gewesen, die ganze Entwickelung auf jenen Begriff zu beschränken. Doch hätte sich auch in dieser Beschränkung die Darstellung einfacher fassen lassen, was ich hier versuchen will. Ich gehe dabei auf den Satz am Schlusse von § 126 zurück, wonach, wenn a und b die Stufenzahlen zweier Grössen, u die des sie zunächst umfassenden Gebietes und c die des gemeinschaftlichen Gebietes ist, $c = a + b - u$ ist.

Der Begriff des eingewandten (regressiven), auf ein Hauptgebiet bezüglichen Produktes ist dahin festgestellt, dass dasselbe dann und nur dann null ist, wenn das die Faktoren zunächst umfassende Gebiet von geringerer Stufe ist als das Hauptgebiet. Hierauf und auf den allgemeinen Begriff der Multiplikation, das heisst, auf die bekannte Beziehung derselben zur Addition, ist der formale Begriff des betrachteten Produktes gegründet. Um zu dem realen Begriff desselben zu gelangen, kommt es zunächst darauf an, dasjenige, was bei einer Formänderung des Produktes, die den Werth desselben nicht ändert, konstant bleibt, in möglichst anschaulicher Form darzustellen.

Es sei $A . B$ das eingewandte Produkt, dessen Werth nicht null ist, und seien a und b die Stufenzahlen von A und B, u die des Hauptgebietes, so zeige ich zuerst, dass bei jeder Formänderung des 276 Produktes $A . B$, welche dessen Werth unverändert lässt, das den beiden Faktoren gemeinschaftliche Gebiet unverändert bleibt.

Unmittelbar leuchtet dies ein, wenn die beiden Faktoren denselben Werth behalten oder sich in umgekehrtem Zahlenverhältnisse ändern, weil dann auch deren Gebiete dieselben bleiben. Aendert nun einer der beiden Faktoren, zum Beispiel der zweite B seinen Werth in $B + B_1$, ohne dass sich der Werth des Produktes ändert, so folgt daraus, dass $A . B_1 = 0$ sein, das heisst, das die Faktoren A und B_1 zunächst umfassende Gebiet von niederer als u-ter Stufe, oder, was dasselbe ist, das ihnen gemeinschaftliche Gebiet [von] höherer als c-ter Stufe sein muss. Da nun die Summe zweier Grössen höherer Stufe nach § 51 sich

stets auf den Fall zurückführen lässt, wo die beiden Grössen in einem Gebiete nächsthöherer Stufe, also in unserm Falle in einem Gebiete $(b + 1)$-ter Stufe liegen, so brauchen wir auch hier nur diesen Fall zu berücksichtigen. Aber dann haben B und B_1 ein Gebiet $(b - 1)$-ter Stufe gemeinsam, und man kann also B_1 in b einfache Faktoren zerlegen, von denen $b - 1$ in B liegen und einer ausserhalb B; nun soll B_1 mit A aber $c + 1$ einfache Faktoren gemeinsam haben, was nur möglich ist, wenn c von jenen $b - 1$ einfachen Faktoren zugleich in A liegen, das heisst, dem gemeinsamen Gebiete C angehören, und der eine ausserhalb B liegende Faktor von B_1 gleichfalls in A liegt. Es liegt somit das ganze Gebiet C in B_1, das heisst, C ist das gemeinsame Gebiet von A und B_1, also auch von A und $B + B_1$; das den beiden Faktoren gemeinsame Gebiet bleibt [mithin] unverändert, wenn das Produkt denselben Werth behält. Denn für die Aenderung des ersten Faktors gilt dieselbe Schlussreihe.

Um nun den metrischen Werth des Produktes zu finden, setzen wir $B = CD$, also $A . B = A . CD$, dann stellt AD das umfassende, hier also das Hauptgebiet dar. Nun können wir einen Theil des Hauptgebietes gleich Eins setzen (zum Beispiel das äussere Produkt der in ihrer Reihenfolge genommenen ursprünglichen Einheiten). Dann stellt $A . D$ eine Zahl dar. Wenn dieselbe $= \lambda$ ist, so kann man statt C und D die Grössen $C_1 = \lambda C$ und $D_1 = \frac{D}{\lambda}$ einführen, ohne den Werth des Produktes $C . D$ zu ändern; dann wird aber $A . D_1 = 1$, und $A . CD = A . C_1 D_1$.

Ich behaupte nun, dass C_1 bei der oben besprochenen Form-277 änderung des Produktes ungeändert bleibt. Es kann nach dem Obigen $B_1 = C_1 . E_1$ gesetzt werden, wo E_1 einen einfachen Faktor mit A gemein hat, das heisst, $A . E_1 = 0$ ist; dann wird also in $A . C_1 (D_1 + E_1)$ das Produkt $A . (D_1 + E_1) = A . D_1 = 1$, und es bleibt das so bestimmte C_1 ungeändert. Wir können daher C_1 als den wahren Werth des Produktes betrachten und können dann allgemein, auch wenn $A . D$ nicht gleich Eins ist, stets $A . CD = AD . C$ setzen, wo AD [ein] Theil des Hauptgebietes und also eine Zahl ist, und können dies als die *reale* Definition des eingewandten Produktes auffassen.

Anhang III. (1877.)

Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre.

(In Folge einer Aufforderung Grunerts in dessen Archiv Bd. VI (1845) veröffentlicht vom Verfasser.)

I. Tendenz der Ausdehnungslehre als solcher. [337]

1. Meine Ausdehnungslehre bildet die abstrakte Grundlage der Raumlehre (Geometrie), das heisst, sie ist die von allen räumlichen Anschauungen gelöste, rein mathematische Wissenschaft, deren specielle Anwendung auf den Raum die Raumlehre ist.

Die Raumlehre, da sie auf etwas in der Natur gegebenes, nämlich den Raum, zurückgeht, ist kein Zweig der reinen Mathematik, | sondern [338] eine Anwendung derselben auf die Natur; aber nicht eine blosse Anwendung der Algebra, auch dann nicht, wenn die algebraische Grösse, wie in der Funktionenlehre, als stetig veränderlich betrachtet wird; denn es fehlt der Algebra der der Raumlehre eigenthümliche Begriff der verschiedenen Dimensionen. Daher ist ein Zweig der Mathematik nothwendig, welcher in den Begriff der stetig veränderlichen Grösse zugleich den Begriff von Verschiedenheiten aufnimmt, welche den Dimensionen des Raumes entsprechen, und dieser Zweig ist meine Ausdehnungslehre.

2. Doch sind die Sätze der Ausdehnungslehre nicht etwa 278 blosse Uebertragungen geometrischer Sätze in die abstrakte Sprache, sondern haben eine viel allgemeinere Bedeutung; denn, während die Raumlehre gebunden bleibt an die drei Dimensionen des Raumes, so bleibt die abstrakte Wissenschaft von diesen Schranken frei.

In der Raumlehre können durch die Bewegung von Punkten Linien, durch die der Linien Flächen, durch die der Flächen Körperräume erzeugt werden, aber weiter kann die Raumlehre nicht fortschreiten. Hingegen, stellt man sich vor, dass an die Stelle des Punktes und der Bewegung abstrakte, vom Raume unabhängige Begriffe eingeführt werden (s. unten, Nr. 4—6), so verschwinden diese Schranken.

3. Dadurch geschieht es nun, dass die Sätze der Raumlehre eine Tendenz zur Allgemeinheit haben, die in ihr vermöge ihrer Beschränkung auf drei Dimensionen keine Befriedigung findet, sondern erst in der Ausdehnungslehre zur Ruhe kommt.

Zwei Beispiele mögen dies erläutern.

1) Zwei gerade Linien derselben Ebene schneiden sich in Einem Punkte, ebenso eine Ebene und eine Gerade, zwei Ebenen in Einer geraden Linie, vorausgesetzt, dass die Geraden, oder die Ebene und die Gerade, oder die Ebenen nicht zusammenfallen, und die Durchschnitte im Unendlichen mitgerechnet werden. Werden der Punkt, die Gerade, die Ebene, der Körperraum beziehlich als Gebiete erster, zweiter, dritter, vierter Stufe aufgefasst, so liegt darin der allgemeine Satz angedeutet, dass ein Gebiet von a-ter und eins von b-ter Stufe, wenn sie in einem Gebiete von c-ter Stufe, aber auch in keinem Gebiete von niederer Stufe vereinigt sind, ein Gebiet $(a + b - c)$-ter Stufe gemeinschaftlich haben; aber die Raumlehre kann diesen Satz nur für c gleich oder kleiner als vier zur Anschauung bringen.

2) Der Flächenraum eines Dreiecks ist die Hälfte von dem eines Parallelogramms, dessen Seiten mit zwei Seiten des Dreiecks gleich lang und parallel sind, der Körperraum des Tetraeders ein Sechstel von dem des Spathes (Parallelepipedums), dessen Kanten mit drei in einem Punkte zusammentreffenden Kanten des Tetraeders gleich lang und parallel sind. Darin scheint der Satz | angedeutet: der Raum, welcher zwischen n Punkten liegt, die in einem Gebiete n-ter Stufe (und in keinem Gebiete von niederer Stufe) vereinigt sind, ist $\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}$ von dem Raume eines Gebildes (einer Figur, eines Körpers), dessen Begränzungslinien | (Seiten, Kanten) den, von einem der n Punkte zu den übrigen gezogenen geraden Linien gleich und parallel sind. Aber auch dieser Satz kommt hier nicht in seiner Allgemeinheit heraus.

279 [339]

Hingegen in der Ausdehnungslehre treten in diesen beiden und in allen andern Fällen die ganz allgemeinen Sätze vollkommen hervor. So nimmt also überall die Raumlehre einen Anlauf zur Allgemeinheit, stösst sich aber, ohne diese Allgemeinheit erreichen zu können, an den ihr durch den Raum gesteckten Schranken, welche nur die abstrakte Wissenschaft der Ausdehnungslehre zu durchbrechen vermag.

4. Das der Linie entsprechende Gebilde der Ausdehnungslehre ist die Gesammtheit der Elemente, in die ein seinen Zustand stetig änderndes Element übergeht.

Die Linie kann als Gesammtheit der Punkte betrachtet werden, in die ein seinen Ort stetig ändernder Punkt übergeht. Substituiren wir hier dem Punkte allgemeiner irgend ein Ding, welches einer stetigen Aenderung irgend eines Zustandes, den es hat, fähig ist, und abstrahiren nun von allem anderweitigen Inhalte des Dinges und aller

Besonderheit dieses seines Zustandes, und nennen das von allem anderweitigen Inhalte abstrahirte Ding das *Element*, so gelangen wir zu dem aufgestellten Begriffe.

5. Wenn hierbei das Element seinen Zustand stets auf gleiche Weise ändert, so dass, wenn aus einem Elemente a des Gebildes durch Eine solche Aenderung ein anderes Element b desselben hervorgeht, dann durch eine gleiche Aenderung aus b ein neues Element c desselben Gebildes hervorgeht, so entsteht das der *geraden* Linie entsprechende Gebilde, das Gebiet zweiter Stufe.

Die gerade Linie wird von dem Punkte konstruirt, wenn dieser seinen Ort stets nach derselben Richtung hin ändert; | substituiren wir 280 daher der Richtung die Art und Weise der Aenderung, so geht der aufgestellte Begriff hervor *).

6. Wenn man alle Elemente eines Gebietes n-ter Stufe einer und derselben Aenderungsweise unterwirft, welche zu neuen (in jenem Gebiete nicht enthaltenen) Elementen führt, so heisst die Gesammtheit der durch diese Aenderungsweise und die entgegengesetzte erzeugbaren Elemente ein Gebiet $(n+1)$-ter Stufe; das Gebiet dritter Stufe entspricht der Ebene, das vierter dem ganzen Raume.

Wenn die Punkte einer geraden Linie sich alle nach einer und derselben Richtung bewegen, die zu neuen (in jener Geraden nicht enthaltenen) Punkten führt, so ist die Gesammtheit der durch diese Bewegung und die entgegengesetzte erzeugbaren Punkte die Ebene; und wenn man ebenso mit den Punkten der | Ebene verfährt, so erhält man [340] den ganzen Raum. Substituirt man hier den räumlichen Begriffen die vorher angegebenen abstrakten und hält den Fortgang von einer Stufe zur nächst höheren allgemein fest, so ergiebt sich der obige Begriff.

II. Tendenz der in meiner Ausdehnungslehre angewandten Rechnungsmethode, an der Geometrie erläutert.

7. In meiner Ausdehnungslehre tritt eine eigenthümliche Rechnungsmethode hervor, welche, auf die Raumlehre übertragen, von unerschöpflicher Fruchtbarkeit ist, und hier (in der Raumlehre) darin besteht, dass räumliche Gebilde

*) Soll die gerade Linie und das ihr entsprechende Gebilde nach beiden Seiten unendlich sein, so muss der Punkt (das Element) auch nach der entgegengesetzten Richtung (Aenderungsweise) fortschreiten, was wir hier der Einfachheit wegen übergangen haben.

(Punkte, Linien und so weiter) unmittelbar der Rechnung unterworfen werden.

Zum Beispiel wird die durch zwei Punkte geführte Gerade ihrer Grösse und Lage nach als Verknüpfung jener Punkte und zwar als eine eigenthümliche Art der Multiplikation aufgefasst (s. unten, Nr. 15), ebenso das zwischen drei Punkten liegende Dreieck seinem Flächen-
281 raum und der Lage seiner Ebene nach als Produkt dreier Punkte, | so dass dies Produkt null ist, wenn der Flächenraum jenes Dreiecks es ist, das heisst, die drei Punkte in gerader Linie liegen; ferner der Durchschnittspunkt zweier gerader Linien in einem unten (Nr. 22 und Aufgabe 19) näher zu bezeichnenden Sinne als Produkt dieser Linien.

8. Die Tendenz dieser Rechnungsmethode für die Geometrie ist, die synthetische und analytische Methode zu vereinigen, das heisst, die Vorzüge einer jeden auf den Boden der andern zu verpflanzen, indem jeder Konstruktion eine einfache analytische Operation zur Seite gestellt wird, und umgekehrt.

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel. Bekanntlich beschreibt eine Ecke γ eines veränderlichen Dreiecks, dessen beide andere Ecken α, β sich in festen geraden Linien A und B bewegen, und dessen Seiten durch drei feste Punkte a, b, c gehen, einen Kegelschnitt. Sind a, b, c die festen Punkte, durch welche beziehlich die den Ecken α, β, γ gegenüberliegenden Seiten gehen, so sieht man, dass (s. Nr. 7) $\gamma a B$ die Ecke β, $\gamma a B c A$ die Ecke α darstellt, und da die Punkte α, b, γ in Einer geraden Linie liegen, also ihr Produkt null ist (Nr. 7), so hat man die Gleichung

$$\gamma a B c A b \gamma = 0$$

als Gleichung eines von γ beschriebenen Kegelschnittes. Man sieht, dass diese Gleichung in Bezug auf γ vom zweiten Grade ist, und man wird schon hierin ein auf alle algebraischen Kurven gehendes wichtiges Gesetz ahnen.

III. Einfachste Rechnungsregeln für die neue Analyse.

Die Verknüpfungen, die in diesem Theile der Ausdehnungslehre vorkommen, sind Addition, Subtraktion, kombinatorische Multiplikation, kombinatorische Division.

[341] 9. Für alle Arten der Addition und Subtraktion gilt das gewöhnliche Rechnungsverfahren.

10. Für alle Multiplikations- und Divisionsweisen gilt das Gesetz: Statt ein Aggregat von Gliedern mit einem zeichen-

losen Ausdrucke auf irgend eine Weise zu multipliciren oder zu dividiren, kann man ohne Aenderung des letzten Ergebnisses die | einzelnen Glieder mit diesem Ausdrucke auf die- 282 selbe Weise*) multipliciren oder dividiren, und die einzelnen Produkte oder Quotienten so zu einem Aggregate verknüpfen, dass man einem jeden das Zeichen desjenigen Gliedes vorsetzt, durch dessen Multiplikation oder Division es entstanden ist; ein Zahlfaktor kann überdies, wenn er irgend einem Faktor des Produktes zugeordnet ist, auch jedem andern oder auch dem Produkte zugeordnet werden; endlich $\frac{A}{A}$ ist allemal Eins, wenn A nicht null ist.

11. Ein Produkt $a.b.c\ldots$ nenne ich ein kombinatorisches, wenn ausser dem Gesetze Nr. 10 für dasselbe noch das Gesetz gilt, dass, wenn von den einzelnen Faktoren $a, b, c, \ldots$ zwei aufeinanderfolgende vertauscht werden, das Produkt entgegengesetzten Werth annimmt; und zwar nenne ich $a, b, c, \ldots$ und deren Summen oder Differenzen dann Faktoren erster Ordnung.

Hiernach ist also zum Beispiel $a.b.c.d. = -a.c.b.d.$

12. Wenn in einem kombinatorischen Produkte zwei Faktoren erster Ordnung einander gleich sind, so ist das Produkt null.

Zum Beispiel $a.b.b.d = 0$ (wie sich auch sogleich ergiebt, wenn man in dem Beispiel zu Nr. 11 b und c gleich setzt).

Folgende Aufgaben mögen zur Erläuterung dieser Multiplikationsweise dienen:

Aufgabe 1. *Das kombinatorische Produkt*

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \cdot (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) \cdot (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3)$$

zu entwickeln, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3;\ \beta_1, \beta_2, \beta_3;\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *Zahlgrössen,* e_1, e_2, e_3 *aber kombinatorische Faktoren erster Ordnung bezeichnen.*

Man erhält durch Anwendung der Rechnungsregeln (9—12) schliesslich den Ausdruck

$$(\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3)\, e_1 \cdot e_2 \cdot e_3.$$

Aufgabe 2. *Drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten* 283 *durch die Regeln der kombinatorischen Multiplikation zu lösen* (§ 45).

Die drei Gleichungen seien

*) Dieser Ausdruck bezieht sich nicht nur auf die Verknüpfungsweise im Allgemeinen, sondern auch auf die Stellung des Faktors in dem Produkte.

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1, \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2, \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3. \end{cases}$$

[342] Man multiplicire die drei Gleichungen beziehlich mit drei kombinatorischen Faktoren erster Ordnung e_1, e_2, e_3, deren Produkt nicht null ist, addire sie, und setze

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = a, \\ \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 = b, \\ \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 = c, \\ \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 = d, \end{cases}$$

so erhält man die Gleichung

$$(3)\quad xa + yb + zc = d.$$

Multiplicirt man diese Gleichung kombinatorisch mit $b.c$, so erhält man, weil $b.b.c$ und $c.b.c$ nach Nr. 12 null sind, die Gleichung

$$x.a.b.c = d.b.c, \text{ also } x = \frac{d.b.c}{a.b.c},$$

und auf ähnliche Weise findet man y und z, und erhält

$$(4)\quad x = \frac{d.b.c}{a.b.c}, \quad y = \frac{a.d.c}{a.b.c}, \quad z = \frac{a.b.d}{a.b.c}.$$

Diese Ausdrücke (in welchen die Gesetze der kombinatorischen Multiplikation kein Heben der einzelnen kombinatorischen Faktoren gestatten) sind äusserst bequem für die Analyse. Will man die Unbekannten in der gewöhnlichen Form ausgedrückt erhalten, so hat man nur aus Gleichung (2) zu substituiren, nach Aufgabe 1 zu entwickeln und $e_1 e_2 e_3$ nach Nr. 10 im Zähler und Nenner zu heben; zum Beispiel findet man

$$(5)\quad x = \frac{\delta_1\beta_2\gamma_3 - \delta_1\beta_3\gamma_2 + \delta_3\beta_1\gamma_2 - \delta_3\beta_2\gamma_1 + \delta_2\beta_3\gamma_1 - \delta_2\beta_1\gamma_3}{\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3}.$$

Man sieht, wie dies Verfahren nicht nur überhaupt für n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten anwendbar ist, sondern wie man auch bei einiger Geläufigkeit hiernach sogleich das Endresultat hinschreiben kann, sobald die n Gleichungen gegeben sind.

284 **IV. Anschauliche Begriffe der verschiedenen Grössen und Verknüpfungsweisen in der Geometrie.**

13. Die räumlichen Grössen erster Stufe sind einfache oder vielfache Punkte, und gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung. (§ 13—§ 19.)

Sind A und B Punkte, so bezeichne ich die gerade Linie von A nach B, so fern an ihr zugleich Länge und Richtung, aber auch nichts weiter, festgehalten wird, mit $B - A$; ich sage also, dass $B - A$ dann und nur dann gleich $B_1 - A_1$ sei, wenn die geraden Linien | von [343] A nach B und von A_1 nach B_1 gleiche Länge und Richtung haben.

14. Die räumlichen Grössen n-ter Stufe entstehen durch kombinatorische Multiplikation von n Grössen erster Stufe, welche als Faktoren erster Ordnung angenommen werden.

In diesem Falle, wenn nämlich die Faktoren erster Ordnung zugleich Grössen erster Stufe sind, nenne ich die Multiplikation eine äussere.

15. Sind A, B, C, D Punkte, so bedeutet (§ 106—115)

1) $A.B$ die Linie, welche A und B zu Gränzpunkten hat, aufgefasst als bestimmter Theil der durch A und B bestimmten unendlichen geraden Linie.

2) $A.B.C$ das Dreieck, dessen Ecken A, B, C sind, aufgefasst als bestimmter Theil der durch A, B, C bestimmten unendlichen Ebene.

3) $A.B.C.D$ das Tetraeder, dessen Ecken A, B, C, D sind, aufgefasst als bestimmter Theil des unendlichen Körperraumes.

Das heisst, wir setzen $A.B = A_1.B_1$, wenn beide Produkte gleiche und gleichbezeichnete*) Theile derselben geraden Linie vorstellen; ferner

$$A.B.C = A_1.B_1.C_1,$$

wenn beide Dreiecke gleiche und gleichbezeichnete Theile derselben Ebene sind; endlich

$$A.B.C.D = A_1.B_1.C_1.D_1,$$

wenn beide Tetraeder gleichen und gleichbezeichneten Inhalt haben.

16. Sind a, b, c Linien von bestimmter Länge und Richtung, so bedeutet (§ 28—36) 285

1) $a.b$ das Parallelogramm, dessen Seiten gleich und parallel a und b sind, und zwar aufgefasst als Flächenraum von bestimmter Grösse und Ebenen-Richtung**).

2) $a.b.c$ das Spath (Parallelepipedum), dessen Kanten

*) Gleichbezeichnet nenne ich zwei Grössen, welche entweder beide positiven, oder beide negativen Werth haben.

**) Von zwei parallelen Ebenen sage ich, dass sie gleiche Ebenen-Richtung haben.

gleich und parallel a, b, c sind, und zwar aufgefasst als Körperraum von bestimmter Grösse.

Das heisst, wir setzen

$$a \, . \, b = a_1 \, . \, b_1,$$

wenn die Parallelogramme, welche durch diese Produkte dargestellt sind, in parallelen Ebenen liegen und gleichen und gleichbezeichneten Flächenraum haben;

$$a \, . \, b \, . \, c = a_1 \, . \, b_1 \, . \, c_1,$$

[344] wenn die durch diese Produkte dargestellten Spathe gleichen und gleichbezeichneten Inhalt haben.

17. Die Seite (rechte oder linke), nach welcher die Konstruktion einer räumlichen Grösse erfolgt, bestimmt ihren positiven oder negativen Werth, nämlich

1) Zwei Theile derselben Linie, $A \, . \, B$ und $A_1 \, . \, B_1$, setzen wir als gleichbezeichnet, wenn B von A aus nach derselben Seite liegt, wie B_1 von A_1 aus.

2) Zwei Theile derselben Ebene, $A \, . \, B \, . \, C$ und $A_1 \, . \, B_1 \, . \, C_1$, setzen wir als gleichbezeichnet, wenn C von $A \, . \, B$ aus nach derselben Seite hin liegt, wie C_1 von $A_1 \, . \, B_1$ aus, oder deutlicher, wenn dem, der in A stehend nach B sieht, C nach derselben Seite hin liegt, wie C_1 dem liegt, der in A_1 stehend nach B_1 sieht.

3) Zwei Körpertheile $A \, . \, B \, . \, C \, . \, D$ und $A_1 \, . \, B_1 \, . \, C_1 \, . \, D_1$ setzen wir als gleichbezeichnet, wenn D von $A \, . \, B \, . \, C$ aus nach derselben Seite hin liegt, wie D_1 von $A_1 \, . \, B_1 \, . \, C_1$ aus; oder deutlicher, wenn einer menschlichen Figur, die den Kopf nach A, die Füsse nach B, das Auge 286 nach C hin gerichtet hat, der Punkt D nach derselben | Seite liegt, wie D_1 einer Figur, die den Kopf nach A_1, die Füsse nach B_1, das Auge nach C_1 hin gerichtet hat.

4) Zwei parallele Flächenräume $a \, . \, b$ und $a_1 \, . \, b_1$ setzen wir als gleichbezeichnet, wenn die Richtung b von der Richtung a aus nach derselben Seite liegt, wie b_1 von a_1 aus.

5) Zwei Körperräume $a \, . \, b \, . \, c$ und $a_1 \, . \, b_1 \, . \, c_1$ setzen wir als gleichbezeichnet, wenn die Richtung c von $a \, . \, b$ aus nach derselben Seite hin liegt, wie c_1 von $a_1 \, . \, b_1$ aus, das heisst, wenn einer menschlichen Figur, welcher die Richtung a von den Füssen zum Kopfe geht, und deren Augen in der Richtung b_1 vorwärts sehen, die Richtung c nach derselben Seite liegt, wie die Richtung c_1 einer Figur, und so weiter.

18. Es giebt sieben Gattungen räumlicher Grössen, in vier Stufen vertheilt:

I. Stufe	1) Einfache oder vielfache Punkte. 2) Gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung.
II. Stufe	3) Bestimmte Theile bestimmter unendlicher gerader Linien. 4) Ebene Flächenräume von bestimmter Grösse und Ebenen-Richtung.
III. Stufe	5) Bestimmte Theile bestimmter unendlicher Ebenen. 6) Bestimmte Körperräume.
IV. Stufe	7) Bestimmte Körperräume.

Hier kommen die Körperräume zweimal vor, theils als Grössen dritter Stufe, theils als Grössen vierter Stufe, je nachdem sie als Produkte dreier gerader Linien von bestimmter Richtung und Länge, oder als Produkte von vier Punkten aufgefasst werden.

19. Gleichbezeichnete Theile eines und desselben Ganzen geben als Summe einen ebenso bezeichneten | Theil desselben [345] Ganzen, welcher so gross ist, als jene beiden zusammengenommen. (§ 8.)

Zum Beispiel $A.B$ und $A_1.B_1$ geben, wenn sie gleichgerichtete Theile derselben unendlichen geraden Linie sind, zur Summe einen eben so gerichteten Theil derselben Linie, welcher so gross ist, als jene beiden Theile zusammengenommen.

20. Je zwei Grössen derselben Stufe, aber auch | nur 287 solche, können addirt werden; der Begriff für die Addition solcher Grössen lässt sich allemal bestimmen, wenn man die vorher gegebene Bezeichnung dieser Grössen festhält, und die Rechnungsregeln aus III anwendet.

Aufgabe 3. *Zwei Punkte A und B zu addiren.*

Setzt man $A + B = 2S$, so erhält man $B - A = 2(S - A)$, das heisst, S ist die Mitte zwischen A und B. Also die Summe zweier Punkte ist die doppelt genommene Mitte zwischen beiden.

Aufgabe 4. *Zwei vielfache Punkte αA und βB zu addiren, wenn die Koefficienten α und β positiv sind, das heisst, den Punkt S zu finden, welcher der Gleichung*

$$\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta) S$$

genügt. (§ 94—98.)

Soll dieser Gleichung genügt werden, so muss

$$\beta(B - A) = (\alpha + \beta)(S - A)$$

sein, und umgekehrt erhält man aus der letzten die erstere. Aus der letzten folgt aber die Konstruktion: Man nimmt von der Linie AB von A aus den Theil $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ $\left(\text{oder von } B \text{ aus den Theil } \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$, so ist der Endpunkt dieses Theiles der Punkt S. — Also „die Summe zweier vielfachen Punkte mit positiven Koefficienten ist ein mit der Summe der Koefficienten multiplicirter Punkt, welcher in der geraden Linie zwischen beiden Punkten so liegt, dass seine Entfernungen von diesen beiden Punkten sich umgekehrt verhalten, wie die zu diesen Punkten gehörigen Koefficienten *)."

Aufgabe 5. *Einen Punkt A und eine gerade Linie von bestimmter Länge und Richtung $C - B$ zu addiren.*

Man konstruire eine gerade Linie von A aus, welche mit $C - B$ gleich lang und gleich gerichtet ist; diese sei $D - A$, so ist D die gesuchte Summe; denn da $C - B = D - A$ ist, so ist

$$A + (C - B) = A + (D - A) = D.$$

Also „die Summe eines Punktes A und einer geraden Linie von be-288 stimmter Länge und Richtung ist der Endpunkt dieser Linie, wenn A ihr Anfangspunkt ist."

[346] Aufgabe 6. *Einen vielfachen Punkt αA und eine gerade Linie von bestimmter Länge und Richtung $C - B$ zu addiren.*

Man konstruire eine gerade Linie von A aus, welche mit $C - B$ gleiche Richtung hat, aber nur $\frac{1}{\alpha}$ so lang ist; diese sei $D - A$, so ist αD die gesuchte Summe. Denn da

$$C - B = \alpha(D - A)$$

ist, so ist

$$\alpha A + (C - B) = \alpha A + \alpha(D - A) = \alpha D.$$

Aufgabe 7. *Zwei gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung $B - A$ und $D - C$ zu addiren.*

Man mache $E - B = D - C$, so ist

$$(B - A) + (D - C) = (B - A) + (E - B) = E - A.$$

Also „zwei Linien von bestimmter Länge und Richtung addirt man, indem man, ohne die Länge und Richtung zu verändern, auf den Endpunkt der einen den Anfangspunkt der andern legt, dann ist die gerade

*) Man sieht, dass dieser Punkt der Schwerpunkt ist, wenn die Koefficienten Gewichte vorstellen.

Linie vom Anfangspunkte der ersten zum Endpunkte der letzten die gesuchte Summe."

Aufgabe 8. *n gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung zu addiren.*

Die wiederholte Anwendung der Auflösung von Aufgabe 7 führt sogleich zu der Lösung dieser Aufgabe, nämlich „n gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung addirt man, indem man die einzelnen Linien, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, nach der Reihe stetig, das heisst, so an einander legt, dass, wo die eine aufhört, die nächstfolgende anfängt; dann ist die gerade Linie vom Anfangspunkte der ersten zum Endpunkte der letzten die gesuchte Summe."

Aufgabe 9. *Die Summe von n Punkten A_1, A_2, ... A_n zu finden, das heisst, den Punkt S zu finden, welcher der Gleichung*

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = nS$$

genügt.

Subtrahirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung nR, wo R ein beliebiger Punkt ist, so erhält man

$$(A_1 - R) + (A_2 - R) + \cdots + (A_n - R) = n(S - R),$$

und, da aus dieser Gleichung wieder die erstere sich ableiten lässt, so folgt: „Um n Punkte zu addiren, zieht man von einem beliebigen Punkte R die geraden Linien nach den n Punkten, legt sie, ohne ihre [289] Richtung und Länge zu ändern, stetig an einander und zwar so, dass der Anfangspunkt der ersten auf R fällt, verbindet R mit dem Endpunkte der letzten durch eine gerade Linie und theilt diese Verbindungslinie in n gleiche Theile, so ist der erste Theilpunkt von R aus der Punkt S, dessen n-faches die gesuchte Summe ist."

Aufgabe 10. *Beliebig viele vielfache Punkte αA, βB, ... zu addiren, wenn die Summe der Koefficienten $\alpha + \beta + \cdots$ nicht null ist.*

Setzt man

$$\alpha A + \beta B + \cdots = (\alpha + \beta + \cdots) S,$$

und subtrahirt auf beiden Seiten $(\alpha + \beta + \cdots) R$, wo R ein beliebiger [347] Punkt ist, so erhält man

$$\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots = (\alpha + \beta + \cdots)(S - R).$$

Also, da auch hieraus wieder die erste Gleichung sich ableiten lässt, so folgt „die Summe von beliebig vielen vielfachen Punkten αA, βB, ..., deren Koefficienten-Summe nicht null ist, findet man, indem man von irgend einem Punkte R aus die Linien nach A, B, ... legt, diese dann beziehlich mit α, β, ... multiplicirt*), die so gewonnenen Linien, ohne

*) Durch solche Multiplikation mit einer Zahlgrösse α ändert sich, wie man

ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig an einander legt, so dass der Anfangspunkt der ersten in R fällt, dann R mit dem Endpunkte der letzten verbindet und von der Verbindungslinie von R aus den Theil $\frac{1}{\alpha+\beta+\cdots}$ nimmt, so ist der mit $(\alpha+\beta+\cdots)$ multiplicirte Endpunkt dieses Theiles die gesuchte Summe."

Aufgabe 11. *Die Summe von vielfachen Punkten* αA, βB, ... *zu finden, wenn* $\alpha+\beta+\cdots=0$ *ist.*

Man subtrahire von der Summe $\alpha A+\beta B+\cdots$ den Ausdruck $(\alpha+\beta+\cdots)R$, so wird, da diese subtrahirte Grösse null ist, der Werth der Summe nicht geändert, also ist

$$\alpha A+\beta B+\cdots=\alpha(A-R)+\beta(B-R)+\cdots.$$

Also „die Summe von vielfachen Punkten, deren Koefficientensumme null ist, ist eine gerade Linie von bestimmter Länge und Richtung, 290 die | man dadurch findet, dass man von einem beliebigen Punkte R die geraden Linien nach den gegebenen Punkten zieht, diese mit den diesen Punkten zugehörigen Koefficienten multiplicirt, und die Produkte addirt."

Aufgabe 12. *Zwei Theile* $A.B$ *und* $C.D$ *von Linien, die sich in* E *schneiden, zu addiren.*

Man mache $E.F$ gleich $A.B$ und $E.G$ gleich $C.D$, so ist

$$A.B+C.D=E.F+E.G=E.(F+G)=2E.S,$$

wenn S die Mitte von F und G ist (vgl. Aufgabe 3). Also „zwei Theile von Linien, welche sich schneiden, addirt man, indem man diesen Theilen den Durchschnittspunkt als Anfangspunkt giebt; dann ist die doppelte gerade Linie vom Durchschnittspunkte zu der Mitte der beiden Endpunkte die gesuchte Summe*)."

Aufgabe 13. *Zwei parallele Linientheile* $A.B$ *und* $C.D$ *zu addiren, wenn beide nicht gleichlang und zugleich entgegengesetzt gerichtet sind.*

Wenn $A.B$ und $C.D$ parallel sind, so muss $D-C$ gleich [348] $\alpha(B-A)$ sein, wo α irgend eine positive oder negative Zahl ist. | Da nun $A.B$ gleich $A.(B-A)$ ist, weil $A.A$ nach Nr. 12 null ist, so hat man

---

leicht sieht, wenn α positiv ist, die Richtung nicht, während die Länge im Verhältniss $1:\alpha$ sich ändert; und ist α negativ, so wird die Richtung die entgegengesetzte.

*) Diese ist zugleich die Diagonale des Parallelogramms, welches jene Linientheile zu Seiten hat, woraus man sieht, dass die Summe der Linientheile die zusammengesetzte Kraft ist, wenn die Linientheile Kräfte vorstellen.

$$A\,.\,B + C\,.\,D = A\,.\,(B - A) + C\,.\,(D - C)$$
$$= A\,.\,(B - A) + \alpha C\,.\,(B - A)$$
$$= (A + \alpha C)\,(B - A).$$

Ist die Summe $A + \alpha C$ gleich $(1 + \alpha) S$ (vgl. Aufgabe 4), so wird der letzte Ausdruck

$$= S\,.\,(1 + \alpha)\,(B - A) = S\,.\,(B - A + D - C),$$

worin eine einfache Konstruktion jener Summe liegt.

Aufgabe 14. *Zwei gleich lange und entgegengesetzt gerichtete Linientheile $A.B$ und $C.D$ zu addiren.*

Liegen beide in derselben geraden Linie, so ist die Summe null. Ist dies nicht der Fall, so ist, weil $D - C = -(B - A)$ ist,

$$A\,.\,B + C\,.\,D = A\,.\,(B - A) + C\,.\,(D - C)$$
$$= A\,.\,(B - A) - C\,.\,(B - A)$$
$$= (A - C)\,.\,(B - A).$$

Dann ist die Summe also ein Flächenraum von bestimmter Grösse 291 und Ebenen-Richtung*).

Aufgabe 15. *Zwei Flächenräume von bestimmter Grösse und Ebenenrichtung $a.b$ und $c.d$ zu addiren.*

Sind die Ebenen parallel, so können sie schon nach Nr. 19 addirt werden; sind sie es nicht, so werden beide Ebenen eine Richtung gemeinschaftlich haben. Es sei e eine gerade Linie, welche diese Richtung hat, und $a.b$ gleich $e.f$, $c.d$ gleich $e.g$, so ist

$$a\,.\,b + c\,.\,d = e\,.\,f + e\,.\,g = e\,.\,(f + g).$$

Aufgabe 16. *Zwei Theile $A.B.C$ und $D.E.F$ bestimmter Ebenen, die nicht parallel sind, zu addiren.*

Sind die Ebenen nicht parallel, so werden sie sich schneiden. Es sei $G.H$ ein Theil der Durchschnittslinie, und es sei $A.B.C$ gleich $G.H.J$, $D.E.F$ gleich $G.H.K$, so ist

$$A\,.\,B\,.\,C + D\,.\,E\,.\,F = G\,.\,H\,.\,J + G\,.\,H\,.\,K$$
$$= G\,.\,H\,.\,(J + K) = 2G\,.\,H\,.\,S,$$

wenn S die Mitte zwischen J und K ist. Also „Zwei Theile nicht paralleler Ebenen addirt man, indem man sie als Dreiecke darstellt, deren gemeinschaftliche Grundseite in dem Durchschnitt beider Ebenen

---

*) Wie die Summe zweier Linientheile, die nicht in derselben Ebene liegen, zu behandeln sei, kann ich hier nicht ausführen (vgl. Ausdehnungslehre § 51 u. § 122).

[349] liegt; dann ist das Doppelte des Dreiecks, was dieselbe Grundseite hat, und dessen Spitze die Mitte ist zwischen den Spitzen jener Dreiecke, die gesuchte Summe."

Aufgabe 17. *Zwei Theile $A.B.C$ und $D.E.F$ paralleler Ebenen zu addiren.*

Sind die Ebenen parallel, so muss $(E-D).(F-D)$ gleich $\alpha(B-A).(C-A)$ gesetzt werden können, wo α eine Zahlengrösse ist. Dann ist

$$A.B.C+D.E.F = A.(B-A).(C-A)+D.(E-D).(F-D)^{*)}$$
$$= (A+\alpha D).(B-A).(C-A)$$
$$= S.(1+\alpha).(B-A).(C-A),$$

wenn $(1+\alpha)S$ die Summe von $A+\alpha D$ ist. Der letzte Ausdruck ist

$$= S[(B-A).(C-A)+(E-D).(F-D)],$$

292 worin wieder eine einfache Konstruktion liegt. Ist jedoch $\alpha=-1$, das heisst, sind beide Flächenräume gleich gross, aber entgegengesetzt bezeichnet, so ist $A+\alpha D$ eine gerade Linie von bestimmter Richtung und Länge (Aufgabe 11); ist diese gleich $H-G$, so ist

$$A.B.C+D.E.F=(H-G).(B-A).(C-A),$$

also die Summe dann ein Körperraum.

Aufgabe 18. *Einen Theil $A.B.C$ einer bestimmten Ebene und einen Körperraum $(D-A).(B-A).(C-A)$ zu addiren.*

$$A.B.C+(D-A).(B-A).(C-A)=$$
$$=A.(B-A).(C-A)+(D-A).(B-A).(C-A)$$
$$=D.(B-A).(C-A),$$

woraus der Begriff dieser Addition leicht hervorgeht.

21. Ein kombinatorisches Produkt, dessen Faktoren erster Ordnung Grössen $(n-1)$-ter Stufe sind, welche aber alle in einem und demselben Gebiete n-ter Stufe liegen, nenne ich ein eingewandtes Produkt, und zwar ein auf jenes Gebiet bezügliches;

zum Beispiel ein kombinatorisches Produkt von Linientheilen in der Ebene, oder von Ebenentheilen im Raume.

22. Wird von jetzt an die äussere Multiplikation durch blosses Aneinanderschreiben, die eingewandte Multiplikation durch einen zwischen die Faktoren gesetzten Punkt bezeichnet, so verstehen wir

*) vgl. Nr. 12.

unter dem eingewandten Produkte $AB.AC$, wo A, B, C beliebige Grössen sind, das Produkt $ABC.A$, in welchem ABC wie ein zu A gehöriger Koefficient behandelt wird, vorausgesetzt, dass das Produkt auf das Gebiet von niedrigster Stufe, in welchem A, B und C zugleich liegen, bezogen wird.

Aufgabe 19. *Das auf die Ebene ABC bezügliche Produkt zweier Linientheile $AB.AC$ zu finden.*

Nach Nr. 22 ist dasselbe gleich $ABC.A$; das heisst „das Pro- [350] dukt zweier Linientheile, deren Linien sich schneiden, ist der Durchschnittspunkt, verbunden mit einem Theil der Ebene als Koefficienten." Denkt man sich einen Theil der Ebene als Einheit angenommen, so werden die Ebenentheile, mit denen die Punkte behaftet sind, wirkliche Zahlgrössen und die Produkte erscheinen als vielfache Punkte; doch müssen dann alle zu vergleichenden Grössen in derselben Ebene, auf die sich die Produkte beziehen, liegen (wie dies in der Plani- 293 metrie immer der Fall ist).

Aufgabe 20. *Das Produkt dreier Linientheile AB, AC, BC in Bezug auf die Ebene ABC zu finden.*

Auflösung. $AB.AC.BC = ABC.ABC = (ABC)^2$.

Aufgabe 21. *Das eingewandte Produkt zweier Ebenentheile ABC und ABD (in Bezug auf den Körperraum) zu finden.*

Auflösung. $ABC.ABD = ABCD.AB$.

Aufgabe 22. *Das eingewandte Produkt dreier Ebenentheile ABC, ABD, ACD zu finden.*

Auflösung. $ABC.ABD.ACD = ABCD.ABCD.A$

$$= (ABCD)^2.A.$$

Aufgabe 23. *Das eingewandte Produkt von vier Ebenentheilen ABC, ABD, ACD, BCD zu finden.*

Auflösung. $ABC.ABD.ACD.BCD = (ABCD)^3$.

Anmerkung. Das Produkt zweier Ebenentheile giebt also einen Linientheil, das dreier einen Punkt, aber jener Linientheil und dieser Punkt haben dann noch einen Raumtheil oder ein Produkt von Raumtheilen als Koefficienten, und nimmt man einen Raumtheil als Einheit an, so gehen diese Koefficienten in wirkliche Zahlgrössen über.

Dies etwa sind die wesentlichsten Begriffe, welche in dem ersten Theile meiner Ausdehnungslehre vorkommen. Aber es ist unmöglich, von der unendlichen Fruchtbarkeit dieser neuen Methode für die Behandlung nicht nur der Raumlehre, sondern überhaupt aller Wissen-

schaften, welche auf räumliche Verhältnisse zurückgehen, hier auch nur einen oberflächlichen Begriff zu geben. Ebenso wenig konnte ich hier die Beweise liefern, dass in der That die in III gegebenen Rechnungsregeln für die einzelnen hier dargelegten Verknüpfungsweisen gelten, sondern auch hier muss ich auf meine ausführliche Schrift verweisen, in welcher diese Beweise in aller Strenge geführt sind, und wo zugleich die Entwickelung überall in der Art fortschreitet, dass alles Willkührliche, was noch in der Aufstellung der verschiedenen Begriffe zu liegen scheint, verschwindet.

Alphabetisches Verzeichniss der gebrauchten Kunstausdrücke. (1877.)

294

Die Kunstausdrücke, welche ich später ganz aufgegeben habe, sind eingeklammert. Zu denjenigen, welche ich in der Ausdehnungslehre von 1862 durch andere ersetzt habe, sind die letzteren hinzugefügt und durch ein Gleichheitszeichen mit jenen verbunden.

Inhalt.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Zweiter Abschnitt. Die Elementargrösse.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.



GEOMETRISCHE ANALYSE

GEKNÜPFT AN DIE

VON LEIBNIZ ERFUNDENE

GEOMETRISCHE CHARAKTERISTIK.

GEKRÖNTE PREISSCHRIFT

VON

H. GRASSMANN.

MIT EINER ERLÄUTERNDEN ABHANDLUNG

VON

A. F. MÖBIUS.

LEIPZIG

WEIDMANN'SCHE BUCHHANDLUNG

1847.



H. GRASSMANN'S

GEOMETRISCHE ANALYSE,

Bearbeitung der von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft gestellten Preisaufgabe, die Wiederherstellung und weitere Ausbildung des von Leibniz erfundenen geometrischen Kalkuls oder die Aufstellung eines ihm ähnlichen Kalkuls betreffend.

Etsi omnis methodus licita est, tamen non omnis expedit.
LEIBNIZ.

Gekrönt am 1. Juli 1846.

1

Wenn die eigenthümliche Kraft eines über seine Zeit hervorragenden Geistes schon *darin* sich offenbart, dass er die Ideen, auf welche die Zeitentwickelung hindrängt, aufzufassen und fortzubilden weiss, und er so als Repräsentant seiner Zeit erscheint: so tritt jene Kraft noch eigenthümlicher hervor in solchen Gedankenreihen, welche der Zeit vorangehen und ihr auf Jahrhunderte die Bahn der Entwickelung gleichsam vorzeichnen.

Während die Ideen ersterer Art, wenn eben die Zeit bis zu einem solchen Punkte der Entwickelung herangereift war, oft gleichzeitig von den hervorragenden Geistern der Zeit ausgebildet wurden (wie zum Beispiel die Differenzialrechnung gleichzeitig von Newton und Leibniz): so erscheinen die der letzteren Art als das besondere Eigenthum des Einzelnen, als die innerste Werkstätte seines Geistes, in welche nur wenigen Geweihten derselben Zeit vergönnt ist einzutreten und ahnend gleichsam anzuschauen den Reichthum der Entwickelung, welcher von da aus über eine künftige Zeit sich ausbreiten wird. Während jene ersten Gedankenreihen in der Zeit, in welcher sie hervortreten, da sie eben den Höhenpunkt dieser Zeit selbst darstellen, mächtigen Anklang finden, grosse Bewegungen und Entwickelungen hervorrufen: so verhallen diese meistens fast wirkungslos in der Gleichzeit, indem sie nur von wenigen verstanden werden, und von keinem vielleicht ganz. Oft erst nach Jahrhunderten, wenn die Zeit bis zu demjenigen Punkte der Entwickelung gediehen ist, welchen jene Geisteskraft vorbildend schuf, wird dann jener Gedanke eine Aussaat für eine reiche Aerndte.

Dass nun die grossartige Idee Leibnizens, deren Auffassung und Fortbildung den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, nämlich die Idee einer wahrhaft geometrischen Analyse, zu diesen vorbildenden und gleichsam prophetischen Ideen gehört, kann keinen Augenblick zweifelhaft sein, wie sie denn auch das Schicksal solcher Ideen getheilt hat. Ja durch eine besondere Ungunst der Verhältnisse ist dieselbe bis weit über den Zeitpunkt hinaus verborgen geblieben, von welchem an sie hätte kräftig in die Zeitentwickelung eingreifen können. Denn ehe noch jene Leibnizsche Idee durch Uylenbroek aus der Verborgen-

heit hervorgezogen wurde, waren schon von verschiedenen Seiten her Wege zu einer ganz verwandten Analyse angebahnt.

Dessenungeachtet erscheint es als eine wichtige Aufgabe, durch jene Idee, und durch die besondere Gestaltung, welche ihr Leibniz verliehen hat, die verwandte Analyse der Neueren zu befruchten und so den lange todt gelegenen Keim ins Leben zu rufen. Denn | wenn auch durch jene mehr als hundertjährige Verborgenheit jene Idee gleichsam ausgeschieden ist aus dem historischen Entwickelungsprocesse: so ist sie dennoch, indem sie nun hervortritt, keinesweges eine schon veraltete, sondern schliesst einen noch frischen und lebenskräftigen Keim in sich, dem nun sein Recht, mit der historischen Entwickelung zu verwachsen, nicht länger vorenthalten werden darf. Denn einerseits ist das Ideal dieser geometrischen Analyse, wie es Leibnizen als Ziel einer künftigen Entwickelung vorschwebte, keinesweges schon vollkommen erreicht, noch von den Mathematikern hinreichend als solches erkannt, andererseits ist auch die eigenthümliche Gestaltung, welche er dieser Idee durch seine freilich mehr beispielsweise gegebene Bezeichnungsart verliehen hat, keinesweges schon durch einen neueren Mathematiker auf ähnliche Weise ausgebildet worden; vielmehr sind alle Neueren von andern, wenn auch oft — dem Fortschritte der Zeit gemäss — von viel fruchtbareren Gesichtspunkten ausgegangen.

Leibniz selbst unterscheidet auf das Bestimmteste seinen Gedanken einer rein geometrischen Analyse, deren Ausbildung und Vollendung ihm als ein fernes Ziel vor Augen schwebte, deren Wichtigkeit er aber gleichwohl vollkommen erkannte, und andererseits seinen Versuch einer neuen Charakteristik, welchen er daran anschliesst, um die Möglichkeit der Verwirklichung jenes Gedankens glaublicher zu machen, und der Nachwelt, wenn er selbst an der Ausführung gehindert werden sollte, ein Denkmal zu hinterlassen, welches irgend einem Andern späterhin zur Verwirklichung jenes Gedankens Veranlassung geben möchte. Beides ist daher immer scharf auseinander zu halten, wenn man das Verdienst Leibnizens um die Ausbildung der geometrischen Analyse richtig würdigen will.

In der That überzeugt man sich leicht, dass die von Leibniz verversuchte Charakteristik nicht im mindesten das leistet, was er von der geometrischen Analyse überhaupt verheisst, dass sie vielmehr hinter dem von ihm selbst gesteckten Ziele so unendlich weit zurückbleibt, dass sie nur als ein roher, wenn gleich sehr anerkennungswerther Anfang zu einer Annäherung an jenes Ziel angesehen werden kann. Auch kann man nicht behaupten wollen, Leibniz habe noch andere Be-

zeichnungsarten in Bereitschaft gehabt, welche der Erreichung jenes Zieles näher ständen, denn dann würden sie auch die Erreichbarkeit desselben glaubhafter gemacht haben, und also von ihm entweder geradezu statt jener andern Bezeichnungsarten angeführt, oder doch wenigstens andeutungsweise berührt sein, wovon sich keine Spur findet. Man würde somit ein ganz schiefes und ungerechtes Urtheil über Leibnizens Leistungen auf diesem Gebiete gewinnen, wenn man nicht eben streng festhielte, dass er jene Vorzüge, welche er der geometrischen Analyse überhaupt in reichem Masse zuspricht, keineswegs seinem Versuche als schon beiwohnend zuschreiben will.

Woher aber nun, wenn es so steht, diese gewaltigen Lobsprüche über eine Sache, deren Gestaltung er nicht kannte? woher dies entschiedene Anpreisen ihrer Wichtigkeit, dies Aufzählen aller der ans Unglaubliche gränzenden Früchte, die sie tragen müsste auch für alle verwandten Gebiete des Wissens?

Wir können hierauf nur antworten, dass darin eben eine besondere Bevorzugung eines höher begabten Geistes besteht, dass er die Wichtigkeit | eines Gedankens bis in seine fernsten Folgerungen hinein vor- 3 ahnend anschaut, während kleinere Geister, das Geringfügige für wichtig haltend, an dem wahrhaft Grossen gedankenlos vorübergehn. Eben dies hervorragende Talent Leibnizens, eine ganze Entwickelungsreihe, ohne sie durchzumachen, dennoch ahnend zu überschauen, und, ohne sie vorher zu zergliedern und auseinander zu legen, sie dennoch mit prophetischem Geiste sich zu vergegenwärtigen und so ihre Folgewichtigkeit zu erkennen, dies Talent ist es eben, was ihn zu so grossartigen Entdeckungen fast auf allen Gebieten des Wissens geführt hat. Ich hoffe, im Verlauf dieses Aufsatzes zu zeigen, dass, abgesehen von einzelnen Uebertreibungen, welche aber überall mehr im Ausdrucke als in der Sache selbst liegen, Leibniz hier durchaus recht gesehen, indem ich eine Analyse wenigstens in ihren Grundzügen aufstellen werde, welche im Allgemeinen wirklich das leistet, was er als das Ziel der geometrischen Analyse ansieht; ja es wird sich zeigen, dass selbst die wesentlichen Vorzüge dieser Analyse von ihm mit einer gewissen Vollständigkeit aufgezählt sind. Hierdurch wird sich dann am besten die wissenschaftliche Bedeutung seiner Idee einer geometrischen Analyse darlegen.

Um auch andrerseits die wissenschaftliche Bedeutung seiner eigenthümlichen Charakteristik ans Licht treten zu lassen, und damit sein wissenschaftliches Verdienst auf diesem Gebiete auch nach der andern Seite hin zur Anschauung zu bringen, will ich bei der Ableitung und Entwickelung der neuen Analyse *den* Weg einschlagen, dass ich von

der Leibniz'schen Charakteristik ausgehe und zeige, wie von diesem Keime aus bei konsequenter Durchführung und Fortentwickelung, bei gehöriger Ausscheidung des Fremdartigen und Befruchtung durch die Ideen der geometrischen Verwandtschaften, die Analyse hervorgeht, welche ich als die, wenn auch nur relative, Verwirklichung der Leibnizschen Idee einer geometrischen Analyse anzusehen geneigt bin. Dass dies nicht der Weg ist, auf welchem ich zu dieser Analyse gelangt bin, bedarf wohl kaum einer Erwähnung.

[§ 1. **Die Leibniz'sche Charakteristik.**]

Das Wesentliche bei der Leibniz'schen Bezeichnungsart ist, dass er Punkte, welche ihrer Lage nach unbekannt oder veränderlich sind, gleichfalls zu bezeichnen sich erlaubt, wozu er dann der in der Algebra eingeführten Sitte gemäss die letzten Buchstaben des Alphabets wählt, während er die ihrer Lage nach bekannten oder unveränderlichen Punkte durch die übrigen Buchstaben markirt. Diese Bezeichnung wendet er dann in der von ihm mitgetheilten Probe besonders auf die Kongruenz an, indem er ganz allgemein zwei beliebige Vereine von entsprechenden Punkten kongruent setzt, wenn, ohne dass sich in irgend einem der beiden Vereine die gegenseitige Lage der Punkte ändert, beide zum Decken gebracht werden können, so nämlich, dass jeder Punkt des einen Vereins den entsprechenden des andern deckt, wobei er dann stets die entsprechenden Punkte auf die entsprechenden Stellen der als kongruent bezeichneten Vereine setzt. Diese einfache Betrachtungs- und Bezeichnungsweise wird ihm nun der Keim zu einer Reihe höchst überraschender Resultate; ja er ist dadurch in den Stand gesetzt, wirklich auch schon an dieser Probe nachzuweisen, wie eine rein geometrische Analyse möglich ist, und zwar eine solche, welcher 4 alle räumlichen Beziehungen unterworfen | werden können.

In der That sieht man sogleich, wenn man mit Leibniz γ als Zeichen der Kongruenz wählt, und unter x einen seiner Lage nach veränderlichen Punkt, unter a, b und c aber feste Punkte versteht, dass

$$ax \;\gamma\; bc \tag{1}$$

eine Kugel (deren Mittelpunkt a und deren Halbmesser bc ist) und

$$ax \;\gamma\; bx \tag{2}$$

eine Ebene (welche ab senkrecht hälftet) als geometrischen Ort des Punktes x liefert. Da nun aber durch Kugel und Ebene (ja schon durch die Kugel allein) sich alle Konstruktionen im Raume ausführen, und somit durch sie alle Arten räumlicher Abhängigkeit sich ver-

mitteln lassen, so folgt, dass das erwähnte Princip ausreichen muss für jede räumliche Betrachtung. Ja es können diese beiden Ausdrücke (1) und (2) als Definitionen der Kugel und Ebene gefasst, und somit auf ihnen das ganze Gebäude der Geometrie selbständig aufgeführt werden. Die Formel (2) kann als Ausdruck für den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche durch zwei feste Punkte a und b gehen, aufgefasst werden. Ebenso liefert die Formel

$$ax \mathbin{\texttt{8}} bx \mathbin{\texttt{8}} cx \tag{3}$$

die gerade Linie, als geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche durch drei feste Punkte a, b, c gehen. Endlich erscheint die Kreislinie als Durchschnitt zweier Kugeln, also ist ihr Ausdruck

$$ax \mathbin{\texttt{8}} ac$$
$$bx \mathbin{\texttt{8}} bc,$$

oder zusammengezogen

$$abx \mathbin{\texttt{8}} abc. \tag{4}$$

Man sieht hieraus, wie sich alles auf den Ausdruck für die Kugel zurückführen lässt, und daher ein solcher Aufbau der Geometrie auf jenem Fundamentalausdruck (1) vermöge dieser Einheit und Einfachheit des Princips von hoher wissenschaftlicher Bedeutung sein würde. Doch würde es mich zu weit von dem vorgesteckten Ziele abführen, wenn ich auch nur die Grundzüge einer solchen Konstruktion der Wissenschaft hier entwerfen wollte, wozu ja nothwendig die Ableitung der erforderlichen Grundsätze und der Nachweis, dass sie für die Konstruktion der Wissenschaft hinreichen, gehören würde; und diese Untersuchung wird immer eine der schwierigsten bleiben. Dagegen will ich nun die Anwendbarkeit der Leibniz'schen Rechnungsmethode an der Lösung der beiden Fundamentalaufgaben der Geometrie prüfen, indem ich den Ausdruck einer durch zwei gegebene Punkte gehenden Geraden und den einer durch drei gegebene Punkte gehenden Ebene suche.

Soll zuerst der Ausdruck einer durch zwei Punkte a und b gehenden Geraden gefunden werden, so muss derselbe die Form des Ausdrucks (3) erhalten, in welchem statt a, b, c drei Hülfspunkte a', b', c' eingeführt werden müssen, die jedoch nicht in gerader Linie liegen dürfen. Man hat dann die Formeln:

$$\left\{\begin{array}{l} a'x \mathbin{\texttt{8}} b'x \mathbin{\texttt{8}} c'x, \\ a'a \mathbin{\texttt{8}} b'a \mathbin{\texttt{8}} c'a, \\ a'b \mathbin{\texttt{8}} b'b \mathbin{\texttt{8}} c'b, \end{array}\right. \tag{5}$$

welche in ihrer Vereinigung die gerade Linie als geometrischen Ort 5

des Punktes x bestimmen. Man kann hier noch die beiden letzten Kongruenzreihen in Eine zusammenziehen

$$aba' \simeq abb' \simeq abc'.$$

Diese drückt dann aus, dass die Hülfspunkte a', b', c' in einer Kreislinie liegen, deren Ebene von ab senkrecht in dem Mittelpunkte der Kreislinie getroffen wird.

Ebenso verwickelt sind die Ausdrücke für eine durch drei Punkte a, b, c, die nicht in gerader Linie liegen, gehende Ebene. Da der Ausdruck die Form (2) haben muss, so muss man zwei Hülfspunkte a' und b' annehmen, und da a, b, c, x in der durch diese Hülfspunkte bestimmten Ebene liegen müssen, so hat man die vier Formeln

$$a'x \simeq b'x$$
$$\left.\begin{array}{l} a'a \simeq b'a \\ a'b \simeq b'b \\ a'c \simeq b'c. \end{array}\right\}$$

Die drei letzten Kongruenzreihen lassen sich in Eine zusammenziehen, nämlich in

$$abca' \simeq abcb'.$$

Somit hätte man

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} ax' \simeq bx' \\ abca' \simeq abcb' \end{array}\right.$$

(von denen übrigens die letzte aus dreien zusammengesetzt ist, und ausdrückt, dass a' und b' symmetrisch gegen abc liegen) als Formeln für die durch die drei Punkte a, b, c gehende Ebene.

Wollte man diesen Systemen von Formeln (5) und (6) die erforderliche Einfachheit geben, so müsste man im Stande sein, die willkührlichen Hülfspunkte, welche mit der Natur der Aufgabe nichts zu thun haben, herauszuschaffen und das System von Formeln jedesmal in eine einzige zusammenzuziehen. Man sieht sogleich, dass dies nach der Leibnizschen Bezeichnung, so weit er sie entwickelt hat, unmöglich ist. Bleibt man daher bei ihr stehen, so ist wohl leicht zu sehen, wie die Menge der Formeln bei einer einigermassen verwickelten Aufgabe bald ins Ungeheure wachsen muss, und wie man dabei eine Menge von Elementen mit in die Betrachtung hineinziehen muss, welche mit der ursprünglichen Aufgabe nichts zu schaffen haben.

[§ 2. **Kongruenz und Kollineation.**]

Man erkennt hier das Ungenügende dieser Charakteristik. Worin beruht dies?

Zuerst offenbar darin, dass statt der einfachen Beziehung der Gleichheit, welche allein in mathematischen Formeln hervortreten darf, damit man überall substituiren kann, die Beziehung der Kongruenz eingeführt ist. Wohl gilt für diese Beziehung der Kongruenz das Gesetz, dass, was demselben dritten kongruent ist, es auch unter sich sei; aber keineswegs, dass man überhaupt in einer Kongruenzgleichung statt jedes Ausdrucks den ihm kongruenten setzen könne. Es sei zum Beispiel $ac \; 8 \; bc$ und ein Punkt d liege ausserhalb des von c auf ab gefällten Lothes, so ist *nicht*

Fig. 1.

$$acd \; 8 \; bcd,$$

obgleich doch

$$ac \; 8 \; bc,$$

so dass man also in $acd \; 8 \; acd$ nicht auf der einen Seite statt ac das ihm kongruente bc setzen darf. Oder noch einfacher, da alle Punkte kongruent sind, so würde man, wenn man das Kongruente sich gegenseitig substituiren könnte, abc kongruent setzen können mit jedem Vereine von drei beliebigen andern Punkten, was ein Unsinn ist.

Diese Möglichkeit der Substitution, welche bei der obigen Bezeichnung abgeschnitten ist, müssen wir aber nothwendig bei jeder mathematischen Bezeichnung aufrecht erhalten, wenn sie zu fruchtreichen Ergebnissen führen soll. Daher haben wir zunächst die Bezeichnung zu ändern, und die wesentliche Beziehung der Gleichheit einzuführen, indem wir nur das als schlechthin gleich setzen, was wir in jedem Urtheile gegenseitig substituiren können.

Wir fragen, wenn abc kongruent ist def, was ist dann das Gleiche zwischen beiden Vereinen von Punkten? Offenbar muss dann irgend eine geometrische Funktion der drei Punkte a, b, c gleich der entsprechenden Funktion der drei Punkte d, e, f gesetzt werden. Wir wollen diese Funktion vorläufig mit dem Zeichen *figura* oder *fig.* bezeichnen, und setzen statt

$$abc \; 8 \; def$$

jetzt

$$\text{fig.}\,(a, b, c) = \text{fig.}\,(d, e, f)$$

und ebenso

$$\text{fig.}\,(a, b) = \text{fig.}\,(d, e),$$

wenn ab gleich lang ist mit de.

Es kommt dann darauf an, die Form dieser Funktion zu finden, namentlich bei zwei Punkten also die Form der Funktion fig. (a, b). Denn die Gleichung

$$\text{fig.}\ (a, b, c) = \text{fig.}\ (d, e, f)$$

ist nur eine Zusammenfassung der drei Gleichungen

$$\text{fig.}\ (a, b) = \text{fig.}\ (d, e)$$
$$\text{fig.}\ (b, c) = \text{fig.}\ (e, f)$$
$$\text{fig.}\ (c, a) = \text{fig.}\ (f, d).$$

Erst, wenn es uns gelingt, die Form dieser Funktion auszumitteln und die Gesetze, welchen dieselbe unterliegt, sind wir im Stande, vollkommen frei zu substituiren.

Um dazu zu gelangen, wollen wir zuerst die Leibniz'sche Idee erweitern, indem wir sie auf andere Verwandtschaften übertragen. So könnten wir zum Beispiel bei ähnlichen Figuren sagen, ihre Gestalt sei gleich, und könnten also statt

$$abc \sim def$$

schreiben

$$\text{form}\ (a, b, c) = \text{form}\ (d, e, f).$$

So könnten wir die Gleichheit des Flächenraums zwischen je drei Punkten oder die Gleichheit des Körperraums zwischen je vier Punkten oder auch die Affinität durch besondere Zeichen ausdrücken.

Wir schreiten indessen sogleich zu der allgemeinsten lineären Verwandtschaft, der Kollineation, und setzen für zwei kollineare Vereine

$$a, b, c, d, e, f \text{ und } a', b', c', d', e' f'$$

die Gleichung

$$\text{collin}\ (a, b, c, d, e, f) = \text{collin}\ (a', b', c', d', e', f').$$

7 Unter allen diesen Verwandtschaften erscheint nun allerdings, von einer gewissen Seite aus betrachtet, die Kongruenz als die einfachste, sofern sich hier alles auf Funktionen von zwei Punkten zurückführen lässt; und in derselben Beziehung erscheint die Kollineation als die verwickeltste, sofern hier fünf Punkte, von denen keine vier in Einer Ebene liegen, mit beliebigen solchen fünf andern kollinear verwandt gesetzt werden können, und erst für den sechsten Punkt tritt eine Bestimmung ein von der Art, dass, wenn in dem einen System der sechste Punkt gegeben ist, dann der entsprechende sechste des andern Systemes bestimmt ist. Die einfachste Funktion, auf die sich also bei der Kollineation im Raume alles zurückführen lässt, ist eine Funktion von sechs Punkten, und man sieht leicht ein, dass zwei Systeme von beliebig vielen Punkten dann und nur dann kollinear verwandt sein werden, wenn zwischen je sechs Punkten beider Systeme jene einfachste kollineare Beziehung statt findet.

Während also die Kongruenz auf eine Funktion zweier Punkte zurückführte, so führt die Kollineation auf eine Funktion von sechs

Punkten zurück. Sieht man hingegen auf die Art, wie bei der Kongruenz der zweite und bei der Kollineation der sechste Punkt bedingt ist, so erscheint umgekehrt die Kollineation als die einfachste Verwandtschaft.

Denn, wenn zwei Punkte eines Systems und von den ihnen entsprechenden Punkten des kongruenten Systems nur der eine gegeben ist, so kann der andere dann willkührlich auf einer Kugelfläche liegen, welche den ersteren Punkt zum Mittelpunkte und die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte des ersten Systems zum Halbmesser hat; die erste Bestimmung, welche hier eintritt, ist also eine partielle, an den Begriff der Kugelfläche geknüpfte. Hingegen, wenn fünf Punkte eines Systems, von denen keine vier in Einer Ebene liegen, und fünf entsprechende Punkte eines kollinear verwandten Systems, von denen dann auch keine vier in Einer Ebene liegen dürfen, gegeben sind, so ist zu jedem sechsten Punkt des ersten Systems der entsprechende des andern vollkommen bestimmt, und die erste Bestimmung also, welche bei der Kollineation hervortritt, ist eine vollkommene. Auch ist bekannt, dass die Art, wie der sechste Punkt des kollinear verwandten Systems von den gegebenen Punkten abhängt, nur durch Ebenen (oder, wenn man will, durch gerade Linien) vermittelt ist, während die Kongruenz durch Kugelflächen vermittelt war. Nun schliesst aber der Begriff der Kugelfläche den der Ebene ein, in sofern die letztere als Kugelfläche mit unendlich entferntem Mittelpunkte aufgefasst werden kann, hingegen nicht umgekehrt dieser jenen; denn es lässt sich ein selbständiger Theil der Geometrie ausbilden, in welchem der Begriff der Kugel auch nicht einmal der Anlage nach vorausgesetzt ist, wie dies von Grassmann in seiner Ausdehnungslehre nachgewiesen ist. Es erscheint also in Bezug auf die Art der Abhängigkeit — und auf diese kommt es bei der vorliegenden Untersuchung nur an — die Kollineation als die einfachere Verwandtschaft.

Daher gehe ich von dieser aus, betrachte jedoch zunächst nur kollineare Systeme in derselben Ebene. Da lassen sich dann zu vier Punkten, von denen keine drei in Einer geraden Linie liegen, beliebige vier andere solche Punkte als entsprechende eines kollinear verwandten Systems setzen, aber dann ist zu jedem fünften Punkte des einen Systems der entsprechende des kollinear verwandten | Systems vollkommen bestimmt, und es fragt sich, welches die Art dieser Bestimmung ist. 8

Um mich im Folgenden kürzer ausdrücken zu können, will ich sagen, die gerade Linie, welche durch zwei Punkte geht, sei aus diesen Punkten, und der Durchschnittspunkt zweier Geraden aus diesen Ge-

raden durch lineale Konstruktion abgeleitet; und zwar die Gerade zwischen zwei Punkten a und b sei aus diesen Punkten, oder der Durchschnittspunkt zweier Geraden A und B sei aus diesen Geraden durch die entsprechende Konstruktion abgeleitet, wie die Gerade zwischen den beiden Punkten a' und b' aus diesen Punkten oder der Durchschnittspunkt zweier Geraden A' und B' aus diesen Geraden abgeleitet ist.

Wenn nun a, b, c, d, e und a', b', c', d', e' entsprechende Punkte zweier kollinearen ebenen Vereine sind, also

$$\text{collin}\,(a, b, c, d, e) = \text{collin}\,(a', b', c', d', e')$$

ist, so folgt aus dem Princip der Kollineation (s. Möbius baryc. Kalkul § 217), dass, wenn e aus a, b, c, d durch lineale Konstruktionen sich ableiten lässt, dann e' sich aus a', b', c', d' durch die entsprechenden Konstruktionen ableiten lasse. Ferner ist bekannt (s. Möbius baryc. Kalkul § 205), dass, wenn von den Punkten a, b, c, d, welche in Einer Ebene liegen, keine drei in gerader Linie liegen, jeder andere Punkt derselben Ebene sich durch lineale Konstruktionen entweder genau, oder so annähernd, als man will, ableiten lässt; also genügt das erwähnte Princip der linealen Konstruktion für die Auffassung der obigen Kollineationsgleichung.

Man sieht also, dass die ganze Art, wie der fünfte Punkt von den vier übrigen abhängt, nur gegründet ist auf jene einfachen Konstruktionen, und dass also, wenn man den fünften Punkt analytisch ausdrücken will durch die vier andern, man nur die Verbindungslinie zweier Punkte als Verknüpfung derselben und den Durchschnitt zweier Geraden als Verknüpfung dieser Geraden ausdrücken und die Gesetze dieser Verknüpfungen aufstellen muss.

[§ 3. **Punktgrössen und Liniengrössen.**]

Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass weder die Punkte an sich, noch die unendlichen Linien können als Grössen aufgefasst werden, indem zu der Grösse wesentlich gehört ein der Vergrösserung und Verkleinerung fähiger Masswerth (metrischer Werth). Sollen es daher räumliche Grössen sein, welche der Verknüpfung unterworfen werden, so muss man an ihnen ein Zwiefaches unterscheiden, nämlich einerseits ihre Lage im Raume und andererseits ihren Masswerth, welcher auch möglicher Weise eine blosse Zahlgrösse sein kann; und zwei räumliche Grössen wird man nur dann einander gleich setzen können, wenn sowohl die Lage im Raume, welche an ihnen haftet, als auch ihr Masswerth gleich ist.

So zum Beispiel stellt der Punkt als solcher nur einen Ort im Raume dar, der Punkt aber, der mit einem bestimmten Zahlkoefficienten behaftet ist, erscheint als räumliche Grösse. Dieser Zahlkoefficient kann Eins sein, dann erscheint also der Punkt selbst auch als Grösse, aber nur in sofern an ihm der Zahlkoefficient Eins als besonderer Werth eines der Veränderung fähigen Zahlkoefficienten aufgefasst wird; dadurch erscheint dann auch der Punkt als der Vergrösserung und Verkleinerung fähig, also als Grösse. So erscheint, um ein anderes Beispiel zu geben, ein begränztes Stück einer geraden Linie als räumliche Grösse, indem die Linie (als unendliche) die Lage im Raume darstellt, ihre Länge aber den Masswerth. Wenn der Masswerth einer | Grösse null wird, so verschwindet die Grösse, und sie 9 muss also selbst dann gleich Null gesetzt werden.

Ich will nun solche mit bestimmten Masswerthen versehene Punkte und Gerade kurzweg Punktgrössen und Liniengrössen nennen, und will unter der Kombination ab zweier Punktgrössen a und b, das heisst, zweier Punkte mit zugehörigen Koefficienten, eine Liniengrösse verstehen, deren Linie durch die beiden zu a und b gehörigen Punkte geht, und deren Masswerth späterhin noch festgesetzt werden soll; und ebenso unter der Kombination AB zweier Liniengrössen A und B (das heisst, zweier begränzter gerader Linien) eine Punktgrösse, deren Punkt der Durchschnittspunkt der zu A und B gehörigen geraden Linien ist, und deren Koefficient späterhin bestimmt werden soll. Zunächst will ich nur noch die Voraussetzung hinzufügen, dass das Ergebniss dieser Verknüpfung stets einen bestimmten Werth haben soll, um daraus die Fälle zu entwickeln, in denen der Masswerth der durch die Verknüpfung gewonnenen Grössen null wird.

Zuerst betrachte ich die Kombination zweier Punktgrössen. Fallen die Punkte beider zusammen, so ist die gerade Linie ihrer Kombination unbestimmt, das Ergebniss der Verknüpfung würde also wider die Voraussetzung unbestimmt sein, wenn man nicht annähme, dass dann der Masswerth null werde. Also wenn die obige Voraussetzung bestehen bleiben soll, so müssen wir die Kombination zweier Punktgrössen null setzen, wenn ihre Punkte zusammenfallen, und aus demselben Grunde die zweier Liniengrössen null setzen, wenn die zugehörigen Linien zusammenfallen. Ferner, *wenn von den beiden Punktgrössen die eine gleich Null ist*, so kann ihr Punkt jede beliebige Lage haben; also ist dann auch die Linie ihrer Kombination mit der andern Punktgrösse unbestimmt; soll also die Voraussetzung aufrecht erhalten werden, so muss auch in diesem Falle die Kombination null gesetzt werden. Und aus demselben Grunde wird auch die Kombination zweier Liniengrössen

null gesetzt werden müssen, wenn eine derselben null ist. Da nun aber auch in keinem andern Falle als den erwähnten die räumliche Lage des Ergebnisses unbestimmt ist, so können wir auch festsetzen, dass in keinem andern Falle das Ergebniss null sein solle. So gelangen wir zu der vorläufigen Definition:

Zwei Punktgrössen oder zwei Liniengrössen geben kombinirt dann und nur dann Null, wenn entweder eine derselben null ist oder beide dieselbe Lage haben.

Durch diese Bezeichnungsweise ist man nun im Stande, jede lineale Abhängigkeit in Form einer Gleichung darzustellen, deren eine Seite null ist, während die andere keine andern Verknüpfungen in sich schliesst als die oben bezeichneten. Zum Beispiel bedeutet

Fig. 2.

$$ab = 0,$$

dass die Punkte a und b zusammenfallen; ferner

$$(ab)\,(cd)\,e = 0,$$

dass e der Durchschnittspunkt der beiden Geraden ab und cd ist. Denn $(ab)\,(cd)$ drückt den Durchschnittspunkt der Linien ab und cd aus, und die Gleichung $(ab)\,(cd)\,e = 0$ drückt aus, dass e mit diesem Punkte zusammenfällt. Auch kann man in solchen Gleichungen statt jeder Punktgrösse oder Liniengrösse, die nicht null ist, eine andere solche von gleicher Lage, das heisst, welche mit ihr kombinirt Null giebt, substituiren. Auch ist klar, dass man das Princip der Kollineation jetzt auch vermittelst des Begriffs dieser Kombinationsgleichungen so aussprechen kann, dass jede Kombinationsgleichung zwischen den Punkten eines Systems auch auf gleiche Weise zwischen den entsprechenden Punkten des kollinearen Systems statt finde.

Es bleibt noch die Kombination einer Punktgrösse mit einer Liniengrösse zu betrachten übrig; für diese haben wir dem Früheren analog nur festzusetzen, dass sie dann, aber auch nur dann null werde, wenn entweder eins der Verknüpfungsglieder null ist, oder der Punkt in der Geraden liegt.

Wie fruchtbar schon diese einfache Idee ist, und zu welchen unerwarteten Aufschlüssen über die Natur der Kurven sie führt, hat Grassmann in seiner Abhandlung über diesen Gegenstand in Crelle's Journal für Math., Band 31 gezeigt. Auch ist man dadurch schon im Stande eine Gleichung aufzustellen zwischen zehn Punkten der Ebene, von denen fünf den fünf übrigen kollinear entsprechen sollen; denn man hat nur nöthig die bekannte Konstruktion des fünften entsprechenden

Punktes vermittelst des Lineals in die eingeführte Bezeichnungsweise umzusetzen, um zu dieser Gleichung zu gelangen. Doch würde dieselbe in sehr komplicirter Gestalt erscheinen und keineswegs geeignet sein, um das Wesen der Kollineation unmittelbar darzustellen.

[§ 4. **Addition der Punktgrössen und der Liniengrössen.**]

Um zu einer solchen Gleichung, die dies in der That leistet, zu gelangen, müssen wir den Begriff der Kombination dadurch erweitern, dass wir auch auf die Masswerthe Rücksicht nehmen. Hierbei kann uns die Analogie mit der Multiplikation, welche hier sogleich in die Augen springt, leiten. Diese Analogie zwischen der Multiplikation und der Kombination der Punktgrössen und Liniengrössen zeigt sich nach dem bisher bemerkten besonders darin, dass, wenn eins der Verknüpfungsglieder bei der Kombination null ist, auch das Ergebniss derselben null ist, und dass, wenn das Ergebniss null ist, es auch null bleibt, wenn man die Masswerthe derjenigen Verknüpfungsglieder, die nicht null sind, in beliebigem Verhältnisse wachsen oder abnehmen lässt. Wir dehnen daher diese Analogie noch weiter aus, indem wir, wenn α und β Zahlgrössen, A und B Punktgrössen oder Liniengrössen sind,

$$(\alpha A)(\beta B) = \alpha\beta\,(AB)$$

setzen. Sind also zum Beispiel A und B Punkte, so ist die Kombination der Punktgrössen gleich der mit dem Produkte der Koefficienten multiplicirten Kombination der Punkte.

Die wesentliche Bedeutung der Multiplikation liegt (siehe Grassmanns Ausdehnungslehre § 10) in ihrer Beziehung zur Addition, dass man nämlich, statt eine Summe zu multipliciren, ohne Aenderung des Ergebnisses auch ihre Stücke einzeln auf gleiche Weise multipliciren und diese Produkte addiren könne. Wir haben daher zu versuchen, ob wir nicht den Begriff der Addition der Punktgrössen und der Liniengrössen, so wie auch die Bestimmung der Masswerthe der jetzt als Produkte aufgefassten Kombinationen, in der Art zu vollziehen vermögen, dass jene Beziehung der Multiplikation zur Addition und Subtraktion ihre Geltung behalte.

Wir nehmen an, die Summe zweier Punktgrössen sei wieder eine Punktgrösse, und betrachten zuerst die Summe zweier Punkte $a + b$. Da nach dem Begriffe jeder Summe $a + b = b + a$ | sein und die Summe 11 eine bestimmte Grösse sein muss, so ergiebt sich, dass der Summenpunkt gegen a und b gleiche Lage haben und seiner Lage nach bestimmt sein muss, also, dass sein Ort nur die Mitte zwischen a und b sein kann.

Es sei s die Mitte zwischen a und b, und x der Koefficient der Summe, also

$$xs = a + b. \tag{7}$$

Soll nun die multiplikative Beziehung gelten, so muss

$$xss = sa + sb$$

sein; also, da ss null ist (als Kombination zusammenfallender Punkte), so hat man

$$0 = sa + sb \quad \text{oder} \quad sa = -sb,$$

das heisst, sa und sb (was zwei gleich lange aber entgegengesetzt gerichtete Strecken sind) müssen für die in Rede stehende Analyse als gleiche aber entgegengesetzte Grössen aufgefasst werden. Ferner durch Multiplikation mit a hat man

$$xas = aa + ab = ab,$$

da aa null ist. Nun ist ab doppelt so lang als as und gleichgerichtet mit as. Bezeichne ich das Doppelte von as, wenn es in derselben Linie nach gleicher Richtung liegt, mit $2as$, so ist also $ab = 2as$, mithin

$$xas = 2as,$$

also $x = 2$ und somit

$$a + b = 2s, \tag{8}$$

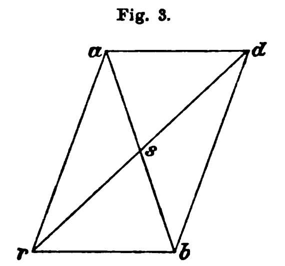
das heisst, die Summe zweier Punkte ist ihre Mitte mit dem Koefficienten 2.

Betrachte ich nun irgend einen Punkt r, so muss, wenn die Beziehung der Multiplikation zur Addition allgemein gelten soll,

$$ra + rb = r\,(a + b) = 2rs \tag{9}$$

sein. Daraus folgt sogleich, dass die Summe von ra und rb die Diagonale rd des Parallelogramms $arbd$ ist, und dass, wenn ra und rb dieselbe Richtung haben, die Summe so gross ist als beide Stücke zusammengenommen, dass also dann die Summe dieselbe ist, als wenn man beide Strecken wie Zahlgrössen addirte. Namentlich ist, wenn a, b, c Punkte derselben geraden Linie sind, allemal $ab + bc = ac$. Hieraus folgt dann auch, dass αab, wo α eine Zahl ist, als eine Liniengrösse aufzufassen ist, welche dieselbe Lage hat, aber α-mal grösser ist als ab; und dass also die Strecke ab genau den Masswerth der Kombination ab darstellt, während die Linie ab als unendliche ihre Lage darstellt.

Fig. 3.



Nun lässt sich auch die Summe $\alpha a + \beta b$, wo α und β Zahlen, a und b Punkte sind, leicht ausmitteln, wenn $\alpha + \beta$ nicht null ist. Nämlich, es sei

$$\alpha a + \beta b = x s,$$

so muss für jeden Punkt r

$$r(\alpha a + \beta b) = x r s,$$

das heisst

$$\alpha r a + \beta r b = x r s \tag{10}$$

sein, also namentlich auch, wenn r in s fällt, also rs null ist. Dann hat man

$$\alpha s a + \beta s b = 0, \tag{11}$$

das heisst, s ist der Schwerpunkt zwischen den Punkten a und b, wenn diesen Gewichte beigelegt sind, die den Zahlen α und β proportional sind. Ferner, fällt in der Gleichung (10) r in a, das heisst, wird ra null, so hat man

12

$$\beta a b = x a s,$$

und, wenn in (10) r gleich b, also rb null wird,

$$\alpha b a = x b s.$$

Also die zweite Gleichung subtrahirt von der ersteren:

$$\beta a b - \alpha b a = x(as - bs)$$

oder, da $-ba = ab$, $-bs = sb$ und $as + sb = ab$ ist,

$$(\beta + \alpha) a b = x a b,$$

also $x = \alpha + \beta$, also

$$\alpha a + \beta b = (\alpha + \beta) s. \tag{12}$$

Also, die Summe zweier Punktgrössen, deren Koefficientensumme nicht null ist, ist der Schwerpunkt mit einem Koefficienten, der die Summe jener Koefficienten ist.

Wie man nun diese Verknüpfung der Punkte oder Punktgrössen, die wir hier als Addition bezeichnet haben, in der That als solche nachweisen kann, wie daraus eine entsprechende Subtraktion sich entwickelt, wie als die Differenz zweier Punkte eine Strecke von konstanter Richtung und Länge erscheint*), wie daraus eine Addition und

*) Um Missverständnissen vorzubeugen, will ich hier noch bemerken, dass die Liniengrösse ab und die Strecke $b - a$ hiernach zwar eine verwandte, aber doch eine wesentlich verschiedene Bedeutung haben, insofern die Gleichung $b - a = d - c$ *nur* ausdrückt, dass die von a nach b gezogene Linie gleich lang und gleichgerichtet ist mit der von c nach d gezogenen, wohingegen die Gleichung $ab = cd$ nicht nur dies ausdrückt, sondern zugleich, dass ab und cd Theile einer und derselben unendlichen geraden Linie sind.

Subtraktion solcher Strecken hervorgeht, alles das kann hier nicht der Betrachtung unterworfen werden, da dies schon aus den Werken und Abhandlungen von Möbius und Grassmann als bekannt vorausgesetzt werden darf, und jetzt schon klar zu Tage liegt, wie man auf dem hier eingeschlagenen Wege weiter fortschreiten kann, um auch zu diesen Verfahrungsarten und Gesetzen zu gelangen. Doch werde ich weiter unten diese Gesetze wenigstens für Punkte und deren Vielfache entwickeln.

Aus eben dem Grunde kann ich hier nicht darauf eingehen, zu zeigen, wie die hier als Kombination bezeichnete Verknüpfung mit der algebraischen Multiplikation unter Einen Begriff zusammengefasst werden kann, wobei ich für die erstere den Namen der äusseren oder kombinatorischen Multiplikation beibehalte, wie ferner sich hieraus eine Multiplikation der Strecken (als Linien von konstanter Richtung und Länge) und der Punktgrössen mit den Strecken entwickelt, wie ferner die Liniengrössen unter sich und mit Punktgrössen kombinatorisch multiplicirt werden können, und daraus wieder entsprechende Gesetze für die Multiplikation von Flächenräumen unter sich und mit Strecken hervorgehen. In Bezug auf alles dies muss ich auf Grassmanns Ausdehnungslehre verweisen.

Daher schreite ich, nachdem ich noch die Anwendung auf die Kollineation gegeben, zu der Entwickelung der wirklich neuen Rech- 13 nungsmethoden, | wobei ich aber die in den angeführten Schriften gewonnenen Ergebnisse voraussetzen muss.

[§ 5. Die Kollinear-Funktion.]

Wir suchten oben die Form der Kollinear-Funktion. Nun ergiebt sich, wenn

$$\text{collin}\,(a,\,b,\,c,\,d,\,e) = \text{collin}\,(a',\,b',\,c',\,d',\,e')$$

gesetzt ist und unter abc der Inhalt des Dreiecks, dessen Ecken a, b und c sind, verstanden ist, und zwar als positiv genommen, wenn c von ab aus nach links liegt, dass dann (Ausdehnungslehre § 165)

$$\frac{eab}{dab} : \frac{ebc}{dbc} = \frac{e'a'b'}{d'a'b'} : \frac{e'b'c'}{d'b'c'}$$

ist. Doch ist durch Eine solche Beziehung der Punkt e' noch nicht durch die übrigen bestimmt, also die kollineare Beziehung nicht vollständig ausgedrückt; wohl aber genügen zwei solche Beziehungen, also

$$\left(\frac{eab}{dab} : \frac{ebc}{dbc} : \frac{eca}{dca}\right) = \left(\frac{e'a'b'}{d'a'b'} : \frac{e'b'c'}{d'b'c'} : \frac{e'c'a'}{d'c'a'}\right),$$

wo die Klammer auf beiden Seiten die Gleichheit je zweier entsprechender,

durch das Zeichen : gegliederter Verhältnisse ausdrücken soll, und wir können also

$$(13) \qquad \left(\frac{eab}{dab} : \frac{ebc}{dbc} : \frac{eca}{dca}\right)$$

als die gesuchte Kollinear-Funktion für die Ebene ansehen.

Für den Raum würde man übrigens, wenn unter *abcd* der Inhalt des Tetraeders verstanden ist, dessen Ecken a, b, c, d sind, aus

$$\text{collin}\,(a, b, c, d, e, f) = \text{collin}\,(a', b', c', d', e', f')$$

erhalten:

$$(14) \qquad \left(\frac{fabc}{eabc} : \frac{fbcd}{ebcd} : \frac{fcda}{ecda} : \frac{fdab}{edab}\right)$$

gleich dem entsprechenden Ausdruck in a', b', c', d', e', f', worin dann die Gleichheit dreier Verhältnisse ausgedrückt liegt, und der Ausdruck (14) würde selbst die Kollinear-Funktion für den Raum darstellen.

[§ 6. Rückkehr zur Kongruenz. Gleichungen zwischen räumlichen Grössen.]

Die Ableitung der neuen Rechnungsmethode knüpfe ich nun wieder an Leibnizens Idee an, indem ich von der nach der einen Seite hin einfachsten Verwandtschaft, der Kollineation, sogleich zu der nach der andern Seite hin einfachsten, der Kongruenz, schreite, von welcher Leibniz ursprünglich ausgegangen war; und durch die bisher aus der Kollineation abgeleiteten oder vielmehr als ableitbar nachgewiesenen und nun als bekannt vorausgesetzten Verknüpfungen wird es nun möglich, auch die Kongruenz auf entsprechende Weise zu behandeln.

Aus den bisher betrachteten Verknüpfungsweisen nämlich lässt sich das Princip der Kongruenz *nicht* ableiten, da sich jene nur auf das Ziehen von geraden Linien oder das Hindurchlegen von Ebenen durch gegebene Punkte beziehen, aber nicht die Natur des Kreises oder der Kugel mit in sich aufnehmen, wie dies bei der Kongruenz der Fall ist. Da sich auch der bisher erschienene Theil von Grassmanns Ausdehnungslehre nur auf solche Verknüpfungsweisen | erstreckt, 14 welche bloss von den Begriffen der geraden Linie und der Ebene abhängen, so werden wir auch in diesem Werke, mit Ausnahme einiger Andeutungen in der Vorrede desselben, keine Entwickelungen mehr vorfinden, welche den im Folgenden darzulegenden Verknüpfungsweisen zur Seite gehen. Deshalb werde ich von nun an, um an Schärfe nichts vermissen zu lassen, *den* Weg wählen, dass ich jedesmal nach Ableitung eines Begriffes diesen Begriff in Form einer Definition noch einmal

hinstelle, und die Gesetze, welche daraus entspringen, ohne irgend einen bei der Ableitung des Begriffes vorläufig angewandten Satz vorauszusetzen, in streng mathematischer Form entwickele.

Der einfachste Kongruenzfall, auf den sich jeder andere zurückführen liess, war der, dass zwei gleich lange gerade Linien als kongruent gesetzt wurden, also

$$\text{fig.}\,(a, b) = \text{fig.}\,(c, d), \tag{15}$$

wenn der Linientheil ab gleich lang war mit dem Linientheile cd. Nun haben wir oben gleiche Liniengrössen und gleiche Strecken kennen gelernt. Die Liniengrössen ab und cd wurden dann, aber auch nur dann einander gleich gesetzt, wenn beide in derselben geraden Linie lagen und gleiche (nicht entgegengesetzte) Richtung, vom Anfangspunkt zum Endpunkt hin gerechnet, und gleiche Länge hatten. Die Strecke hingegen haben wir als Differenz zweier Punkte auffassen, und $a - b$ und $c - d$ dann, aber auch nur dann gleichsetzen müssen, wenn beide Strecken (die von b nach a und die von d nach c) gleiche Richtung und Länge hatten. Daraus folgt, dass, wenn zwei begränzte Gerade, zum Beispiel die von a nach b und die von c nach d, als Liniengrössen gleich sind, das heisst, $ab = cd$ ist, sie auch als Strecken gleich sein müssen, also $b - a$ gleich $d - c$ sein müsse, aber nicht umgekehrt, indem, wenn $b - a$ gleich $d - c$ ist, nur dann auch ab gleich cd sein wird, wenn a, b, c, d in derselben Geraden liegen. Ferner folgt, dass, wenn jene begränzten Linien als Strecken gleich waren, also $b - a$ gleich $d - c$ war, sie auch kongruent oder gleich lang sein werden, aber nicht umgekehrt, indem aus der gleichen Länge nur dann die Gleichheit der Strecken folgt, wenn ihre Richtung als gleich angenommen wird.

Die Kongruenz schliesst sich also zunächst an die Gleichheit der Strecken an, und wir werden, da jedesmal, wenn

$$a - b = c - d$$

ist, auch

$$\text{fig.}\,(a, b) = \text{fig.}\,(c, d)$$

ist, fig. (a, b), was die Länge der von a nach b gezogenen geraden Linie vorstellt, als Funktion von $a - b$ betrachten und daher, wenn f das Zeichen dieser Funktion ist, statt fig. (a, b) schreiben können $f(a - b)$ und also statt der Gleichung (15) die Gleichung

$$f(a - b) = f(c - d) \tag{16}$$

erhalten. Dadurch haben wir den Vortheil, die Länge als Funktion einer einzigen Grösse aufgefasst zu haben.

Wir haben nun dieser Funktion eine solche Form zu geben, dass die Gleichung (16) allemal dann, aber auch nur dann richtig ist, wenn $a - b$ und $c - d$ gleich lang sind.

Um eine solche Funktion | zu finden, nehmen wir zuerst an, alle 15 zu betrachtenden Grössen seien in derselben Geraden. Hier können zwei gleich lange Linientheile nur entweder gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. Im ersteren Falle sind sie als Strecken gleich, im letztern ist die eine Strecke das Negative der andern. Bedeutet also p eine Strecke, so ist p gleich lang mit $(-p)$; aber ausser diesen beiden p und $(-p)$ giebt es auch in derselben geraden Linie keine mit p gleich lange Strecke. Es würde also hier nur folgen, dass $f(p)$ eine solche Form haben muss, dass $f(p) = f(-p)$ sei. Könnte man die Strecken innerhalb einer Geraden wie Zahlen behandeln, so würde p^2 eine solche Funktion und zwar die einfachste sein, welche dieser Bedingung genügte. Wir haben also zunächst nur zu untersuchen, ob und wie weit die Gesetze der Zahlenverknüpfungen sich auf Strecken derselben Geraden anwenden lassen, oder überhaupt, ob sie sich auf Grössen anwenden lassen, welche, wie die Strecken derselben geraden Linie, einer Reihe von Zahlgrössen proportional gesetzt werden können.

(**Erklärung 1.**) *Ich setze nämlich eine Reihe von räumlichen Grössen $A, B, \ldots$ proportional einer Reihe von Zahlgrössen $\alpha, \beta, \ldots$, wenn es irgend eine räumliche Grösse M (die nicht null ist) von der Art giebt, dass $A = \alpha M$, $B = \beta M$*), ... und so weiter ist, und nenne in diesem Falle jene räumlichen Grössen unter sich gleichartig; wenn ferner zwei Reihen räumlicher Grössen derselben Reihe von Zahlgrössen proportional sind, so nenne ich sie selbst einander proportional.*

Daraus folgt sogleich (**Satz 1**), *dass, wenn eine Reihe räumlicher Grössen $A, B, \ldots$ einer Zahlreihe $\alpha, \beta, \ldots$ proportional ist, und diese wieder einer andern Zahlreihe proportional ist, auch die Reihe räumlicher Grössen der letzten Zahlreihe proportional sei.*

Denn jede mit der Zahlreihe $\alpha, \beta, \ldots$ proportionale Zahlreihe wird in der Form $\varrho\alpha, \varrho\beta, \ldots$ dargestellt werden können, wo ϱ jede beliebige Zahlgrösse, die nicht null ist, sein kann; setzt man nun $M' = \frac{M}{\varrho}$, so ist

*) Wenn ich eine Grösse als Produkt einer Zahlgrösse α in eine räumliche Grösse A bezeichne, so soll darin ausgedrückt sein, dass für diese Multiplikation die Gesetze der Multiplikation und Division mit Zahlen gelten, namentlich, dass

$$\beta(\alpha A) = (\beta\alpha) A \quad \text{und} \quad \frac{\alpha A}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} A$$

sei, wovon bei dem folgenden Beweise Gebrauch gemacht wird.

$$A = \alpha\varrho M', \quad B = \beta\varrho M', \ldots,$$

das heisst, $A, B, \ldots$ verhalten sich auch wie $\alpha\varrho : \beta\varrho : \cdots$, das heisst, wie jede mit $\alpha, \beta, \ldots$ proportionale Zahlreihe.

Hat man nun eine algebraische Gleichung, in welcher die Zahlgrössen $\alpha, \beta, \ldots$ vorkommen, und welche von der Art ist, dass sie auch bestehen bleibt, wenn man statt der Zahlreihe $\alpha, \beta, \ldots$ eine ihr proportionale Zahlreihe setzt, so wird man die Gleichung auch dann noch als richtig setzen können, wenn man der Zahlreihe $\alpha, \beta, \ldots$ eine ihr proportionale Reihe von räumlichen Grössen $A, B, \ldots$ substituirt, indem man dann eben nur festzusetzen hätte, dass diese letztere Gleichung keine andere Bedeutung haben soll als die erstere.

Nun wird eine solche Gleichung, wie wir sie voraussetzen, die Form haben

$$(17) \qquad F(\alpha, \beta, \ldots) = F'(\alpha, \beta, \ldots),$$

16 wo die Zeichen F und F' algebraische und homogene Funktionen gleichen Grades darstellen, das heisst, zwei Funktionen, deren Glieder alle von der Form $\lambda\alpha^{\mathfrak{a}}\beta^{\mathfrak{b}} \ldots$ sind und alle dieselbe Exponentensumme $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots$ haben, während λ eine beliebige Zahlgrösse ist. Ist in der That $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots = x$, und man setzt statt $\alpha, \beta, \ldots$ die proportionale Zahlreihe $\varrho\alpha, \varrho\beta, \ldots$, wo ϱ eine Zahl, die nicht null ist, vorstellt, so wird dann $F(\varrho\alpha, \varrho\beta, \ldots)$ gleich $\varrho^x F(\alpha, \beta, \ldots)$ und $F'(\varrho\alpha, \varrho\beta, \ldots) = \varrho^x F'(\alpha, \beta, \ldots)$, also noch

$$(18) \qquad F(\varrho\alpha, \varrho\beta, \ldots) = F'(\varrho\alpha, \varrho\beta, \ldots).$$

Setze ich nun in der Gleichung (17) statt der Zahlreihe $\alpha, \beta, \ldots$ die proportionale Reihe von Raumgrössen $A, B, \ldots$, so will ich die so hervorgehende Gleichung

$$(19) \qquad F(A, B, \ldots) = F'(A, B, \ldots)$$

auch noch eine homogene algebraische Gleichung der räumlichen Grössen $A, B, \ldots$ nennen und gelange dann zu der folgenden Erklärung:

(Erklärung 2.) *Ich setze eine homogene algebraische Gleichung räumlicher Grössen, welche gleichartig, das heisst, einer Reihe von Zahlgrössen proportional sind, dann und nur dann als richtig, wenn die Gleichung, welche dadurch hervorgeht, dass man statt der räumlichen Grössen die ihnen proportionalen Zahlgrössen setzt, eine richtige ist; und von den so hervorgehenden Verknüpfungen der räumlichen Grössen sage ich, dass sie den algebraischen der Zahlgrössen entsprechen.*

Hieraus folgt der Satz (**Satz 1b**): *dass für gleichartige Raumgrössen alle algebraischen Verknüpfungsgesetze gelten, welche sich durch homogene Gleichungen jener Raumgrössen darstellen lassen, und dass jede homogene*

Gleichung zwischen gleichartigen Raumgrössen auch für die ihnen proportionalen Raumgrössen gilt.

Ich habe diesen Satz, den ich hier nur für Strecken innerhalb derselben geraden Linie anzuwenden brauche, darum so allgemein gefasst, weil er für die Uebertragung algebraischer Verknüpfungen auf räumliche Grössen überhaupt von Wichtigkeit ist.

[§ 7. **Innere Produkte von Strecken.**]

Gehe ich nun auf die Gleichung

$$f(p) = f(-p)$$

zurück, so leuchtet ein, dass dieser am einfachsten genügt wird, wenn $f(p) = p^2$ gesetzt wird, da ja $p^2 = (-p)^2$ ist, auch wenn p eine Strecke vorstellt. Denn, da sich p zu $-p$ wie die Zahlen $1 : (-1)$ verhalten, (Erklärung 1), so ist p^2 nach Erklärung 2 gleich $(-p)^2$ zu setzen, wenn $1^2 = (-1)^2$ ist, was der Fall ist.

Wir können daher den Versuch machen, auch allgemein, wenn p und q gleich lange Strecken sind, das Quadrat von p gleich dem von q zu setzen. Doch bleibt dann noch zweifelhaft, ob wir dies Quadrat als dem arithmetischen durchaus entsprechend ansehen können, ja ob überhaupt für die Multiplikation, durch welche die beiden gleichen Faktoren dieses Quadrats verknüpft sind, noch irgend ein Multiplikationsgesetz gilt, sobald man es mit Quadraten anders gerichteter Strecken vergleicht; das heisst, ob wir eine naturgemässe Hypothese gemacht haben, indem wir jene Funktion $f(p)$ allgemein als Quadrat von p setzten. Jedenfalls müssen wir wenigstens vorläufig die Multiplikation, 17 für die wir jene Hypothese machten, mit einem besonderen Namen bezeichnen. Wir nennen sie innere Multiplikation, und das innere Produkt zweier gleicher Strecken das innere Quadrat dieser Strecke. Somit gelangen wir durch Kombination mit der Erklärung 2 zu folgender Erklärung:

(**Erklärung 3.**) *Unter inneren Produkten je zweier paralleler Strecken verstehe ich solche Grössen, welche den Zahlen proportional gesetzt werden, die hervorgehen, wenn man die beiden parallelen Strecken eines jeden inneren Produktes durch dasselbe Mass misst, und die Quotienten dieser beiden Messungen unter sich multiplicirt, alle Masse aber gleich lang annimmt. Das innere Produkt zweier Strecken sei mit* $a \times b$ *bezeichnet, das innere Quadrat* $a \times a$ *mit* a^2.

So zum Beispiel sind (s. Fig. 4) $a \times b$ und $c \times d$ proportional den Zahlen, welche hervorgehen, wenn man a und b durch r_1, c und d

durch r_2 misst, wo r_1 und r_2 gleich lang sind und r_1 mit a und b, r_2 mit c und d parallel ist. Aus der Erklärung folgt sogleich, dass

$$a \times b = b \times a \text{ und}$$

Fig. 4.

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

ist, wenn a, b, c parallele Strecken sind, in welchen Fällen ja auch die Gleichungen dieselbe Bedeutung haben, wie die in Erklärung 2 definirten.

Es kommt nun darauf an, das innere Produkt zweier ungleichlaufender Strecken zu finden.

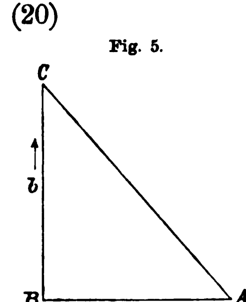
Zu dem Begriffe desselben wird man gelangen, wenn man versucht, die allgemeine Beziehung der Multiplikation zur Addition festzuhalten, und auch die Faktoren vertauschbar zu setzen, damit die innere Multiplikation ungleichlaufender Strecken mit der gleichlaufender unter einen gemeinschaftlichen Begriff falle. Mache ich vorläufig, um zu dem Begriffe dieses Produktes zu gelangen, diese beiden Voraussetzungen, so folgt, dass

$$(a + b) \times (a + b) = a \times a + b \times b + b \times a + a \times b,$$

also

$$(a + b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2. \tag{20}$$

Fig. 5.



Die Strecke erschien als Differenz zweier Punkte, ist also (s. Fig. 5)

$$a = B - A, \quad b = C - B,$$

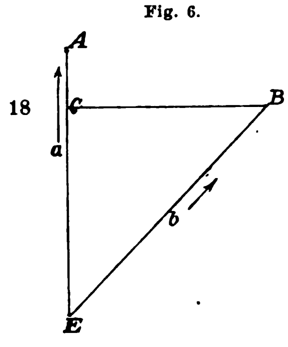
so ist

$$a + b = B - A + C - B = C - A.$$

Sind daher a und b rechtwinklig gegeneinander, so ist $a + b$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, worin a und b die Katheten sind, also ist

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2. \tag{21}$$

Fig. 6.



Vergleichen wir diese Gleichung mit der obigen (20), so folgt $2a \times b = 0$, also auch $a \times b = 0$, das heisst, das innere Produkt zweier | gegen einander senkrechter Strecken muss null gesetzt werden.

18

Hieraus nun lässt sich der Begriff des inneren Produktes zweier beliebiger Strecken a und b ableiten.

Es sei (s. Fig. 6)

$$a = A - E, \quad b = B - E.$$

Man fälle von B das Loth auf EA, der Fusspunkt desselben sei C, so ist

$$B - E = B - C + C - E.$$

Also ist auch

$$a \times b = (A - E) \times (B - E) = (A - E) \times (B - C + C - E) =$$
$$= (A - E) \times (B - C) + (A - E) \times (C - E).$$

Das erste dieser beiden zuletzt gewonnenen Produkte ist null, weil $A - E$ senkrecht gegen $B - C$ ist, also ist

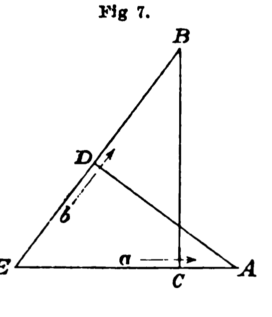
$$a \times b = a \times (C - E);$$

$C - E$ aber ist die senkrechte Projektion von b auf a. Daraus folgt die Erklärung:

(Erklärung 4.) *Unter dem inneren Produkte $a \times b$ zweier nicht paralleler Strecken a und b soll das innere Produkt der ersten a in die senkrechte Projektion der zweiten auf die erste verstanden sein.*

Von dieser Erklärung aus werde ich nun die Gesetze der inneren Multiplikation zu entwickeln haben, ohne die bei der Ableitung des Begriffs zu Hülfe genommenen Sätze voraussetzen zu dürfen*), und zwar erstens:

(Satz 2.) *Die beiden Faktoren eines inneren Produktes zweier Strecken kann man ohne Werthänderung des Produktes vertauschen, das heisst $a \times b = b \times a$.*



Denn, wenn $a = A - E$ (s. Fig. 7), $b = B - E$, C der Fusspunkt des von B auf AE, und D der Fusspunkt des von A auf BE gefällten Lothes ist, so ist

$$a \times b = (A - E) \times (C - E),$$
$$b \times a = (B - E) \times (D - E).$$

Vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke ADE und BCE folgt nun, dass die Länge von AE zu der von DE sich verhält, wie die Länge

*) Es ist überaus wichtig, die nun folgende mathematische Beweisführung von der bisher versuchten (mehr philosophischen) Ableitung des Begriffes aufs strengste zu sondern. Jene Ableitung diente nur dazu, um den Schein der Willkühr, welcher bei dem unmittelbaren Aufstellen der neuen Definitionen hätte entstehen müssen, verschwinden zu lassen, während die nun folgende Beweisführung von jener Ableitung ganz unabhängig ist und sich unmittelbar an die aufgestellten Definitionen anschliesst. So zum Beispiel wurde bei der Ableitung des Begriffs der pythagoräische Lehrsatz angewandt; die mathematische Beweisführung setzt diesen Lehrsatz *nicht* voraus, vielmehr erscheint derselbe als Folgerung der hier gegebenen mathematischen Entwickelung, welche also zugleich einen vollkommenen Beweis jenes Satzes einschliesst.

von BE zu der von CE, also auch das Produkt der Längen von AE und CE gleich ist dem Produkte der Längen von DE und BE, also auch, wenn man $A - E$ und $C - E$ durch ein Mass der Linie EA und $D - E$ und $B - E$ durch ein eben so langes Mass der Linie EB 19 misst, das Produkt aus den Quotienten der beiden ersten Messungen gleich dem Produkte aus den Quotienten der beiden letzten Messungen sein wird, das heisst nach Erklärung 3

$$(A - E) \times (C - E) = (B - E) \times (D - E),$$

das heisst

$$a \times b = b \times a.$$

Ferner folgt daraus:

(Satz 3.) *Ein inneres Produkt zweier gegen einander senkrechter Strecken ist null, aber auch kein anderes, dessen Faktoren nicht selbst null sind.*

Denn, wenn beide Strecken senkrecht gegen einander sind, so ist die senkrechte Projektion der einen auf die andere null, also wird dann, wenn man nach Erklärung 4 statt des zweiten Faktors die senkrechte Projektion desselben auf den ersten setzt, dieser zweite Faktor null, also auch das Produkt null. Hingegen in jedem andern Falle wird, wenn nicht etwa die Strecken selbst null sind, die Projektion nicht null, also auch das Produkt nicht null.

Ferner lässt sich beweisen, dass

$$(22) \quad a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad \text{und} \quad (b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

ist. Denn, es sei (s. Fig. 8)

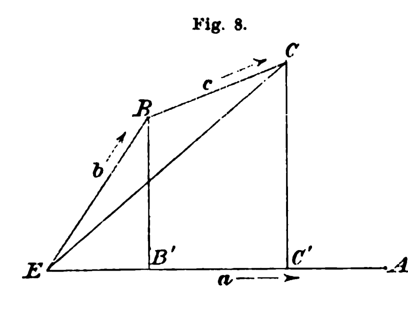


Fig. 8.

$$a = A - E, \quad b = B - E, \quad c = C - B,$$

so ist $b + c = C - E$. Sind ferner B', C' die Fusspunkte der von B und C auf EA gefällten Lothe, so ist $B' - E$ die senkrechte Projektion von b auf a, und $C' - E$ die von $(b + c)$ auf a, und $C' - B'$ die von c auf a; also ist

$$a \times b + a \times c = a \times (B' - E) + a \times (C' - B'),$$

und da nun alle Strecken auf der rechten Seite in gerader Linie liegen, so ist die rechte Seite

$$= a \times (B' - E + C' - B')$$
$$= a \times (C' - E)$$
$$= a \times (b + c).$$

Da endlich die Faktoren vertauschbar sind, so folgt auch:

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a.$$

Also sind die Gleichungen (22) bewiesen. Daraus folgt aber der allgemeine Satz:

(Satz 4.) *Alle algebraischen Sätze, welche die Beziehung der Multiplikation zur Addition und Subtraktion ausdrücken, gelten auch für die innere Multiplikation zweier Strecken,*

weil diese Beziehung eben nur auf dem erwiesenen Grundgesetze (22) beruht (vergleiche Grassmanns Ausdehnungslehre § 10).

Hierdurch ist nun die Benennung und Bezeichnung dieser Verknüpfungsweise als einer Multiplikation gerechtfertigt, zugleich aber, da das Gesetz, dass das innere Produkt zweier | gegen einander senkrechter 20 Strecken null ist, in der Algebra nichts Entsprechendes findet, diese Multiplikationsweise als eine von der algebraischen wesentlich verschiedene nachgewiesen, weshalb wir die Benennung der inneren Multiplikation zur Unterscheidung sowohl von der algebraischen als auch von der äusseren Multiplikation beibehalten und als das specifische Zeichen dieser Multiplikation das Zeichen $\times$ festhalten. Somit folgt, dass wir nicht nur, wenn a, b, c, d Punkte sind, statt der Gleichung

$$\text{fig.}\,(a, b) = \text{fig.}\,(c, d)$$

oder statt

$$ab \; 8 \; cd$$

die Gleichung

$$(a - b) \times (a - b) = (c - d) \times (c - d)$$

oder

$$(a - b)^2 = (c - d)^2$$

einführen, sondern nun auch für diese Multiplikation alle bisherigen Sätze anwenden, und dadurch mit dieser Multiplikation ganz frei, wie mit jeder algebraischen Verknüpfung, operiren können.

[§ 8. **Innere und äussere Multiplikation.**]

Hiermit ist also die Aufgabe, die wir uns ursprünglich stellten, nämlich die Leibniz'sche Charakteristik auf ihren naturgemässen Ausdruck zurückzuführen, gelöst. Zugleich aber liegt in der Art der Lösung der Keim zu einer neuen Entwickelung nach zwei verschiedenen Seiten hin.

Nämlich einerseits entsteht die Aufgabe, aus dem Produkte zweier Punktdifferenzen das der Punkte selbst abzuleiten, um so durch die Lösung der Klammern, von welchen noch diese Punktdifferenzen umschlossen sind, zu einer noch freieren und allgemeineren Behandlung dieser, die Kongruenz darstellenden Verknüpfung zu gelangen.

Der andere Keim zu weiterer Entwickelung liegt in der Beziehung des inneren Produktes zum äusseren. Diese Beziehung wird durch die Idee „des senkrecht proportionalen“ vermittelt.

Nämlich, (**Erklärung 5**). *ich nenne zwei Flächenräume A und B zweien Strecken a und b senkrecht proportional, wenn die Flächenräume auf den Strecken senkrecht stehen und solche Werthe haben, dass, wenn man die eine Strecke b mit ihrem entsprechenden Flächenraum B, ohne die gegenseitige Lage derselben zu ändern, so legt, dass b gleichgerichtet wird mit a, und dann die so verlegte Strecke b durch a und den so verlegten Flächenraum B durch A misst, die Quotienten beider Messungen gleich sind.*

Hieraus folgt der Satz:

(Satz 5.) *Zwei innere Produkte je zweier Strecken, $a \times b$ und $c \times d$ verhalten sich wie die äusseren Produkte, welche hervorgehen, wenn man statt zweier aus beiden Produkten ausgewählter Faktoren, zum Beispiel statt a und c, die ihnen senkrecht proportionalen Flächenräume A und C setzt und das Zeichen der inneren Multiplikation in das der äusseren verwandelt, also*

$$(23) \qquad (a \times b) : (c \times d) = (A \,.\, b) : (C \,.\, d).$$

Denn, wenn ich c, d, C als ein System betrachte und dieses System 21 so, dass | es sich kongruent bleibt, beliebig verlege, so bleiben die Produkte $c \times d$ und $C.d$ bei dieser Verlegung sich gleich, also verändern sich ihre Werthe auch nicht, wenn dabei c in dieselbe Richtung, die a hat, verlegt wird. Daraus folgt, dass die Gleichung (23) allgemein richtig sein wird, wenn ich sie nur für den Fall erwiesen habe, dass a und c gleichgerichtet sind.

Ist unter dieser Voraussetzung $\frac{c}{a} = \gamma$, so wird dann auch (nach Erklärung 5) $\frac{C}{A} = \gamma$ sein. Substituire ich daher in diesem Falle γa statt c und γA statt C in die Gleichung (23), so bleibt nur zu beweisen, dass

$$(a \times b) \,:\, (\gamma a \times d) = (A \,.\, b) \,:\, (\gamma A \,.\, d)$$

sei. Dies wird erwiesen sein, wenn ich gezeigt habe, dass

$$(24) \qquad (a \times b) : (a \times d) = (A \,.\, b) : (A \,.\, d)$$

sei, oder dass, wenn $a \times b = \alpha\,(a \times d)$ ist, wo wieder α eine Zahlgrösse ist, auch $A \,.\, b = \alpha\,(A \,.\, d)$ sei. Ist aber $a \times b = \alpha\,(a \times d)$, so ist es auch gleich $a \times (\alpha d)$, also $a \times (b - \alpha d) = 0$, also $b - \alpha d$ entweder null oder senkrecht auf a (nach Satz 3), das heisst, da A ein gegen a senkrechter Flächenraum ist, entweder $b - \alpha d$ null oder

parallel mit A. Nun giebt aber das äussere Produkt eines Flächenraums in eine mit ihm parallele Strecke null (Ausdehnungslehre § 54 und 55); also ist $A . (b - \alpha d)$ null, also $A . b$ gleich $A . \alpha d$, gleich $\alpha (A . d)$, also ist Gleichung (24) erwiesen, also auch (23) zunächst für den Fall, dass a und c gleichgerichtet sind, und demnächst allgemein.

Wir können den obigen Satz noch allgemeiner fassen, indem wir sagen:

(Satz 5b.) *In einer Gleichung, deren Glieder innere Produkte je zweier Strecken oder Vielfache solcher Produkte sind, kann man, ohne dass die Gleichung aufhört eine richtige zu sein, statt dieser inneren Produkte die ihnen proportionalen äusseren setzen, die man dadurch erhält, dass man statt je eines Faktors jener inneren Produkte die senkrecht proportionalen Flächenräume und statt des Zeichens der inneren Multiplikation das der äusseren setzt, und umgekehrt kann man aus der letzteren Gleichung die erstere ableiten.*

Denn, da die inneren Produkte proportional sind einer Reihe von Zahlgrössen und die jenen proportionalen äusseren Produkte derselben Reihe proportional sind, so ergiebt sich der zu erweisende Satz sogleich durch Anwendung der Erklärung 2.

Hierin liegt nun, da man die Idee des senkrecht proportionalen auch auf andere äussere Produkte übertragen kann, der vorher angedeutete Keim weiterer Entwickelung. Ich will nun diese Entwickelung hier darlegen, dann aber, ehe ich die andere oben angedeutete Entwickelungsreihe verfolge, durch Anwendungen auf Geometrie und Mechanik zeigen, in wiefern die bisher entwickelte Analyse die einer solchen von Leibniz beigelegten Vorzüge besitzt.

[§ 9. **Innere Produkte von Flächenräumen und Strecken.**]

Es ist klar, dass man durch die Idee des senkrecht proportionalen sowohl zu dem äusseren Produkte zweier Strecken als auch zu dem eines Flächenraums in eine Strecke, indem man statt der Strecke einen ihr proportional bleibenden Flächenraum setzt, auf eine neue Weise ein entsprechendes inneres Produkt finden kann. Zur Ableitung der Gesetze dieser | neuen Verknüpfungen, wie auch zur Begründung 22 der Gesetze des vorher behandelten inneren Produktes, wenn man den Satz 5 in eine Definition dieses inneren Produktes umwandelt, genügt folgender Satz:

(Satz 6.) *Wenn $a, b, c, \ldots$ Strecken und $A, B, C, \ldots$ ihnen senkrecht proportionale Flächenräume sind, so stehen auch ihre Summen in*

derselben Proportionsreihe, das heisst, wenn $s = a + b + c + \cdots$ *und* $S = A + B + C + \cdots$ *ist, so sind auch* $s, a, b, c, \ldots$ *senkrecht proportional mit* $S, A, B, C, \ldots$.

Es ist sogleich klar, dass, wenn dies für die Summe zweier Stücke bewiesen ist, es auch durch Fortsetzung desselben Schlusses für beliebig viele gilt; wir beweisen es daher zunächst nur für zwei Stücke, setzen also $s = a + b$, $S = A + B$ und beweisen, dass s, a, b senkrecht proportional seien mit S, A, B:

Es stehe f auf a und b zugleich senkrecht, so steht f auch auf s senkrecht, weil s mit a und b in derselben Ebene liegt. Der Anschaulichkeit wegen denke man sich a, b, s und f von demselben Punkte ausgehend. Drehe ich nun das System der drei Strecken a, b, s, ohne ihre Länge und gegenseitige Lage zu verändern, um die senkrechte Axe f so weit, bis das System (also auch jede Strecke in ihm) einen rechten Winkel beschrieben hat, und gehen dadurch a, b, s in a', b', s' über, so bleibt offenbar noch $s' = a' + b'$. Nun ist aber klar, dass $f.a'$, $f.b'$, $f.s'$ senkrecht proportional mit a, b und s sind; ist also $A = \gamma f.a'$, so wird $B = \gamma f.b'$, also $A + B$ oder

$$S = \gamma(f.a' + f.b') = \gamma f.s'$$

sein, also sind S, A, B senkrecht proportional s, a, b, und so auch allgemein für beliebig viele Glieder.

Da übrigens durch drei Glieder einer solchen senkrechten Proportion das vierte bestimmt ist, so folgt auch umgekehrt:

(Satz 7.) *Wenn* $s, a, b, c, \ldots$ *senkrecht proportional* $S, A, B, C, \ldots$ *sind, und*

$$s = a + b + c + \cdots$$

ist, so ist auch

$$S = A + B + C + \cdots,$$

und umgekehrt, wenn unter obiger Voraussetzung die zweite Gleichung gilt, so gilt auch die erste.

Doch werden wir für die folgende Entwickelung nur den ersteren Satz gebrauchen und auch diesen nur für zwei Glieder.

Durch die Idee des senkrecht proportionalen ergeben sich nun folgende Begriffe:

(Erklärung 6.) *Unter* ***inneren Produkten*** *je zweier* ***Flächenräume*** *verstehe ich solche Grössen, die den äussern Produkten proportional sind, welche man erhält, wenn man in allen jenen inneren Produkten statt der ersten Faktoren senkrecht proportionale Strecken setzt, während man die zweiten Faktoren unverändert lässt, das Zeichen aber der innern Multiplikation* ($\times$) *in das der äusseren* (.) *verwandelt,* und

(**Erklärung 7.**) *Unter inneren Produkten von je einem Flächenraum in eine Strecke verstehen wir solche Grössen, welche den äusseren Produkten senkrecht proportional | sind, die hervorgehen, wenn man statt* 23 *der Flächenräume, welche als Faktoren jener inneren Produkte vorkommen, die ihnen senkrecht proportionalen Strecken setzt, und, ohne den jedesmaligen andern Faktor zu ändern, das Zeichen der inneren Multiplikation in das der äusseren verwandelt.*

So zum Beispiel werden die Produkte $A \times b$ und $C \times d$, in denen A und C Flächenräume, b und d Strecken sind, den Flächenräumen $a.b$ und $c.d$ senkrecht proportional gesetzt, wenn a und c den Flächenräumen A und C senkrecht proportional sind.

Die Gesetze, welchen diese Verknüpfungen unterliegen, lassen sich sehr leicht vermittelst des Satzes 6 ableiten.

So findet man

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C,$$

indem $a.(B + C) = a.B + a.C$ ist, und wenn a senkrecht gegen A ist, die Grössen in der zu erweisenden Gleichung denen der letzteren proportional sind, also derselben Gleichung unterliegen (nach Satz 1b); und ebenso findet man

$$(B + C) \times A = B \times A + C \times A,$$

indem, wenn b und c senkrecht proportional sind mit B und C, also auch (nach Satz 6) b, c und $(b + c)$ mit B, C und $(B + C)$,

$$(b + c).A = b.A + c.A$$

ist, also auch dieselbe Gleichung zwischen den mit den Gliedern dieser Gleichung proportionalen Grössen statt finden muss, also

$$(B + C) \times A = B \times A + C \times A.$$

Auf ähnliche Weise folgt, dass

$$A \times (b + c) = A \times b + A \times c$$

ist. Denn es ist

$$a.(b + c) = a.b + a.c;$$

also gilt auch nach Satz 7 dieselbe Gleichung für die mit den Gliedern derselben senkrecht proportionalen Grössen, das heisst,

$$A \times (b + c) = A \times b + A \times c.$$

Und endlich folgt auch, dass

$$(A + B) \times c = A \times c + B \times c$$

ist. Denn es seien a und b die den Flächenräumen A und B senkrecht proportionalen Strecken, so sind (Satz 6) a, b, $(a + b)$ senkrecht proportional mit A, B, $(A + B)$. Nun ist

$$(a + b).c = a.c + b.c.$$

Somit gilt nun (Satz 7) dieselbe Gleichung auch für die mit den Gliedern derselben senkrecht proportionalen Grössen. Nach der Erklärung 7 sind aber

$$(A+B) \times c, \quad A \times c, \quad B \times c$$

senkrecht proportional mit

$$(a+b) . c, \quad a . c, \quad b . c,$$

weil $A+B$, A, B senkrecht proportional mit $a+b$, a, b sind. Also ist (nach Satz 7)

$$(A+B) \times c = A \times c + B \times c.$$

Um die Idee der Multiplikation für diesen letzteren Fall der inneren Multiplikation eines Flächenraums A in eine Strecke b noch 24 anschaulicher darzulegen, | will ich annehmen, es sei b_1 die senkrechte Projektion der Strecke b auf den Flächenraum A, und b also gleich $b_1 + b_2$, wo b_2 senkrecht gegen den Flächenraum A ist. Ist dann a eine gegen A senkrechte Strecke, so ist

$$a . (b_1 + b_2) = a . b_1,$$

weil $a . b_2$ als äusseres Produkt zweier gleichartiger Strecken null ist. Somit ist also auch

$$A \times (b_1 + b_2) = A \times b_1$$

oder

$$A \times b = A \times b_1$$

und $A \times b_1$ ist senkrecht proportional zu setzen dem Produkte $a . b_1$. Es ist aber klar, dass die gegen $a . b_1$ senkrechte Strecke in der Ebene A senkrecht gegen die Projektion b_1, also auch gegen b selbst liegt; daraus folgt also, dass das Produkt $A \times b$ durch eine Strecke dargestellt wird, welche in A senkrecht gegen b liegt, und deren relative Grösse eben dadurch bestimmt wird, dass sie dem Flächenraume $a . b$ senkrecht proportional sein soll.

Aus den oben für diese beiden neuen Arten der Multiplikation nachgewiesenen Beziehungen zur Addition ergiebt sich der allgemeine Satz:

(Satz 8.) *Für jede Art der inneren Multiplikation zweier Ausdehnungen im Raume gelten alle algebraischen Sätze, welche die allgemeine Beziehung der Multiplikation zur Addition und Subtraktion ausdrücken.*

Dieser Satz schliesst den früheren Satz 4 als besonderen Fall in sich. Auch ergiebt sich sogleich,

(Satz 9.) *dass für alle Gattungen innerer Multiplikation zweier Ausdehnungen im Raume das Produkt dann, aber auch nur dann null wird, wenn die Faktoren auf einander senkrecht stehen,*

weil dann und nur dann das entsprechende äussere Produkt parallele Faktoren enthält, also null wird; und dieser Satz erscheint wieder als eine Verallgemeinerung des dritten Satzes. Auch folgt daraus wieder sogleich,

(**Satz 10.**) *dass jedes innere Produkt nicht paralleler Faktoren gleich ist dem inneren Produkte des einen Faktors in die senkrechte Projektion des andern Faktors auf den ersteren,*

wobei natürlich, wenn das Produkt eines Flächenraums in eine Strecke betrachtet wird, nur von der Projektion der letzteren auf die Ebene des ersteren die Rede sein kann.

Ferner lässt sich leicht zeigen, dass $A \times B = B \times A$ ist; denn, ist die senkrechte Projektion von B auf A gleich αA, wo α eine Zahl ist, so ist

$$A \times B = A \times \alpha A = \alpha(A \times A),$$

und

$$B \times A = (\alpha A) \times A = \alpha(A \times A),$$

also

$$A \times B = B \times A.$$

Das Produkt $a \times B$ ist bisher noch nicht definirt, wir können es der Analogie gemäss gleich $B \times a$ setzen, und haben dann den Satz:

(**Satz 11.**) *Die beiden Faktoren eines jeden inneren Produktes lassen sich ohne Werthänderung des Produktes mit einander vertauschen,*

und es ist klar, wie dieser Satz nur eine Verallgemeinerung des zweiten Satzes ist.

So hat sich nun ergeben, dass alle Gesetze für die innere Multiplikation unter sich übereinstimmen. Insbesondere sind die innere Multiplikation der Strecken und die der Flächenräume, also die von Grössen gleicher Stufe so | vollkommen parallel, dass es keinen noch 25 so abgeleiteten Satz für die eine dieser Verknüpfungen giebt, der nicht für die andere auch gälte, wenn man nur die Begriffe Strecke und Flächenraum vertauscht. Auch lassen sich in der That beide Arten der Produkte dadurch aus einander ableiten, dass man statt beider Faktoren senkrecht proportionale Grössen setzt.

[§ 10. **Geometrische Anwendungen.**]

Ich schreite nun zu den Anwendungen und zwar zuerst zu denen auf die Geometrie, werde jedoch nur die innere Multiplikation der Strecken und der Flächenräume ins Auge fassen.

Da $a + b$ die dritte Seite eines Dreiecks darstellt, dessen beide andere Seiten a und b sind, wenn man den Anfangspunkt von b auf den Endpunkt von a legt, so folgt aus der Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2$$

der folgende Satz, zu dem ich sogleich den entsprechenden für Flächenräume setze:

Das Quadrat einer Seite eines Dreiecks ist so gross als die Summe aus den Quadraten der beiden anderen und ihrem doppelten inneren Produkte, wenn diese beiden Seiten fortschreitend genommen sind.

Insbesondere ist, da das innere Produkt senkrechter Strecken null ist, das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die Summe aus den Quadraten der beiden Katheten.

Sind a, b, c alle drei gegeneinander senkrecht, so ist

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

das heisst, das Quadrat einer Strecke ist gleich der Summe aus den Quadraten ihrer senkrechten Projektionen auf drei gegeneinander senkrechte Linien.

Ferner ist allgemein

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \\ + 2a \times b + 2b \times c + 2c \times a,$$

das heisst, wenn man eine Strecke auf drei beliebige Axen parallel den durch die Axen gelegten Ebenen projicirt), so ist das Quadrat der Strecke die Summe aus den Quadraten der Projektionen und aus den doppelten inneren Produkten je zweier Projektionen.*

*) das heisst, auf jede Axe parallel der Ebene der beiden andern; denn dann ist die Strecke die Summe der drei Projektionen (Ausdehnungslehre § 90).

Das Quadrat einer Seitenfläche eines dreiseitigen Prismas ist gleich der Summe aus den Quadraten der beiden anderen Seitenflächen und ihrem doppelten inneren Produkte, wenn diese Seitenflächen fortschreitend genommen sind.

Insbesondere ist, da das innere Produkt senkrechter Flächenräume null ist, das Quadrat der Hypotenusenfläche eines rechtwinkligen dreiseitigen Prismas die Summe aus den Quadraten der beiden Kathetenflächen.

Sind A, B, C alle drei gegeneinander senkrecht, so ist

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

das heisst, das Quadrat eines Flächenraums ist die Summe aus den Quadraten seiner senkrechten Projektionen auf drei gegeneinander senkrechte Ebenen.

Ferner ist allgemein

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + \\ + 2A \times B + 2B \times C + 2C \times A,$$

das heisst, wenn man einen Flächenraum auf drei beliebige Ebenen parallel den Durchschnittskanten der Ebenen projicirt), so ist das Quadrat des Flächenraums die Summe aus den Quadraten der Projektionen und aus den doppelten inneren Produkten je zweier Projektionen.*

*) das heisst, auf jede Ebene parallel der Durchschnittskante der beiden andern; denn dann ist der Flächenraum die Summe seiner drei Projektionen (Ausdehnungslehre § 90).



26 Diese Sätze, welche als Erweiterungen des Pythagoräischen Lehrsatzes aufgefasst werden können, dienen dazu, um die Länge einer durch ihre Richtstücke (Koordinaten) gegebenen Strecke oder den Inhalt eines durch seine Richtstücke gegebenen Flächenraums auszudrücken.

Die Formel

$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c$$

liefert, wenn a, b, c in derselben Ebene liegen, den Satz:

Wenn man durch eine Ecke eines Parallelogramms eine Kreislinie legt, und von derselben Ecke die Diagonale $(a+b)$ zieht, so ist das Produkt der Diagonale in die in ihr liegende Sehne die Summe aus den Produkten der beiden an jene Ecke stossenden Seiten a und b in die in ihnen liegenden Sehnen,

weil nämlich diese Sehnen die senkrechten Projektionen des Durchmessers auf die drei Linien sind.

Die Formel

$$(A+B) \times C = A \times C + B \times C$$

liefert, wenn A, B, C durch dieselbe Kante gehen, den Satz:

Wenn man durch eine Kante eines Parallelepipedums eine Cylinderfläche legt, und durch dieselbe Kante die Diagonalfläche $(A+B)$ legt, so ist das Produkt der Diagonalfläche in das von ihr (durch den Cylinder) abgeschnittene Stück die Summe aus den Produkten der beiden durch jene Kante gehenden Seitenflächen A und B in die von ihnen durch den Cylinder abgeschnittenen Stücke,

weil diese Stücke den senkrechten Projektionen der Durchmesser-Ebene proportional sind.

Da die parallelen Sätze für Flächenräume sich immer leicht ableiten lassen aus denen für Strecken, und jene weniger Interesse darbieten als diese, so will ich von nun an nur diese letzteren aufstellen.

Die Formel

$$(a+b+c+\cdots) \times p = a \times p + b \times p + c \times p + \cdots$$

liefert, wenn man a, b, c, ... und p mit ihren Anfangspunkten aneinandergelegt denkt, p senkrecht auf sie projicirt, und bedenkt, dass die Summe $a+b+c+\cdots$, wenn A, B, C, ... die Endpunkte der Strecken und R ihr gemeinschaftlicher Anfangspunkt ist, gleich

$$A - R + B - R + \cdots = n(S - R)$$

ist, wo S den Schwerpunkt der Endpunkte vorstellt und n die Anzahl der Strecken a, b, c, ... ist, den Satz:

Wenn man von irgend einem Punkte (R) nach n Punkten $(A, B, C, \ldots)$ und nach ihrem Schwerpunkte (S) gerade Linien zieht, und durch jenen ersten Punkt (R) eine beliebige Kugelfläche legt (welche die Linien RS, RA, RB, ... in den Punkten S', A', B', ... zum zweitenmale trifft):

so ist das Produkt der nach dem Schwerpunkte (S) *gezogenen geraden Linie* (RS) *in die in ihr liegende Sehne* (RS') *das arithmetische Mittel zwischen den Produkten der nach den n Punkten gezogenen Linien* $(RA, RB, \ldots)$ *in die in ihnen liegenden Sehnen* $(RA', RB', \ldots)$.

Hat man eine Gleichung zwischen inneren Produkten je zweier Strecken, so kann man diese Gleichung sehr leicht durch Annahme senkrechter Koordinaten in Zahlgleichungen verwandeln. Denn, ist 27 $p_1 \times p_2$ ein solches inneres | Produkt, und sind a_1, b_1, c_1 die Richtstücke (Koordinaten mit festgehaltener Richtung der Axen, in denen sie liegen) von p_1, und a_2, b_2, c_2 die von p_2 in Bezug auf dasselbe Axensystem, so ist

$$p_1 = a_1 + b_1 + c_1, \quad p_2 = a_2 + b_2 + c_2,$$

also

$$p_1 \times p_2 = (a_1 + b_1 + c_1) \times (a_2 + b_2 + c_2) = a_1 \times a_2 + b_1 \times b_2 + c_1 \times c_2,$$

da alle übrigen Produkte als innere Produkte senkrechter Strecken nach Satz 9 null sind. Misst man nun alle Richtstücke derselben Axe durch dasselbe Mass, und nimmt die drei Masse für die drei Axen gleich lang an, etwa gleich lang der Strecke e, und bezeichnet man die Quotienten dieser Messungen mit den entsprechenden griechischen Buchstaben, so erhält man

$$\frac{p_1 \times p_2}{e^2} = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2,$$

und erhält also dann durch Division der ganzen Gleichung mit dem Quadrate des Masses e eine blosse Zahlengleichung.

[§ 11. **Anwendungen auf die reine Bewegungslehre.**]

Ich schreite nun zu den Anwendungen auf die Mechanik.

Zuerst will ich einen in der Bewegung begriffenen Punkt betrachten, ohne mich um die Ursachen seiner Bewegung zu kümmern. Ich nehme mit Möbius (Mechanik des Himmels, § 9) und Grassmann (Ausdehnungslehre, § 105) in den Begriff der Geschwindigkeit zugleich den der Richtung auf, so dass ich zwei Geschwindigkeiten nur dann gleich setze, wenn sie nicht bloss gleichen absoluten Werth, sondern auch gleiche Richtung haben, das heisst, ich setze die Geschwindigkeit eines in Bewegung begriffenen Punktes derjenigen Strecke gleich, welche er beschreiben würde, wenn er in dem als Einheit angenommenen Zeitraume dieselbe Bewegung, die er hat, unverändert beibehielte.

Nämlich, wenn ein Punkt in derselben Richtung so fortschreitet, dass er in gleichen Zeiträumen stets gleiche und gleichgerichtete Wege

zurücklegt, die Wege sich also wie die Zeiträume verhalten, in denen er sie zurücklegt, so sage ich, der Punkt behalte seine Bewegung unverändert bei. Gesetzt also, er habe in irgend einem Zeitpunkte T eine solche Bewegung, dass, wenn er dieselbe Bewegung während des als Einheit genommenen Zeitraums unverändert beibehielte, er von dem Orte p, den er zur Zeit T wirklich hat, zu dem Orte p_1 gelangen würde, so ist seine Geschwindigkeit $p_1 - p$.

Ich könnte nun dies Verfahren, durch welches diese Geschwindigkeit aus der als bekannt vorausgesetzten Bewegung eines Punktes abgeleitet werden kann, rein geometrisch entwickeln, müsste jedoch dann bis in die Principien der Differenzialrechnung zurückgehen, um diese auf die hier dargestellte Analyse zu übertragen. Da dies jedoch dem vorliegenden Zwecke nicht entsprechen würde, so will ich auf den gewöhnlichen Begriff des Differenzials zurückgehen und zu dem Ende den sich bewegenden Punkt p senkrecht auf eine Axe projiciren. Die Projektion sei p'. Dann ist klar, dass, wenn die Wege, die der projicirte Punkt in gleichen Zwischenräumen zurücklegt, gleich und gleichgerichtet sind, auch die Projektionen dieser Wege gleich sein werden, also die Projektion p' gleichförmig fortschreitet, wenn p gleichförmig und geradlinig fortschreitet, und dass, wenn der projicirte Punkt von dem Orte p nach p_1 gelangt, auch die Projektion gleichzeitig von dem Orte p' nach der | Projektion p'_1 des Ortes p_1 gelangt. Ist also $p_1 - p$ 28 die Geschwindigkeit des projicirten Punktes, so ist $p'_1 - p'$ die der Projektion, das heisst, *die Geschwindigkeit, mit welcher die senkrechte Projektion eines Punktes auf eine gerade Linie fortschreitet, ist stets gleich der auf diese Linie senkrecht projicirten Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt selbst fortschreitet.* Projiciren wir nun eine Strecke senkrecht auf drei gegeneinander senkrechte Axen, so ist die projicirte Strecke die Summe ihrer drei Projektionen. Also, *wenn wir einen sich bewegenden Punkt senkrecht auf drei gegeneinander senkrechte Axen projiciren, so ist die Geschwindigkeit jenes Punktes die Summe aus den Geschwindigkeiten seiner Projektionen.*

Wir wollen nun die Strecke vom Durchschnittspunkte der drei Axen bis zur Projektion des Punktes p auf die eine der drei Axen mit xa bezeichnen, wo x eine Zahlgrösse und a ein Stück der Axe (dies Stück als Strecke betrachtet) ist. Nun ist bekannt, dass die Geschwindigkeit dieser Projektion, wenn x als Funktion der Zeit t gegeben ist, gleich ist $a\frac{dx}{dt}$. Nennen wir nun die Strecken von dem Durchschnittspunkte g der drei Axen bis zu den Projektionen des Punktes p auf die zwei andern Axen yb und zc (wobei a, b, c gleich

lang angenommen werden können), so sind $b\frac{dy}{dt}$ und $c\frac{dz}{dt}$ die Geschwindigkeiten der beiden anderen Projektionen, also die Geschwindigkeit des Punktes p gleich

$$a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt},$$

während

$$p - g = ax + by + cz$$

gleich der Summe seiner Projektionen, oder

$$p = g + ax + by + cz$$

ist. Wir bezeichnen den obigen Differenzialausdruck

$$a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt},$$

da man zu ihm auch gelangt, wenn man in der Funktion

$$p = g + ax + by + cz$$

die Grössen g, a, b, c wie konstante behandelt und dann nach der Zeit differenziirt, mit $\frac{dp}{dt}$. Das heisst:

Wenn $p = g + ax + by + cz$ ist und g ein Punkt, a, b, c aber drei gegeneinander senkrechte Strecken sind, so ist

$$\frac{dp}{dt} = a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt},$$

und, da x, y, z Funktionen der Zeit, also auch p eine Funktion der Zeit, aber eine geometrische ist, so folgt der Satz:

Wenn ein sich bewegender Punkt p als geometrische Funktion der Zeit t gegeben ist, so ist der Differenzialquotient $\frac{dp}{dt}$ dieser Funktion nach der Zeit die Geschwindigkeit des Punktes ihrer Grösse und Richtung nach.

Wir haben bisher den Begriff des geometrischen Differenzials an 29 drei gegen | einander senkrechte Axen geknüpft. Hiervon können wir den Begriff leicht lösen.

Es sei allgemein

$$p = g + a_1 T_1 + a_2 T_2 + \cdots,$$

wo p und g Punkte, g ein fester Punkt, a_1, a_2, ... konstante Strecken, T_1, T_2, ... beliebige Funktionen der Zeit sind, so lässt sich leicht zeigen, dass

$$\frac{dp}{dt} = a_1\frac{dT_1}{dt} + a_2\frac{dT_2}{dt} + \cdots$$

ist. Denn, es seien a_1, a_2, ... auf die drei gegeneinander senkrechten

Axen a, b, c senkrecht projicirt und $a_1 = \mathfrak{a}_1 a + \mathfrak{b}_1 b + \mathfrak{c}_1 c, \ldots,$ wo $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ... Zahlgrössen sind, so ist

$$p = g + (\mathfrak{a}_1 T_1 + \mathfrak{a}_2 T_2 + \cdots) a + (\mathfrak{b}_1 T_1 + \mathfrak{b}_2 T_2 + \cdots) b + (\mathfrak{c}_1 T_1 + \mathfrak{c}_2 T_2 + \cdots) c,$$

also auch nach der Definition

$$\frac{dp}{dt} = a\left[\mathfrak{a}_1 \frac{dT_1}{dt} + \mathfrak{a}_2 \frac{dT_2}{dt} + \cdots\right] + b\left[\mathfrak{b}_1 \frac{dT_1}{dt} + \mathfrak{b}_2 \frac{dT_2}{dt} + \cdots\right] +$$
$$+ c\left[\mathfrak{c}_1 \frac{dT_1}{dt} + \mathfrak{c}_2 \frac{dT_2}{dt} + \cdots\right] =$$
$$= (\mathfrak{a}_1 a + \mathfrak{b}_1 b + \mathfrak{c}_1 c) \frac{dT_1}{dt} + (\mathfrak{a}_2 a + \mathfrak{b}_2 b + \mathfrak{c}_2 c) \frac{dT_2}{dt} + \cdots$$
$$= a_1 \frac{dT_1}{dt} + a_2 \frac{dT_2}{dt} + \cdots.$$

Es ist jene Form, in welcher p als Funktion der Zeit dargestellt war, die allgemeinste Form, in welcher ein Punkt als geometrische Funktion der Zeit dargestellt werden kann, und wir gelangen also von dieser allgemeinen Form aus sogleich zu dem Differenzialquotienten jener Funktion nach der Zeit, das heisst, [zu] der Geschwindigkeit des als Funktion der Zeit gesetzten Punktes p, wenn wir bei der Differenziation die räumlichen Grössen wie algebraische behandeln; und zu diesem Begriffe würden wir sogleich gelangt sein, wenn wir bei der Entwickelung des Begriffs des Differenzials rein geometrisch fortgeschritten wären.

Wird nun die Geschwindigkeit $\frac{dp}{dt}$ mit v bezeichnet, so ist v wieder eine geometrische Funktion; wir nennen dann $\frac{dv}{dt}$ (die Geschwindigkeit, mit der die Geschwindigkeit des Punktes wächst) die Beschleunigung des Punktes p, welche demnach wieder nicht bloss ihrer absoluten Grösse, sondern auch ihrer Richtung nach aufgefasst ist. Sie wird, je nachdem ihre Richtung mit der der Geschwindigkeit einen stumpfen, rechten oder spitzen Winkel macht, den absoluten Werth der Geschwindigkeit vermehren, unverändert lassen oder vermindern. Wir nennen analog der Benennungsweise in der Differenzialrechnung den Ausdruck $\frac{dv}{dt}$, das heisst

$$\frac{d\left(\frac{dp}{dt}\right)}{dt},$$

den wir mit $\frac{d^2p}{dt^2}$ bezeichnen, den zweiten Differenzialquotienten | der 30 räumlichen Funktion p nach der Zeit t, und dieser ist also der Beschleunigung gleich gesetzt.

Dies sind die wesentlichen Grundzüge der reinen Bewegungslehre.

[§ 12. Die Differentialgleichungen der Mechanik.]

In der Mechanik betrachten wir die Bewegungen als durch Ursachen bewirkt. Wir nennen die Ursache der Beschleunigung eines Punktes die beschleunigende Kraft, welche auf ihn einwirkt, und setzen sie, wenn keine andere beschleunigende Kraft gleichzeitig einwirkt, der Beschleunigung gleich. Wir sagen ferner, dass zwei beschleunigende Kräfte gleichzeitig auf einen Punkt einwirken, wenn die Beschleunigung des Punktes die Summe ist aus den beschleunigenden Kräften, wobei immer festzuhalten ist, dass die beschleunigenden Kräfte als *Strecken* definirt sind und also auch in diesem Sinne ihre Summe aufzufassen ist. Wirken also beliebig viele beschleunigende Kräfte P_1, P_2, ... auf einen Punkt p ein, so hat man die Gleichung

$$\frac{d^2 p}{d t^2} = P_1 + P_2 + \cdots \tag{26}$$

als Grundgleichung der Mechanik.

Die beschleunigenden Kräfte können wir wieder, entweder alle oder einige derselben, als Wirkungen allgemeinerer Kräfte, die sich auf ganze Systeme von Punkten beziehen, auffassen. Von dieser Art sind alle Kräfte der Natur. So zum Beispiel hat die Gravitation das Bestreben, die gegenseitige Entfernung zweier Punkte zu vermindern, die Kohäsion, die gegenseitige Entfernung je zweier Punkte des Systems unverändert zu erhalten, die Elasticität, den Raumesinhalt zwischen vier aneinander liegenden Punkten wiederherzustellen, und so weiter. Es kommt darauf an, den Begriff eines solchen Bestrebens schärfer aufzufassen.

Die Entfernung zweier Punkte, der Raumesinhalt zwischen vier Punkten, und überhaupt alles, worauf sich das Streben einer Kraft, die einem System von Punkten einwohnt, bezieht, lässt sich als Funktion dieser Punkte auffassen; wir setzen daher folgende Definition solcher Kräfte fest:

Wir sagen, dass eine Kraft, die sich auf ein System gleich schwerer (gleich beweglicher) Punkte p, q, r, ... bezieht, das Streben habe, eine algebraische Funktion) $F(p, q, r, \ldots)$ dieser Punkte zu vergrössern, wenn die durch sie bewirkte beschleunigende Kraft eines jeden Punktes in derjenigen Richtung wirkt, in welcher bei gleich grossen, aber unendlich kleinen Bewegungen des Punktes jene Funktion am meisten wächst, und wenn die beschleunigenden Kräfte, welchen je zwei Punkte des Systems*

---

*) Eine algebraische Funktion soll aber eine solche heissen, welche einer veränderlichen Zahlgrösse proportional ist.

vermöge jener Kraft unterliegen, ihrer absoluten Grösse nach in dem Verhältnisse stehen, in welchem beide Punkte einzeln genommen, bei gleich grossen, aber unendlich kleinen Bewegungen nach jenen Richtungen, die Funktion zu vergrössern vermögen.

Ein Beispiel wird dies erläutern.

Es sei das Bestreben einer Kraft V, zwei gleich schwere Punkte p und q von einander zu entfernen. Dann können wir $(p-q)^2$ als die algebraische Funktion der Punkte p und q betrachten, welche zu vergrössern das Streben jener Kraft ist. Um nun zuerst die Richtung der beschleunigenden Kraft, welche V auf den Punkt p übt, zu finden, haben wir zu fragen, welche Richtung er | annehmen müsste, damit 31 bei gleich grossen, aber unendlich kleinen Wegen der Werth von $(p-q)^2$ am meisten vermehrt wird. Dies ist offenbar die Richtung der Verlängerung von qp über p hinaus. Ebenso wird die beschleunigende Kraft, welcher q unterliegt, in der Verlängerung von pq über q hinaus wirken. Fragen wir nun nach dem absoluten Verhältnisse dieser beiden beschleunigenden Kräfte, so ist dies gleich dem Verhältnisse, in welchem bei gleich grossen, aber unendlich kleinen Wegen in den Richtungen der Verlängerungen, während jedesmal der andere Punkt ruhend gedacht wird, $(p-q)^2$ wächst. Dies Verhältniss ist offenbar das der Gleichheit; also sind auch die beschleunigenden Kräfte absolut genommen gleich.

Nun können wir ein sehr leichtes Verfahren finden, nach welchem man jedesmal, welche algebraische Funktion es auch sei, auf die sich das Bestreben der Kraft V bezieht, die Richtungen und das Verhältniss der dadurch gewirkten beschleunigenden Kräfte finden kann. Ich will die Ableitung dieses Verfahrens, da ich nicht eine selbstständige Begründung der geometrischen Differenzialrechnung geben will, wieder zunächst an senkrechte Koordinaten knüpfen, obgleich das Verfahren an sich gänzlich unabhängig davon ist.

Es sei die algebraische Funktion $F(p_1, p_2, \ldots)$ der Punkte $p_1, p_2, \ldots$ gegeben. Um dieselbe in eine algebraische Funktion von Zahlgrössen zu verwandeln, nehmen wir durch einen Punkt g drei gegeneinander senkrechte Axen und in ihnen drei gleich lange Masse a, b, c an, durch welche wir die senkrechten Projektionen der Strecken $p_1 - g$, $p_2 - g$, ... messen, und setzen demnach

$$p_1 - g = x_1 a + y_1 b + z_1 c; \quad p_2 - g = x_2 a + y_2 b + z_2 c, \ldots.$$

Nun können wir diejenige Funktion als eine algebraische der Punkte $p_1, p_2, \ldots$ ansehen, welche einer Funktion der sämmtlichen Koordinaten, jede durch das zugehörige Mass gemessen, proportional, das

heisst, gleich einer solchen mit einem konstanten Faktor multiplicirten Funktion ist. Da aus jener Funktion $F(p_1, p_2, \ldots)$ nur die Verhältnisse der beschleunigenden Kräfte und ihre Richtungen abgeleitet werden, und weder diese noch jene, wie sogleich aus der Definition einleuchtet, sich ändern, wenn man die Funktion mit einer beliebigen positiven Grösse multiplicirt, so können wir die algebraische Funktion der Punkte gleich einer mit dem Quadrate des Masses multiplicirten Zahlfunktion der Zahlgrössen $x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots$ setzen. Wir setzen daher

$$F(p_1, p_2, \ldots) = a^2 f(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots).$$

Um nun die Richtungen und das Verhältniss der beschleunigenden Kräfte zu finden, haben wir die Funktionsvergrösserung zu betrachten, welche hervorgeht, wenn die Punkte $p_1, \ldots$ unendlich kleine Wege beschreiben. Der unendlich kleine Weg des Punktes p_1, den wir mit δp_1 bezeichnen, ist, wenn $a\delta x_1$, $b\delta y_1$, $c\delta z_1$ die senkrechten Projektionen desselben auf die drei Axen sind,

$$\delta p_1 = a\delta x_1 + b\delta y_1 + c\delta z_1.$$

Durch diese Bewegung geht p_1 in $p_1 + \delta p_1$ über, also $g + ax_1 + by_1 + cz_1$ in

$$g + a(x_1 + \delta x_1) + b(y_1 + \delta y_1) + c(z_1 + \delta z_1);$$

das heisst, es geht dadurch x_1 in $x_1 + \delta x_1$, y_1 in $y_1 + \delta y_1$ und z_1 in $z_1 + \delta z_1$ über. Ist ebenso δp_2 die Bewegung des Punktes p_2, und

32

$$\delta p_2 = a\delta x_2 + b\delta y_2 + c\delta z_2,$$

so geht durch diese Bewegung x_2 in $x_2 + \delta x_2$, y_2 in $y_2 + \delta y_2$, z_2 in $z_2 + \delta z_2$ über, und so weiter. Die daraus fliessende Vergrösserung von f finden wir also durch Differenziation dieser Funktion, indem wir $\delta x_1, \ldots$ als Differenziale der entsprechenden Veränderlichen setzen. Bezeichnen wir das daraus hervorgehende Differenzial der Funktion gleichfalls durch δ, so erhalten wir

$$(27)\quad \begin{cases} \delta f(x_1, y_1, z_1;\ x_1, y_2, z_2;\ \ldots) = u_1\delta x_1 + v_1\delta y_1 + w_1\delta z_1 + \\ \qquad\qquad + u_2\delta x_2 + v_2\delta y_2 + w_2\delta z_2 + \cdots, \end{cases}$$

wo $u_1, v_1, w_1, \ldots$ die partiellen Differenzialquotienten nach den entsprechenden Veränderlichen $x_1, y_1, z_1, \ldots$ sind.

Um hieraus auf eine einfache Weise die Richtungen und das Verhältniss der beschleunigenden Kräfte zu finden, verwandeln wir die Differenzialgleichung wieder durch Multiplikation mit a^2 in geometrische Form und setzen, so wie $F = a^2 f$ war, nun auch $\delta F = a^2\delta f$; also ist

$$\delta F(p_1, p_2, \ldots) = a^2[u_1\delta x_1 + v_1\delta y_1 + w_1\delta z_1 + u_2\delta x_2 + v_2\delta y_2 + w_2\delta z_2 + \cdots],$$

oder, da $a^2 = b^2 = c^2$ ist,

$$\delta F(p_1, p_2 \ldots) = u_1 a \times \delta x_1 a + v_1 b \times \delta y_1 b + w_1 c \times \delta z_1 c + \\ + u_2 a \times \delta x_2 a + v_2 b \times \delta y_2 b + w_2 c \times \delta z_2 c + \cdots.$$

Also, da

$$a\delta x_1 + b\delta y_1 + c\delta z_1 = \delta p_1, \quad a\delta x_2 + b\delta y_2 + c\delta z_2 = \delta p_2$$

ist und a, b, c gegeneinander senkrecht sind, so ist

$$\delta F(p_1, p_2, \ldots) = (au_1 + bv_1 + cw_1) \times \delta p_1 + (au_2 + bv_2 + cw_2) \times \delta p_2 + \cdots.$$

Wenn wir endlich die Grösse $au_1 + bv_1 + cw_1$ mit q_1, $au_2 + bv_2 + cw_2$ mit q_2, und so weiter, bezeichnen, und diese Strecken q_1, q_2, ... die partiellen Differenzialquotienten nach p_1, p_2, ... nennen, so erhalten wir die einfache Gleichung

$$(28) \qquad \delta F(p_1, p_2, \ldots) = q_1 \times \delta p_1 + q_2 \times \delta p_2 + \cdots$$

und den Satz:

Die Aenderung (δF), welche eine algebraische Funktion (F) von Punkten ($p_1, p_2, \ldots$), die als Produkt eines Streckenquadrates in eine veränderliche Zahlgrösse erscheint, dadurch erfährt, dass die Punkte, von denen sie abhängt, unendlich kleine Wege (δp_1, δp_2, ...) beschreiben, ist der Summe gleich, die man erhält, wenn man die Funktion nach den einzelnen veränderlichen Punkten partiell differenziirt, diese partiellen Differenzialquotienten mit den Wegen der zugehörigen Punkte innerlich multiplicirt und diese inneren Produkte addirt.

Und:

Den partiellen Differenzialquotienten einer solchen Funktion (F) nach einem der Punkte (p_1), von denen sie abhängt, findet man, wenn man die Funktion durch das Quadrat des Masses dividirt, den Quotienten als Funktion der, in Bezug auf drei gegeneinander senkrechte und gleich lange, an einen beliebigen Punkt gelegte Masse genommenen Koordinaten dieser Punkte darstellt, nach den Koordinaten jenes Punktes p_1 differenziirt und diese drei Differenzialquotienten addirt, nachdem man jeden mit dem zugehörigen Masse multiplicirt hat.

Aus der Gleichung (28) folgen sogleich die Richtungen und Verhältnisse der Kräfte.

Betrachtet man die Funktionsänderung bei verschiedenen unendlich kleinen, aber gleich langen Wegen δp_1 des Punktes p_1, so ist dieselbe 33 gleich $q_1 \times \delta p_1$, das heisst, bei konstantem q_1 proportional der senkrechten Projektion von δp_1 auf q_1, also bei gleich langem δp_1 am grössten, wenn δp_1 gleiche Richtung hat mit q_1. Somit drücken q_1, q_2, ... die Richtungen der beschleunigenden Kräfte aus. Die Funktionsänderungen, welche durch zwei verschiedene Punkte p_1 und p_2 bei gleich langen Wegen nach diesen Richtungen q_1 und q_2 bewirkt

werden, verhalten sich wie $q_1 \delta p_1$ zu $q_2 \delta p_2$, also, da δp_1 parallel q_1 und δp_2 parallel q_2, und δp_1 und δp_2 gleich lang sind, wie q_1 zu q_2, das heisst:

Die beschleunigenden Kräfte, welchen die Punkte eines Systems vermöge einer Kraft unterliegen, die das Streben hat, eine algebraische Funktion jener Punkte zu vergrössern, verhalten sich in Grösse und Richtung wie die partiellen Differenzialquotienten dieser Funktion nach diesen Punkten.

Ehe ich die hieraus fliessende Formel der Mechanik ableite, will ich zeigen, dass die partiellen Differenzialquotienten einer Funktion von Punkten, deren Ableitung bisher an gewisse senkrechte Axen geknüpft war, hiervon unabhängig seien.

Es wurden drei gegeneinander senkrechte Masse a, b, c und ein Punkt g angenommen, auf ihre Richtungen wurden die Strecken $p_1 - g$, $p_2 - g$, ... senkrecht projicirt, diese Projektionen jede durch das ihr gleichgerichtete Mass gemessen, und die Resultate dieser Messungen mit x_1, y_1, z_1, ... bezeichnet, so dass

$$p_1 - g = x_1 a + y_1 b + z_1 c, \ldots$$

gesetzt war; dann wurde durch Substitution dieser Werthe für $p_1, \ldots$ in die algebraische Funktion F der Punkte und durch Division mit dem Quadrate des Masses eine algebraische Funktion f von $x_1, y_1, z_1, \ldots$ abgeleitet, diese nach den Veränderlichen x_1, y_1, z_1 ... partiell differenziirt, die Differenzialquotienten mit den ihnen zugehörigen Massen a, b, c multiplicirt und diese Produkte addirt.

Lassen wir nun a, b, c übergehen in e, e', e'', wo

$$(29) \qquad \begin{cases} e = \alpha a + \beta b + \gamma c \\ e' = \alpha' a + \beta' b + \gamma' c \\ e'' = \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c \end{cases}$$

ist, so werden, wenn

$$p_1 = v_1 e + v_1' e' + v_1'' e''$$

ist, also

$$v_1 e + v_1' e' + v_1'' e'' = x_1 a + y_1 b + z_1 c$$

ist, die Werthe für x_1, y_1, z_1 folgende sein:

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1 \alpha + v_1' \alpha' + v_1'' \alpha'' \\ y_1 &= v_1 \beta + v_1' \beta' + v_1'' \beta'' \\ z_1 &= v_1 \gamma + v_1' \gamma' + v_1'' \gamma''; \end{aligned}$$

und entsprechende Werthe wird man für die Koordinaten der übrigen Punkte erhalten. Will man nun den Differenzialquotienten einer Funktion F nach p_1 vermittelst dieser neuen Masse finden, so hat man, nachdem man in $f(x_1, y_1, \ldots)$ die soeben gefundenen Ausdrücke sub-

stituirt hat, nach v_1, v_1', v_1'' zu differenziiren, die so erhaltenen Differenzialquotienten mit e, e', e'' beziehlich zu | multipliciren und diese 34 Produkte zu addiren; dann ist zu zeigen, dass diese Summe noch gleich q_1, das heisst

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} a + \frac{\delta f}{\delta y_1} b + \frac{\delta f}{\delta z_1} c = \frac{\delta f}{\delta v_1} e + \frac{\delta f}{\delta v_1'} e' + \frac{\delta f}{\delta v_1''} e''$$

ist. Nun ist

$$\frac{\delta f}{\delta v_1} = \frac{\delta f}{\delta x_1}\frac{\delta x_1}{\delta v_1} + \frac{\delta f}{\delta y_1}\frac{\delta y_1}{\delta v_1} + \frac{\delta f}{\delta z_1}\frac{\delta z_1}{\delta v_1} = \frac{\delta f}{\delta x_1}\alpha + \frac{\delta f}{\delta y_1}\beta + \frac{\delta f}{\delta z_1}\gamma$$

$$\frac{\delta f}{\delta v_1'} = \frac{\delta f}{\delta x_1}\alpha' + \frac{\delta f}{\delta y_1}\beta' + \frac{\delta f}{\delta z_1}\gamma'$$

$$\frac{\delta f}{\delta v_1''} = \frac{\delta f}{\delta x_1}\alpha'' + \frac{\delta f}{\delta y_1}\beta'' + \frac{\delta f}{\delta z_1}\gamma''.$$

Also ist

$$\frac{\delta f}{\delta v_1} e + \frac{\delta f}{\delta v_1'} e' + \frac{\delta f}{\delta v_1''} e'' = \frac{\delta f}{\delta x_1}(\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'') +$$

$$+ \frac{\delta f}{\delta y_1}(\beta e + \beta' e' + \beta'' e'') + \frac{\delta f}{\delta z_1}(\gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'')$$

Sind nun e, e', e'' gleich lang mit a, b, c und rechtwinklig gegeneinander, so lässt sich leicht zeigen, dass $\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e''$ gleich a ist, und so weiter. Denn, bezeichnet $\cos(rs)$ den Kosinus des Winkels zwischen zwei gleich langen Strecken r und s, so ist $r\cos(rs)$ die senkrechte Projektion von s auf r ihrer Grösse und Richtung nach. Aus den Gleichungen (29) folgt also dann

$$\alpha = \cos(ea), \quad \alpha' = \cos(e'a), \quad \alpha'' = \cos(e''a).$$

Nun ist

$$a = e\cos(ea) + e'\cos(e'a) + e''\cos(e''a),$$

das heisst,

$$= \alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e''.$$

Und ebenso folgt

$$b = \beta e + \beta' e' + \beta'' e'', \quad c = \gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e''.$$

Also erhält man die zu erweisende Gleichung

$$\frac{\delta f}{\delta v_1} e + \frac{\delta f}{\delta v_1'} e' + \frac{\delta f}{\delta v_1''} e'' = \frac{\delta f}{\delta x_1} a + \frac{\delta f}{\delta y_1} b + \frac{\delta f}{\delta z_1} c.$$

Sind e, e', e'' nicht gleich lang mit a, b, c, sondern ist die Länge der letzteren das m-fache von der der ersteren, so hat man nach dem oben angegebenen Verfahren in Bezug auf die Masse e, e', e'' die Funktion $\frac{F}{e^2}$, die wir mit f' bezeichnen wollen, zu differenziiren. Dann ist, da $f = \frac{F}{a^2}$ und $a^2 = m^2 e^2$ ist, | $f' = m^2 f$. Dann sind die Pro- 35

jektionen von c, e', e'' auf a, b, c den mit $\frac{1}{m}a$, $\frac{1}{m}b$, $\frac{1}{m}c$ multiplicirten Kosinussen gleich, und die von a, b, c auf e, e', e'' den mit me, me', me'' multiplicirten Kosinussen, und es wird

$$a = m^2 (e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha'')$$

und so weiter *).

Also bleibt noch

$$\frac{\delta f'}{\delta v_1} e + \frac{\delta f'}{\delta v_1'} e' + \frac{\delta f}{\delta v_1''} e'' = \frac{\delta f}{\delta x_1} a + \frac{\delta f}{\delta y_1} b + \frac{\delta f}{\delta z_1} c,$$

das heisst, die angegebene Methode ist von der besonderen Annahme der Koordinaten gänzlich unabhängig, sobald diese nur jedesmal untereinander gleich lang und senkrecht sind.

Fassen wir die gewonnenen Resultate zusammen, so ergab sich:

Wenn F die algebraische Funktion zweiter Dimension ist, deren Vergrösserung eine Kraft V, die auf ein System von Punkten p_1, p_2, ... wirkt, erstrebt, und q_1, q_2, ... die partiellen Differenzialquotienten von F nach den Punkten p_1, p_2 ... sind, von denen F abhängt, so sind

$$\lambda q_1, \lambda q_2, \lambda q_3, \ldots$$

die beschleunigenden Kräfte, denen die Punkte p_1, p_2, p_3, ... vermöge jener Kraft V unterliegen, wo λ einen für alle diese Punkte gleichen Zahlfaktor bezeichnet, welcher von der Lage der Punkte p_1, p_2, ... in einer durch die Natur jener Kraft V bedingten Weise abhängt.

Wirken daher auf die Punkte p_1, p_2, ... die beschleunigenden Kräfte P_1, P_2, ..., und ausserdem die durch die Kraft V bedingten beschleunigenden Kräfte λq_1, λq_2, ..., so hat man

$$P_1 + \lambda q_1 - \frac{d^2 p_1}{dt^2} = 0,$$

$$P_2 + \lambda q_2 - \frac{d^2 p_2}{dt^2} = 0,$$

und so weiter.

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen innerlich mit δp_1, die zweite mit δp_2, und so weiter, und addirt, so erhält man, da

$$q_1 \times \delta p_1 + q_2 \times \delta p_2 + \cdots$$

gleich δF ist, die Gleichung

$$(30) \qquad \left(P_1 - \frac{d^2 p_1}{dt^2}\right) \times \delta p_1 + \left(P_2 - \frac{d^2 p_2}{dt^2}\right) \times \delta p_2 + \cdots + \lambda \delta F = 0,$$

welche für jeden Werth von δp_1, δp_2, ... gilt. Nimmt man endlich noch an, dass die Kraft V, wie dies zum Beispiel bei festen Körpern annäherungsweise angenommen werden kann, bei unendlich kleinen

*) weil dann $a = m[e \cos(ea) + e' \cos(e'a) + e'' \cos(e''a)]$ ist, und $\cos(ea) = m\alpha$, $\cos(e'a) = m\alpha'$, $\cos(e''a) = m\alpha''$ ist.

Entfernungen aus derjenigen Lage, für die F einen bestimmten Werth hat, schon so intensiv wirkt, dass die übrigen Kräfte das System nicht merklich aus einer solchen Lage zu entfernen vermögen, so können wir annäherungsweise F konstant setzen; wir nennen | solche Kräfte, 36 wenn sie schon bei unendlich kleinen Entfernungen aus jener Lage die übrigen Kräfte zu überwinden vermögen, so dass also nur unendlich kleine Abweichungen aus jener Lage, für die F jenen bestimmten Werth hat, eintreten können, behauptende Kräfte. Also:

Wenn beliebige Kräfte P_1, P_2, ... auf beliebige gleich schwere Punkte p_1, p_2, ... eines Systems wirken, und diese Punkte alle oder theilweise behauptenden Kräften unterliegen, welche mit unüberwindlicher Gewalt gewisse Funktionen L, M, N, ... jener Punkte auf Null zu erhalten suchen, so hat man die Gleichung

$$(31) \qquad 0 = \left(P_1 - \frac{d^2 p_1}{dt^2}\right) \times \delta p_1 + \left(P_2 - \frac{d^2 p_2}{dt^2}\right) \times \delta p_2 + \cdots + \\ + \lambda \delta L + \mu \delta M + \nu \delta N + \cdots,$$

welche in Verbindung mit den Gleichungen

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots$$

zur Bestimmung der Beschleunigung eines jeden Punktes vollkommen ausreicht.

Dies ist die auf unsere Analyse zurückgeführte Form der allgemeinen Gleichung der Mechanik, wie sie von La Grange der ganzen Mechanik zu Grunde gelegt ist, und damit ist also auch die ganze Mechanik dieser neuen Analyse unterworfen.

[§ 13. **Anwendung auf eine Aufgabe aus der Statik.**]

Als Beispiel für die Anwendung dieses Verfahrens will ich eine beliebige einfache Aufgabe der Statik wählen, nämlich die Aufgabe, den Gleichgewichtszustand eines Systems von Punkten $p_0, p_1, \ldots, p_n$ zu finden, welche so aneinander befestigt sind, dass die Entfernung je zweier aufeinander folgender Punkte konstant bleibt, und welche ausserdem beziehlich von den beschleunigenden Kräften P_0, P_1, ..., P_n gezogen werden.

Für die Substitution in (31) hat man erstens, da Gleichgewicht stattfinden soll, die sämmtlichen Beschleunigungen null zu setzen. Von den Kräften, durch welche je zwei aufeinander folgende Punkte aneinander befestigt sind, nehmen wir an, dass sie die Entfernungen je zweier Punkte, oder, um eine Funktion zweiter Dimension zu bekommen, die Quadrate der Verbindungsstrecken konstant zu erhalten

suchen. Wir erhalten also, wenn wir der Kürze wegen die Punkte mit p_α, die Kräfte mit P_α bezeichnen, wo α nach der Reihe die Indices $0, \ldots n$ ausdrückt, die Gleichung

$$\text{(32a)} \qquad \mathrm{S} P_\alpha \times \delta p_\alpha + \mathrm{S} \lambda_\alpha \delta [(p_{\alpha+1} - p_\alpha)^2] = 0,$$

wo die Summenzeichen sich auf die verschiedenen Werthe von α beziehen, das erste auf die Werthe von $0, \ldots n$, das letzte auf die Werthe von $0, \ldots (n-1)$, das heisst, alle Werthe von λ_α, in denen α nicht einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots (n-1)$ hat, sind null gesetzt. Diese Gleichung in Verbindung mit den n Gleichungen

$$\text{(32b)} \qquad (p_{\alpha+1} - p_\alpha)^2 = a_\alpha^2,$$

welche die konstanten Entfernungen, deren Quadrate eben [die] a_α^2 sind, darstellen, bestimmen den Gleichgewichtszustand vollkommen.

Es ist aber

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \delta [(p_{\alpha+1} - p_\alpha)^2] &= (p_{\alpha+1} - p_\alpha) \times \delta (p_{\alpha+1} - p_\alpha) \\ &= (p_{\alpha+1} - p_\alpha) \times \delta p_{\alpha+1} - (p_{\alpha+1} - p_\alpha) \times \delta p_\alpha . \end{aligned}$$

37 Dadurch hat man, da (32a) für jede Werthreihe von δp_α null ist, also auch die mit einem und demselben δp_α multiplicirten Glieder derselben zusammen null geben müssen, die $(n+1)$ Gleichungen

$$\text{(32c)} \qquad P_\alpha + 2\lambda_{\alpha-1}(p_\alpha - p_{\alpha-1}) - 2\lambda_\alpha (p_{\alpha+1} - p_\alpha) = 0.$$

Addirt man zwei aufeinanderfolgende dieser Gleichungen, zum Beispiel die, welche P_α, und die, welche $P_{\alpha+1}$ enthält, so erhält man

$$0 = P_\alpha + P_{\alpha+1} + 2\lambda_{\alpha-1}(p_\alpha - p_{\alpha-1}) - 2\lambda_{\alpha+1}(p_{\alpha+2} - p_{\alpha+1});$$

oder allgemeiner, addirt man alle Gleichungen in (32c) zwischen den Anzeigern α' und dem als grösser gedachten α, so hat man

$$0 = P_{\alpha'} + \cdots + P_\alpha + 2\lambda_{\alpha'-1}(p_{\alpha'} - p_{\alpha'-1}) - 2\lambda_\alpha (p_{\alpha+1} - p_\alpha).$$

Also, wenn α' null gesetzt wird, wo dann auch $\lambda_{\alpha'-1}$ nach dem Obigen null ist,

$$\text{(32d)} \qquad P_0 + P_1 + \cdots + P_\alpha - 2\lambda_\alpha (p_{\alpha+1} - p_\alpha) = 0.$$

Ferner, wenn zugleich α gleich n gesetzt wird, wo dann λ_α null ist,

$$\text{(33)} \qquad P_0 + P_1 + \cdots + P_n = 0.$$

Um nun aus den Gleichungen (32d) allgemein λ_α zu eliminiren, hat man nur dieselben mit $(p_{\alpha+1} - p_\alpha)$ äusserlich zu multipliciren, da das äussere Produkt (das Parallelogramm) gleichgerichteter Strecken null ist. Man erhält also

$$\text{(34)} \qquad (P_0 + P_1 + \cdots + P_\alpha) . (p_{\alpha+1} - p_\alpha) = 0.$$

Diese n Gleichungen in (34), in Verbindung mit (33) und den n Be-

dingungsgleichungen in (32c), bestimmen den Gleichgewichtszustand vollkommen, und es lässt sich alles, wenn noch der Anfangspunkt oder überhaupt einer der n Punkte gegeben ist, durch Konstruktion unmittelbar nach den Formeln finden, was überall der Vorzug dieser neuen Analyse ist.

Es seien zum Beispiel die Entfernungen a_a je zweier aufeinander folgender Punkte, die n Kräfte $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ und die Lage des Punktes p_0 gegeben; die Kraft P_n und die Lage der Punkte $p_1, \ldots, p_n$ seien gesucht.

In der That drücken die Gleichungen (34) nur aus, dass jedesmal $P_0 + P_1 + \cdots + P_a$ parallel ist mit $p_{a+1} - p_a$. Daraus ergiebt sich folgende Konstruktion. Man zeichne ein $(n+1)$-eck $A_0, A_1, \ldots, A_n$, dessen Seiten von der Ecke A_n aus fortschreitend genommen den Kräften $P_0, P_1, \ldots P_{n-1}$ gleich und gleichgerichtet sind, das heisst,

$$A_0 - A_n = P_0, \quad A_1 - A_0 = P_1, \quad A_2 - A_1 = P_2, \ldots,$$

so ist

$$A_a - A_n = P_0 + P_1 + \cdots + P_a,$$

und die Gleichung (34) wird

Fig. 9.

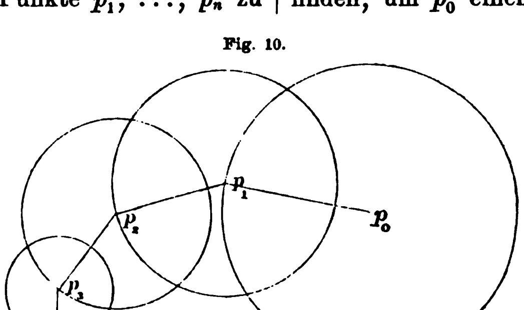
$$(34\text{a}) \qquad (A_a - A_n) \cdot (p_{a+1} - p_a) = 0.$$

Wird die gesuchte Kraft P_n gleich $X - A_{n-1}$ gesetzt, wo X ein gesuchter Punkt ist, so geht die Gleichung (33) über in

$$A_{n-1} - A_n + X - A_{n-1} = 0,$$

das heisst: $X = A_n$, das heisst, die Seite $A_n - A_{n-1}$ der zu Hülfe genommenen Figur ist die gesuchte Kraft P_n. Ferner schlage man, um die Punkte $p_1, \ldots, p_n$ zu | finden, um p_0 einen Kreis (oder 38

Fig. 10.



im Raume eine Kugel) mit dem Halbmesser a_0, ziehe durch p_0 eine Gerade parallel mit P_0 (oder $A_0 - A_n$), so genügt jeder der beiden

Punkte, worin diese Gerade den Kreis (oder die Kugel) schneidet, statt p_1 gesetzt den Bedingungen des Gleichgewichtes. Um p_1 schlage man mit a_1 als Halbmesser einen Kreis (eine Kugel) und ziehe von p_1 die Gerade parallel mit $A_1 - A_n$, so genügt jeder der Durchschnittspunkte dieser Geraden und des Kreises (der Kugel) statt p_2 gesetzt den Bedingungen des Gleichgewichtes, und so fort.

Es giebt also im Ganzen 2^n Lagen des Gleichgewichtes. Allein man überzeugt sich leicht, dass es unter ihnen nur Eine Lage des sicheren Gleichgewichtes giebt, welche hervorgeht, wenn man statt der Geraden Strahlen zieht, die den Seiten $A_a - A_n$ entgegengesetzt gerichtet sind.

Es liesse sich freilich die angegebene Konstruktion auch leicht aus der Idee unmittelbar ableiten. Allein, verfolgt man diese begriffliche Ableitung, so wird man sogleich sehen, dass sie mit der durch unsere Analyse gegebenen identisch und nur ihre Uebersetzung gleichsam in die Begriffssprache ist. Und dies ist überall der wesentlichste Vorzug der neuen Analyse.

[§ 14. **Uebergang von Strecken zu Punkten.**]

Ich gehe nun dazu über, die vorher abgebrochene Entwickelung der neuen Analyse weiter fortzuführen.

Ich hatte oben aus der Idee der Kongruenz das innere Produkt zweier Strecken abgeleitet. Jede Strecke erschien als Differenz zweier Punkte, und das innere Produkt zweier Strecken also in der Form

$$(a - b) \times (c - d),$$

wo a, b, c, d Punkte sind. Um von hier aus durch Auflösung der Klammern zu inneren Produkten von Punkten, und von Punkten mit Strecken zu gelangen, will ich mich eines allgemeinen Ableitungsgesetzes bedienen, welches überhaupt für die neue Analyse von der grössten Wichtigkeit ist. Nämlich:

(Satz 12.) *Wenn gewisse Gesetze allgemein gelten für Differenzen je zweier Grössen aus einer Grössenreihe* $(a, b, c, \ldots)$, *und man hat irgend eine Gleichung* (A), *worin jene Grössen* $(a, b, c, \ldots)$ *nur zu Differenzen gepaart vorkommen, und man leitet aus dieser Gleichung* (A) *dadurch, dass man jene Gesetze auch auf jene Grössen selbst statt auf ihre Differenzen anwendet, eine neue Gleichungsform* (B) *ab: so erhält man aus ihr, wenn man statt der Grössenreihe* $(a, b, c, \ldots)$ *die Reihe der Differenzen* $(a - r, b - r, \ldots)$ *dieser Grössen von irgend einer beliebigen Grösse* (r) *dieser Reihe setzt, jedesmal eine richtige Gleichung; und, wenn* B *wieder jene Grössen nur zu Differenzen gepaart enthält, so ist auch* B

selbst eine richtige Gleichung; und zwar erfolgt dies alles auch dann noch, wenn man für solche Differenzen nur das Gesetz allgemein annimmt, dass $(a-b)+(b-c)=a-c$ *sei.*

In der That, da $(a-b)+(b-r)=a-r$ ist, also auch

$$a-b=(a-r)-(b-r), \tag{35}$$

so kann man aus der Gleichung A durch dies für die Differenzen vorausgesetzte Gesetz eine Gleichung A' ableiten, in welcher statt der Grössen $a, b, c, \ldots$, die in A vorkommen, nur die Differenzen $a-r$, $b-r$, $c-r, \ldots$ eingetreten sind. Leite ich nun aus A dadurch, dass ich die für Differenzen jener Grössen allgemein geltenden Gesetze auch auf diese Grössen selbst anwende, eine Gleichungsform B ab, so werde ich, indem ich dieselben Gesetze auf die Differenzen $a-r$, $b-r, \ldots$ statt auf $a, b, \ldots$ selbst anwende, zu einer richtigen Gleichung B' gelangen, welche sich von B nur dadurch unterscheidet, dass statt der Grössen $a, b, \ldots$ in B hier die Differenzen $a-r$, $b-r, \ldots$ eingetreten sind. Kommen ferner in der Gleichungsform B die Grössen $a, b, \ldots$ nur zu Differenzen gepaart vor, so werden auch in B' die Differenzen $a-r$, $b-r, \ldots$ nur wiederum zu Differenzen gepaart vorkommen. Statt jeder solchen Differenz der Differenzen $a-r$, $b-r, \ldots$ kann ich aber nach dem durch die Gleichung (35) dargestellten Gesetze die entsprechende Differenz der Grössen $a, b, \ldots$ selbst setzen, ohne dass die Gleichung aufhört eine richtige zu sein. Dadurch erhalte ich aber aus B' die Form B. Da also B' eine richtige Gleichung war, so ist es unter der zuletzt gemachten Voraussetzung auch B.

Hieran schliesse ich nun die Definition, welche vermöge des soeben bewiesenen Satzes vollkommen ausreicht für alle analytischen Gesetze der Punktverknüpfungen, wenn die der Streckenverknüpfungen bekannt sind. Nämlich:

(Erklärung 8.) *Eine Gleichung* (B), *welche Punkte enthält, die wenigstens nicht alle zu Differenzen gepaart sind, setze ich dann und nur dann als richtig, wenn sich eine richtige Gleichung* (A) *auffinden lässt, in welcher die Punkte nur zu Differenzen gepaart vorkommen, und welche die Beschaffenheit hat, dass man aus ihr, wenn man die bisher für Strecken allgemein erwiesenen Verknüpfungsgesetze auch auf Punkte anwendet, die gegebene Gleichung* (B) *ableiten kann.*

Hieraus folgt sogleich, dass, wenn man eine richtige Punktgleichung B hat, in welcher die Punkte wenigstens nicht alle zu Differenzen gepaart sind, und man aus ihr dadurch, dass man die Punkte wie Strecken behandelt, eine Gleichungsform C ableitet, in welcher

gleichfalls wenigstens nicht alle Punkte zu Differenzen gepaart sind, diese gleichfalls eine richtige Gleichung ist. Denn, nach der Definition ist B nur dann richtig, wenn sie sich aus einer richtigen Streckengleichung A durch Anwendung der für Strecken geltenden Gesetze auch auf Punkte ableiten lässt. Da nun aus A auf solche Weise B, aus B wieder C abgeleitet ist, so ist also auch aus A die letzte C auf solche Weise ableitbar, also C richtig. Aber, vermöge des vorhergehenden Satzes 12 können wir, da für die Strecken $a - b$, $b - c$, auch wenn a, b, c Punkte sind, die Voraussetzung jenes Satzes, dass $(a - b) + (b - c) = a - c$ ist, allgemein gilt, noch weiter gehen, und sagen, auch wenn C eine Streckengleichung ist, die aus B auf die angegebene Weise hervorgeht, sei sie richtig; denn dann geht C auch aus A auf solche Weise, nämlich durch Anwendung der für Strecken geltenden Gesetze auf Punkte hervor, also ist C auch nach dem angeführten Satze richtig, wenn A es ist. Also:

40 *Wenn man eine richtige Gleichung, welche Punkte enthält, dadurch, dass man die für Strecken allgemein geltenden Gesetze auch auf Punkte anwendet, in eine andere Gleichung umwandelt, so ist diese gleichfalls richtig.*

Diesen Satz kann ich auch so ausdrücken und erweitern:

(Satz 13.) *Alle für Strecken allgemein geltenden Verknüpfungsgesetze gelten auch für Punkte und überhaupt für Punktgrössen,*

nämlich auch für Punktgrössen darum, weil dieselben Gesetze, die für Strecken allgemein gelten, auch für Vielfache derselben, da diese Vielfachen gleichfalls Strecken sind, gelten müssen, also auch für die Vielfachen der Punkte, das heisst, für Punktgrössen. Ferner folgt vermittelst desselben Satzes 12, da jede richtige Punktgleichung B nach der Definition 8 aus einer richtigen Streckengleichung A ableitbar ist, also der in jenem Satze 12 für die Punktgleichung B aufgestellten Bedingung unterliegt, der Satz:

(Satz 14.) *Eine richtige Punktgleichung bleibt richtig, wenn man statt der sämmtlichen darin vorkommenden Punkte* $(a, b, \ldots)$ *die Differenzen* $(a - r, b - r, \ldots)$ *derselben von einem und demselben Punkte* (r) *setzt.*

Durch Anwendung dieser beiden Sätze 13 und 14 gehen alle Gesetze der Verknüpfungen von Punkten und Punktgrössen aufs leichteste hervor, wenn man die Gesetze der Verknüpfungen von Strecken kennt. Ich will daher hier gelegentlich und zur besseren Vergleichung auch die Gesetze der Addition und Subtraktion der Punktgrössen aus denen der Strecken ableiten.

[§ 15. **Summen von Punktgrössen.**]

Sind $a, b, c, \ldots$ Punkte, und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Zahlgrössen, und ist zuerst

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots = 0,$$

so hat man, wenn r ein beliebiger Punkt ist,

$$\alpha a + \beta b + \cdots = \alpha a + \beta b + \cdots - (\alpha + \beta + \cdots) r$$
$$= \alpha (a - r) + \beta (b - r) + \cdots,$$

das heisst, wenn wir $\alpha, \beta, \ldots$ die Gewichte der Punktgrössen αa, $\beta b, \ldots, (\alpha + \beta + \cdots)$ ihr *Gesammtgewicht*, und $\alpha(a-r) + \beta(b-r) + \cdots$ ihre *Gesammtabweichung* von dem Punkte r nennen:

(Satz 15.) *Eine Summe von Punktgrössen, deren Gesammtgewicht null ist, ist eine Strecke; ihre Gesammtabweichung von einem veränderlichen Punkte ist konstant, und der Strecke gleich, die ihre Summe ist.*

Ferner: Ist das Gesammtgewicht nicht null, so sei ihre Summe einer noch unbekannten Punktgrösse ϱx gleich gesetzt, wo ϱ eine Zahlgrösse, x ein Punkt ist, also

$$\alpha a + \beta b + \cdots = \varrho x, \tag{36}$$

so ist nach Satz 14

$$\alpha (a - r) + \beta (b - r) + \cdots = \varrho (x - r). \tag{36a}$$

Subtrahirt man diese Gleichung von (36), so hat man

$$(\alpha + \beta + \cdots) r = \varrho r,$$

also, wieder nach Satz 14, wenn r' ein anderer Punkt ist, 41

$$(\alpha + \beta + \cdots)(r - r') = \varrho (r - r'),$$

was eine Streckengleichung ist, aus welcher folgt

$$\alpha + \beta + \cdots = \varrho. \tag{37}$$

Substituirt man diesen Werth in (36), so hat man

$$\alpha (a - r) + \beta (b - r) + \cdots = (\alpha + \beta + \cdots)(x - r), \tag{38}$$

oder, da $(\alpha + \beta + \cdots)$ nicht null ist,

$$x - r = \frac{\alpha (a - r) + \beta (b - r) + \cdots}{\alpha + \beta + \cdots}. \tag{39}$$

Wird nun x aus dieser Gleichung bestimmt, was durch eine einfache Konstruktion möglich ist, so ist auch Gleichung (38) richtig, also ist, da (36), nachdem für ϱ und x die gefundenen Werthe substituirt sind, unmittelbar aus (38) hervorgeht, nach Satz 13 auch (36) richtig, während die vorhergehende Entwickelung zeigt, dass, wenn (36) richtig sein soll, ϱ und x nothwendig den in (37) und (38) gegebenen Bestimmungen unterliegen müssen.

Setzen wir übrigens in (36a) r gleich x, so haben wir

$$\alpha(a-x)+\beta(b-x)+\cdots=0. \tag{40}$$

Bekanntlich nennt man diesen Punkt x den Schwerpunkt zwischen den mit den Gewichten α, β, ... behafteten Punkten a, b, ..., oder, mathematischer ausgedrückt, die *Mitte zwischen den Punktgrössen* αa, βb, ... Also:

(**Satz 16.**) *Eine Summe von Punktgrössen, deren Gesammtgewicht nicht null ist, ist wieder eine Punktgrösse, deren Gewicht das Gesammtgewicht der addirten Punktgrössen* (37), *und deren Ort die Mitte zwischen ihnen ist* (38); *die Gesammtabweichung der Punktgrössen von einem beliebigen Punkte ist gleich der ihrer Summe von demselben Punkte* (36a), *ihre Gesammtabweichung von der Mitte ist also null* (40), *und die Mitte wird also auch gefunden* (39), *wenn man von einem Punkte die Strecken nach den Orten der Punktgrössen zieht, diese Strecken mit den zugehörigen Gewichten multiplicirt, die Produkte addirt, die Summe durch das Gesammtgewicht dividirt, und eine diesem Quotienten gleiche Strecke zieht, welche jenen Punkt zum Anfangspunkte hat; dann ist der Endpunkt dieser Strecke die gesuchte Mitte.*

Wenn wir sagen, das *Gewicht einer Strecke* sei null, und wenn wir Strecken und Punktgrössen zusammen *Grössen erster Stufe* nennen, so folgt aus Satz 15 und 16 sogleich der Satz: *Das Gewicht einer Summe von Grössen erster Stufe ist gleich der Summe der Gewichte der Summanden*, oder allgemeiner:

(**Satz 17.**) *Eine Gleichung zwischen Grössen erster Stufe, das heisst, eine Gleichung, in welcher die Grössen erster Stufe nur der Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung unterworfen sind, bleibt richtig, wenn man statt der Grössen erster Stufe ihre Gewichte setzt.*

[§ 16. **Innere Multiplikation von Punktgrössen. Innere Grössen.**]

Ich gehe nun zu den inneren Produkten von zwei Grössen erster Stufe über.

42 Sowohl das innere Produkt zweier Punktgrössen, als auch das einer Punktgrösse in eine Strecke lässt sich als Differenz zweier Quadrate oder als Vielfaches dieser Differenz darstellen.

In der That, wenn im Folgenden unter a, b, c Punkte, unter α, β, γ Zahlgrössen, unter p eine Strecke verstanden ist, so hat man

$$a^2-b^2=(a+b)\times(a-b)=\frac{a+b}{2}\times 2(a-b).$$

Der letzte Ausdruck ist ein Produkt eines Punktes und einer Strecke.

Hat man daher irgend ein Produkt einer Punktgrösse und einer Strecke, etwa $\gamma c \times p$, welches gleich $c \times \gamma p$ ist, so hat man nur $\frac{a+b}{2}$ gleich c und $2(a-b)$ gleich γp zu setzen, wodurch a und b bestimmt sind, wenn γ, c, p gegeben sind, und erhält dann $\gamma c \times p = a^2 - b^2$, wodurch das innere Produkt einer Punktgrösse in eine Strecke auf die Differenz zweier inneren Punktquadrate zurückgeführt ist.

Ebenso ist

$$\alpha(a^2 - p^2) = \alpha(a+p) \times (a-p),$$

wo $a+p$ und $a-p$ Punkte sind. Hat man daher irgend ein Produkt zweier Punktgrössen $\beta b \times \gamma c$, welches gleich $\beta\gamma b \times c$ ist, so hat man nur $\beta\gamma$ gleich α, b gleich $a+p$ und c gleich $a-p$ zu setzen, wodurch α, a, p bestimmt sind, wenn β, γ, b, c gegeben sind, und erhält dann $\beta b \times \gamma c$ gleich $\alpha(a^2 - p^2)$. Beide Resultate in Worten ausgedrückt:

Das [innere] Produkt einer Punktgrösse und einer Strecke ist gleich der Differenz $(a^2 - b^2)$ der Quadrate zweier Punkte a und b, welche den Ort der Punktgrösse in der Mitte zwischen sich haben, und deren Abstand $(a-b)$ gleich der mit dem halben Gewichte der Punktgrösse multiplicirten Strecke jenes Produktes ist. Und das [innere] Produkt zweier Punktgrössen ist gleich der mit einem Koefficienten α multiplicirten Differenz $a^2 - p^2$ der Quadrate eines Punktes a und einer Strecke p, indem der Koefficient α gleich dem Produkte der Gewichte beider Punktgrössen, der Punkt a die Mitte zwischen ihren Orten und das Quadrat der Strecke p gleich dem Quadrate des Abstandes eines dieser Orte von der Mitte ist.

Statt $\alpha(a^2 - p^2)$ können wir auch schreiben $\alpha a^2 - \alpha p^2$; somit können wir eine beliebige Summe von inneren Produkten auf die Form

$$\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2 + \cdots + A_1 + A_2 + \cdots,$$

oder mit der Summenbezeichnung auf die Form

$$\mathrm{S}\alpha a^2 + \mathrm{S}A$$

bringen, wo α Zahlgrössen, a Punkte und A innere Streckenprodukte bezeichnen. Also, eine jede Gleichung zwischen inneren Produkten wird sich auf die Form

$$\mathrm{S}\alpha a^2 + \mathrm{S}A = 0 \tag{41}$$

bringen lassen.

Soll nun diese Gleichung richtig sein, so muss nach Satz 14 für jeden Punkt r

$$\mathrm{S}\alpha(a-r)^2 + \mathrm{S}A = 0 \tag{42}$$

sein, das heisst,

(43) $$\mathrm{S}\alpha a^2 + \mathrm{S}A - 2r \times \mathrm{S}\alpha a + r^2\,\mathrm{S}\alpha = 0.$$

Diese Gleichung von der gegebenen (41) subtrahirt, erhält man

(44) $$2r \times \mathrm{S}\alpha a - r^2\,\mathrm{S}\alpha = 0.$$

Also wieder nach Satz 14 für jeden Punkt r'

(45) $$2(r - r') \times \mathrm{S}\alpha(a - r') - (r - r')^2\,\mathrm{S}\alpha = 0.$$

Da man r und r' beliebig wählen kann, so kann man r von r' verschieden annehmen, und r so wählen, dass die Strecke $r - r'$ senkrecht wird gegen die Strecke $\mathrm{S}\alpha(a - r')$; dann wird in (45) das erste Glied (nach Satz 3) null; also erhält man

$$(r - r')^2\,\mathrm{S}\alpha = 0;$$

und da hierin r von r' verschieden, also $(r - r')^2$ nicht null ist, so muss

(46) $$\mathrm{S}\alpha = 0$$

sein. Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (45), welche für alle Lagen der Punkte r und r' gilt, so hat man

$$2(r - r') \times \mathrm{S}\alpha(a - r') = 0$$

noch immer für jede Lage der Punkte r und r'. Nun kann man hier also auch r so wählen, dass es von r' verschieden, aber $r - r'$ nicht senkrecht auf $\mathrm{S}\alpha(a - r')$ ist; dann muss (nach Satz 3) $\mathrm{S}\alpha(a - r')$ null sein; also, da $r'\,\mathrm{S}\alpha$ nach (46) null ist, so muss

(47) $$\mathrm{S}\alpha a = 0$$

sein. Diese Gleichung schliesst (nach Satz 17) die Gleichung (46) mit ein. Wenn nun ausser dieser Gleichung (47) noch für irgend einen Punkt r die Gleichung (42) gilt, so folgt daraus, weil aus (42) die (43) hervorgeht, und diese vermöge (47) und der von dieser mit eingeschlossenen (46) sich in (41) verwandelt, die Richtigkeit dieser letzteren.

Also eine Gleichung von der Form (41) ist dann und nur dann richtig, wenn die Gleichung (47) und für irgend einen Punkt r die Gleichung (42) stattfindet. Diese ganze Schlussreihe fasst einen ausserordentlichen Reichthum von Beziehungen in sich, die ich nun, wie auch den Satz selbst in Begriffe kleiden will.

Ich will die Grösse αa die *Mittelgrösse* des vielfachen Punktquadrates αa^2 nennen und sagen, die Mittelgrösse eines inneren Streckenproduktes sei null, ferner will ich die Grösse $\alpha(a - r)^2$ die *Abweichung* des vielfachen Punktquadrates αa^2 von dem Punkte r nennen und

sagen, die Abweichung eines inneren Streckenproduktes von einem beliebigen Punkte sei diesem inneren Streckenprodukte | selbst gleich. 44
Setzen wir dies fest, so lässt sich das Resultat der vorhergehenden Entwickelung in folgenden Satz fassen:

Eine Gleichung, deren Glieder vielfache Punktquadrate und innere Streckenprodukte sind, ist dann und nur dann richtig, wenn die beiden Gleichungen, welche hervorgehen, wenn man einestheils statt der Glieder ihre Mittelgrössen und anderntheils statt derselben ihre Abweichungen von irgend einem Punkte (r) setzt, richtig sind.

Wir können diesen Satz in noch einfacherer und allgemeinerer Form aussprechen, indem wir unter der Mittelgrösse und unter der Abweichung einer Summe von vielfachen Punktquadraten und inneren Streckenprodukten, wenn diese Summe sich nicht auf Ein solches vielfaches Punktquadrat oder auf Ein inneres Streckenprodukt zurückführen lässt, die Summe aus den Mittelgrössen oder aus den Abweichungen der Stücke jener Summe verstehen, die Abweichungen nämlich immer auf denselben Punkt bezogen. Ferner will ich jene vielfachen Punktquadrate sowohl, als auch die inneren Streckenprodukte und beliebige Summen beider Arten von Grössen *innere Grössen* nennen. Dann folgt unmittelbar der allgemeine Satz:

(Satz 18.) *Jede Gleichung, deren Glieder innere Grössen sind, ist dann und nur dann richtig, wenn die beiden Gleichungen, welche hervorgehen, wenn man einestheils statt der Glieder ihre Mittelgrössen und anderntheils statt derselben ihre Abweichungen von irgend einem Punkte r setzt, richtig sind.*

Oder:

(Satz 18a.) *Gleiche innere Grössen haben gleiche Mittelgrössen und gleiche Abweichungen von jedem beliebigen Punkte, und umgekehrt, wenn zwei innere Grössen gleiche Mittelgrössen und gleiche Abweichungen von irgend einem Punkte haben, so sind sie einander gleich.*

[§ 17. Erste Art von Summen innerer Grössen: Innere Streckenprodukte.]

Wir gehen nun von diesen allgemeinen Sätzen zu den besonderen Fällen über, um überall möglichst bestimmte Anschauungen zu gewinnen.

Betrachten wir die Summe beliebig vieler innerer Grössen, die immer in der Form

$$S\alpha a^2 + SA$$

dargestellt werden kann, so können hier drei wesentlich verschiedene Fälle eintreten, welche die drei Arten von inneren Grössen liefern.

Nämlich die Summe der Mittelgrössen oder, was dasselbe ist, die Mittelgrösse der Summe kann null oder eine Strecke oder eine Punktgrösse sein. Nach diesen drei Hauptfällen wollen wir die Betrachtung der besonderen Fälle sondern.

Erstens (Satz 19.), *wenn die Summe der zu den inneren Grössen gehörigen Mittelgrössen, also auch die zu der Summe jener inneren Grössen gehörige Mittelgrösse selbst null ist, so ist diese Summe ein inneres Streckenprodukt, nämlich dasjenige, was der Summe der Abweichungen jener inneren Grössen von irgend einem Punkte gleich ist.*

Dies ergiebt sich nicht nur aus obigem Satze 18a, sondern auch unmittelbar, indem dann

$$\mathrm{S}\alpha a^2 + \mathrm{S}A = \mathrm{S}\alpha a^2 - 2r\mathrm{S}\alpha a + r^2\mathrm{S}\alpha + \mathrm{S}A$$

45 ist, weil $\mathrm{S}\alpha a$ und also auch $\mathrm{S}\alpha$ null sind, also ist jener Ausdruck

$$= \mathrm{S}\alpha(a-r)^2 + \mathrm{S}A,$$

da

$$\mathrm{S}\alpha a^2 - 2r\mathrm{S}\alpha a + r^2\mathrm{S}\alpha = \mathrm{S}\alpha(a-r)^2 \tag{48}$$

ist. Zugleich liegt hierin der direkte Nachweis, dass in diesem Falle die Summe der Abweichungen von einem veränderlichen Punkte konstant ist, also namentlich

$$\mathrm{S}\alpha(a-r)^2$$

konstant ist, wenn r veränderlich und $\mathrm{S}\alpha a$ null ist.

[§ 18. Zweite Art von Summen innerer Grössen: Innere Plangrössen.]

Die beiden anderen Fälle nun führen uns zu den Begriffen der neuen Grössen. Nämlich es sei zweitens die Summe der Mittelgrössen eine Strecke p, das heisst (nach Satz 15), die Summe ihrer Gewichte sei null.

Ich gehe hier von dem einfachsten Falle aus, nämlich von der Betrachtung der Summe $a^2 + (-1)b^2$, oder, was dasselbe ist, der Differenz $a^2 - b^2$, also der Differenz zweier Punktquadrate. Diese ist, wie wir schon oben zeigten, einem inneren Produkte von Punkt und Strecke gleich, nämlich

$$a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b),$$

und setzen wir hier $a + b = 2c$, so dass also c die Mitte ist zwischen a und b, und setzen wir die Strecke $a - b = p$, so folgt, dass

$$a^2 + (-1)b^2 = 2c \times p = c \times 2p \tag{49}$$

ist, wenn

(50) $$a + b = 2c \text{ und } a - b = p$$

ist. Durch diese Gleichungen ist die Mittelgrösse und die Abweichung eines inneren Produktes $c \times 2p$ von Punkt und Strecke bestimmt, da sie der Mittelgrösse und Abweichung der ihm gleichgesetzten Summe $a^2 + (-1) b^2$ gleich sein muss. Nun ist die Mittelgrösse dieser Summe gleich $a + (-1) b = a - b = p$, das heisst, die Mittelgrösse eines inneren Produktes von Punkt und Strecke ist der Hälfte dieser Strecke gleich. Ferner die Abweichung der Summe $a^2 + (-1) b^2$ von r ist $(a - r)^2 + (-1)(b - r)^2$. Dies ist gleich $a^2 - b^2 - 2(a - b) \times r$, also gleich $(a + b - 2r) \times (a - b)$, also aus (50) substituirt, gleich $(c - r) \times 2p$. Also ist auch der zuletzt gefundene Ausdruck die Abweichung des inneren Produktes $c \times 2p$ von dem Punkte r, das heisst, die Abweichung eines inneren Produktes $c \times q$ aus Punkt und Strecke von einem Punkte r ist einem inneren Streckenprodukte gleich, dessen einer Faktor die Strecke jenes Produktes und dessen anderer Faktor die Abweichung $c - r$ des Punktes c jenes Produktes von dem Punkte r ist.

Habe ich nun eine beliebige Summe innerer Grössen $S\alpha a^2 + SA$ von der Art, dass der Mittelwerth dieser Summe eine Strecke p ist, so ist die Frage, ob ich auch diese Summe einem inneren Produkte $c \times q$ eines Punktes c in eine | Strecke q gleichsetzen kann. 46

Es wird diese Gleichheit dann und nur dann stattfinden (nach Satz 18), wenn die Mittelgrösse sowohl, als die Abweichung von irgend einem Punkte r bei $S\alpha a^2 + SA$ ebenso gross sind als bei $c \times q$. Die Mittelgrösse von $c \times q$ wird also dann gleich p, also $q = 2p$ sein müssen, und Frage ist nur noch, ob c so gewählt werden kann, dass die Abweichung des Produktes $c \times 2p$ von einem Punkte r gleich der Abweichung jener Summe von demselben Punkte r sei. Es sei die letztere Abweichung A_r, wo also A_r ein inneres Streckenprodukt darstellt; es frägt sich also, ob c so gewählt werden kann, dass

(51) $$(c - r) \times 2p = A_r$$

sei. Man nehme zuerst irgend einen Punkt c' von der Beschaffenheit, dass $(c' - r) \times 2p$ nicht null ist, das heisst, c' von r verschieden und $c' - r$ nicht senkrecht gegen p ist, so wird, da innere Streckenprodukte immer mit Zahlgrössen proportional sind (Erklärung 3 und 4),

$$(c' - r) \times 2p = mA_r$$

gesetzt werden können, wo m irgend eine Zahlgrösse bedeutet, die nicht null ist. Nimmt man dann

$$(c - r) = \frac{1}{m}(c' - r),$$

das heisst, nimmt man eine Strecke, deren Anfangspunkt r ist und welche gleich dem m-ten Theile der Strecke $(c' - r)$ ist, und nennt den Endpunkt derselben c, so ist

$$(c - r) \times 2p = \frac{1}{m}(c' - r) \times 2p = \frac{1}{m} m A_r = A_r,$$

das heisst, der so gefundene Punkt c genügt der Gleichung (51). Also ist nun in der That $c \times 2p$ jener Summe gleich.

Ehe wir dies Resultat in Form eines Satzes aussprechen, wollen wir die Bedeutung eines inneren Produktes von Punkt und Strecke ins Auge fassen; diese Bedeutung hängt von der Beantwortung der Frage ab, wann zwei solche Produkte $a \times p$ und $b \times q$ gleichgesetzt werden können. Sollen sie gleich sein, so muss zuerst ihre Mittelgrösse gleich sein, also muss zuerst $p = q$ sein. Es frägt sich also, wann $a \times p = b \times p$ sei. Offenbar dann und nur dann, wenn $(a - b) \times p = 0$, das heisst, entweder $a = b$, oder $a - b$ senkrecht gegen p ist, also zusammengefasst, wenn a und b in Einer gegen p senkrechten Ebene liegen. Da also zwei Produkte von Punkt und Strecke dann und nur dann gleich sind, wenn diese Strecke und die durch den Punkt gegen die Strecke senkrecht gelegte Ebene zusammenfällt, so bestimmt jene Strecke und diese Ebene den Begriff jenes inneren Produktes. Wir nennen daher das innere Produkt eines Punktes in eine Strecke eine Ebenengrösse oder eine *Plangrösse*, und zwar zur Unterscheidung von der bei der äusseren Multiplikation sich ergebenden Plangrösse (Grassmann's Ausdehnungslehre § 114) eine *innere* Plangrösse, und die Fläche, in welcher der Punktfaktor jenes Produktes sich frei bewegen kann, ohne den Werth des Produktes zu ändern, die *Faktorfläche* der Plangrösse. Nach diesen Bestimmungen können wir nun die gewonnenen Resultate in folgendem Satze zusammenfassen:

(Satz 20.) *Das innere Produkt eines Punktes in eine Strecke ist eine innere Plangrösse, deren Mittelgrösse die Hälfte dieser Strecke, und deren Faktorfläche die* 47 | *durch den Punkt gegen die Strecke senkrecht gelegte Ebene ist. Die Abweichung derselben von einem Punkte r ist gleich einem inneren Produkte, dessen einer Faktor dem Doppelten ihrer Mittelgrösse (oder der Strecke jenes Produktes) gleich ist, und dessen anderer Faktor die Abweichung eines beliebigen Punktes der Faktorfläche von dem Punkte r ist. Die Summe mehrerer innerer Grössen ist dann und nur dann eine innere Plangrösse, wenn die Mittelgrösse jener Summe einer Strecke von geltendem Werthe (das heisst, die nicht null ist) gleich ist.*

Hierin liegt auch der besondere Satz, dass die Summe von Plangrössen, wenn die Mittelgrösse der Summe nicht null ist, wieder eine

Plangrösse liefert, während schon in Satz 19 nachgewiesen ist, dass diese Summe, wenn ihre Mittelgrösse null ist, einem inneren Streckenprodukte gleich sei.

Um die innere Plangrösse mit der äusseren (Ausdehnungslehre § 114) vergleichen zu können, sei eine beliebige Gleichung zwischen inneren Plangrössen und inneren Streckenprodukten

$$\mathrm{S}a \times p + \mathrm{S}q \times v = 0 \tag{52}$$

gegeben, worin die Grössen a Punkte, die Grössen p, q, v Strecken vorstellen, und es seien die den Grössen p, v senkrecht proportionalen Flächenräume P, V (vergleiche Erklärung 5). Dann werden die äusseren Produkte $a.P$ äussere Plangrössen sein, die äusseren Produkte $q.V$ aber Körperräume darstellen. Nun lässt sich leicht nachweisen, dass, wenn die Gleichung (52) richtig ist, auch die Gleichung (53)

$$\mathrm{S}a.P + \mathrm{S}q.V = 0 \tag{53}$$

richtig sein müsse und umgekehrt aus (53) wieder (52) hervorgehe. Denn die erstere (52) ist nach Satz 18 dann und nur dann richtig, wenn $\mathrm{S}p = 0$ und

$$\mathrm{S}(a - r) \times p + \mathrm{S}q \times v = 0 \tag{54}$$

für irgend einen Punkt r, und ebenso die letztere (53) nach Grassmann's Ausdehnungslehre § 112 dann und nur dann, wenn $\mathrm{S}P = 0$ und

$$\mathrm{S}(a - r).P + \mathrm{S}q.V = 0 \tag{55}$$

für irgend einen Punkt r. Nun haben wir oben (Satz 5b) nachgewiesen, dass, wenn jene Gleichungen (54) gelten, auch diese (55) gelten müssen und umgekehrt, also wird auch (52) richtig sein, wenn (53) es ist, und umgekehrt. Also:

(Satz 21.) *Innere Produkte, von deren beiden Faktoren jedesmal wenigstens einer eine Strecke, der andere eine beliebige Grösse erster Stufe ist, verhalten sich wie die äusseren Produkte, welche hervorgehen, wenn man statt jener Strecken die senkrecht proportionalen Flächenräume setzt, den andern Faktor in jedem Produkte unverändert lässt und das Zeichen der inneren Multiplikation in das der äusseren verwandelt, das heisst, jede richtige Gleichung zwischen jenen inneren | Produkten bleibt richtig,* 48 *wenn man statt ihrer diese äusseren Produkte setzt und umgekehrt.*

Wegen dieser Uebereinstimmung in der Bedeutung habe ich beide Grössenarten mit dem gleichen Namen der Plangrössen bezeichnet.

[§ 19. Addition innerer Plangrössen.]

Ich will nun noch die Addition zweier Plangrössen und die einer Plangrösse und eines inneren Streckenproduktes im Einzelnen durchgehen.

Bei der Addition zweier Plangrössen können wir zwei Fälle unterscheiden, nämlich dass sich ihre Ebenen schneiden oder nicht. Im ersteren Falle sei a ein gemeinschaftlicher Punkt beider Ebenen, so ist

$$a \times p + a \times q = a \times (p + q),$$

das heisst, *die Summe zweier Plangrössen, die sich schneiden, ist eine Plangrösse, deren Ebene mit den Ebenen der beiden zu summirenden Plangrössen eine gleiche Durchschnittskante hat, und deren Mittelgrösse die Summe ist aus denen der Summanden.*

Wenn die Ebenen sich nicht schneiden, das heisst also, parallel laufen, so werden die Mittelgrössen Vielfache derselben Strecke p sein. Sind dann $a \times \alpha p$ und $b \times \beta p$ die beiden Summanden, so ist

$$a \times \alpha p + b \times \beta p = (\alpha a + \beta b) \times p = s \times (\alpha + \beta) p,$$

wenn $(\alpha + \beta) s = \alpha a + \beta b$ und $\alpha + \beta$ nicht null ist, das heisst, s die Mitte zwischen αa und βb ist. Also, *die Summe zweier paralleler Plangrössen ist, wenn die Summe ihrer Mittelgrössen nicht null ist, eine Plangrösse, deren Mittelgrösse die Summe ist aus denen der Summanden, und deren Ebene denen der Summanden parallel ist und so liegt, dass, wenn man eine Gerade zieht, welche diese Ebene in s schneidet und die Ebenen der Summanden in a und b, s die Mitte ist zwischen zwei Punktgrössen, die in a und b liegen und deren Gewichte sich wie die zugehörigen Mittelgrössen der Summanden verhalten.*

Wenn die Summe der beiden Mittelgrössen null ist, so folgt, da

$$a \times p - b \times p = (a - b) \times p$$

ist, *dass dann die Summe ein inneres Streckenprodukt sei, dessen einer Faktor das Doppelte, p, von der Mittelgrösse des einen Summanden, und dessen anderer Faktor eine beliebige Strecke von einem Punkte in der Ebene des anderen Summanden nach einem Punkte in der Ebene des ersteren ist.*

Da endlich

$$a \times p + q \times p = (a + q) \times p$$

ist, so folgt: *Die Summe einer inneren Plangrösse und eines inneren Streckenproduktes ist wieder eine innere Plangrösse, deren Mittelwerth gleich ist dem der ersteren und deren Ebene dadurch hervorgeht, dass die Ebene jener ersteren Plangrösse um eine Strecke q vorrückt, welche mit dem Doppelten, p, der Mittelgrösse ein inneres Produkt liefert, das dem gegebenen inneren Streckenprodukt gleich ist.*

[§ 20. **Dritte Art von Summen innerer Grössen: Kugelgrössen.**]

Nun schreite ich zu dem dritten Falle der Addition innerer Grössen, wo nämlich die Mittelgrösse der Summe eine Punktgrösse ist. Und dieser Fall ist es, der zu ganz neuen, keiner der früheren Grössengattungen proportional zu setzenden Grössen führt.

Zuerst kann man jedesmal jede solche Summe, deren Mittelgrösse eine Punktgrösse αa ist, die nicht null ist, gleich $\alpha a^2 + A$ setzen, wenn nur A die Abweichung jener Summe von dem Punkte a ist; denn die Abweichung der Grösse $\alpha a^2 + A$ von dem Punkte a ist gleich A, also Mittelgrösse und Abweichung von dem Punkte a dann auf beiden Seiten gleich, also | die Gleichung richtig (nach Satz 18). 49 Da hier αa, also auch α nicht null sein soll, so kann man statt $\alpha a^2 + A$ auch schreiben $\alpha(a^2 + A')$, wo $A' = \frac{A}{\alpha}$. Es treten hier für die nähere Betrachtung drei wesentlich verschiedene Fälle hervor je nachdem nämlich A' negativ, positiv oder null ist.

Im ersteren Falle sei $A' = -p^2$, so wird $\alpha(a^2 + A')$ gleich

$$\alpha(a^2 - p^2) = \alpha(a + p) \times (a - p),$$

das heisst, gleich dem vielfachen inneren Produkte zweier Punkte, deren Mitte a und deren Entfernung von der Mitte quadrirt p^2 giebt. Die Mittelgrösse αa eines solchen vielfachen Punktproduktes ist also die mit dem Koefficienten α multiplicirte Mitte beider Punkte (daher der Name Mittelgrösse), und die Abweichung desselben von der Mitte ist das mit dem Koefficienten $-\alpha$ multiplicirte Quadrat der Entfernung eines der beiden Punkte von ihrer Mitte. Hieraus folgt also sogleich, dass zwei vielfache innere Punktprodukte gleich sind, wenn der Koefficient, die Mitte der Punkte und das Quadrat der Entfernung dieser Punkte von der Mitte bei beiden gleich sind; oder anders ausgedrückt, ein solches Produkt behält seinen Werth, wenn der Koefficient konstant ist und die Punkte Endpunkte eines Durchmessers einer festen Kugelfläche bleiben. Da somit ein solches Produkt an die Kugelfläche geknüpft ist, so nennen wir das vielfache innere Produkt zweier Punkte eine *Kugelgrösse*, und jene Kugelfläche, in welcher die Punktfaktoren sich bewegen können, ohne den Werth des Produktes zu ändern, die *Faktorfläche* der Kugelgrösse.

Wir gehen nun zu dem andern Falle über, wo A' positiv, gleich p^2 ist, also

$$\alpha(a^2 + A') = \alpha(a^2 + p^2)$$

ist. Dann lässt sich $a^2 + p^2$ nicht in reelle Punktfaktoren zerlegen, also hat dann jene Grösse $\alpha(a^2 + p^2)$ auch keine reelle Faktorfläche.

Dagegen lässt sich diese Grösse offenbar als Summe von Punktquadraten oder von vielfachen Punktquadraten mit positiven Koefficienten darstellen, und am einfachsten in der Form $\beta(b^2+c^2)$.

In der That wird dann und nur dann

$$\alpha(a^2+p^2)=\beta(b^2+c^2)$$

sein, wenn erstens die Mittelgrösse beider Seiten gleich, also

$$\alpha a=\beta(b+c),$$

das heisst

$$\frac{b+c}{2}=a \text{ und } \beta=\frac{\alpha}{2},$$

also a die Mitte zwischen b und c ist, und zweitens die Abweichung beider Seiten von irgend einem Punkte, zum Beispiel der Mitte a, gleich gross ist. Die der linken Seite ist αp^2, die der rechten $\beta((b-a)^2+(c-a)^2)$, oder, da $\beta=\frac{\alpha}{2}$ und $(b-a)^2$, da a die Mitte ist zwischen b und c, gleich $(c-a)^2$ ist, so ist die Abweichung der rechten Seite von a gleich $\alpha(b-a)^2$, das heisst also: wenn zweitens $(b-a)^2=p^2$ ist. Es lässt sich also jene Grösse $\alpha(a^2+p^2)$ in der That als eine mit der Hälfte des Koefficienten α multiplicirte Summe der Quadrate zweier Punkte b und c darstellen, deren Mitte a, und deren quadrirte Entfernung von der Mitte gleich p^2 ist. Daraus folgt, dass man, ohne den Werth des Ausdrucks zu ändern, statt der Punkte
50 b und c zwei beliebige | andere, b' und c', nehmen kann, welche gleichfalls a zu ihrer Mitte haben und von a eben so weit abstehen wie jene, oder anders ausgedrückt, welche Endpunkte eines Durchmessers derjenigen Kugelfläche sind, die die Linie von b nach c zu ihrem Durchmesser hat.

Also auch diese Grösse $\alpha(a^2+p^2)$ oder $\alpha(a^2+A')$, wo A' positiv ist, bleibt an eine Kugelfläche geknüpft. Wir nennen daher auch diese Grösse eine Kugelgrösse, und wollen die Fläche, auf welcher sich die Punkte, als deren vielfache Quadratsumme jene Grösse sich darstellen lässt, ohne Werthänderung der Grösse bewegen können, die *Mittelfläche der Kugelgrösse* nennen.

Um diese Idee der Mittelfläche (als einer mittleren) näher ins Auge zu fassen, wollen wir eine beliebige Summe von n Punktquadraten betrachten, also etwa

$$a_1^2+a_2^2+\cdots$$

oder kürzer geschrieben, $\mathrm{S}a^2$, so ist die Mittelgrösse dieser Summe $\mathrm{S}a$ oder ns, wenn s der Schwerpunkt zwischen den Punkten $a_1, a_2, \ldots$ ist; und die Abweichung von diesem Schwerpunkte s ist $\mathrm{S}(a-s)^2$. Das arithmetische Mittel sämmtlicher Abweichungen von s ist

$$\frac{\mathrm{S}\,(a-s)^2}{n},$$

was $= p^2$ gesetzt werden mag. Dann ist

$$\mathrm{S}\,a^2 = n\,(s^2 + p^2),$$

weil beide Seiten gleiche Mittelgrösse $\left(\mathrm{S}\,a = ns\right)$ und gleiche Abweichung von s $\left(\mathrm{S}\,(a-s)^2 = np^2\right)$ haben. Nun ist aber p der Halbmesser der Kugelfläche, die wir die Mittelfläche genannt haben, und ihr Quadrat ist das arithmetische Mittel zwischen den verschiedenen Abweichungen der Punktquadrate a_1^2, a_2^2, ..., oder, denkt man sich durch jeden der Punkte a_1, a_2, ... eine Kugelfläche gelegt, welche die Mitte s zu ihrem Mittelpunkte hat, so ist die Mittelfläche eine Kugelfläche mit demselben Mittelpunkt, deren Inhalt (das heisst, da es eine Fläche ist, deren Flächeninhalt) das arithmetische Mittel ist zwischen denen jener Kugelflächen, daher der Name der Mittelfläche.

Wir nennen somit die Grösse $\alpha a^2 + A$, wenn α nicht null ist, mag nun A negativ oder positiv sein, ja auch wenn A null ist, eine Kugelgrösse; ihre Mittelgrösse ist αa, ihr Mittelpunkt a, ihr Gewicht α, ihre Abweichung vom Mittelpunkte ist A. Wir nennen diese Abweichung A den Inhalt oder Gehalt der Kugelgrösse*). Das vielfache Punktquadrat erscheint somit als eine Kugelgrösse, deren Inhalt null ist.

Ehe ich die gewonnenen Resultate in einem Satze zusammenfasse, will ich noch daran erinnern, dass wir $\frac{A}{\alpha} = A'$ setzten, und wenn A' negativ war, | der Halbmesser der Faktorfläche quadrirt $-A'$ (also 51 einen positiven Werth) lieferte, hingegen, wenn A' positiv war, der Halbmesser der Mittelfläche quadrirt A' selbst lieferte. Somit erhalten wir den Satz:

(**Satz 22.**) *Es giebt drei Arten innerer Grössen: die inneren Streckenprodukte, welche den Zahlgrössen proportional sind, die inneren Plangrössen, welche den äusseren Plangrössen proportional sind, und die Kugelgrössen. Eine Summe innerer Grössen liefert ein inneres Streckenprodukt, eine innere Plangrösse oder eine Kugelgrösse, je nachdem*

*) Hierbei hat man nicht an den kubischen Inhalt der Kugel zu denken, sondern, da die Grösse als eine quadratische erscheint, an den Flächeninhalt, also an den Inhalt der Kugelfläche. In der That ist der Inhalt der Kugelgrössen dem mit dem Koefficienten multiplicirten Flächeninhalt der Kugelfläche proportional, wenn man nur noch die Kugelfläche, wenn sie Mittelfläche ist, positiv, wenn Faktorfläche, negativ setzt.

die Mittelgrösse null, eine Strecke oder eine Punktgrösse ist. In dem letzten Falle ist der Inhalt der Kugelgrösse der Abweichung jener Summe von dem Mittelpunkte dieser Kugelgrösse gleich. Wenn dieser Inhalt null ist, so verwandelt sich die Kugelgrösse in ein vielfaches oder einfaches Punktquadrat; wenn er nicht null ist, so liefert die Summe entweder eine Kugelgrösse mit reeller Faktorfläche oder mit reeller Mittelfläche, je nachdem der durch das Gewicht dividirte Inhalt der Kugelgrösse negativen oder positiven Werth hat. Beide Flächen sind Kugelflächen, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugelgrösse ist; das Quadrat von dem Halbmesser der Mittelfläche ist dem durch das Gewicht dividirten Inhalte gleich, das Quadrat von dem Halbmesser der Faktorfläche ist das Entgegengesetzte dieses Quotienten.

[§ 21. Geometrische Darstellung der Summen innerer Grössen.]

Es kommt nun nur noch darauf an, durch möglichst bestimmte geometrische Anschauungen die Summe zweier Kugelgrössen oder einer Kugelgrösse mit einer andern inneren Grösse zu fixiren.

Zuerst seien zwei innere Grössen mit reellen Faktorflächen (also Kugelgrössen dieser Art oder Plangrössen) zu addiren, deren Faktorflächen sich treffen (schneiden, berühren oder zusammenfallen): so werden sich beide, wenn a ein gemeinschaftlicher Punkt ist, in der Form $a \times b$, $a \times c$ darstellen lassen, wo b und c beliebige Grössen erster Stufe sind (Strecken oder Punktgrössen, je nachdem die inneren Grössen Plan- oder Kugel-Grössen sein sollen). Da ihre Summe $a \times (b + c)$ ist, so folgt, dass diese Summe auch eine innere Grösse mit reeller Faktorfläche ist, deren Faktorfläche mit denen der Summanden dieselben Punkte gemeinschaftlich hat, wie diese unter sich. Also:

(**Satz 23a.**) *Zwei innere Grössen mit reellen, sich treffenden Faktorflächen liefern als Summe wieder eine innere Grösse mit reeller Faktorfläche, deren Faktorfläche mit denen der Summanden alle Punkte gemeinschaftlich hat, die diese unter sich gemeinschaftlich haben, und deren Mittelgrösse die Summe aus den Mittelgrössen der Summanden ist.*

Hieraus folgt eine höchst einfache Konstruktion der Faktorfläche der Summe unter den angeführten Bedingungen. Nämlich, man konstruire, wenn die Summe der Gewichte nicht null ist, nach Satz 16 den Ort der Mittelgrösse, das heisst, die Mitte zwischen den mit den zugehörigen Gewichten behafteten Mittelpunkten beider Kugelgrössen, und schlage um diesen Punkt als Mittelpunkt eine Kugelfläche, welche durch einen der gemeinschaftlichen Punkte beider Faktorflächen geht,

so ist diese die Faktorfläche der Summe; und wenn die Summe | der 52 Gewichte null ist, so lege man eine Ebene durch die gemeinschaftlichen Punkte beider Faktorflächen, oder wenn sie sich berühren, eine in diesem Berührungspunkte gleichfalls die beiden Faktorflächen berührende Ebene, so ist diese Ebene die Faktorfläche der Summe.

Um auch im allgemeineren Falle die Summation der Kugelgrössen auf geometrische Anschauungen zurückzuführen, will ich noch eine Benennung einführen, durch welche ich die geometrischen Beziehungen zwischen Kugelgrössen stets rein geometrisch ausdrücken kann. Nämlich ich werde die Kugelgrösse $a^2 - p^2$, welche als inneres Produkt zweier Punkte $(a + p) \times (a - p)$ erschien, schlechthin einer Kugelfläche gleich setzen, deren Mittelpunkt a und deren Halbmesser p ist. Dann ist klar, dass $a^2 + p^2$, da es gleich $a^2 - (\sqrt{-1}p)^2$ ist, als Kugelfläche mit reellem Mittelpunkte a und imaginärem Halbmesser $\sqrt{-1}p$ erscheint; ich will eine solche eine ideelle Kugelfläche, und die Kugelfläche $a^2 - p^2$ die ihr entsprechende reelle Kugelfläche nennen. Noch will ich bemerken, dass der Gehalt einer Kugelfläche $a^2 - p^2$ der oben angegebenen Bestimmung gemäss gleich dem negativen Quadrat ihres Halbmessers, also gleich $-p^2$, der der ideellen Kugelfläche also positiv ist. Hiernach können wir nun den obigen Satz 23a auch so ausdrücken:

(Satz 23b.) *Die Vielfachensumme zweier Kugelflächen, die sich treffen, ist eine vielfache Kugelfläche oder eine Plangrösse, je nachdem die Koefficientensumme geltenden Werth hat oder null ist; ihre Fläche hat mit den gegebenen Kugelflächen dieselben Punkte gemeinschaftlich, wie diese unter sich, und ihre Mittelgrösse ist die entsprechende*) Vielfachensumme der Mittelpunkte beider Kugelflächen.*

Namentlich ist die Fläche der Differenz zweier sich schneidender Kugelflächen die Ebene des Durchschnittes beider, und die Fläche der Differenz zweier sich berührender Kugelflächen die Ebene, welche beide in ihrem gemeinschaftlichen Berührungspunkte gleichfalls berührt.

Ich betrachte nun zuerst die Differenzebene zweier Kugelflächen auch im allgemeineren Falle.

[§ 22. **Differenzebene zweier Kugelflächen.**]

Es ist die Differenz zweier Kugelflächen A und B gleich einer Plangrösse, deren Mittelwerth die Differenz der beiden Mittelwerthe

*) Dass unter der entsprechenden Vielfachensumme die mit denselben Koefficienten verstanden ist, bedarf wohl kaum einer Erwähnung.

von A und B, und deren Abweichung von irgend einem beliebigen Punkte gleich der Differenz der Abweichungen jener Kugelflächen von demselben Punkte ist. Da nun die Abweichung der Plangrösse von einem Punkte ihrer. Ebene, aber auch von keinem andern null ist, so ist diese Ebene, das heisst die Differenzebene beider Kugelflächen, der Ort eines Punktes c, in Bezug auf welchen die Differenz der Abweichungen beider Kugelflächen null ist, das heisst, von dem beide Kugelflächen gleich weit abweichen, das heisst, eines Punktes, der, wenn

$$A = a^2 + A, \quad B = b^2 + B$$

ist, der Gleichung

$$(56) \qquad (a - c)^2 + A = (b - c)^2 + B$$

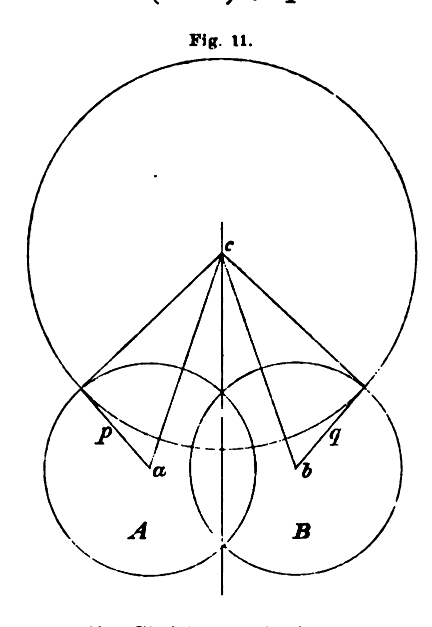
53 Genüge leistet.

Sind zuerst beide Kugelflächen reell, also A gleich $-p^2$, B gleich $-q^2$, wo p und q Strecken, nämlich die Halbmesser der Kugelflächen sind, so folgt:

$$(57) \qquad (a - c)^2 - p^2 = (b - c)^2 - q^2.$$

Liegt nun c ausserhalb der Kugelfläche A, so ist $(a - c)^2 > p^2$, also auch $(b - c)^2 > q^2$. Dann ist klar (s. Fig. 11), dass die linke Seite das Quadrat der von c an A, die rechte das der von c an B gezogenen Tangente ausdrückt; also sind beide Tangenten gleich lang. Schlägt man daher um c als Mittelpunkt eine Kugelfläche, deren Halbmesser diesen Tangenten gleich ist, so wird diese senkrecht geschnitten von den gegebenen Kugelflächen A und B. Der ausserhalb der beiden Kugelflächen A und B liegende Theil der Differenzebene ist also der Ort für die Mittelpunkte aller von jenen beiden Kugelflächen zugleich senkrecht geschnittenen Kugelflächen.

Fig. 11.



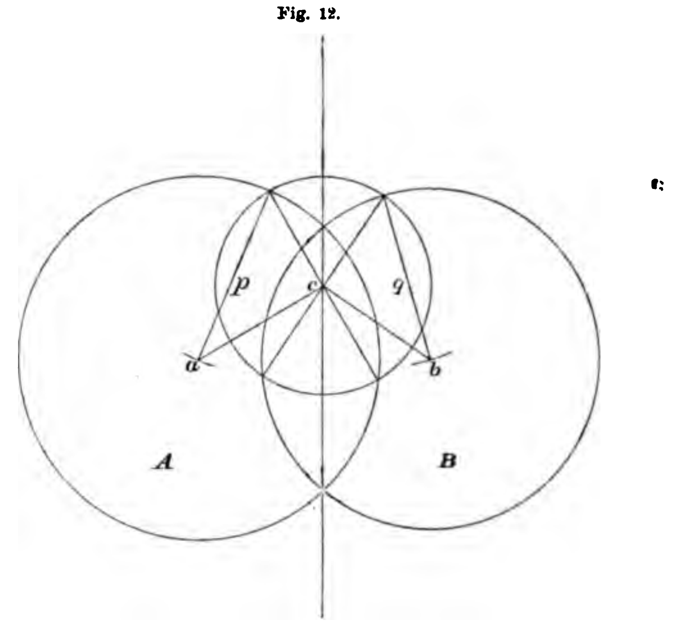
Liegt c innerhalb A, so ist $(a - c)^2$ kleiner als p^2, also auch $(b - c)^2$ kleiner als q^2. Dann wird man die Gleichung (57) auch schreiben können:

$$p^2 - (a - c)^2 = q^2 - (b - c)^2 = s^2.$$

54 Dann ist s (s. Fig. 12) die Hälfte derjenigen Sehne in jeder Kugelfläche, die durch c halbirt wird, und die Gleichung sagt aus, dass

diese Hälften für beide Kugelflächen gleich lang sind. Lege ich also um c als Mittelpunkt eine Kugelfläche, deren Halbmesser s ist, so wird diese durch jede der beiden Kugelflächen A und B gehälftet,

Fig. 12.



und der innerhalb der beiden Kugelflächen gelegene Theil der Differenzebene (wenn es einen solchen giebt) ist also der Ort für die Mittelpunkte aller durch A und B zugleich gehälfteten Kugelflächen. Also:

(Satz 24.) *Die Differenzebene zweier* [reeller] *Kugelflächen ist der Ort für die Mittelpunkte aller Kugelflächen, welche von jenen beiden zugleich entweder senkrecht geschnitten oder gehälftet werden,*

das heisst, sie ist das, was man die Ebene der gleichen Potenzen beider Kugelflächen oder ihre ideelle Durchschnittsebene genannt hat.

Die Konstruktion dieser Differenzebene kann man, wenn die Kugelflächen A und B sich nicht schneiden, dadurch leicht auf den Fall zweier sich schneidenden Kugelflächen zurückführen, dass man Kugelflächen zu Hülfe nimmt, welche die beiden gegebenen zugleich schneiden. Die Punkte der geraden Linie, in welcher die Ebenen der beiden Durchschnitte einer solchen Kugelfläche mit A und B sich untereinander schneiden, weichen von diesen beiden Kugelflächen gleich weit ab *); konstruirt man also durch zwei solche schneidende | Kugelflächen 55

*) Unter der Abweichung eines Punktes von einer Kugelfläche verstehen wir nämlich dasselbe, was wir unter der Abweichung der letzteren von dem ersteren verstanden.

Fig. 13.

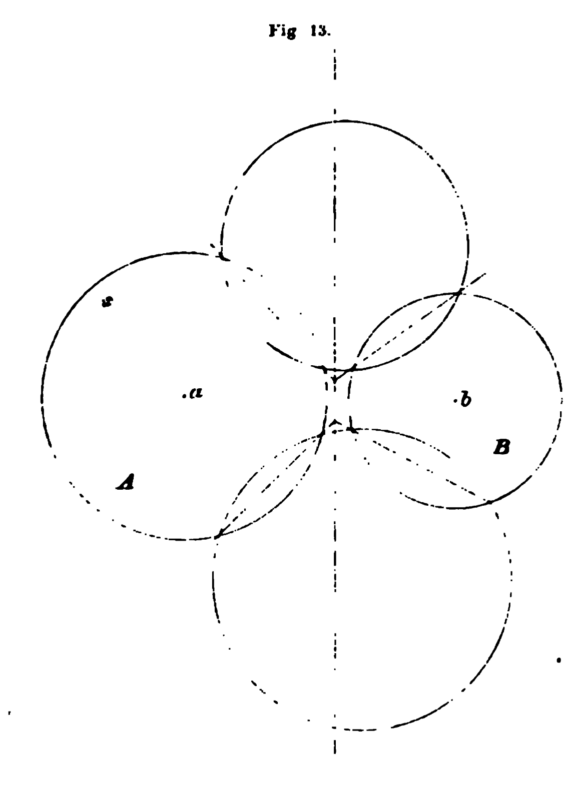
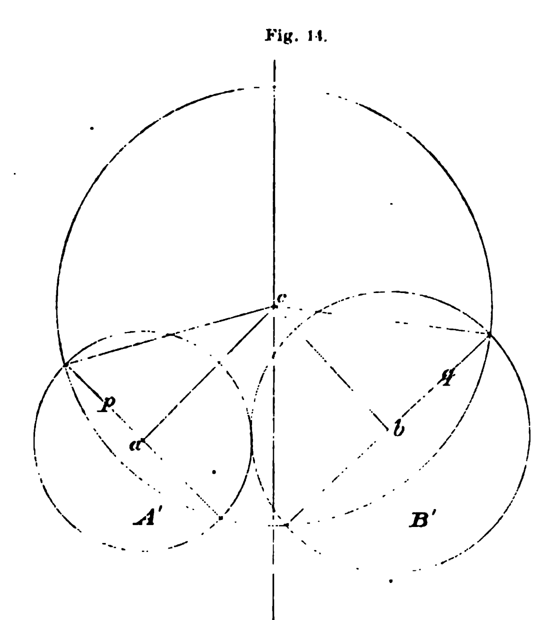


Fig. 14.



zwei solche gerade Linien, so ist die durch beide gelegte Ebene die gesuchte Differenzebene (s. Fig. 13).

Es seien zweitens beide Kugelflächen A und B ideell, und die ihnen zugehörigen reellen Kugelflächen A' und B' seien durch Konstruktion gegeben, so hat man, wenn $A = p^2$ und $B = q^2$, also $A = a^2 + p^2$, $B = b^2 + q^2$, p und q somit die Halbmesser der ihnen entsprechenden reellen Kugelflächen sind, aus (56)

$$(58)\left\{\begin{array}{l}(a-c)^2+p^2=\\=(b-c)^2+q^2=v^2;\end{array}\right.$$

dann ist v der Halbmesser einer A' und B' zugleich hälftenden Kugelfläche, deren Mittelpunkt c ist (s. Fig. 14).

Also ist die Differenzebene zweier ideeller Kugelflächen der Ort der Mittelpunkte aller Kugelflächen, welche die jenen ideellen entsprechenden reellen Kugelflächen hälften.

Die Konstruktion dieser Differenzebene erfolgt leicht: nämlich, man ziehe von a und b aus die gegen die gerade Linie ab senkrechten Halbmesser p und q, ziehe eine gerade Linie, welche die Verbindungsstrecke beider Endpunkte

derselben senkrecht hälftet, und durch den Durchschnitt c' dieser Geraden mit ab lege man die gegen ab senkrechte Ebene, so ist dies die gesuchte Differenzebene, weil nämlich die um c' als Mittelpunkt durch die Endpunkte der Halbmesser | gelegte Kugelfläche die Kugelflächen A' und B' hälftet und die Differenzebene senkrecht gegen ab ist. 56

Endlich sei die eine Kugelfläche, etwa A, reell, die andere, B, ideell und B' die ihr entsprechende reelle, so hat man, wenn $A = a^2 - p^2$, $B = b^2 + q^2$, also $A = -p^2$, $B = q^2$ ist, aus (56)

$$(a-c)^2 - p^2 = (b-c)^2 + q^2 = v^2.$$

Dann ist v der Halbmesser einer um c als Mittelpunkt gelegten Kugelfläche, von der A senkrecht geschnitten, B' gehälftet wird. Also:

Der Ort der Mittelpunkte aller Kugelflächen, von welchen eine gegebene Kugelfläche A senkrecht geschnitten, und zugleich eine andere B' gehälftet wird, ist eine Ebene, nämlich die Differenzebene zwischen der ersteren A und der der letzteren entsprechenden ideellen Kugelfläche B.

Die Konstruktion dieser Ebene kann man leicht auf eine der beiden früheren dadurch zurückführen, dass man die Gehalte $-p^2$ und $+q^2$ um gleich viel wachsen oder abnehmen lässt, und zwar um so viel, dass dadurch beide Kugelflächen entweder ideell oder reell werden; die Differenz, also auch die Differenzebene wird dadurch nicht geändert, und durch dies Wachsen oder Abnehmen entstehen Kugelflächen, die den gegebenen koncentrisch sind, und deren Halbmesserquadrate um eben so viel zu- oder abnehmen, die also stets leicht zu konstruiren sind.

Es kann nun noch die umgekehrte Aufgabe entstehen, nämlich, wenn von den beiden Kugelflächen A und B die eine A, der Mittelpunkt b der andern und die Differenzebene beider (welche dann natürlich, wenn die Lösung möglich sein soll, eine gegen die Verbindungslinie der Mittelpunkte senkrechte Lage haben muss) gegeben ist, die andere B oder, wenn sie eine ideelle sein sollte, die ihr entsprechende reelle Kugelfläche B' durch Konstruktion zu finden.

Ist die gegebene Kugelfläche A eine reelle, so ist, wenn sie die Differenzebene schneidet oder berührt, die andere Kugelfläche B dadurch bestimmt, dass sie die Differenzebene in derselben Kreislinie schneidet oder in demselben Punkte berührt. Schneidet hingegen die reelle Kugelfläche A die gegebene Differenzebene nicht, so hat man nur um den Punkt d, worin die Verbindungslinie ab beider Mittelpunkte die Differenzebene schneidet, eine die gegebene Kugelfläche A senkrecht schneidende Kugelfläche Γ

zu legen. Dann ist, wenn b ausserhalb Γ liegt, diejenige um b gelegte Kugelfläche B, welche gleichfalls Γ senkrecht schneidet, die gesuchte; wenn aber b innerhalb der Kugelfläche Γ liegt, so ist B eine ideelle Kugelfläche, und die ihr entsprechende reelle B' ist dann die von Γ gehälftete Kugelfläche, welche b zum Mittelpunkte hat.

Ist aber A eine ideelle Kugelfläche, und die ihr entsprechende reelle A' ist durch Konstruktion gegeben, so hat man nur den auf ab senkrechten Halbmesser p der Kugelfläche A' zu ziehen, und durch den Endpunkt dieses Halbmessers eine Kugelfläche Γ zu legen, welche den Durchschnitt d der Verbindungslinie ab und der Differenzebene zum Mittelpunkte hat, so ist wieder die gesuchte Kugelfläche B entweder die, welche von Γ senkrecht geschnitten wird, oder die gesuchte Kugelfläche B ist ideell und die entsprechende reelle B' die, welche von Γ gehälftet wird.

[§ 23. Vielfachensummen von Kugelflächen.]

Nachdem ich nun die Eigenschaften der Differenzebene entwickelt habe, gehe ich zu der allgemeineren Aufgabe über, die Fläche Γ einer 57 Vielfachensumme | $\alpha A + \beta B$ zweier Kugelflächen A und B zu konstruiren, oder, wenn sie ideell sein sollte, die ihr entsprechende reelle Γ'.

Ist $\alpha + \beta = 0$, also $\beta = -\alpha$, so wird jene Vielfachensumme gleich $\alpha(A - B)$ und liefert also eine Plangrösse, deren Ebene der Differenzebene $A - B$ identisch und also nach dem Früheren gefunden ist. Wir nehmen also an, $\alpha + \beta$ sei nicht null; dann ist die Summe eine Kugelgrösse, deren Gewicht $(\alpha + \beta)$ ist, die also in der Form $(\alpha + \beta)\,\Gamma$ dargestellt werden kann, wo Γ die gesuchte Kugelfläche ist. Man hat also

$$\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta)\,\Gamma. \tag{59}$$

Soll diese Gleichung richtig sein, so muss (nach Satz 18) erstens die Mittelgrösse beider Seiten gleich sein, das heisst, der Mittelpunkt von Γ muss die Mitte zwischen den mit den Koefficienten α und β behafteten Mittelpunkten von A und B sein, wodurch also der Mittelpunkt von Γ gefunden ist. Zweitens muss nach demselben Satze die Abweichung beider Seiten von jedem beliebigen Punkte r gleich sein; es sei diese Abweichung einer Kugelgrösse A von einem Punkte r der Kürze wegen mit A_r bezeichnet, so muss

$$\alpha A_r + \beta B_r = (\alpha + \beta)\,\Gamma_r \tag{60}$$

sein; und umgekehrt, wenn der Mittelpunkt von Γ auf die angegebene Weise bestimmt ist, und die Abweichungen in (59) von irgend einem Punkte gleich sind, so ist die Gleichung (59) richtig, alles dies nach

Satz 18. Ist nun c irgend ein Punkt der Differenzebene zwischen A und B, so hat man nach dem Obigen $A_c = B_c$; wird also dies in (60) substituirt, nachdem man c statt r gesetzt hat, so erhält man

$$(\alpha + \beta) A_c = (\alpha + \beta) \Gamma_c,$$

also, da $\alpha + \beta$ nicht null ist,

$$A_c = \Gamma_c,$$

das heisst, *ein Punkt, welcher von zwei oder (da der Schluss sich auf beliebig viele Glieder ausdehnen lässt) von mehreren Kugelflächen gleich weit abweicht, weicht auch von der Kugelfläche jeder Vielfachensumme derselben, wenn die Koefficientensumme nicht null ist, um eben so viel ab;* und für unsern Fall ergiebt sich, dass, wenn eine Kugelgrösse die Summe zweier andern ist, die Differenzebenen zwischen je zwei der zu ihnen gehörenden Kugelflächen zusammenfallen, und auch umgekehrt, wenn dies der Fall ist und zugleich die Mittelgrösse der einen Kugelgrösse die Summe aus denen der andern beiden ist, so ist auch jene Kugelgrösse die Summe dieser beiden.

Hieraus ergiebt sich die Konstruktion der Summenfläche Γ sehr leicht. Nämlich, man konstruire die Differenzebene $A - B$ und die Mitte zwischen αa und βb (wo a und b die Mittelpunkte von A und B sind) und lege um diese Mitte nach der oben angegebenen Konstruktionsweise eine Kugelfläche, welche mit A gleichfalls die Ebene $A - B$ als Differenzebene hat, so ist dies die gesuchte Kugelfläche der Summe.

[Schlussbetrachtungen.]

Hiermit glaube ich die wichtigsten Gesetze über innere Produkte zweier Grössen erster Stufe abgethan zu haben. Freilich liegt in dem Früheren noch unmittelbar ein Keim zu einer vollständigeren Auffassung des inneren Produktes, | ein Keim, dessen Entfaltung durch den Gang der früheren Entwickelung gleichsam geboten wird und daher zur organischen Einheit des Ganzen nothwendig erscheint. 58

Nämlich wir hatten schon in Erklärung 6 und 7 und den daraus folgenden Sätzen die inneren Produkte von zwei Ausdehnungen höherer Stufen gewonnen, deren jede als äusseres Produkt von Strecken erschien; und andrerseits hatten wir in dem Uebertragungsgesetze (Satz 12) und in der darauf gebauten Erklärung 8 das Verfahren aufgestellt, wie man aus solchen Gleichungen, in denen nur Strecken vorkommen, die entsprechenden Gleichungen ableiten kann, in denen statt der Strecken Punkte eintreten. So erhalten wir dann statt der Ausdehnungsgrössen, welche zu inneren Produkten verknüpft waren, Produkte von Punkten, das heisst Elementargrössen höherer Stufen (s. Grassmanns

Ausdehnungslehre, zweiter Abschnitt). Und wir haben in Satz 13 schon nachgewiesen, dass die sämmtlichen Gesetze, welche für die inneren Produkte der Ausdehnungsgrössen allgemein gelten, auch für diejenigen Elementargrössen oder überhaupt für diejenigen Grössen gelten müssen, welche hervorgehen, wenn man statt der Strecken, als deren Produkte jene Ausdehnungsgrössen erschienen, beliebige Punktgrössen setzt.

Es käme also nur noch darauf an, die anschaulichen Begriffe dieser Verknüpfungen, deren Gesetze vermöge des angeführten Satzes gegeben sind, darzulegen. Da jedoch die Art dieser Darlegung keine Schwierigkeit mehr darbietet, indem sie ganz nach der Analogie des für die inneren Produkte zweier Punkte ausgeführten Verfahrens fortschreitet, so glaube ich, dieselbe hier übergehen zu dürfen. Dagegen würde die Auffassung des Quotienten, die wir bisher ganz übergangen haben, und namentlich des Quotienten nicht paralleler Strecken zu neuen, von allen früheren gänzlich verschiedenen Verknüpfungen, namentlich zu den Gesetzen des Potenzirens, Radicirens und Logarithmirens räumlicher Grössen führen, in denen der Winkel als Potenzexponent oder als Logarithmus erscheint. Doch da dies, wie man schon aus den gänzlich neuen Verknüpfungsweisen, die hierbei auf die Geometrie übertragen werden, abnehmen kann, eine ganz neue Entwickelungsreihe gegeben haben würde, deren Hinanführung bis zu einem Punkte, von dem aus sich die Einheit des Ganzen übersehen liesse, eine Entwickelung von grösserem Umfange als die vorliegende herbeigeführt haben würde, und da zugleich diese Entwickelungsreihe zwar an die Leibniz'sche Charakteristik sich gleichfalls anschliessen lässt, aber doch nicht so eng mit ihr verkettet ist, wie die hier gegebene Analyse: so glaubte ich durch sie, wie wichtig und für die Anwendung fruchtreich sie auch sein mag, doch den Umfang dieser Abhandlung nicht vermehren zu dürfen. Auch glaube ich, dass die hier gegebene Entwickelung schon genügen wird, um zu zeigen, wie richtig Leibniz die eigenthümlichen Vortheile einer rein geometrischen Analyse im Voraus angeschaut habe.

Leibniz hebt hier hervor, dass die Auflösung einer geometrischen Aufgabe durch Hülfe dieser Analyse zugleich die Lösung, die Konstruktion und den Beweis, und zwar auf eine natürliche Weise und auf solchen Wegen, die durch die Analyse selbst mit Nothwendigkeit sich ergeben, liefere *). Da nun in der hier dargelegten Analyse jede 59 Gleichung nur der in | die Form der Analyse gekleidete Ausdruck

---

*) *Mais cette nouvelle characteristique ... ne manquera de donner en même temps la solution et la construction et la demonstration geometrique, le tout d'une*

einer geometrischen Beziehung ist, und diese Beziehung in der Gleichung, ohne durch willkührliche Grössen — wie etwa die Koordinaten der gewöhnlichen Analyse — verhüllt zu sein, rein und klar sich ausspricht und daher aus ihr ohne Weiteres abgelesen werden kann; und da ferner jede Umgestaltung einer solchen Gleichung nur der Ausdruck einer ihr zur Seite gehenden Konstruktion ist, so folgt, dass in der That durch die angegebene Analyse die analytische Auflösung einer geometrischen Aufgabe gleichzeitig mit der Konstruktion und mit dem Beweise derselben erfolgt. Da ferner nichts Willkührliches, was mit der Natur der Aufgabe in keinem nothwendigen Zusammenhange steht, wie die Koordinaten der analytischen Geometrie, eingeführt zu werden braucht, so muss die Art der Lösung auch stets die der Natur der Aufgabe gemässe sein, und da sie die Form der Analyse hat, auch eine nothwendige, bei der von keinem Umhersuchen nach Auflösungsmethoden die Rede sein kann. Damit auch in der letzteren Beziehung diese Analyse allen Anforderungen genüge, müsste freilich die Theorie der Gleichungen, das heisst die Art, wie unbekannte Grössen aus ihnen eliminirt werden können, vollständig entwickelt werden. Aber man sieht, wie diese Theorie nach den zu Grunde gelegten Principien wenigstens möglich ist.

Ferner hebt er als einen wesentlichen Vorzug der geometrischen Analyse hervor, dass man durch sie die Mechanik fast wie die Geometrie müsste behandeln können, und überhaupt nur vermittelst ihrer hoffen dürfe, in die mathematische Behandlung der Physik tiefer einzudringen, und zum Beispiel die innere Konstitution der Naturkörper zu erforschen*). Nun glaube ich in der oben angeführten Anwendung auf die Mechanik gezeigt zu haben, wie sich in der That die Mechanik durch diese Analyse auf rein geometrische Weise behandeln lasse, woraus dann schon hervorgeht, dass diese Behandlungsweise, auf die Physik überhaupt übergetragen, die mathematische Behandlung der Physik auf eine ausgezeichnete Weise vereinfachen würde, wovon ich,

---

maniere naturelle et par une analyse, c'est à dire par des voyes determinées. Und weiterhin sagt er: *Mais l'utilité principale consiste dans les conséquences et raisonnemens, qui se peuvent faire par les operations des caracteres, qui ne sçauroient s'exprimer par des figures . . ., au lieu que cette methode meneroit seurement et sans peine.*

*) Er sagt: *Je crois, qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la géometrie* und *Enfin je n'espere pas, qu'on puisse aller assez loin en physique, avant que d'avoir trouvé un tel abregé . . . . Cependant il y a quelque esperance d'y arriver* (nämlich dazu, die innere Konstitution der zusammengesetzten Stoffe zu erforschen), *quand cette analyse veritablement géometrique sera établie.*

wenn es der Raum gestattet hätte, noch leicht Beispiele aus der Optik, der Akustik, der Elektrodynamik und anderen Zweigen der Physik hätte geben können. Auch glaube ich endlich, dass man nicht mehr weit davon entfernt ist, die innere Konstitution der Naturkörper, das heisst, die Lage ihrer einfachen oder zusammengesetzten Atome gegen einander zu ergründen; jedenfalls ist klar, schon aus den Anwendungen, welche diese Analyse auf die Krystallgestalten gestattet (vgl. Grassmanns Ausdehnungslehre § 171), dass dabei die neue Analyse unentbehrlich sein würde, wenn man nicht durch Einführung von Koordinaten und anderem die Behandlung störenden Apparate die Anschaulichkeit vernichten und die Methode in unnütze Weitläuftigkeiten verwickeln wollte.

60 Endlich findet sich am Schlusse der Leibniz'schen Darstellung noch eine merkwürdige Stelle, in welcher er die Anwendbarkeit dieser Analyse auch auf Gegenstände, die nicht räumlicher Natur sind, mit deutlichen Worten ausspricht, aber hinzufügt, dass es nicht möglich sei, hiervon in wenigen Worten einen klaren Begriff zu geben*).

Nun lassen sich in der That, wie dies in Grassmanns Ausdehnungslehre durchweg geschehen ist, alle Begriffe und Gesetze der neuen Analyse ganz unabhängig von der räumlichen Anschauung entwickeln, indem sie rein an den abstrakten Begriff eines allmäligen (stetigen) Ueberganges geknüpft werden können; und es ist leicht zu sehen, wenn man einmal diese Idee des rein begrifflich gefassten stetigen Ueberganges in sich aufgenommen hat, dass auch die in dieser Abhandlung entwickelten Gesetze dieser von der räumlichen Anschauung gelösten Auffassung fähig sind. Dadurch ist dann auch dieser Gedanke Leibnizens verwirklicht, so dass, wie es mir scheint, nun nichts mehr übrig bleibt, was wesentlich dazu beitragen könnte, um die Richtigkeit alles dessen, was er von der geometrischen Analyse behauptet, abgerechnet einzelne Uebertreibungen, die aber mehr im Ausdruck liegen als in der Sache, ins Licht zu setzen, und um auch an diesem Gegenstande die bewundernswürdige Kraft eines Geistes zu erkennen, der von den ersten Anfängen einer unübersehbar grossen Entwickelungsreihe aus, die ganze Wichtigkeit dieser Entwickelungsreihe und die wesentlichen und eigenthümlichen Vortheile, welche sie darbieten müsse, zu überschauen vermochte.

---

*) *Je n'ay qu'une remarque à ajouter, c'est que je vois, qu'il est possible, d'étendre la caracteristique jusqu'aux choses, qui ne sont pas sujettes à l'imagination, mais cela est trop important et va trop loin, pour que je me puisse expliquer la-dessus en peu de paroles.*

Inhalt
der geometrischen Analyse.

Verzeichniss

der wichtigsten Stellen, an denen die vorliegende Ausgabe der A_1 von dem Texte der Ausgabe von 1878 abweicht*).

S. IV, Z. 2 v. u. (8, Z. 2 v. u.): A_1' hat irrtümlich p. 164. — S. V, Z. 16 v. u. (9, Z. 6 v. o.): A_1' hat: „umsetzen". — S. VIII, Z. 15 v. u. (11, Z. 14 v. u.) „eine" fehlt in A_1'. — S. XI, Z. 7 v. u. (14, Z. 14 v, o.) A_1' hat „Halbdurchmesser". — S. XXIV, Z. 13 v. u. (25, Z. 4 v. o.): in A_1' fehlt „eher". — S. XXIX, Z. 6 v. u. (29, Z. 8 v. o.): „Element derselben c". — S. XXXI, Z. 10 f. v. o. (30, Z. 9 f. v. o.): „herrscht — hervor". — S. 1, Z. 2 v. u. (33, Z. 2 v. u.): „Einl. Nr. 13". — S. 11, Z. 9 v. u. (43, Z. 5 v. o.): „der zweite Ausdruck ist nach". — S. 12, Z. 3 v. u. (43, Z. 3 v. u.): A_1' hat „Anmerkung". —

S. 17, Z. 5 v. u. (48, Z. 12 v. u.): „Element desselben Ausdehnungsgebildes c". — S. 18, Z. 18 v. o. (49, Z. 11 v. o.): A_1' hat „Strecken" statt „Elemente". — S. 21, Z. 7 v. o. (51, Z. 7 v. u.): „so hebt sich". — S. 24, Z. 12 v. o. (54, Z. 5 v. u.): „wieder eine Strecke bleibt". — S. 25, Z. 18—15 v. u. (55, Z. 6 v. u.): „indem ich das Endelement des zweiten Gliedes entweder einer anderen Aenderungsweise unterwerfe, oder es in derselben Aenderungsweise vor- oder zurückschreiten lasse, so . . .", was zum Mindesten unklar ist. — S. 26, Z. 18 v. u. (57, Z. 11 v. o.): „a" statt „α". — S. 27 Z. 3 v. o. (57, Z. 16 v. u.): „den Aenderungen". — S. 27, Z. 14 u. 10 v. u. (S. 58, Z. 9 u. 13 v. o.): „Es seien die beiden Elemente des Systems α und β" und: „Aenderungen; es kommt nun zunächst". — S. 29, Z. 8 v. u. (60, Z. 9 v. o.) fehlen die Punkte nach $(b_1 + b_2)$, ebenso S. 31, Z. 13 v. o. (61, Z. 9 v. u.) die Punkte nach a, b, c. — S. 31, Z. 8 v. u. (62, Z. 9 v. o.): „Und dies statt a_1 substituirt". — S. 32, Z. 14 v. o. (62, Z. 12 v. u.): „Element des Systems β". — S. 36, Z. 3 v. u. (66, Z. 2 v. u.): „Gegenläufigen (s. oben)". — S. 37, Z. 5 u. 17 v. o. (67, Z. 4 u. 17 v. o.): „von demselben" und „als in den andern". — S. 38, Z. 10 v. u. und 39, Z. 1 v. o. (68, Z. 18 u. 14 v. u.) steht § 19. — S. 40, Z. 6 v. o., 8 und 3 v. u. (69, Z. 6 v. u., 70, Z. 14 u. 3 v. u.):

---

*) Unter A_1' ist hier überall die Ausgabe von 1878 zu verstehen. Die ersten Seitenzahlen beziehen sich immer auf A_1', die in Klammern eingeschlossenen auf die vorliegende Ausgabe. Dahinter ist jedesmal die Lesart von A_1' angegeben und zwar ohne Bemerkung, wenn die Originalausgabe von 1844 mit A_1' übereinstimmt. Solche Stellen, an denen in der vorliegenden Ausgabe der Text der Originalausgabe wiederhergestellt ist, sind durch ein „A_1' hat" oder „in A_1' fehlt" kenntlich gemacht. Die in der vorliegenden Ausgabe gemachten Zusätze sind hier nicht mit aufgeführt, da sie im Texte durch Einschliessen in eckige Klammern ausgezeichnet sind.

„Punkt ausserhalb derselben D"; „Punkte R die Summe $[RA] + \cdots$ darstelle"; „bezeichne" statt „verstehe". — S. 44, Z. 16 v. o. (74, Z. 10 v. o.): „besser so auf:". —

S. 48, Z. 14 v. u. (78, Z. 9 v. o.): A_1' hat „genannten Satze". — S. 50, Z. 19 v. o. (80, Z. 2 v. o.): „lagen" statt „liegen". — S. 52, Z. 14 v. o. (81, Z. 7 v. u.): „so gilt für sie der Begriff". — S. 53, Z. 8 v. o. u. 11 v. u. (82, Z. 17 v. u. u. 83, Z. 2 v. o.): § 20 u. § 10 statt § 19 u. § 9; ebenso auf S. 55, Z. 3 u. 12 v. o. (84, Z. 25 u. 17 v. u.). — S. 56, Z. 6 u. 1 v. u. (86, Z. 3 u. 7 v. o.) statt $b.(a+b_1)$ und $b.a$ steht: $a.(b+a_1)$ und $a.b$. — S. 59, Z. 1 v. o. (88, Z. 7 v. o.): „nach § 33 das Produkt". — S. 60, Z. 14 v. u. (89, Z. 7 v. u.): „gesetzt war". — S. 61, Z. 3 v. u. (91, Z. 2 v. u.): in A_1' fehlt „Seite". — S. 63, Z. 8 v. u. (93, Z. 2 v. o.): „ist, und die obige Auflösung ergab". — S. 68, Z. 8 v. o. u. 2 v. u. (97, Z. 6 v. o. u. 2 v. u.): § 26 u. § 115 statt § 25 u. § 120; ebenso S. 72, Z. 1 v. o. (100, Z. 5 v. u.): § 31 statt § 32 und auf S. 77, Z. 8 u. 15 v. o. (105 Z. 5 v. u., 106, Z. 5 v. o.) § 34 statt § 35. — S. 76, Z. 17 v. u. (105, Z. 12 v. o.): „Dieser sei zwischen A und B c, zwischen". — S. 80, Z. 12 v. o. (109, Z. 1 v. o.): „in dem Systeme vierter Stufe". — S. 83, Z. 13 u. 8 v. u. (112, Z. 14 u. 19 v. o.): § 35 statt § 34 u. § 36 statt § 35, 36. — S. 88, Z. 17 v. u. (116, Z. 5 v. u.): A_1' hat „zugleich" statt „sogleich". — S. 92, Z. 9 v. o. (120, Z. 12 v. o.): „jedenfalls müsste dieselbe". — S. 104, Z. 3 v. u. (132, Z. 8 v. u.): „von diesen neuen Grössen". — S. 124, Z. 17 v. u. (151, Z. 8 v. u.): A_1' hat: „Festhalten". —

S. 132, Z. 9 v. u. (159, Z. 11 v. u.): A_1' hat „man erhält". — S. 133, Z. 21 u. 8 v. u. (160, Z. 13 v. o. u. 13 v. u.): an der ersten Stelle hat A_1': „Gleichung", an der zweiten haben beide Ausgaben: „Abweichung dieses Elementes $[\varrho\alpha]$". — S. 135, Z. 8 u. 10 v. o. (161, Z. 7 u. 5 v. u.): „angehört" und „dass aber schon die Gleichheit der Elementargrössen erfolgt". Für „angehört" ist „zugehört" gesetzt worden nach S. 148, Z. 13 v. o. (174, Z. 12 v. u.). — S. 138, Z. 14 v. u. und 139, Z. 11 v. u. (165, Z. 10 v. o. und 166, Z. 10 v. o.): „Abweichungswerthe und umgekehrt gehören" und: „die Gewichte gleich setzt und die Abweichungen von irgend einem Elemente". — S. 147, Z. 5 v. u. (174, Z. 10 v. o.) hat A_1': „wie wir ihn in der". — S. 148, Z. 16 v. u. (174, Z. 3 v. u.): „ihrer Theile". — S. 150, Z. 15 v. o. (176, Z. 8 v. u.): „Dies Produkt". — S. 154, Z. 14 v. o. (180, Z. 15 v. u.): „Vielfachensumme". — S. 164, Z. 4 v. u. (190, Z. 9 v. u.): „reinen" statt „starren". — S. 167, Z. 9 u. 6 v. u. (193, Z. 17 u. 13 v. u.) fehlt in A_1' beide Male „drei". — S. 170, Z. 8 v. u. (196, Z. 20 v. u.): § 89 statt § 88. — S. 172, Z. 2 v. o. (197, Z. 13 v. u.) hat A_1' „eine" statt „seine". —

S. 182, Z. 12 v. o. u. 9 v. u. (207, Z. 14 v. o. u. 11 v. u.) an der ersten Stelle § 47 statt § 61, an der zweiten „und es überdies". — S. 186, Z. 2 v. u. (210, Z. 2 v. u.): „Produktes" statt „Systemes". — S. 194, Z. 3 u. 7 v. o. (218, Z. 9 u. 13 v. o.): „welcher mit D" und „wie das erste"; ebenda Z. 4 v. u. (219, Z. 2 v. o.) fehlt in A_1': „ganzen". — S. 196, Z. 1 v. u. (220, Z. 2 v. u.) „für die" statt „für beide". — S. 201, Z. 4 v. u. und 202, Z. 2 v. o. (225, Z. 15 u. 12 v. u.) sind „ersten" und „zweiten" vertauscht. — S. 203, Z. 8 v. o. (226, Z. 13 v. u.) fehlt in A_1' „hier". — S. 204, Z. 3 v. u. und 205, Z. 2 v. o. (228, Z. 22 u. 18 v. u.) fehlt in A_1' „ein". — S. 207, Z. 7 v. o. (230, Z. 18 v. o.): „gilt, es auch für Beziehungsgrössen, also". — S. 208 Z. 10 v. o. (231, Z. 18 v. u.) fehlt in A_1': „selbst". — S. 210, Z. 4 v. u. (234, Z. 4 v. o.) „der Multiplikation und Division zur Addition und Subtraktion", während doch von der Division erst im folgenden Paragraphen gesprochen wird. — S. 213, Z. 17 u. 2 v. u. (236, Z. 18 u. 2 v. u.): „n-ter" statt „h-ter". — S. 215,

Z. 8 v. o. (238, Z. 4 v. o.): „lassen" statt „lässt". — S. 218, Z. 10 v. u. (241, Z. 11 v. o.): „zurückgeht"; ebd. Z. 8 v. u. (Z. 13 v. o.) hat A_1' „Stufenzahlen" statt „Stufenzahl". — S. 221, Z. 8 v. u. (244, Z. 8 v. o.) steht fälschlich „$nad\bar{b}$" statt „$nabd$". —

S. 228, Z. 7 v. o. und 6 v. u. (250, Z. 10 v. o. und 6 v. u.) stehen A und § 138 statt A' und § 136. — S. 231, Z. 7 v. o. (253, Z. 9 v. o.): „im zweiten Kapitel dieses Abschnittes". — S. 234 Anm. (256 Anm.) überall D statt S. In der gegenwärtigen Ausgabe ist S gewählt, weil D auf der nächsten Seite in ganz anderer Bedeutung vorkommt. — S. 237, Z. 2 v. u. (259, Z. 1 v. u.) fehlt in A_1' „auch". — S. 239, Z. 2 u. 10 v. o. (260, Z. 11 u. 3 v. u.) „Vielfachensumme" und „welcher". — S. 244, Z. 7 v. o. (265, Z. 18 v. u.) „Abschattung". — S. 245, Z. 2 u. 7 v. o. (266, Z. 16 u. 21 v. o.) „gebildeten" und „erzeugten". — S. 247, Z. 14 v. o. (268, Z. 5 v. u.) steht: „(nach § 157)". — S. 255, Z. 5 v. u. (277, Z. 3 v. o.): „das Produkt $Q.R.A$ (nach § 139) ein reines". — S. 256, Z. 11 v. o. (277, Z. 17 v. o.) hat A_1' „rein" statt „reine". — S. 258, Z. 3 v. o. (279, Z. 5 v. o.) § 138 statt § 168; ebd. Z. 16 v. u. (15 v. u.) „nach dem ersten Satze des vorigen Paragraphen", was unrichtig ist. —

S. 264, Z. 18 v. u. (285, Z. 2 v. o.) fehlt in A_1' das Wort „mehr". — S. 266, Z. 13 v. u. (287, Z. 1 v. o.): „in welchen" statt „in welcher". Auf dieser und auf den folgenden Seiten steht in beiden Ausgaben oft PS statt SP, $(ab)S$ statt $S(ab)$, u. s. w. Dieser Wechsel in der Schreibart, der nur störend wirken kann, ist in der vorliegenden Ausgabe beseitigt. — S. 269, Z. 7 v. o. (289, Z. 15 v. o.) hat A_1' „gleich eins sein wird". — S. 271, Z. 11 v. o. (291, Z. 15 v. o.): „welche" statt „welches". — S. 274, Z. 3 v. o. (294, Z. 4 v. o.) hat A_1' „fortgesetzt" statt „festgesetzt". — S. 281, Z. 4 v. o. (300, Z. 11 v. o.) hat A_1': „Aufg. 18". — S. 284, Z. 5 v. o. (302, Z. 1 v. u.) hat A_1': „§ 18—§ 20". —

In dem alphabetischen Verzeichnisse der gebrauchten Kunstausdrücke A_1', S. 294 f., befinden sich mehrere Fehler, die hier (S. 313 f.) verbessert sind. Endlich sind auch in dem Inhaltsverzeichnisse einige kleine Aenderungen angebracht, die anzuführen nicht lohnt. Schliesslich ist noch zu bemerken, dass die Figur 5a auf S. 57 der vorliegenden Ausgabe ursprünglich die Nummer 17 hat. Diese Aenderung ist eine Folge davon, dass die Figuren jetzt in den Text aufgenommen worden sind.

Verzeichniss

der wichtigsten Stellen, an denen die vorliegende Ausgabe der geometrischen Analyse von dem Texte der Originalausgabe abweicht*).

S. 8, Z. 11 v. u. (334, Z. 2 v. u.): „welche an ihr haftet". — S. 14, Z. 9 u. 17 v. o. (342, Z. 3 u. 12 v. o.): „entwickeln" und „liegen". — S. 15, Z. 15 v. u.

*) Die zuerst stehenden Seitenzahlen beziehen sich auf die Originalausgabe der geometrischen Analyse, die eingeklammerten auf die vorliegende Ausgabe. Hinter den Seitenzahlen steht jedesmal der Wortlaut der Originalausgabe. Die Zusätze der vorliegenden Ausgabe sind nicht mit aufgenommen (vgl. die Anm. zu S. 400).

(344, Z. 5 v. o.): „welche von der Art sind". — S. 16 (344) fehlt die Gleichungsnummer (19). — S. 21, Z. 8 v. o. (350, Z. 10 v. u.): „so bleibt mir zu beweisen"; ebd. Z. 18 v. o. (351, Z. 2, 3 v. o.): „Ausdehnungslehre § 55 und 56". — S. 22, Z. 6, 7 v. o. (352, Z. 2 v. o.): „so sind noch". — S. 24, Z. 11 v. o. (354, Z. 14 v. u.): „das Produkt $A\,.\,b$". — S. 31, Z. 4 v. o. (363, Z. 15 f. v. o.): „Verlängerung von pq über p hinaus". — S. 32, Z. 2 v. o. (364, Z. 23 v. o.) hat die Originalausgabe: „u. s. w., so geht durch", dieses „u. s. w." ist aber überflüssig. — S. 34—36 (367—369) sind in der Originalausgabe die Differentialquotienten in fette Klammern eingeschlossen, die ganz unnöthig sind und geradezu unschön aussehen. — S. 34, Z. 2 v. u. (367, Z. 2 v. u.): „die Funktion $\frac{F}{e}$". — S. 36 ff. (370 ff.) sind in der Originalausgabe die Summenzeichen S sehr fett und jedesmal oben noch mit wagerechten Strichen versehen. — S. 37 (370) fehlt in allen Gleichungen von (32c) bis (32d) bei den λ der Faktor 2.

S. 37, 39 und 40 (371, 373, 375) tragen im Original drei verschiedene Gleichungen die Nummer (35); in der vorliegenden Ausgabe ist daher die erste mit (34a), die dritte mit (36) bezeichnet und dementsprechend die Gleichung (36) auf S. 40 (375) mit (36a). — S. 41, Z. 15 v. o. (376, Z. 1 v. o.): „Setzen wir übrigens in (36) x gleich r". — S. 42, Z. 16 f. v. o. (377, Z. 11 v. o.): „so hat man nur α gleich $\beta\gamma$". — S. 44 (379) sind in der Originalausgabe die beiden Sätze 18 und 18a als Satz 18 bezeichnet. — S. 45 (380) in Gl. (48) steht „$r^2 S a$" statt „$r^2 S \alpha$". — S. 46, Z. 13 v. o. (381, Z. 5 v. u.): „Zahlengrössen". — S. 47, Z. 3 v. o. (382, Z. 8 v. u.): „dessen einer Faktor der Hälfte ihrer Mittelgrösse"; ebd. Z. 17 v. u. (383, Z. 15 v. o.): „hervorgeht"; ebd. Z. 14 u. 11 v. u. (383, Z. 17 u. 14 v. u.): „ist, letztere für irgend einen Punkt r". — S. 48, Z. 18 u. 11 v. u. (384, Z. 12 u. 2 v. u.): „dessen einer Faktor die Hälfte p" und „welche mit der Hälfte p der Mittelgrösse". — S. 49, Z. 9 u. 11 v. o. (385, Z. 19 u. 17 v. u.) fehlen α und $-\alpha$. — S. 49, Z. 8 v. u. (386, Z. 12 v. o.): „ap^2" statt „αp^2". — S. 51, Z. 2 v. o. (387, Z. 14 v. u.): „liefert". — S. 51, Z. 14 v. o. (388, Z. 7 v. o.): „positiven oder negativen Werth hat"; ebd. Z. 20, 19 v. u. (388, Z. 18 v. u.): „Grössen erster Stufen". — S. 52, Z. 18 v. o. (389, Z. 19 v. u.): „Satz 23". — S. 53, Z. 1 v. o. (390, Z. 13 v. o.): „null" statt „reell". — S. 56, Z. 11 v. u. (394, Z. 5 v. o.): „die von Γ senkrecht gehälftete Kugelfläche".

Noch ist zu bemerken, dass das Original weder in Paragraphen eingetheilt ist, noch Kopfüberschriften hat, die den Inhalt der einzelnen Seiten angeben. Ferner sind im Original die Figuren nicht nummerirt, mit Ausnahme der jetzigen Figuren Nr. 5 und 6, die im Original die Nummern 1 und 2 haben; überdies sind die Figuren Nr. 2, 4, 5, 6, 7 und 11 der jetzigen Ausgabe im Vergleich mit dem Original etwas verkleinert. Endlich ist im Original die Bezeichnung „Erklärung" und „Satz" jedesmal unter dem Text als Anmerkung beigefügt; um die Uebersichtlichkeit zu erhöhen, sind diese Bezeichnungen jetzt in den Text aufgenommen worden.

Anmerkungen
zur Ausdehnungslehre von 1844.

(Die Seitenzahlen beziehen sich auf die vorliegende Ausgabe.)

S. 19, Z. 3—15 v. o. und Z. 4 v. u. — S. 20, Z. 4 v. o. Diese beiden eingeklammerten Stellen rühren von V. Schlegel her. Grassmann hatte nämlich, als er starb, die Vorrede zur zweiten Auflage erst im Entwurfe vollendet und V. Schlegel übernahm es auf Wunsch der Söhne Grassmanns, die zur Abrundung des Ganzen erforderlich scheinenden Zusätze einzufügen.

S. 21, Z. 12—14 v. o. Der Sinn dieser Worte ist: Die neuen Gegenstände, die in dem nicht erschienenen zweiten Bande der Ausdehnungslehre von 1844 behandelt werden sollten, sind in der Vorrede zu dieser Ausdehnungslehre nur theilweise erwähnt. In der Ausdehnungslehre von 1862 sind diese Gegenstände behandelt; ganz neu hinzugekommen u. s. w.

S. 24—69. Es erscheint angezeigt, hierzu einige allgemeine Bemerkungen zu machen.

Es ist bekannt genug, dass die halbphilosophische Fassung der Ausdehnungslehre von 1844 die Ursache gewesen ist, dass dieses merkwürdige Werk so lange Zeit nicht zu der ihm gebührenden Anerkennung hat kommen können. Grassmanns ausgesprochene Absicht war, alle seine Begriffe womöglich gleich in der allgemeinsten Form darzustellen, deren sie fähig sind; er suchte überall das Gemeinsame zusammenzufassen, die einfachen Grundgedanken hervorleuchten zu lassen, das Nebensächliche und Wechselnde in den Hintergrund zu drängen. Endlich sollte sein ganzes Gebäude von Geometrie und Analysis unabhängig sein, nur zur Erläuterung und Veranschaulichung seiner allgemeinen Begriffe erlaubte er sich die Geometrie heranzuziehen (vgl. S. 46 Anm.). Verdankt nun auch sein Werk diesem Bestreben sehr wesentliche Vorzüge, die es in einzelnen seiner Theile geradezu als vorbildlich erscheinen lassen, und ist Grassmann auch auf diesem Wege zu äusserst wichtigen Einsichten in die Principien der mathematischen Wissenschaften gelangt — wir erinnern beispielsweise nur an seine Theorie der synthetischen und der analytischen Verknüpfungen und an seine allgemeine Auffassung der Multiplikation — so kann doch nicht geleugnet werden, dass Grassmann in seinem Streben nach Allgemeinheit zuweilen den festen Boden unter den Füssen verloren hat.

Das gilt namentlich von den Grundbegriffen, auf denen in dem vorliegenden Werke die Ausdehnungslehre aufgebaut wird. Diese Grundbegriffe sind viel zu unbestimmt, viel zu inhaltlos, als dass sich solche Folgerungen aus ihnen ziehen lassen, wie sie von Grassmann gezogen werden. Man braucht, um sich davon zu überzeugen, nur zum Beispiel die Definition des Elementes in § 13 mit dem zu vergleichen, was alles später mit eben diesen Elementen gemacht wird.

Das Element soll das Besondere schlechthin sein, ohne allen realen Inhalt; durch eine Aenderung entsteht aus einem Elemente a ein anderes b. Was soll

es nun heissen, wenn gesagt wird, dass aus dem Element b durch eine gleiche Aenderung ein neues Element c entsteht? Wie ist es überhaupt möglich, eine Aenderung von a mit einer Aenderung von b zu vergleichen und von gleichen Aenderungen zu reden? Was soll endlich der Begriff der stetigen Aenderung bedeuten? Alle diese Begriffe und natürlich auch die aus ihnen gezogenen Schlüsse schweben in der Luft.

Nicht minder unbefriedigend ist, was Grassmann über das Parallelenaxiom sagt und überhaupt über die Grundbegriffe der Geometrie (§ 22). Die Begriffe „Richtung" und „gleiche Konstruktionen" sind genau so unklar, wie die Begriffe „stetige Aenderung" und „gleiche Aenderungen".

Sehen wir von Grassmanns geometrischen Axiomen ab, deren Gebrechen allerdings unheilbar zu sein scheinen, so liegt die Sache glücklicher Weise nicht so schlimm, wie es den Anschein hat. Thatsächlich hat Grassmann mit den „Aenderungen", von denen ausgehend er sein System der Ausdehnungslehre begründet, nichts andres gemeint, als die Parallelverschiebungen:

$$x_i' = x_i + a_i \quad (i = 1, 2 \ldots)$$

in einem mehrfach ausgedehnten Raume. Setzt man an die Stelle jener inhaltlosen „Aenderungen" diesen konkreten Begriff, den Grassmann nicht aus der Analysis herübernehmen wollte, so wird zwar die, doch nur scheinbar vorhandene, Unabhängigkeit der Ausdehnungslehre von der übrigen Mathematik eingeschränkt, dafür gewinnen aber die Grundvorstellungen einen greifbaren Inhalt*). Die weiteren Entwickelungen lassen ohnehin, so viel wir sehen, an Strenge nichts zu wünschen übrig.

Wir wollen gleich noch auf einen andern Punkt aufmerksam machen.

Grassmann selbst glaubte in seiner Ausdehnungslehre ein Universalinstrument für die geometrische Forschung geschaffen zu haben, dessen Hauptvorzug er in der Vermeidung willkürlicher Koordinatensysteme erblickte. Die dieser Auffassung zu Grunde liegende Vorstellung von dem Wesen der Geometrie können

---

*) Man kann übrigens den „Aenderungen" auch noch eine allgemeinere Bedeutung unterlegen. Wenn Grassmann sagt, durch dieselbe Aenderung, durch die aus a das Element b entsteht, entstehe aus b ein neues Element c, so schwebt ihm dabei, allerdings in sehr unklarer Form, der Begriff „Transformation eines mehrfach ausgedehnten Raumes" vor, denn eine solche Transformation ordnet allerdings jedem Punkte des Raumes eine Aenderung zu und alle diese Aenderungen kann man einander gleichsetzen, weil sie sämmtlich aus derselben Transformation entspringen. Die Voraussetzungen, die Grassmann über seine Aenderungen macht (vgl. namentlich § 17), kommen nunmehr nach Lies Ausdrucksweise einfach darauf hinaus, dass in einem n-fach ausgedehnten Raume n eingliedrige Gruppen angenommen werden, deren infinitesimale Transformationen einen Punkt von allgemeiner Lage nach gerade n unabhängigen Richtungen fortführen und deren endliche Transformationen paarweise mit einander vertauschbar sind. Diese n eingliedrigen Gruppen bestimmen dann eine n-gliedrige einfach transitive Gruppe mit paarweise vertauschbaren Transformationen und diese Gruppe kann nach einem Satze von Lie durch eine Punkttransformation in die Gruppe aller Translationen des betreffenden Raumes übergeführt werden. Demnach kommen wir hier von einem allgemeineren Standpunkte aus auf die Parallelverschiebungen zurück.

wir heute*) genauer so ausdrücken, dass es im Grunde die Eigenschaften gewisser Transformationsgruppen waren, die damals ausschliesslich oder nahezu ausschliesslich den Inhalt der geometrischen Forschung bildeten. Allein mit diesen Transformationsgruppen ist der Inhalt der Geometrie noch keineswegs erschöpft. Jetzt, wo wir namentlich durch die Arbeiten von Lie von der ausserordentlichen Mannigfaltigkeit der Gruppen und von der zu einer jeden gehörigen „Geometrie", das heisst „Invariantentheorie", eine genauere Vorstellung haben, müssen wir sagen, dass es ein solches Universalinstrument, wie es Grassmann in seiner Ausdehnungslehre zu besitzen glaubte, nicht giebt und nicht geben kann.

In der That handelt es sich in der Ausdehnungslehre von 1844 vorwiegend um gewisse Algorithmen, die zu ganz bestimmten Transformationsgruppen gehören. Es sind das im Wesentlichen die allgemeine projektive Gruppe und die Gruppe der affinen Transformationen**). In der „geometrischen Analyse" und in der Ausdehnungslehre von 1862 kommen zu diesen beiden Gruppen noch die Gruppe der Drehungen um einen festen Punkt und die umfassendere Gruppe der Euklidischen Bewegungen.

Der allgemeinen projektiven Gruppe gegenüber sind die Gleichungen der A_1 invariant, aus denen die Masswerthe der Ausdehnungsgrössen wieder herausfallen, also die in § 165—170 behandelten Beziehungen. Zur Gruppe der affinen Transformationen gehören die übrigen in A_1 behandelten Gleichungen, in denen der Masswerth eine wesentliche Rolle spielt, zum Beispiel die Gleichungen von der Form: $a + b + c = 0$, wenn a, b, c Ausdehnungsgrössen sind. In dem ganzen Werke kommen von Operationen nur die Addition, sowie die äussere und die eingewandte Multiplikation zur Verwendung. Die in A_1 noch nicht behandelte innere Multiplikation, die in der „geometrischen Analyse" und noch ausführlicher in A_2 entwickelt wird, gehört zu den beiden letzten der oben genannten Gruppen.

Der hier ausgesprochene Gedanke, dass die wichtigsten Entwickelungen der Ausdehnungslehre zu ganz bestimmten Gruppen in Beziehung stehen und dass ausserhalb dieses Gebietes der Kalkül der Ausdehnungslehre seine Bedeutung und seine Brauchbarkeit verliert, würde noch deutlicher werden, wenn wir hier die Beziehungen der Ausdehnungslehre zu der Invariantentheorie jener Gruppen darlegen könnten. Das erfordert jedoch umfangreichere Auseinandersetzungen, die einer besonderen Darstellung vorbehalten bleiben müssen. (Study und Engel.)

Zu § 3—10. Die hier besprochenen Gesetze: Vereinbarkeit der Glieder (§ 3), Vertauschbarkeit der Glieder (§ 4) und das Gesetz über die Beziehung der Multiplikation zur Addition (§ 9 und 10) bezeichnet man jetzt mit den Namen: des associativen, des commutativen und des distributiven Gesetzes. Die beiden letzten Namen sind nach H. Hankel (Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, S. 3) bereits von Servois eingeführt worden, der erste wahrscheinlich von Hamilton, bei dem er sich schon 1843 findet. Die ganz allgemeine Auffassung der Verknüpfungsgesetze ist aber jedenfalls Grassmanns Eigenthum.

---

*) Nachdem Lie 1871 den allgemeinen Begriff der continuirlichen Transformationsgruppe aufgestellt hatte, zeigte F. Klein 1872 in seinem Programm: „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" (wieder-abgedruckt in den Math. Ann. Bd. 43), dass sich die verschiedenen geometrischen Theorien in der im Texte angegebenen Weise auffassen lassen.

**) Das Wort „affin" im gewöhnlichen Sinne genommen, also nach Lie die allgemeine lineare Gruppe. Grassmann braucht das Wort affin in allgemeinerer Bedeutung.

S. 39. Das Zeichen für die indifferente Form ist hier genau so wiedergegeben, wie es in der Originalausgabe von 1844 steht.

S. 41, Z. 15 v. u. „Zu dem Ende — bestimmt sein". Es ist nicht einzusehen, warum die eine Verknüpfungsweise durch die andere bestimmt sein muss; jedenfalls trägt der Satz zur Klarheit des Ganzen nichts bei und könnte ohne Schaden weggelassen werden; man brauchte dann nur im Folgenden für „Begriffsbestimmung" zu setzen „Beziehung".

S. 66, Z. 14 v. o.: „den partiellen Satz", nämlich den, der sich auf die entgegengesetzte Richtung bezieht.

S. 67, Z. 12 ff. v. o. Man braucht nur an die Kugel zu denken, um einzusehen, dass dieser Beweis nicht Stich hält.

S. 73 ff. Grassmann gebraucht das Wort „Kraft" in doppeltem Sinne, nämlich einmal in dem gewöhnlichen Sinne und dann da, wo wir „Bewegungsgrösse" sagen würden. Später (S. 97) sagt Grassmann in demselben Sinne „Bewegung". (Study.)

S. 108, § 51. Die Entwickelungen dieses Paragraphen sind insofern nicht ganz vollständig, als die Frage unerledigt bleibt, ob der in § 47—50 betrachtete Fall der einzige ist, in dem die Summe zweier Ausdehnungen höherer Stufe wieder eine Ausdehnung giebt. Es lässt sich allerdings beweisen, dass diese Frage zu bejahen ist, aber weder in A_1 noch in A_2 findet man einen Beweis dafür, obwohl sich Grassmann später mehrfach darauf beruft.

S. 115, erste Anm.: dieses Versprechen wird in § 105 nicht eingelöst; vgl. jedoch die Anm. zu § 105, auf S. 174.

S. 117, Z. 13 v. u.: „Momenten dreier Axen", richtiger wäre „in Bezug auf drei Axen"; ebd. Z. 7 v. u. muss es heissen: „die durch denselben Punkt geht und in derselben Ebene liegt". Uebrigens kommen die Sätze des § 59 schon 1837 in der Statik von Möbius vor (ges. Werke. Bd. III), und sind vermuthlich noch älter.

S. 122, Z. 11—8 v. u.: Man erinnere sich, dass die beiden Produkte unter den Voraussetzungen des Satzes sicher von Null verschieden sind.

S. 124, Z. 16 v. u.: Vorher war angenommen worden, dass A, B, C von einander unabhängig seien und das ist gleichbedeutend mit der Voraussetzung, dass C von A, von B und von dem Produkte AB unabhängig sei (vgl. S. 112).

S. 126, Z. 5 v. o.: „also auch durch Wiederholung derselben Schlussreihe". Diese Worte sind unverständlich, es muss etwa heissen: „also auch, wenn man auf beiden Seiten die Faktorenreihe: $d.e\ldots$ hinzufügt".

S. 128, Z. 12 v. o.: „nach § 47", vgl. die oben zu S. 108 gemachte Anmerkung.

S. 137, Z. 10—14 v. o.: Jede Zahlengrösse gehört nämlich jedem beliebigen Systeme an (vgl. S. 147), ist aber nach der Definition auf S. 112 von jeder Ausdehnung m-ter Stufe unabhängig, da sie die Stufenzahl Null besitzt und $m+0$ nicht $> m$ ist.

S. 146, Z. 6 v. o. Nach „also" denke man sich hinzu: „ein geltender Werth von A'".

S. 147, Z. 3 v. o.: „von ihnen", nämlich von allen Ausdehnungen des Systems.

S. 153, Z. 6 v. o.: nach „auf das" denke man sich hinzu: „zu diesem einen Richtstück gehörige".

S. 156 f. Diese Eliminationsmethode ist schon 1840 von Sylvester im „Philosophical magazine" angegeben worden, aber auch die Sylvestersche

Methode ist nicht wesentlich verschieden von einer, die Jacobi bereits 1836 entwickelt hat (Crelles Journal Bd. 15, S. 101—124; Jacobis ges. Werke Bd. III, S. 295—320).

S. 180, Z. 7 v. u.: ϱ soll natürlich das Gewicht Eins haben.

S. 181, Z. 8 v. o. Hierbei ist als selbstverständlich angenommen, dass die Summe: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots = 1$ ist. Dasselbe gilt für S. 182, Z. 8 v. u.

S. 184, Z. 6 v. u. Die Ausdehnung einer starren Elementargrösse ist das wahre Bild dieser Elementargrösse, vgl. Anhang III, Nr. 15 (S. 303).

S. 186, Z. 2 v. u. Jede Ausdehnungsgrösse ist ja in der Form: $(\alpha - \beta) . A$ darstellbar, wo α und β Elemente vom Gewichte Eins sind und A eine Ausdehnungsgrösse. Da nun $(\alpha - \beta) . A = \alpha . A - \beta . A$ ist, so hat die Ausweichung von $(\alpha - \beta) . A$ den Werth: $A - A = 0$.

S. 188, Z. 3, 4 v. o.: $\alpha . A$ und P müssen selbstverständlich von gleicher Stufe sein.

S. 191, Z. 12 ff. v. o. Das „nur" ist eben nicht bewiesen, vgl. oben die Anmerkung zu S. 108.

S. 198, Anm. Im ersten Bande seiner Mécanique analytique (ges. Werke Bd. XI) sagt Lagrange: „en prenant le mot de *moment* dans le sens que *Galilée* lui a donné, c'est à dire pour le produit de la force par sa vitesse virtuelle" (I part., sect. II, no. 2). Das Moment in dem jetzt üblichen Sinne bezeichnet Lagrange als „moment relatif à un axe de rotation" (I part., sect. III, no. 6).

S. 203, Z. 11 u. 25 v. o. Beide Male müsste es eigentlich heissen: Zwei gleichwirkende Vereine von Kräften.

S. 204, Z. 8—10 v. o. Besondere Fälle dieses Satzes sind schon auf S. 117 angegeben.

S. 206 ff. Die Schwerfälligkeit in dieser Darstellung der Theorie des eingewandten Produktes rührt zum grössten Theil von dem Bestreben her, beide Produkte, das äussere und das eingewandte, unter einen Hut zu bringen, also einen Satz zu formuliren, wo ihrer zwei hätten formulirt werden müssen. In der Ausdehnungslehre von 1862 ist die Theorie des eingewandten (regressiven) Produktes durch die Einführung des Begriffs der Ergänzung wesentlich vereinfacht.

S. 208. Hier und im Folgenden lässt Grassmann bei äusseren Produkten immer den Punkt weg, weil er ihn zur Bezeichnung der eingewandten Multiplikation braucht. Vgl. S. 219 und den Anhang III, Nr. 22, S. 310.

S. 210, Z. 8—7 v. u. Eigentlich ist ja soeben angenommen worden, dass alle in Betracht gezogenen Grössen, also auch die beiden Faktoren des Produktes dem Beziehungssysteme angehören!

S. 224. Unter den Voraussetzungen des § 136 bestehen Gleichungen von der Form:

$$B = CB', \quad A = DBA' = DCB'A',$$

wo E, D, C, B', A' von einander unabhängig sind. Demnach wird nach S. 218:

$$EDC . B = EDC . CB' = EDCB' . C = EDB . C$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} EDB . A &= EDCB' . DCB'A' \\ &= EDCB'A' . DCB' = EA . DB \\ EDC . A &= EDC . DCB'A' \\ &= EDCB'A' . DC = EA . DC. \end{aligned}$$

S. 228, Z. 7 v. u.: nach „grösser" denke man sich hinzu: „wird als im ersten Falle".

S. 234, Z. 15 ff. v. o. Gleichartige Beziehungsgrössen sind natürlich solche, die dasselbe Hauptsystem haben und deren „eigenthümliche Werthe in Bezug auf das Hauptmass" (S. 218) gleichartig sind.

S. 237, Z. 13 v. o.: vgl. auch § 133.

S. 250, Z. 13 v. o. Nur ist in § 142 die Abschattung gar nicht erwähnt.

S. 254, Anm. Weil nämlich auf S. 250 ausdrücklich vorausgesetzt ist, dass A dem Systeme LG angehört.

S. 256, Anm. 1: weil nämlich: $AB = \frac{SM.B}{SB} = \frac{SB.M}{SB} = M$ ist.

S 256, Anm. 2: „im ersten Falle", s. S. 255, Z. 22 ff. v. o. und insbesondere Z. 11 v. u.

S. 257, Z. 12 v. o.: „nach § 153, das heisst, nach S. 254, Z. 6 v. u. bis S. 255, Z. 16 v. o., es ist also: $M' = A'B'$, $N' = B'C'$.

S. 257 Anm. Der Beweis kann durchsichtiger so geführt werden: M, N und B mögen der Reihe nach die Stufenzahlen μ, ν und β haben; dann ist das M und N gemeinschaftliche System von der Stufe $\mu + \nu - \beta$. Nun hat C mit B nur N gemein und beide haben als nächstumfassendes System das Hauptsystem, also hat C die Stufenzahl $h + \nu - \beta$; andrerseits hat C mit M kein andres System gemein als das gemeinschaftliche von M und N, also ist die Stufenzahl des C und M gemeinschaftlichen Systems gleich $\mu + \nu - \beta$ und demnach die Stufenzahl des Systems, das C und M zunächst umfasst, gleich

$$h + \nu - \beta + \mu - (\mu + \nu - \beta) = h.$$

S. 272. Jeder der drei Ausdrücke auf Z. 14, 17 u. 19 v. o. stellt ein gewöhnliches Doppelverhältniss von vier Punkten auf einer Geraden dar, und man übersieht in jedem einzelnen Falle leicht, zu welchen vier Punkten das betreffende Doppelverhältniss gehört. Neu ist dagegen das auf Z. 21 v. o. angegebene Doppelverhältniss von vier Geraden im Raume. Da dieses Doppelverhältniss bisher von den Geometern nicht beachtet worden zu sein scheint, so ist es wohl nicht überflüssig, zu zeigen, dass man von dieser Grösse eine einfache — allerdings irrationale — geometrische Deutung geben kann. Sie lässt sich nämlich als das Produkt zweier gewöhnlicher Doppelverhältnisse darstellen und kann daher nach v. Staudts Regel konstruirt werden.

Wir verstehen unter a, b, c, d vier Punkte, die in einer Geraden G liegen, und benutzen, zur Unterscheidung von den nachher zu betrachtenden räumlichen Grössen, die runde Klammer, um die auf das Gebiet G bezügliche äussere Multiplication zu bezeichnen. Wir haben dann:

$$(ab)(cd) + (ac)(db) + (ad)(bc) = 0;$$

demnach bestehen zwischen den Grössen:

$$d_1 = \frac{(ab)(cd)}{(ad)(cb)}, \quad d_2 = \frac{(ac)(db)}{(ab)(dc)}, \quad d_3 = \frac{(ad)(bc)}{(ac)(bd)}$$

zwei bilineare Gleichungen, aus denen die Relation: $d_1 d_2 d_3 = -1$ folgt. Die Grössen d_i und ihre reciproken Werthe sind die sechs verschiedenen Doppelverhältnisse, die sich aus den vier Punkten a, b, c, d bilden lassen.

Ebenso nun, wie aus vier Punkten einer Geraden, kann man auch aus vier Geraden A, B, C, D des Raumes sechs Doppelverhältnisse bilden, unter denen sich aber *zwei* von einander unabhängige befinden; es sind das die drei Grössen:

$$D_1 = \frac{AB.CD}{AD.CB}, \quad D_2 = \frac{AC.DB}{AB.DC}, \quad D_3 = \frac{AD.BC}{AC.BD},$$

die durch die Relation: $D_1 D_2 D_3 = +1$ mit einander verknüpft sind, und ausserdem die zugehörigen reciproken Werthe. Dass sich unter diesen sechs Doppelverhältnissen zwei von einander unabhängige befinden, das entspricht der Thatsache, dass vier allgemein gelegene Gerade A, B, C, D im Raume gegenüber den projectiven Transformationen des Raumes zwei unabhängige Invarianten haben. Die D_i sind offenbar solche Invarianten und zwar rationale.

Um diese beiden Arten von Doppelverhältnissen in Zusammenhang zu bringen, betrachten wir die beiden Geraden G und Γ, die die vier Geraden A, B, C, D treffen und die im Allgemeinen von einander verschieden sein werden. Sind a, b, c, d und α, β, γ, δ die zugehörigen Schnittpunkte, so dürfen wir annehmen, dass

$$A = a\alpha, \quad B = b\beta, \quad C = c\gamma, \quad D = d\delta$$

ist; dann wird also zum Beispiel AB den Werth:

$$AB = a\alpha . b\beta = -ab . \alpha\beta$$

haben.

Nun können wir in jedem Ausdruck, der sowohl in Bezug auf a, b, c, d als in Bezug auf α, β, γ, δ homogen ist, die auf den Raum bezüglichen Produkte: ab, $\alpha\beta$, ... durch die auf die Geraden G und Γ bezüglichen Produkte: (ab), $(\alpha\beta)$, ... ersetzen, wenn wir nur einen geeigneten Proportionalitätsfactor hinzufügen. Hieraus folgt, dass drei Gleichungen von der Form:

$$AB . CD = \varrho . (ab)(cd) . (\alpha\beta)(\gamma\delta)$$
$$AC . DB = \varrho . (ac)(db) . (\alpha\gamma)(\delta\beta)$$
$$AD . BC = \varrho . (ad)(bc) . (\alpha\delta)(\beta\gamma)$$

bestehen, wo ϱ eine Zahl bedeutet, um deren Werth wir uns nicht weiter zu kümmern brauchen. Bezeichnen wir daher jetzt noch die den d_i entsprechenden Doppelverhältnisse der Punkte α, β, γ, δ mit δ_i, so wird einfach:

$$D_1 = d_1\delta_1, \quad D_2 = d_2\delta_2, \quad D_3 = d_3\delta_3,$$

woraus noch:

$$1 + D_1 - D_1 D_2 = d_1 + \delta_1, \ldots$$

folgt.

Die Grössen d_i und δ_i sind hiermit, nach der modernen Ausdrucksweise, als irrationale Invarianten der vier Geraden A, B, C, D gegenüber den projectiven Transformationen des Raumes definirt und durch die rationalen Invarianten D_i ausgedrückt.

Betrachtet man statt der Schnittpunkte von A, B, C, D mit G und Γ die Verbindungsebenen, so wird man auf dieselben Grössen geführt, nur wechseln dann die d_i und die δ_i ihre Rollen.

Sollen vier gegebene Gerade durch projective (oder auch dualistische) Transformationen in vier andere gegebene Gerade überführbar sein, so ist nothwendig und im Allgemeinen auch hinreichend, dass die symmetrischen Functionen

$$\Sigma D_i + \Sigma \frac{1}{D_i} \quad \text{und} \quad \Sigma D_i . \Sigma \frac{1}{D_i}$$

für die ersten vier Geraden den entsprechenden Funktionen für die zweiten vier Geraden gleich sind. Dagegen wird die gegenseitige Lage von vier Geraden durch die genannten beiden Grössen nicht mehr vollständig charakterisirt, wenn diese Grössen unendlich werden, das heisst, wenn zwei der Geraden sich schneiden. Ebenso verhält es sich noch in einem weiteren Falle. Dieser ist durch das Bestehen einer Gleichung von der Form:

$$\frac{1}{\sqrt{D_i}} + 1 + \sqrt{D_k} = 0 \quad (i \neq k)$$

oder:

$$\sqrt{AB \cdot CD} + \sqrt{AC \cdot DB} + \sqrt{AD \cdot BC} = 0$$

gekennzeichnet. Die vier Geraden werden dann entweder nur von einer einzigen Geraden getroffen, oder von unendlich vielen; das heisst, sie gehören entweder einer einzigen speciellen linearen Congruenz erster Ordnung und erster Klasse an, oder sie liegen auf einer Fläche zweiten Grades und sind in unendlich vielen linearen Congruenzen enthalten. In beiden Fällen wird das Grassmannsche Doppelverhältniss gleich dem Quadrat eines gewöhnlichen Doppelverhältnisses von vier Punkten oder Ebenen. (Study.)

S. 276, Z. 13 v. o. Eigentlich müsste diese Gleichung folgendermassen geschrieben werden:

$$\alpha A + \beta B + \cdots + (-\sigma) S \overset{P}{=} 0.$$

S. 279, Z. 15 v. u.: nämlich die beiden cursiv gedruckten Sätze auf S. 278 u. 279. Ist QR ein äusseres Produkt, so kommt der Satz auf S. 278 in Betracht, denn dann sind auch RA, RB, ... äussere Produkte und haben das System R gemein. Ist aber QR ein eingewandtes Produkt, so sind auch RA, RB, ... eingewandte Produkte, das System niedrigster Stufe, das alle diese harmonischen Systeme: RA, RB, ... umfasst — es möge S heissen — ist daher dem R untergeordnet und infolgedessen haben Q und S dasselbe System gemeinschaftlich, wie QR und S; demnach tritt jetzt der Satz auf S. 279, Z. 7—10 v. o. in Kraft.

Zu § 171 (S. 281 ff.). Der allgemeine Satz über die Krystallgestalten, den Grassmann an die Spitze seiner Betrachtungen stellt, ist natürlich nur eine eigenthümliche Fassung des Gesetzes der rationalen Indices und zwar ergiebt sich diese Fassung sehr leicht, wenn man die Grassmannschen Regeln über die Multiplikation von Strecken und Flächenräumen mit dem „Gesetz der Zonen" in Verbindung setzt.

In seiner Dissertation: „De lege zonarum principio evolutionis systematum crystallinorum", Berlin 1826, hatte F. Neumann schon auf den Zusammenhang zwischen dem Zonengesetze und dem Gesetze der rationalen Indices hingewiesen*). Andrerseits hatte Möbius 1827 in seinem barycentrischen Calcul, im 6. Kapitel des II. Abschnitts, das „geometrische Netz" in der Ebene betrachtet, ein System von Punkten und Geraden der Ebene, das aus vier seiner Geraden ebenso ableitbar ist, wie die Flächen und Kanten einer Krystallgestalt aus vier Flächen unter ihnen. Aber Möbius hatte nicht bemerkt, dass er damit im Grunde eine Ableitung des Gesetzes der rationalen Indices aus dem Zonengesetze gegeben hatte; das bemerkt zu haben, ist das Verdienst Grassmanns. Möbius sagt selbst in seiner Arbeit „Ueber das Gesetz der Symmetrie der Krystalle" (Leipzig 1849, ges. Werke Bd. II, S. 349—360), bei der Abfassung seines barycentrischen Calculs habe er die Untersuchungen über geometrische Netze für rein geometrische

*) Diese geschichtlichen Mittheilungen sind wesentlich der geometrischen Krystallographie von Liebisch entnommen (Leipzig 1881); vgl. da insbesondere S. 30. Bei Liebisch wird jedoch Grassmann gar nicht erwähnt, und in der That tritt Grassmanns Leistung neben denen von F. Neumann und Möbius zurück.

Spekulationen gehalten, ohne im Entferntesten den engen Zusammenhang zu ahnen, in welcher sie zu einer Haupteigenschaft der Krystalle stehen. Zuerst habe Grassmann darauf aufmerksam gemacht (eben in der Ausdehnungslehre von 1844).

Es ist vielleicht nicht überflüssig, wenn hier die Sätze, die Grassmann auf S. 281 ff. ohne Beweis ausspricht, durch die Grassmannschen Methoden abgeleitet werden.

Bei den Krystallgestalten kommt es nur auf die Richtungen der Flächen und der Kanten an, nicht auf ihre Lage im Raum; die Ausdehnungsgebilde erster und zweiter Stufe, das heisst also die Strecken und die Flächenräume von bestimmter Ebenenrichtung, sind daher sehr geeignet, um die Krystallgestalten analytisch zu behandeln. Das Zonengesetz sagt nun aus, dass jede Schnittlinie zweier Krystallflächen die Richtung einer möglichen Krystallkante liefert und dass jede Ebene, die zwei Krystallkanten parallel ist, die Richtung einer möglichen Krystallfläche liefert; ausserdem besagt das Gesetz noch, dass auf Grund dieses Princips aus vier Krystallflächen, von denen keine drei derselben Geraden parallel sind, oder aus vier Krystallkanten, von denen keine drei derselben Ebene parallel sind, alle möglichen Kanten und Flächen des Krystalls abgeleitet werden können.

Denken wir uns daher ein Tetraeder $ABCD$, das von vier Krystallflächen gebildet wird und bezeichnen wir die Strecken, die mit den Kanten DA, DB und DC gleich lang und gleichgerichtet sind, mit: a, b, c, so sind ab, bc, ca Flächenräume, die den Flächenräumen DAB, DBC, DCA proportional umd mit ihnen gleichgerichtet sind. Ferner werden die Kanten AB, BC, CA ihrer Länge und Richtung nach durch: $b-a$, $c-b$, $a-c$ dargestellt und ebenso die Fläche ABC ihrer Richtung nach durch: $ab+bc+ca$.

Eine zu den beiden Kanten DA und BC parallele Ebene wird nun ihrer Richtung nach durch das äussere Produkt $a(c-b)$ dargestellt, also ist $ac-ab$ eine mögliche Krystallfläche und ebenso natürlich $ba-bc$ und $cb-ca$. Die Verbindung einer dieser drei Ebenen mit den vier Ausgangsebenen liefert keine neue Krystallkante, dagegen erhält man durch paarweise Verbindung dieser drei Ebenen drei neue Krystallkanten. Um sie zu finden, müssen wir also zum Beispiel den Schnitt der beiden Ebenen $ac-ab$ und $ba-bc$ aufsuchen. Dieser Schnitt wird durch das eingewandte Produkt:

$$(ac-ab).(ba-bc)$$

dargestellt, das wegen:

$$ac-ab=a(c-b-a), \quad ba-bc=(c-b-a)b$$

nach S. 218 den Werth:

$$a(c-b-a)b.(c-b-a)=-abc.(c-b-a)$$

besitzt. Hier ist abc ein Theil des Hauptsystems (ein Körperraum), also wird die bewusste Kante durch $a+b-c$ dargestellt, und die beiden andern durch: $b+c-a$, $c+a-b$.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erkennt man, dass jede mögliche Krystallfläche in der Form: $\lambda ab+\mu bc+\nu ca$ darstellbar ist und jede mögliche Krystallkante in der Form: $\lambda' a+\mu' b+\nu' c$, wo λ, μ, ν und λ', μ', ν' positive oder negative ganze Zahlen sind. Das aber ist eben der Inhalt der beiden Sätze S. 281, Z. 9–5 v. u. und S. 283, Z. 19–15 v. u.

Denkt man sich andrerseits vier Krystallkanten, von denen keine drei einer

Ebene parallel sind, so kann man immer vier diesen Kanten parallele Strecken so auswählen, dass wenn a, b, c drei von diesen Strecken sind, die vierte durch $a+b+c$ dargestellt wird. Das Zonengesetz zeigt dann wieder, dass ab, bc, ca Krystallflächen sind und dass jede mögliche Krystallfläche in der Form $\lambda ab + \mu bc + \nu ca$ darstellbar ist und jede mögliche Krystallkante in der Form: $\lambda' a + \mu' b + \nu' c$, unter λ, μ, ν, λ', μ', ν ganze Zahlen verstanden. Auf diesen Standpunkt, wo man von vier Krystallkanten ausgeht, stellt sich Grassmann auf S. 284, Z. 10—16 v. o., während er vorher immer von vier Krystallflächen ausgeht.

Noch ist zu bemerken, dass die beiden Sätze auf S. 284 etwas eingeschränkt werden müssen. Bei dem ersten ist nämlich die Darstellung als harmonische Vielfachensumme nur für solche Kanten möglich, die nicht der betreffenden Ebene parallel sind, und bei dem zweiten nur für solche Flächen, die nicht der betreffenden Kante parallel sind.

S. 284 ff., § 172. In der Ausdehnungslehre von 1862 ist die Theorie der offnen (lückenhaltigen) Produkte viel ausführlicher und viel klarer dargestellt; dort findet man auch Anwendungen dieser Theorie.

S. 291, Z. 18 v. o.: „zu finden", nämlich, ohne den Ausdruck vorher auf eine Summe von drei Quadraten zurückzuführen.

S. 291, Z. 15 — 10 v. u. Aus § 144 wird man das nicht sofort herauslesen, zur Erleichterung des Verständnisses sei daher Folgendes bemerkt:

Es sei u ein Punkt — der Ursprung der Träger — und a, b, c seien drei von einander unabhängige Strecken, dann lässt sich jede nicht durch u gehende Ebene in der Form:

$$P = xubc + yuca + zuab + abc$$

darstellen und jeder im Endlichen gelegene Punkt in der Form:

$$v = u + x'a + y'b + z'c,$$

wo x, y, z, x', y', z' Zahlen sind. Soll dieser Punkt v auf der Ebene P liegen, so muss:

$$(u + x'a + y'b + z'c)P = 0$$

sein, das heisst:

$$xx' + yy' + zz' = 1.$$

Die Abweichung der Ebene P von u ist nun nach S. 186 gleich der Ausweichung des Produktes

$$uP = uabc,$$

also ist diese Abweichung gleich abc, das heisst, sie wird $=1$, wenn man $abc = 1$ setzt. Wird $Q = xbc + yca + zab$ gesetzt, was ein mit der Ebene P paralleler Flächenraum ist, und ferner: $p = x'a + y'b + z'c$, was eine mit der Liniengrösse uv parallele Strecke ist, so lässt sich die besprochene Abweichung auch in der Form: pQ darstellen, denn es wird: $pQ = abc$.

S. 293 f. Anhang I. Es ist nicht recht einzusehen, was Riemann und Helmholtz für ihre Zwecke aus den Entwickelungen der §§ 15—23 hätten entnehmen sollen. Mit mehr Recht hätte sich Grassmann darüber beklagen können, dass ihn Riemann bei der Einführung des Begriffs der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit nicht erwähnt hat; aber Riemann kannte wahrscheinlich die Ausdehnungslehre von 1844 gar nicht. Uebrigens hat Grassmann die betreffenden Arbeiten von Riemann und Helmholtz erst kurz vor seinem Tode kennen gelernt und ist nicht mehr dazu gekommen, sie eingehend zu studiren.

S. 295 f. Anhang II. Die Ausdrücke: „regressiv" und „ursprüngliche Ein-

heiten", die hier vorkommen, kennt die Ausdehnungslehre von 1844 noch nicht, Grassmann hat sie erst später, in der Ausdehnungslehre von 1862 eingeführt.

S. 295, Z. 1 v. u.: „nach § 51". Gemeint ist auch hier wieder die unbewiesene Regel, nach der die Summe zweier Ausdehnungen gleicher Stufe nur dann wieder eine einfache Ausdehnung derselben Stufe ist, wenn beide in demselben Gebiete nächsthöherer Stufe enthalten sind. (Study.)

S. 296, Z. 11 f. v. o. C ist nicht das gemeinsame Gebiet von A und B_1, sondern es ist diesem gemeinsamen Gebiete untergeordnet. Dagegen ist C allerdings das gemeinsame Gebiet von A und $B + B_1$. Man kann nämlich setzen:

$$C = a_1 a_2 \ldots a_c, \qquad B = a_1 a_2 \ldots a_c \ldots a_{b-1} . u,$$
$$B_1 = a_1 a_2 \ldots a_{b-1} v, \quad A = CoD,$$

wo $a_1, a_2, \ldots, u$ und v unabhängige Grössen erster Stufe sind und wo D keinen Faktor erster Stufe mit B gemein hat. Dann wird:

$$B + B_1 = a_1 a_2 \ldots a_{b-1}(u + v)$$

und es sind auch $a_1, a_2 \ldots a_{b-1}, u + v$ von einander unabhängig, demnach hat A mit $B + B_1$ ausser den c Faktoren von C keinen Faktor erster Stufe gemein.

S. 296, Z. 7 v. u. $A . E_1$ ist hier als äusseres Produkt aufzufassen.

Zu Anhang III. Dieser Aufsatz stammt aus dem Jahre 1845 und steht in Grunerts Archiv Bd. VI auf S. 337—350; diese Seitenzahlen sind am Rande in eckigen Klammern beigefügt. Noch ist zu bemerken, dass die Ausdrücke „Kombinatorisches Produkt" und „Kombinatorische Faktoren erster Ordnung" (S. 301 f.) in der Ausdehnungslehre von 1844 noch nicht vorkommen.

Im letzten Bande dieser Ausgabe, wo die wissenschaftlichen Leistungen Grassmanns im Zusammenhange gewürdigt werden sollen, wird sich auch Gelegenheit finden, auf die Beziehungen zwischen dem Grassmannschen Kalkül und den Hamiltonschen Quaternionen genauer einzugehen. Es dürfte jedoch nicht unangebracht sein, schon hier mitzutheilen, was Hamilton über die Ausdehnungslehre geäussert hat.

In Hamiltons Lectures on Quaternions, Dublin 1853, liest man auf S. (62) der Vorrede in einer Anmerkung Folgendes: „It is propre to state here, that a species of *non-commutative multiplication* for inclined lines (äussere Multiplikation) occurs in a very original and remarkable work by Prof. H. Grassmann (Ausdehnungslehre, Leipzig 1844), which I did not meet with till after years had elapsed from the invention and communication of the quaternions: in which work I have also noticed (when too late to acknowledge it elsewhere) an employment of the symbol $\beta - \alpha$, to denote the *directed line* (Strecke), drawn from the point α to the point β. Nothwithstanding these, and perhaps some other coincidences of view, Prof. Grassmann's system and mine appear to be perfectly distinct and independent of each other, in their conceptions, methods, and results. At least, that the profound and philosophical author of the Ausdehnungslehre was not, at the time of its publication, in possession of the theory of the *quaternions*, which had in the preceding year (1843) been applied by me as a sort of organ or *calculus for spherical trigonometry*, seems clear from a passage of his Preface (Vorrede, p. XIV), in which he states (under date of June 28th, 1844), that he had not then succeeded in *extending the use of imaginaries from the plane to space*;

and generally that unsurmounted difficulties had opposed themselves to his attempts to construct, on his principles, a theory of *angles in space* (hingegen ist es nicht mehr möglich, vermittelst des Imaginären auch die Gesetze für den Raum abzuleiten. Auch stellen sich überhaupt der Betrachtung der Winkel im Raume Schwierigkeiten entgegen, zu deren allseitiger Lösung mir noch nicht hinreichende Musse geworden ist)."

Diese Aeusserung Hamiltons wird in bemerkenswerther Weise ergänzt durch eine Mittheilung, die ich der Güte des Herrn Professor O. Henrici in London verdanke. Dieser schrieb mir nämlich unterm 18. Januar 1893 Folgendes: In der Graves Library im University College befinde sich ein Exemplar der Originalausgabe der 1844er Ausdehnungslehre. Dieses Exemplar sei mit dem barycentrischen Calcul von Möbius zusammengebunden und sei augenscheinlich von einem Engländer sehr gründlich studirt worden. Ueberall seien Bleistiftstriche am Rande oder Stellen im Texte unterstrichen. Hamiltons Name komme zwar nicht vor, aber es sei unzweifelhaft, dass die Bemerkungen von Hamilton herrühren. Herr Prof. Henrici theilte mir zugleich die wichtigsten dieser Bemerkungen mit. Hier sind sie:

Vorrede S. XII. „Grassmann thus seems to have reinvented Double Algebra".

S. 71 gegenüber der 3-ten bis 8-ten Zeile (S. 100, Z. 1—6 v. o. der gegenwärtigen Ausgabe): „Not seen till 1853" *).

S. 102. His Zahlengrössen are my scalars **). He does not seem to introduce the conception of equal angles into his proportion of lines. His angles are identical (see fig. 12). See also p. 111.

S. 130. Consider this!

S. 145. He thinks that he first introduced the conception of directed lines .. the „Strecke".

S. 172. His line-magnitudes are on lines fixed in space.

Dass ich von Henrici gewisse Mittheilungen erhalten könne, die für die Grassmannausgabe von Werth seien, darauf hatte mich seinerzeit Gordan aufmerksam gemacht.

Anmerkungen
zur geometrischen Analyse.

Die „geometrische Analyse" ist die Beantwortung einer Preisaufgabe, die von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig gestellt worden war. Die Aufgabe wurde im Frühjahr 1844 für das Jahr 1845 gestellt und lautete folgendermassen ***):

„Es sind noch einige Bruchstücke einer von Leibnitz erfundnen geometrischen Charakteristik übrig (s. Christi. Hugenii aliorumque seculi XVII. virorum

*) Das Jahr, in dem die Lectures erschienen sind.

**) Die Worte „my scalars" deuten, wie Herr Henrici bemerkt, klar auf Hamilton.

***) Leipziger Zeitung vom 9. März 1844, S. 877.

celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae. Ed. Uylenbroek. Hagae comitum 1833. fasc. II, p. 6 *), in welcher die gegenseitigen Lagen der Orte, ohne die Grösse von Linien und Winkeln zu Hülfe zu ziehen, unmittelbar durch einfache Symbole bezeichnet und durch deren Verbindung bestimmt werden, und die daher von unsrer algebraischen und analytischen Geometrie gänzlich verschieden ist. Es fragt sich, ob nicht dieser Calcul wieder hergestellt und weiter ausgebildet, oder ein ihm ähnlicher angegeben werden kann, was keineswegs unmöglich zu sein scheint (vgl. Göttinger gelehrte Anzeigen 1834, S. 1940)" **).

Die Bewerbungsschriften sollten bis Ende November 1845 eingereicht werden. Im Frühjahr 1845 fasste jedoch die Gesellschaft einen andern Beschluss ***):

„Die beiden für das Jahr 1845 aufgegebenen Preisfragen

I. Aus der Geschichte . . .

II. Aus der Physik und Mathematik . . . †)

wiederholt die Gesellschaft, und indem sie dieselben mit der zweihundertjährigen Geburtstagsfeier Leibnitz's, eines gebornen Leipzigers, welche in die letzte Woche des Monats Juni 1846 fallen wird, in Beziehung setzt, dem gemäss also auch auf das Jahr 1846 ausdehnt und die Einsendungsfrist der unter I. und II. bezeichneten Preisschriften vom Ende d. M. November 1845 bis zum Ende des M. März 1846 verlängert, verdoppelt sie den dort angegebenen Preis, erhöht ihn also auf 48 Ducaten in Gold."

Ueber die oben mitgetheilte Preisaufgabe ging nur eine Arbeit ein, eben Grassmanns geometrische Analyse, und diese erhielt den Preis. Am 1. Juli 1846, bei der ersten Sitzung der neu begründeten Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften hielt Drobisch ausser seiner eigentlichen Festrede auch noch als Sekretär der Jablonowski'schen Gesellschaft eine Rede, in der er das Ergebniss der Preisbewerbung verkündete und auf Grund des, wahrscheinlich von Möbius verfassten Gutachtens der Jablonowski'schen Gesellschaft über Grassmanns Arbeit berichtete ††). Im Jahre 1847 erschien dann die geometrische Analyse als Nummer I †††) der „Preisschriften gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig". Begleitet war sie von einer erläuternden Abhandlung: „Die Grassmann'sche Lehre von Punktgrössen und den davon abhängigen Grössenformen, dargestellt von A. F. Möbius", s. dessen gesammelte Werke Bd. I, S. 613—633.

---

*) Hier liest man u. A. Folgendes: J'ajouterai ici un essai, qui me paraît considérable, et qui suffira au moins à rendre mon dessein plus croyable et plus aisé à concevoir, afin que, si quelque hazard en empêche la perfection à présent, ceci serve de monument à la postérité, et donne lieu à quelque autre d'en venir à bout.

**) Es ist das eine Stelle aus einer von Stern herrührenden Besprechung des Uylenbroekschen Werkes und zwar wird da kurz über die Leibnizsche Charakteristik berichtet.

***) Leipziger Zeitung vom 5. April 1845, S. 1301.

†) s. oben.

††) Die Rede Drobischs steht in dem 1. Bande der Berichte der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Leipzig (1846, S. 45—48).

†††) Vorher waren die Preisschriften eine Reihe von Jahren hindurch unter dem Titel: „Acta societatis Jablonovianae nova" erschienen.

Dass die geometrische Analyse in der gegenwärtigen Ausgabe wieder abgedruckt werden kann, ist dem Entgegenkommen der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu danken, die den Wiederabdruck bereitwilligst gestattet hat.

Die Aeusserungen Leibnizens über die Vorzüge einer solchen geometrischen Charakteristik, wie sie ihm in Gedanken vorschwebte, und die Andeutungen über die Ausführbarkeit dieses äusserst merwürdigen Gedankens, befinden sich in einer Beilage zu einem Briefe, den Leibniz am 8. September 1679 aus Hannover an Huygens geschrieben hat. Er sagt in diesem Briefe (s. das oben angeführte Werk von Uylenbroek, fasc. I, p. 9):

„Mais apres tous les progres que j'ay faits en ces matieres (nämlich in der Theorie gewisser Gleichungen), je ne suis pas encor content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geometrique ou lineaire, qui nous exprime directement *situm*, comme l'Algebre exprime *magnitudinem*. Et je croy d'en voir le moyen, et qu'on pourroit representer des figures et mesme des machines et mouvements en caracteres, comme l'Algebre represente les nombres ou grandeurs: et je vous envoye un *essay* qui me paroist considerable. Il n'y a personne qui en puisse mieux juger que vous, Monsieur, et vostre sentiment me tiendra lieu de celuy de beaucoup d'autres.“ Dieser *essay* ist eben die vorhin erwähnte Beilage, die a. a. O. fasc. II, S. 6—12 abgedruckt ist. In „Leibnizens mathematischen Schriften“, herausgegeben von Gerhardt, findet man den essay in Bd. II, S. 20 ff. und auf S. 27 f. auch die Antwort von Huygens, die nicht gerade sehr günstig lautet. In Bd. V der eben genannten Ausgabe findet man überdies auf S. 141—178 aus dem Nachlasse von Leibniz noch zwei lateinisch geschriebene Abhandlungen über die Charakteristik, die aber nichts wesentlich neues enthalten.

Das Beste ist wohl, gleich den ganzen „essay“ wörtlich nach der Uylenbroek'schen Ausgabe hier abzudrucken, jedoch unter Weglassung der Figuren, da sich die jeder Leser ohne Weiteres selbst zeichnen kann, wenn er es überhaupt nöthig findet. Der „essay“ lautet so *):

J'ay trouvé quelques élémens d'une nouvelle characteristique, tout à fait differente de l'Algebre, et qui aura des grands avantages pour representer à l'esprit exactement et au naturel, quoyque sans figures, tout ce qui depend de l'imagination. 6

L'algebre n'est autre chose que la characteristique des nombres indeterminés, ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles et le mouvement, d'où vient qu'il est souvent difficile de reduire dans un calcul ce qui est dans la figure, et qu'il est encor plus difficile de trouver des demonstrations et des constructions géometriques assez commodes lors meme que le calcul d'Algebre est tout fait. Mais cette nouvelle characteristique suivant des figures de vue, ne peut manquer de donner en meme temps la solution et la construction et la demonstration géometrique, le tout d'une maniere naturelle et par une analyse. C'est à dire par des voyes determinées.

L'algebre est obligée de supposer les elements de geometrie, au lieu que cette caracteristique pousse l'analyse j'usqu'au bout. Si elle estoit achevée de la

*) Grassmann selbst besass nur den „essay“, in einer Abschrift; er erzählt das in einem an H. Hankel gerichteten Briefe vom 2. Februar 1867.

7 maniere que je la conçois, on pourrait faire | en caracteres, qui ne seront que des lettres de l'Alphabet, la description d'une machine quelque composée qu'elle pourroit estre, ce qui donneroit moyen à l'esprit de la connoistre distinctement et facilement avec toutes les pieces et meme avec leur usage et mouvement sans se servir de figures ny de modelles et sans gener l'imagination, et on ne laisseroit pas d'en avoir la figure présente dans l'esprit autant que l'on se voudroit faire l'interpretation des caracteres. On pourroit faire aussi par ce moyen des descriptions exactes des choses naturelles, comme par ex. des plantes et de la structure des animaux, et ceux qui n'ont pas la commodité de faire des figures, pourveu qu'ils ayent la chose présente devant eux ou dans l'esprit, se pourront expliquer parfaitement et transmettre leurs pensées ou experiences à la posterité, ce qui ne se scauroit faire aujourd'huy, car les paroles de nos langues ne sont pas assés arrestées ny assés propres pour se bien expliquer sans figures.

Mais c'est la moindre utilité de cette caracteristique, car s'il ne s'agit que de la description, il vaudra mieux, quand on en peut et veut faire la dépense, d'avoir les figures et mesme les modelles, ou plustost les originaux des choses. Mais l'utitité principale consiste dans les conséquences et raisonnemens, qui se peuvent faire par les operations des caracteres, qui ne se scauroient exprimer par des figures (et encor moins par des modelles) sans les trop multiplier, ou sans les brouiller par un trop grand nombre de points et de lignes, d'autant qu'on seroit obligé de faire une infinité de tentatives inutiles: au lieu que cette methode meneroit seurement et sans peine.

Je croy qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la géometrie, et qu'on pourroit mesme venir jusqu'a examiner les qualités des materiaux, par ce que cela dépend ordinairement de certaines figures, de leurs parties sensibles. Enfin je n'espere pas qu'on puisse aller assez loin en physique,
8 avant que d'avoir trouvé un tel abregé pour soulager | l'imagination. Car nous voyons par exemple quelle suite de raisonnemens géométriques est necessaire pour expliquer seulement l'arc en ciel, qui est un des plus simples effects de la nature, par où nous pouvous juger combien de consequences seroient nécessaires pour penetrer dans l'interieur des mixtes, dont la composition est si subtile que le microscope, qui en decouvre bien plus que la cent-millieme partie, ne l'explique pas encor assés pour nous aider beaucoup. Cependant il y a quelque esperance d'y arriver en partie, quand cette analyse veritablement géometrique sera établie.

Mais comme je ne remarque pas que quelque autre ait jamais eu la meme pensée, ce qui me fait craindre qu'elle ne se perde, si je n'ai pas le tems de l'achever; j'adjouteray ici un essay, qui me paroist considerable, et qui suffira au moins à rendre mon dessein plus croyable et plus aisé à concevoir, afin que, si quelque hazard en empeche la perfection à present, ceçy serve de monument à la posterité, et donne lieu à quelque autre d'en venir à bout.

Or, il est constant qu'il n'y a rien de plus important dans la géometrie que la consideration des lieux; c'est pourquoy j'en exprimeray un des plus simples par cette maniere de caracteres.

Les lettres de l'alphabet signifieront ordinairement les points des figures. Les premières lettres, comme A, B, exprimeront les points donnés; les derniers, comme x, y, les points demandés. Et au lieu qu'on se sert des égalités ou equations dans l'algebre, je me sers icy des congruités que j'exprime par le caractère ♉. Par ex. dans la premiere figure ABC ♉ DEF veut dire qu'il y a de la congruité entre les deux triangles ABC et DEF suivant l'ordre des points,

qu'ils peuvent occuper exactement la meme place, et qu'on peut appliquer ou mettre l'un sur l'autre sans rien changer dans ces deux figures que la place. Ainsi en appliquant D sur A et E sur B et F sur C, les deux triangles (estans posés egaux et semblables) seront manifestement | coincidents. Mais sans parler 9 des triangles, on en peut dire autant en quelque façon des points, scavoir ABC ♉ DEF, dans la seconde figure, (fig. 2) c'est à dire, on pourra mettre en mesme temps A sur D, et B sur E, et C sur F, sans que la situation des trois points ABC entre eux, ny des trois points DEF entre eux, soit changée; supposant les trois premiers joints par quelques lignes inflexibles (droites ou courbes n'importe) et les trois autres de meme. Après cette explication des caracteres, voicy les lieux:

Soit A ♉ Y (dans la fig. 3) c'est à dire, soit un point donné A. On demande le lieu de tous les points Y on (Y) etc. qui ont de la congruité avec le point A. Je dis que le lieu de tous les Y sera *l'espace infini* de tous cotés. Car tous les points du monde ont de la congruité entre eux, c'est à dire l'un se peut tousjours mettre à la place de l'autre. Or tous les points du monde sont dans un meme espace. On peut aussi exprimer ce lieu ainsi Y ♉ (Y). Tout cela est trop manifeste, mais il falloit commencer par le commencement.

Soit (dans la fig. 4) AY ♉ $A\,(Y)$. Le lieu de tous les Y sera la surface de la sphere, dont le centre est A, et le rayon AY, tousjours le meme en grandeur, ou égal à la donné AB ou CB. C'est pourquoi on peut aussi exprimer le mesme lieu ainsy: AB ♉ AY ou CB ♉ AY.

Soit (dans la 5e. fig.) AX ♉ BX; le lieu de tous les X sera le plan. Deux points A et B estant donnés, on demande un troisième X, qui ait la mesme situation à l'égard du point A, qu'il a à l'égard du point B, [c'est à dire que AX soit égale ou (parce que toutes les droites égales sont congruentes) congruente à BX, ou que le point B se puisse appliquer au point A, gardant la mesme situation qu'il avoit à l'égard du point X] je dis que tous les points X (X) d'un certain plan seul, continué à l'infini, satisferont à la question. Car comme AY ♉ BY de mesme $A(Y)$ ♉ $B(Y)$. | Mais il n'y en aura point qui satisfasse 10 hors de ce plan. C'est pourquoy ce plan continué à l'infini sera le lieu commun de tous les points du monde, qui sont situés à l'égard de A, comme à l'égard de B. [Il s'ensuit que ce plan passera par le milieu de la droite AB, qui luy est perpendiculaire.]

Soit (dans la 6e. fig.) ABC ♉ ABY; le lieu de tous les Y sera la circulaire. C'est à dire, il y a trois points donnés A, B, C, on demande un quatrieme Y, qui a la meme situation que C à l'egard de AB. Je dis qu'il y a une infinité de points qui peuvent satisfaire, et le lieu de tous ces points est la circulaire. Cette description ou definition de la ligne circulaire ne présuppose pas le plan (comme celle d'Euclide) ny mêmes la droite. Cependant il est manifeste que son centre est D, au milieu entre A et B. On pourroit aussi dire ainsi: ABY ♉ $AB(Y)$, car alors le lieu seroit un cercle, mais qui ne seroit pas donne. C'est pourquoy il faut adjouter un point donné. L'on se peut imaginer que les points AB demeurant fixes, et que le point C attaché à eux par quelques lignes inflexibles (droites ou courbes) et par consequent gardant la meme situation à leur égard, soit tourné à l'entour de A, B, pour decrire la circulaire $CY(Y)$. On peut juger par là que la situation d'un point à l'égard d'un autre peut estre conçue sans exprimer la ligne droite, pourveu on les conçoive joints par quelque ligne que ce soit. Et si la ligne est posée inflexible, la situation des deux points

entre eux sera immutable. Et deux points peuvent estre conçus avoir la mesme situation entre eux que deux autres points, si les uns peuvent estre joints par une ligne qui puisse estre congrue avec la ligne qui joint les autres. Je dis cecy, à fin qu'on voye que ce que j'ay dit jusqu'ici ne depend pas encor de la ligne droite (dont je vay donner la definition), et qu'il y a difference entre A, C, situation de A et C entre eux et la droite AC.

11 Soit (dans la fig. 7) $AY \,\text{ȣ}\, BY \,\text{ȣ}\, CY$; le lieu de tous les Y sera *la droite*. C'est à dire, trois points estant donnés, on demande un point Y, qui a la meme situation à l'égard de A, qu'il a à l'égard de B, et qu'il a à l'égard de C. Je dis que tous ces points tomberont dans la droite infini $Y(Y)$. Si tout estoit dans un même plan, deux points donnés suffiroient pour determiner ainsi la droite.

Soit enfin (dans la 8e. fig.) $AY \,\text{ȣ}\, BY \,\text{ȣ}\, CY \,\text{ȣ}\, DY$; le lieu sera un seul *point*; car on demande un point Y, qui ait la mesme situation à l'égard de quatre points donnés A, B, C, D; c'est à dire que les droites AY, BY, CY, DY soient égales entre elles; et il n'y a qu'un seul qui puisse satisfaire.

Ces mesmes lieux se peuvent exprimer en plusieurs autre façons, mais celles-cy sont des plus simples et des plus fécondes et peuvent passer pour des definitions. Et pour faire voir que ces expressions servent au raisonnement, je monstreray par les caracteres, avant que de finir, ce qui est produit par l'intersection de ces lieux.

Premièrement: *l'intersection de deux surfaces spheriques est une ligne circulaire.* Car puisque l'expression de la circulaire est $ABC \,\text{ȣ}\, ABY$, nous aurons $AC \,\text{ȣ}\, AY$ et $BC \,\text{ȣ}\, BY$, dont les lieux sont deux surfaces spheriques, l'une ayant le centre A et le rayon AC, l'autre le centre B et le rayon BC.

De mesme: *l'intersection d'un plan et de la spherique est une ligne circulaire.* Car l'expression d'une spherique est $AC \,\text{ȣ}\, AY$, et celle d'un plan est $AY \,\text{ȣ}\, BY$, et par consequent $AC \,\text{ȣ}\, BC$, parce que le point C est un des points Y. Or BC estant $\text{ȣ}\, AC$, et $AC \,\text{ȣ}\, AY$; nous aurons $BC \,\text{ȣ}\, AY$, et AY estant $\text{ȣ}\, BY$, nous aurons $BC \,\text{ȣ}\, BY$. Joignons ces congruités, et nous aurons $A.B.C \,\text{ȣ}\, A.B.Y$, c'est à dire

$$AB \,\text{ȣ}\, AB, \quad BC \,\text{ȣ}\, BY, \quad AC \,\text{ȣ}\, AY.$$

Or $ABC \,\text{ȣ}\, ABY$ est à la circulaire, donc l'intersection d'un plan et d'une surface spherique donne la circulaire. Ce qu'il falloit demontrer par cette sorte de calcul. —

12 De la même façon il paroit que | *l'intersection de deux plans est une droite.* Car soyent deux congruités, l'une $AY \,\text{ȣ}\, BY$ pour un plan, l'autre $AY \,\text{ȣ}\, CY$ pour l'autre plan, nous aurons $AY \,\text{ȣ}\, BY \,\text{ȣ}\, CY$, dont le lieux est la droite. Enfin, *l'intersection de deux droites est un point.* Car soit $AY \,\text{ȣ}\, BY \,\text{ȣ}\, CY$ et $BY \,\text{ȣ}\, CY \,\text{ȣ}\, DY$, nous aurons $AY \,\text{ȣ}\, BY \,\text{ȣ}\, CY \,\text{ȣ}\, DY$.

Je n'ay qu'une remarque à adjouter, c'est que je vois qu'il est possible d'étendre la caracteristique jusqu'aux choses, qui ne sont pas sujettes à l'imagination; mais cela est trop important et va trop loin pour que je me puisse expliquer la-dessus en peu de paroles.

Wir kehren jetzt zur „geometrischen Analyse" zurück. In gewissem Sinne ist diese Abhandlung Grassmanns ein Ersatz für den nicht erschienenen zweiten Theil der Ausdehnungslehre von 1844. Sie enthält wenigstens die Theorie des inneren Produktes und gewisse Anwendungen auf die Mechanik, alles Gegenstände, die in diesem zweiten Theile dargestellt werden sollten (vgl. S. 11—14), und man

kann sich daher ein Bild machen, in welcher Weise ungefähr Grassmann die genannten Theorien in diesem zweiten Theile behandelt haben würde. Allerdings ist ein beträchtlicher Theil der geometrischen Analyse (von § 11 an) offenbar sehr schnell niedergeschrieben und entbehrt noch sehr der Feile, ein Umstand, der das Verständniss erheblich erschwert.

Die erläuternde Abhandlung von Möbius hier mit abzudrucken, erschien unnöthig. Es wird genügen, wenn nachher in einer Anmerkung kurz die Art und Weise auseinandergesetzt wird, wie Möbius die innere Multiplikation der Punktgrössen der Anschauung zugänglich zu machen sucht. Doch jetzt zu den einzelnen Stellen der geometrischen Analyse, bei denen Bemerkungen wünschenswerth erscheinen.

S. 329, Z. 16 ff. v. o. Der Leibniz sche Gedanke, Alles auf die Kugel zurückzuführen, tritt in den neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie öfter auf, allerdings ohne dass auf Leibniz Bezug genommen wird. So zum Beispiel bei Lobatschewskij und Bolyay, die freilich damals den Leibnizschen Aufsatz noch gar nicht kennen konnten. Ferner stellt sich Helmholtz in seiner bekannten Abhandlung, die schon auf S. 293 erwähnt ist, im Grunde geradezu die Aufgabe, alle Geometrien des gewöhnlichen Raumes zu finden, zu denen man von dem Begriff der Kugel aus gelangen kann. Einen ähnlichen Weg hat dann später auch de Tilly eingeschlagen. Allerdings hat weder Helmholtz noch de Tilly das Problem erledigt und erst Lie hat mit Hülfe seiner Gruppentheorie nachgewiesen, dass man wirklich nur zu der Euklidischen Geometrie oder zu einer der beiden nicht Euklidischen Geometrien gelangt, dabei vorausgesetzt, dass die Punkte des Raumes durch Koordinaten bestimmt werden können und dass die Kugeln durch Gleichungen dargestellt werden, die eine gewisse Anzahl von Differentiationen gestatten (vgl. Lies Theorie der Transformationsgruppen, bearbeitet unter Mitwirkung von F. Engel, Bd. III, S. 393 ff., Leipzig 1893).

S. 331, Z. 1 v. o. Dem „zuerst" entsprechend erwartet man später ein „zweitens", aber dieses „zweitens" kommt nicht.

S. 340 f. (§ 5). Unter abc ist natürlich das äussere Produkt der drei Punkte a, b, c zu verstehen. Die beiden Verhältnisse, durch die die Kollinearfunktion in der Ebene bestimmt wird, sind Doppelverhältnisse im gewöhnlichen Sinne des Worts. Der Quotient:

$$\frac{(eab)(ecd)}{(ead)(ecb)}$$

zum Beispiel ändert seinen Werth nicht, wenn man c und d durch: $c' = c - \lambda e$, $d' = d - \mu e$ ersetzt. Wählt man insbesondere λ und μ so, dass c' und d' in die Gerade ab fallen, das heisst:

$$\lambda = \frac{(abc)}{(abe)}, \quad \mu = \frac{(abd)}{(abe)},$$

so reducirt sich jener Quotient auf das Doppelverhältniss der vier Punkte: a', b', c', d', er stellt somit nichts andres dar, als das Doppelverhältniss der vier Strahlen: ea, eb, ec, ed.

S. 350. Der Begriff „des senkrecht proportionalen" ist in der Ausdehnungslehre von 1862 durch den bestimmteren der „Ergänzung" ersetzt. Dadurch wird eine ganz allgemeine Definition des inneren Produktes ermöglicht, bei der es nicht mehr, wie hier auf S. 352 f., nöthig ist, für jeden einzelnen Fall eine besondere Definition aufzustellen. Auch das Zeichen $\times$ für die innere Multiplikation wird durch die Einführung des Zeichens für die Ergänzung überflüssig.

S. 356, Z. 9 v. o.: „fortschreitend“, das heisst, die drei Seiten werden als Strecken aufgefasst und zwar so, dass die eine die Summe der beiden andern ist, also, wenn ABC das Dreieck ist, so sind $B - A$, $C - B$ und $C - A$ die drei Seiten.

S. 364, Z. 1 v. u.: a^2, b^2, c^2 sind innere Quadrate.

S. 365, Z. 9 v. o. Das alles wird wesentlich einfacher, wenn man, wie Grassmann es in der Ausdehnungslehre von 1862 wirklich thut, den Ausdruck $a^2 f$ direkt als Funktion der Punkte: p_1, p_2, ... darstellt. Es ist ja:

$$x_1 = \frac{(p_1 - g) \times a}{a^2}, \quad y_1 = \frac{(p_1 - g) \times b}{a^2}, \quad \ldots$$

also wird:

$$F(p_1, p_2, \ldots) = a^2 f\left(\frac{(p_1 - g) \times a}{a^2}, \quad \frac{(p_1 - g) \times b}{a^2}, \ldots\right)$$

und demnach:

$$\delta F = \left(a \frac{\delta f}{\delta x_1} + b \frac{\delta f}{\delta y_1} + c \frac{\delta f}{\delta z_1}\right) \delta p_1 + \cdots.$$

S. 368, Z. 12 v. o.: „zweiter Dimension“ im Sinne von S. 364, Z. 6—8 v. o.

S. 372—374. Die hier aufgestellten Sätze und Erklärungen sind, wie sie gefasst sind, kaum vollständig zu verstehen. Der Gedankengang, der Grassmann zu ihnen geführt hat, scheint folgender gewesen zu sein:

Jede Gleichung zwischen äusseren Produkten von Punkten: p_1, p_2, ... hat die Eigenschaft, auch dann noch bestehen zu bleiben, wenn man für die Punkte ihre Abweichungen: $p_1 - r$, $p_2 - r$, ... von einem beliebigen Punkte r setzt. Jede solche Gleichung lässt sich nämlich auf die Form:

$$p \,.\, A + B = 0$$

bringen, wo p ein Punkt ist und A und B Summen von Ausdehnungsgrössen, also von äusseren Streckenprodukten, in denen nur die Differenzen der Punkte vorkommen. Setzt man nun statt aller in dieser Gleichung vorkommenden Punkte ihre Abweichungen von irgend einem Punkte r, so ändern sich A und B nicht und die Gleichung geht über in:

$$(p - r) \,.\, A + B = 0,$$

diese aber sagt nichts andres aus, als dass die Abweichung der Grösse $p \,.\, A + B$ von dem Punkte r verschwindet, was nach S. 186 f. der Fall ist, sobald $p \,.\, A + B$ verschwindet. Hierin liegt zugleich, dass eine Gleichung zwischen äusseren Produkten von Punkten dann und nur dann richtig ist — um Grassmanns Ausdruck zu gebrauchen —, wenn auch die Gleichung richtig ist, die entsteht, sobald man statt aller Punkte ihre Abweichungen von einem ganz beliebigen Punkte setzt. Demnach lassen sich alle Gleichungen zwischen äusseren Produkten von Punkten durch Gleichungen zwischen äusseren Produkten von Strecken ersetzen.

Diesen Satz über äussere Produkte von Punkten benutzt nun Grassmann als ein Princip, von dem er verlangt, dass es auch für die inneren Produkte gelten soll. Wenn er eine Gleichung zwischen inneren Produkten von Punkten hat, so setzt er fest, dass diese Gleichung nur dann richtig sein soll, wenn die Gleichung zwischen inneren Streckenprodukten richtig ist, die entsteht, sobald man für jeden Punkt seine Abweichung von einem beliebigen Punkte setzt. Hierdurch hat er den Vortheil, dass alle die „Gesetze“, das heisst, die Rechnungsregeln, die früher für innere Streckenprodukte abgeleitet worden sind, unmittelbar

auf die Punkte angewendet werden können. Es sind das die Gesetze, die in den Gleichungen:

$$a \times b = b \times a$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c, \quad (b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

ausgesprochen sind, unter a, b, c Strecken verstanden; diese Rechnungsregeln gelten nun auch sofort, wenn a, b, c Punkte sind.

Allerdings ist damit nur die Möglichkeit gegeben, formell mit inneren Produkten von Punkten und Punktgrössen zu rechnen, es ist aber noch nicht erklärt, was nun eigentlich unter dem inneren Produkte zweier Punkte zu verstehen ist.

S. 376 ff. Es ist wohl nicht zu bezweifeln, dass Grassmann das innere Produkt eines Punktes in eine Strecke und das zweier Punkte rein formell aufgefasst hat. Diese Produkte sind für ihn Grössen in demselben Sinne, wie die formelle Summe oder Summengrösse. Man erinnere sich nur an das, was er auf S. 108 über die formelle Summe sagt: „Um ihre konkrete Bedeutung zu gewinnen, müssten wir ... aufsuchen, wie sich die Form der Summe, die in dem Werth der Stücke besteht, ändern könne, ohne dass der Werth der Summe selbst sich ändere. Dadurch erhalten wir eine Reihe von konkreten Darstellungen jener formellen Summe, und die Gesammtheit dieser möglichen Darstellungen in Eins zusammengeschaut, wie die Arten einer Gattung (nicht wie die Theile eines Ganzen), würde uns den konkreten Begriff vor Augen legen". Und nun vergleiche man, was er auf S. 382 über die Bedeutung des inneren Produktes von Punkt und Strecke sagt: „diese Bedeutung hängt von der Beantwortung der Frage ab, wann zwei solche Produkte ... gleichgesetzt werden können" und kurz darauf: „so bestimmt jene Strecke und diese Ebene den Begriff jenes inneren Produktes".

Es ist nicht zu verkennen, dass diese Auffassung der Begriffe Summe und Produkt etwas fremdartiges hat, ja sie steht sogar mit der ursprünglich von Grassmann eingeführten Auffassung dieser Begriffe in Widerspruch, denn eine Summe oder ein Produkt ist nach dieser Auffassung das Ergebniss einer Verknüpfung von zwei Gliedern und ist daher durch diese beiden Glieder vollständig bestimmt. Die Betrachtung aller der Werthe der Faktoren, für die das Produkt denselben Werth behält, hat mit dem Begriffe des Produktes an sich nicht das Geringste zu thun. Andrerseits ist es aber auch wünschenswerth, sich unter dem inneren Produkte zweier Punktgrössen etwas vorstellen zu können, was dem gewöhnlichen Begriffe des Produktes entspricht und was doch der geometrischen Anschauung zugänglich ist.

Eine derartige Auffassung des inneren Produktes zweier Punktgrössen hat Möbius in der oben erwähnten Abhandlung entwickelt, die er der geometrischen Analyse zur Erläuterung beifügte. Möbius denkt sich nämlich die „Punkte" und „Punktgrössen", von denen auf S. 376 ff. die Rede ist, nicht etwa als mit Gewichten behaftete Punkte, im Sinne des barycentrischen Kalkuls oder der Ausdehnungslehre von 1844, sondern er denkt sie sich als Strecken, die von einem festen Punkte (dem Ort der Punktgrösse) und von einem veränderlichen Punkte begränzt sind. Für diese Auffassung erscheinen also die Grassmannschen Symbole a und αa nur als Abkürzungen für die einfachen und vielfachen Strecken: $a - x$ und $\alpha(a - x)$, unter x einen veränderlichen Punkt verstanden. Das innere Produkt $a \times b$ bekommt dadurch eine anschauliche Bedeutung, denn es ist nur eine Abkürzung für das innere Streckenprodukt: $(a - x) \times (b - x)$. Eine Gleichung zwischen solchen Produkten wird richtig gesetzt, wenn sie richtig ist für jede Lage des veränderlichen Punktes x. Die Differenz zweier „Punkte" a und b

ist natürlich auch bei dieser Begriffsbestimmung die Strecke $a - b$, da der veränderliche Punkt x aus dem Ausdruck: $(a - x) - (b - x)$ herausfällt.

Zum Beispiel sind die von Grassmann auf Seite 376 f. geschriebenen Gleichungen:

$$a^2 - b^2 = \frac{a+b}{2} \times 2(a - b)$$

und

$$a^2 - p^2 = (a + p) \times (a - p)$$

für diese Auffassung weiter nichts als Abkürzungen der folgenden Gleichungen, die richtig sind für jede Lage des veränderlichen Punktes x:

$$(a - x)^2 - (b - x)^2 = \left(\frac{a+b}{2} - x\right) \times 2(a - b)$$

und:

$$(a - x)^2 - p^2 = (a + p - x) \times (a - p - x).$$

Der Leser wird hiernach keine Schwierigkeit haben, sich die Grassmannschen Entwickelungen in diesem Sinne zurecht zu legen.

Es muss aber ausdrücklich betont werden, dass der Wortlaut der Grassmannschen Ausführungen nirgends erkennen lässt, dass Grassmann sich die Punktgrössen hier in der von Möbius angegebenen Weise gedacht hat. Es wäre auch geradezu unerhört, wenn Grassmann in der zweiten Hälfte seiner Arbeit unter Punktgrössen plötzlich etwas andres verstanden hätte, als in der ersten, ohne auch nur ein Wort darüber zu sagen. Die Möbiussche Auffassung kann daher nur als ein Versuch gelten, die Grassmannschen Begriffe der Anschauung näher zu bringen, sie bringt aber nicht das zum Ausdruck, was sich Grassmann selbst gedacht hat.

Dass Möbius selbst die Sache so aufgefasst hat, das zeigt nicht nur der Anfang seiner erläuternden Abhandlung, sondern es bestätigt sich auch noch auf andre Weise. In dem Nachlasse von Möbius, der von Herrn Reinhardt in musterhafter Weise geordnet worden ist und der jetzt als Möbiusarchiv auf der Leipziger Sternwarte aufbewahrt wird, befinden sich auch eine Reihe von Notizen über die geometrische Analyse. Es sind das jedenfalls die Entwürfe zu einem Gutachten, das Möbius für die Jablonowskische Gesellschaft abgefasst hat*). Da heisst es unter Anderm:

„Niemand wird sich unter dem inneren Produkt aus einem Punkt in eine gerade Linie, was hier eine Plangrösse heisst, oder unter dem innern Produkt zweier Punkte, einer Kugelgrösse, etwas anschauliches denken können. Die Einführung solcher Scheingrössen erschwerte mir besonders das Studium des letzten Theiles der Abhandlung und es wurde dieser erst dann mir verständlich und geniessbar, als ich fand, dass alle jene Scheingrössen als abgekürzte Ausdrücke gewisser wirklicher Grössen angesehen werden können, und dass man letztere bloss für die ersteren zu substituiren hat, um von der Bedeutnng der betreffenden Formeln eine vollkommene klare Vorstellung zu erhalten."

Uebrigens hebt Möbius auch noch mit Recht hervor, dass Grassmann gar keine Anwendungen seiner inneren Grössen giebt, und erwähnt, dass er selbst,

*) Die betreffenden Manuskripte findet man in dem Möbiusarchiv unter III, B, 8; vgl. die Mittheilungen über dieses Archiv in den Leipziger Berichten von 1889, S. 14 ff.

im Crelleschen Journale Bd. 26 auf S. 26 ff., Sätze entwickelt habe, auf die sich die Rechnung mit Kugelgrössen sehr gut anwenden lasse. In den gesammelten Werken von Möbius stehen diese Sätze in Bd. I auf S. 581—588.

Study ist mit der auf S. 422 f. entwickelten Auffassung des inneren Produktes zweier Punktgrössen nicht einverstanden. Er erkennt zwar an, dass der Wortlaut der geometrischen Analyse zu einer solchen formellen Auffassung nöthigt, er ist aber andrerseits überzeugt, dass Grassmann ursprünglich dieses innere Produkt anders aufgefasst hat, etwa so wie Möbius; nur durch seine Neigung zur Abstraktion sei Grassmann dazu geführt worden, den Begriff jenes Produktes so rein formell zu fassen.

S. 383, Z. 14—11 v. u. Man erinnere sich ausserdem, dass auch von den beiden Gleichungen: $\mathrm{S}P = 0$ und $\mathrm{S}p = 0$ jede aus der andern folgt (Satz 6, S. 351).

S. 387, Z. 7 v. o.: „ihr Quadrat", nämlich das Quadrat von p.

S. 389—394 (§ 22). A und B sind hier Kugelgrössen vom Gewicht Eins.

Im vierten Bande der gesammelten Werke von Möbius ist auf S. 663—697 aus dem Möbiusschen Nachlasse eine Abhandlung abgedruckt, die aus dem Jahre 1862 stammt und den Titel trägt: „Ueber geometrische Addition und Multiplikation". Möbius giebt hierin eine zusammenhängende Darstellung seiner eigenen und der Grassmannschen Untersuchungen über diesen Gegenstand. Entstanden ist diese Arbeit offenbar deshalb, weil sich Möbius von der Grassmannschen Darstellung nicht befriedigt fühlte (vgl. a. a. O. S. 720 f.).

Sachregister

zur Ausdehnungslehre von 1844 und zur geometrischen Analyse.*)

*) Die cursiv gedruckten Seitenzahlen beziehen sich auf die geometrische Analyse; in runde Klammern eingeschlossen sind die Seitenzahlen, die sich auf den Anhang III zu A_1 beziehen (S. 297—312), die Seitenzahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf die beiden Anhänge I und II zu A_1 (S. 293—296).

Berichtigungen.

S. 19 in der Kopfüberschrift, statt A_4 lies A_1.
S. 102, Z. 8 v. o. statt „Gebiete" lies „Systeme".
S. 289, Z. 3 v. u. statt $\frac{c}{\sqrt{c}}$ lies $\frac{c}{\sqrt{C}}$.



HERMANN GRASSMANNS

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE UND PHYSIKALISCHE WERKE.

AUF VERANLASSUNG

DER

MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE

DER KGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

UND UNTER MITWIRKUNG DER HERREN:

JAKOB LÜROTH, EDUARD STUDY, JUSTUS GRASSMANN,
HERMANN GRASSMANN DER JÜNGERE, GEORG SCHEFFERS

HERAUSGEGEBEN

VON

FRIEDRICH ENGEL.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1896.

HERMANN GRASSMANNS

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE UND PHYSIKALISCHE WERKE.

ERSTEN BANDES ZWEITER THEIL:

DIE AUSDEHNUNGSLEHRE VON 1862.

IN GEMEINSCHAFT

MIT

HERMANN GRASSMANN DEM JÜNGEREN

HERAUSGEGEBEN

VON

FRIEDRICH ENGEL.

MIT 37 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1896.

Vorbemerkungen.

Die hiermit erscheinende zweite Ausdehnungslehre Grassmanns bildet den zweiten Theil und damit den Abschluss des ersten Bandes der gesammelten mathematischen und physikalischen Werke. Grassmanns Sohn Hermann hat sie vor dem Drucke einer genauen Durchsicht unterzogen und die Figuren, die an einzelnen Stellen wünschenswerth erschienen, hinzugefügt; er konnte bei dieser Durchsicht eine Reihe von Bemerkungen verwerthen, die ihm Study schon vor längerer Zeit mitgetheilt hatte. An der Drucklegung haben wir beide, Hermann Grassmann der Jüngere und ich in ganz gleicher Weise gearbeitet. Die Anmerkungen hinter dem Texte stammen ebenfalls von uns beiden, und zwar hat H. Grassmann die grösseren unter den von ihm verfassten Anmerkungen mit seinem Namen unterzeichnet. Wie beim ersten Theile so hat auch diesmal F. Meyer in Klausthal die zweite Korrektur mitgelesen; ferner hat uns auch noch Grassmanns zweiter Sohn Max beim Lesen der Korrektur unterstützt.

Gegenüber der ersten Ausdehnungslehre (von 1844) bezeichnet die zweite einen sehr wesentlichen Fortschritt, der sich nicht nur in der grösseren Mannigfaltigkeit des Inhaltes bemerklich macht, sondern namentlich auch in dem ganzen Aufbau. Die Ausdehnungslehre von 1844, so geistreich sie auch ist, steht doch auf keiner ganz sichern Grundlage; die Grundbegriffe, von denen Grassmann darin ausgeht, sind so allgemein und daher so inhaltlos, dass sie zum Aufbau eines wirklichen Systems nicht genügen, und Grassmann muss, um zu einem solchen Systeme zu gelangen, später stillschweigend in seine Grundbegriffe viel mehr hineinlegen, als die ursprünglich von ihm aufgestellten Erklärungen besagen. Ganz anders in der zweiten Ausdehnungslehre. Hier verzichtet Grassmann von vornherein darauf, sein System unabhängig von der Analysis zu entwickeln. Indem er aus der Elementarmathematik das Rechnen mit unbenannten und mit benannten Zahlen voraussetzt, stellt er den Begriff der extensiven Grösse auf und entwickelt sein ganzes System aus diesem Begriffe auf Grund einer Reihe von Definitionen über die Verknüpfung der extensiven Grössen mit den Zahlgrössen und unter einander. Auf diese Weise begründet er die Sätze der ersten Ausdehnungslehre ganz von Neuem und völlig einwandfrei und erweitert zugleich das Gebiet für die Anwendbarkeit seines Kalküls ganz ausserordentlich.

Man kann über die Zweckmässigkeit und über die Vortheile des Rechnens mit extensiven Grössen verschiedener Meinung sein: niemand aber wird leugnen können, dass die Wissenschaft der extensiven Grösse, wie sie Grassmann in seiner zweiten Ausdehnungslehre entwickelt hat, ein kunstvoll und durchaus folgerichtig aufgeführtes Gebäude bildet, das keine Lücken zeigt. Wenn man in einigen der von Grassmann selbst hinzugefügten Anmerkungen auf Aeusserungen stösst, die zum Widerspruch herausfordern, so darf man nicht vergessen, dass diese Anmerkungen nur „zur Erläuterung oder zur Begründung des gewählten Ganges“ dienen sollen (Vorrede S. 4), dass sie also im Zusammenhange des Ganzen nicht nothwendig, sondern nur Beiwerk sind. Wenn andrerseits die Darstellung der Differentialrechnung und der Funktionenlehre im zweiten und dritten Kapitel des zweiten Abschnitts nicht allen Anforderungen an Strenge genügt, so muss man sich erinnern, dass auch diese Auseinandersetzungen mehr beiläufig gemacht werden und dass es eine unbillige Forderung wäre, zu verlangen, ein Anfang der sechziger Jahre erschienenes Werk, das die Rechnung mit extensiven Grössen vollständig und auf ganz neuer Grundlage entwickelt, solle auch eine einwandfreie Darstellung der Differentialrechnung und Funktionentheorie bringen.

Wenn ich sage, dass Grassmanns Wissenschaft der extensiven Grösse ein kunstvoll und durchaus folgerichtig aufgeführtes Gebäude ist, das keine Lücken zeigt, so meine ich damit keineswegs, dass die Darstellung dieser Wissenschaft, die Grassmann in der zweiten Ausdehnungslehre gegeben hat, gar keine Unrichtigkeiten und Versehen enthalte. Im Gegentheil, solcher Unrichtigkeiten und Versehen finden sich eine ganze Reihe, aber sie sind alle von untergeordneter Bedeutung und betreffen niemals den Kern des Ganzen: sie alle sind zur Genüge dadurch erklärt, dass Grassmann bei der anstrengenden Thätigkeit seines Berufes nicht die Zeit fand, jede kleine Einzelheit, jede Verweisung auf frühere Sätze und dergleichen noch einmal genau nachzuprüfen. In Kleinigkeiten konnte er irren, das Ganze übersah und beherrschte er vollständig. Man kann in dieser Hinsicht auch auf Grassmann die Worte anwenden, die Lessing in seinem Laokoon über Winkelmann sagt: „Es ist kein geringes Lob, nur solche Fehler begangen zu haben, die ein Jeder hätte vermeiden können.“

Unter diesen Umständen darf man sich nicht wundern, dass die Zahl der Stellen, an denen eine Aenderung des Textes nöthig war, bei der zweiten Ausdehnungslehre recht gross ist, viel grösser als bei der ersten Ausdehnungslehre, in der die Einzelheiten entschieden sorgfältiger durchgearbeitet sind. Diese Aenderungen schienen uns aber

unvermeidlich, da die zweite Ausdehnungslehre ja nicht zu den Werken gehört, die schon eine tiefgehende Wirkung ausgeübt haben, sondern vielmehr zu denen, die hoffentlich in der Zukunft mehr wirken werden als bisher. Es schien uns daher durchaus geboten, alle Ungenauigkeiten und Flüchtigkeiten zu beseitigen und den Text möglichst lesbar zu gestalten, so weit das die Pietät gegen den Wortlaut des Originals zuliess. Da aber jedermann das Recht hat, zu verlangen, dass er überall in der Lage sei, den ursprünglichen Wortlaut Grassmanns zu vergleichen, so sind alle Abweichungen vom Urtexte in einem Anhange zusammengestellt worden. Dagegen haben wir es nicht für nöthig gehalten, überall die Gründe anzugeben, die uns zu einer Aenderung des Urtextes bewogen haben.

Näher auf den Inhalt der zweiten Ausdehnungslehre einzugehen, ist hier nicht der Ort. Nur die Untersuchungen über das Pfaffsche Problem (Nr. 502—527) mögen hier ausdrücklich erwähnt werden. Diese Untersuchungen sind eine der schönsten Leistungen Grassmanns, aber man hat sie bisher fast vollständig unbeachtet gelassen, obwohl Lie schon vor zwanzig Jahren mehrfach und mit grossem Nachdrucke auf ihre Wichtigkeit hingewiesen hat. Neuerdings hat zwar Forsyth in seiner „Theory of differential equations", Part I, Cambridge 1890, den Grassmannschen Untersuchungen über das Pfaffsche Problem ein Kapitel gewidmet, „um Grassmann Gerechtigkeit zu erweisen", aber auch das hat an dem bisherigen Zustande nichts geändert, weil Forsyth sich im Wesentlichen mit einer Uebersetzung des Grassmannschen Textes begnügt hat, die ohne genaue Kenntniss der Ausdehnungslehre unverständlich bleibt. Ich habe deshalb hier in den Anmerkungen versucht, Grassmanns Untersuchungen über das Pfaffsche Problem in der Sprache der gewöhnlichen Analysis darzustellen, damit jeder sich überzeugen kann, was Grassmann für die Theorie dieses Problems geleistet hat.

Der zweite Theil des ersten Bandes erscheint gerade ein Jahr später, als in den Vorbemerkungen zum ersten Theile angekündigt worden war, ich hatte eben doch die Schwierigkeit der Aufgabe unterschätzt und will es daher unterlassen, einen bestimmten Zeitpunkt für das Erscheinen des zweiten Bandes anzugeben. Nur soviel will ich sagen, dass jetzt auch die Abhandlungen, die Study darin herausgeben wird, druckfertig vorliegen.

Leipzig, im Januar 1896.

Friedrich Engel.



Inhaltsverzeichniss

zum zweiten Theile des ersten Bandes.

Die

Ausdehnungslehre.

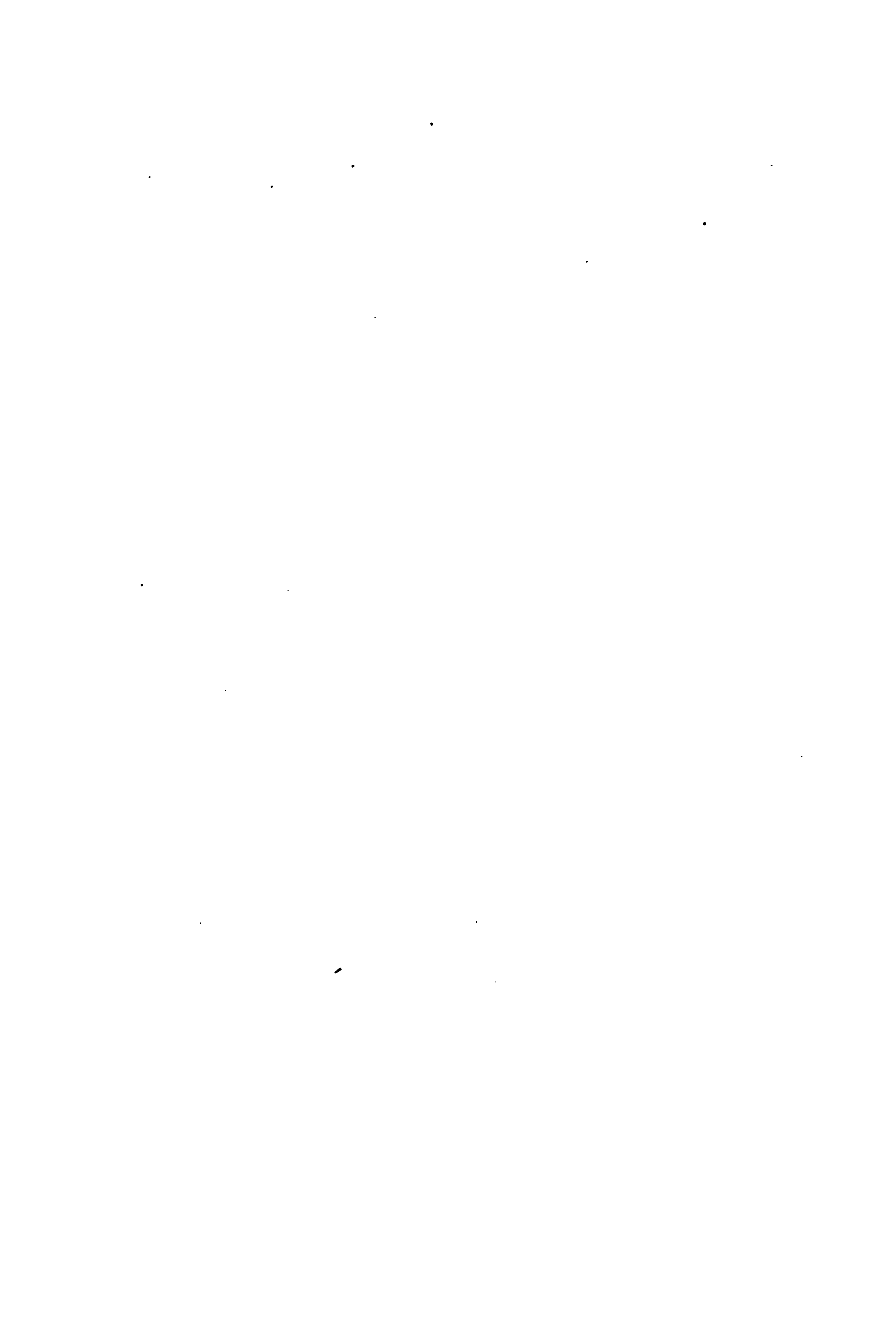
Vollständig und in strenger Form

bearbeitet

von

Hermann Grassmann,
Professor am Gymnasium zu Stettin.

BERLIN, 1862.
VERLAG VON TH. CHR. FR. ENSLIN.
(ADOLPH ENSLIN.)



Vorrede.

Das vorliegende Werk umfasst die gesammte Ausdehnungslehre, eine mathematische Wissenschaft, von welcher ich schon vor siebzehn Jahren den ersten Theil unter dem besonderen Titel: „Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik — Leipzig 1844, Verlag von Otto Wigand“ herausgegeben habe. Ausserdem habe ich in der Vorrede des genannten Werkes die wesentlichsten Gegenstände angedeutet, welche nach meinem Plane den Inhalt des zweiten Theiles ausmachen sollten. Statt nun diesen zweiten Theil als Fortsetzung jenes ersteren zu veröffentlichen, und dadurch jenem Plane gemäss das begonnene Werk abzuschliessen, habe ich es vorgezogen, den in jenem behandelten Stoff auch in dies neue Werk mit aufzunehmen, und so ein zusammenhängendes Ganze zu liefern.

Der Hauptgrund, der mich dazu bewogen hat, ist die Schwierigkeit, welche nach dem Urtheile aller Mathematiker, deren Urtheil ich zu hören Gelegenheit fand, das Studium jenes Werkes wegen seiner, wie sie meinen, mehr philosophischen als mathematischen Form dem Leser bereitet. Und in der That muss diese Schwierigkeit sehr bedeutend gewesen sein, da zwar wohl die geometrischen Abhandlungen, welche ich zur Erläuterung jenes Werkes geschrieben habe (Crelle Bd. 31, 36, 42, 44, 49, 52; Geometrische Analyse, Leipzig 1847) mehrfach von andern Mathematikern erwähnt und benutzt sind, aber das in jenem Werk selbst verarbeitete Gebiet nirgends, wenn ich eine interessante kleine Abhandlung von Kysaeus (Bedeutung und Anwendung der Zahlen in der Geometrie, Siegen 1850) ausnehme, berührt oder zu weiteren Forschungen verwandt ist. Damit hängt auch zusammen, dass nie eine Beurtheilung des Werkes, ja nicht einmal eine Anzeige desselben, ausser im Messkatalog, oder eine Inhaltsangabe, ausser einer von mir selbst verfassten (in Grunert's Archiv Bd. VI), erschienen ist..

Jene Schwierigkeit nun zu heben, war daher eine wesentliche Aufgabe für mich, wenn ich wollte, dass das Buch nicht nur von mir, sondern auch von andern gelesen und verstanden werde. Es konnte aber diese † Schwierigkeit nicht gehoben werden, ohne den Plan des IV

Ganzen wesentlich zu ändern. Denn sie liegt nicht in einer willkürlich gewählten Form, sondern in dem Plane, den ich vor Augen hatte: die Wissenschaft unabhängig von andern Zweigen der Mathematik von Grund aus aufzubauen. Die Ausführung gerade dieses Planes, wenn gleich sie für die Wissenschaft an sich die förderndste sein musste, wie sie es denn auch subjektiv gewesen ist, musste bei jeder Form der Darstellung bedeutende Schwierigkeiten bieten, zumal in einer Wissenschaft, wie die Ausdehnungslehre ist, welche die sinnlichen Anschauungen der Geometrie zu allgemeinen, logischen Begriffen erweitert und vergeistigt, und welche an abstrakter Allgemeinheit es nicht nur mit jedem andern Zweige, wie der Algebra, Kombinationslehre, Funktionenlehre, aufnimmt, sondern sie durch Vereinigung aller in diesen Zweigen zu Grunde liegenden Elemente noch weit überbietet, und so gewissermassen den Schlussstein des gesammten Gebäudes der Mathematik bildet.

Ich musste daher diesen ganzen Plan aufgeben, und habe nun für das vorliegende Werk die übrigen Zweige der Mathematik, wenigstens in ihrer elementaren Entwickelung vorausgesetzt. Ebenso habe ich in der Form der Darstellung gerade den entgegengesetzten Weg eingeschlagen, wie dort, indem ich die strengste mathematische Form, die wir überhaupt kennen, die Euklidische, für das vorliegende Werk angewandt, und Alles, was zur Erläuterung oder zur Begründung des gewählten Ganges diente, in Anmerkungen verwiesen habe.

Eine nothwendige Folge des so veränderten Planes war es, dass die sämmtlichen Resultate des ersten Theiles, so weit sie nicht Anwendungen auf die Physik enthielten, mit in die neue Bearbeitung aufgenommen und nach dem veränderten Plane neu abgeleitet werden mussten (wie dies in Nr. 1—136, 216—329 geschehen ist). Dennoch sind durch die Verschiedenheit der Methoden die beiden Bearbeitungen desselben Stoffes einander so unähnlich geworden, dass man, mit Ausnahme der abgeleiteten Resultate selbst, welche der Natur der Sache nach keine Abweichung zeigen, kaum eine Uebereinstimmung herausfinden wird. Es ist daher auch die alte Bearbeitung durch die neue durchaus nicht überflüssig gemacht. Denn auch die neue Methode ist an sich keineswegs der älteren vorzuziehen, da vielmehr die bis auf die ersten Ideen hinabsteigende und von hier aus ganz unabhängig fortschreitende Methode der ersten Bearbeitung tiefer in das Wesen der Sache hineinführt, und daher in rein wissenschaftlicher Beziehung entschiedene Vorzüge vor der letzteren hat. Diese dagegen wird auf der andern Seite für den Mathematiker, der die anderweitig gewonnenen Schätze mathematischen Wissens bei seinen Studien nicht gerne müssig

liegen sieht, annehmlicher und jedenfalls leichter verständlich sein. So ergänzen und erläutern sich beide Darstellungen gegenseitig.

Die hier gewählte schliesst sich am engsten an die Arithmetik an, doch † in der Weise, dass sie die Zahlgrösse schon als eine stetige V voraussetzt. Wie nun die Arithmetik alle übrigen Grössen aus einer einzigen, im Uebrigen willkürlichen Grösse, die als Einheit gesetzt wird, und mit e bezeichnet sein mag, entwickelt (vergleiche mein Lehrbuch der Arithmetik, 1861 Berlin bei Enslin), so setzt die Ausdehnungslehre in der hier gegebenen Fassung mehrere solche Grössen, $e_1, e_2, \ldots$, von denen keine aus den übrigen ableitbar ist, zum Beispiel e_2 sich nicht aus e_1 dadurch entwickeln lässt, dass e_1 mit irgend einer Zahlgrösse multiplicirt wird, voraus, und betrachtet zunächst die aus jenen Einheiten durch Multiplikation mit Zahlgrössen und Addition dieser Produkte entstandenen Grössen, welche ich extensive Grössen (oder Ausdehnungsgrössen) genannt habe. Hieraus ergeben sich denn leicht die in Kap. 1 vorgetragenen Gesetze der Addition, Subtraktion, Vielfachung (Multiplikation mit Zahlen) und Theilung (Division durch Zahlen).

Es mag auffallend erscheinen, dass diese so einfache Idee, welche im Grunde genommen in weiter nichts besteht, als dass eine Vielfachensumme verschiedener Grössen (als welche hiernach die extensive Grösse erscheint) als selbstständige Grösse behandelt wird, in der That zu einer neuen Wissenschaft sich entfalten soll; und man hat mir denn auch, hieran anknüpfend, den Einwurf gemacht, dass die ganze Ausdehnungslehre nur eine abgekürzte Schreibart sei, ja, dass es fehlerhaft sei, Ausdrücke als Grössen zu behandeln, welche gar keine Grössen seien. Allein dieser Einwurf beruht auf einem gänzlichen Verkennen des Wesens der Mathematik und der Grössen. Auf diese Weise würde die ganze Arithmetik, ja, man kann sagen, die ganze reine Mathematik, bloss eine abgekürzte Schreibart sein; denn die Zahl ist nur ein abgekürzter Ausdruck für eine Summe von Einheiten, das Produkt für eine Summe gleicher Zahlen, die Potenz für ein Produkt solcher, und so weiter; dennoch würde ohne diese abgekürzte Schreibart, oder, um es richtiger auszudrücken, ohne diese Zusammenfassung zu einer Einheit des Begriffes kein Fortschritt denkbar sein. Es würde zum Beispiel ohne diese Zusammenfassung nicht möglich sein, zu dem Begriffe der wegnehmenden Rechnungsarten (Subtrahiren, Dividiren, Radiciren, Logarithmiren), und zu den durch sie neu sich entwickelnden Zahlformen: der negativen, gebrochenen, irrationalen und imaginären, zu gelangen. Es kommt überall nur darauf an, dass man auch wirklich dasjenige zusammenfasse, was seinem Wesen nach eine Einheit bildet,

und was daher auch zu neuen Resultaten führen muss, zu denen man ohne jene Zusammenfassung nicht gelangen würde.

Die Ausdehnungslehre führt nun in der That zu einem unerschöpflichen Reichthum solcher Beziehungen, welche ohne Bildung jener Begriffseinheit, welche in der extensiven Grösse erscheint, auf keine Weise aufzufassen oder abzuleiten wären. Ob man diesem Begriffe den Namen einer Grösse zugesteht, ist an und für sich von sehr untergeordneter VI Bedeutung, da es hier auf Namen wenig ankommt. Die Frage † ist nur die, ob dieser neue Begriff mit dem allgemeinen Begriffe der Grösse wirklich so zusammenhänge, dass sie ihrem Wesen nach zu einem Gesammtbegriffe sich zusammenschliessen, und dass eine zwischen beiden Gebieten gezogene Gränzlinie das Zusammengehörige willkürlich und der Sache widersprechend zertrennen würde. Ist letzteres der Fall, so wäre es sogar fehlerhaft, diesem neuen Begriffe nicht den Namen der Grösse beizulegen.

Nun glaube ich in der That, dass zwischen dem, was ich extensive Grösse genannt habe, und zwischen allgemeinen Zahlgrössen und namentlich der imaginären Grösse $(a + bi)$ eine so innige Beziehung herrscht, dass es widersinnig wäre, die eine als Grösse zu betrachten und die andere nicht, da ja in der That die imaginäre Grösse ebenso aus zwei Einheiten 1 und $i = \sqrt{-1}$ durch reelle Zahlkoefficienten ableitbar ist, wie die extensiven Grössen aus zwei oder mehr Einheiten ableitbar sind (s. u. Nr. 413 Anm.). So scheint es mir also vollständig gerechtfertigt, wenn ich die extensive Grösse als Grösse bezeichne. Aber ich gehe noch weiter, indem ich sie nicht nur als Grösse überhaupt, sondern auch als einfache Grösse bezeichne. Ihr treten nämlich gegenüber andere Grössen, welche den Charakter zusammengesetzter Grössen ebenso entschieden an sich tragen, wie jene den der einfachen, und welche erst durch Addition höherer Gebilde und besonders durch die Betrachtung der Quotienten und der Funktionen hineintreten (vgl. Nr. 77, 377 und 364).

Ich fahre nun fort, den Gang der Entwickelung in dem vorliegenden Werke übersichtlich zu verfolgen.

An die Addition, Subtraktion, Vielfachung und Theilung schliesst sich (in Kap. 2) der allgemeine Begriff der Multiplikation extensiver Grössen an, welcher auf die Beziehung der Multiplikation zur Addition (nämlich darauf, dass man statt der Summe die Summanden multipliciren darf) gegründet ist. Hiernach führt die Multiplikation der genannten Grössen auf die ihrer Einheiten $(e_1, e_2, \ldots)$ zurück, und aus der Betrachtung der Produkte dieser Einheiten ergeben sich dann verschiedene Gattungen der Multiplikation. Es gelingt nun, aus diesen

Gattungen zwei auszusondern, auf welche sich alle übrigen zurückführen lassen.

Die eine derselben fällt in ihren Gesetzen ganz zusammen mit der gewöhnlichen Multiplikation in der Algebra und ist daher von mir die algebraische genannt worden. Aber sie ist in Bezug auf die durch sie erzeugten Grössen bei weitem die verwickeltste und kann nur durch Betrachtung der Funktionen zur vollen Klarheit gebracht werden, weshalb ich sie auf den zweiten Abschnitt dieses Werkes verwiesen habe. Die Bezeichnung für diese algebraische Multiplikation muss der Natur der Sache nach mit der gewöhnlichen Bezeichnung der Multiplikation zusammenfallen, da es widersinnig wäre, Verknüpfungen, welche in allen Beziehungen denselben Gesetzen unterliegen, verschieden zu bezeichnen.

Die zweite jener Multiplikationen, welche im dritten Kapitel behandelt ist, zeigt sich als die für die Ausdehnungslehre charakteristische, und sie wesentlich weiter fördernde, indem sie die † verschiedenen VII Stufen einfacher Grössen liefert, welche in der Ausdehnungslehre hervortreten. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass zwei einfache Faktoren des Produktes nur vertauscht werden dürfen, wenn man zugleich das Vorzeichen ($+$ $-$) des Produktes umkehrt. Da zwar für diese Multiplikation die Beziehung zur Addition dieselbe ist, wie bei jeder Multiplikation, aber die übrigen Gesetze derselben wesentlich von denen der gewöhnlichen Multiplikation abweichen, so war es nothwendig, sie durch die Bezeichnung zu unterscheiden. Ich habe in diesem Werke dafür die Bezeichnung durch eckige Klammern, die das Produkt umschliessen, gewählt, so dass also $[ab] = -[ba]$ ist, wenn a und b einfache Faktoren dieses Produktes sind. Es entfaltet sich dies Produkt zu einer ausserordentlichen Mannigfaltigkeit von Erscheinungsformen, und lässt in reicher Fülle Beziehungen hervortreten, welche auf alle Zweige der Mathematik ein unerwartet neues Licht werfen, so dass es den eigentlichen Mittelpunkt der neuen Wissenschaft bildet. Nachdem der Begriff der Grössen-Ergänzung hinzugekommen ist, tritt jenes Produkt in einer ganz neuen Eigenthümlichkeit, als inneres Produkt (Kap. 4) hervor, so dass es in dieser Form aus dem Bereiche der in der ersten Bearbeitung dargestellten Gegenstände ganz heraustritt. (Vergleiche jedoch die Vorrede zu jenem Werke p. *XI* {S. 11 f. dieser Ausgabe}). Mit Anwendungen auf die Geometrie (Kap. 5) schliesst der erste Abschnitt des Werkes.

In dem zweiten Abschnitte treten nun die zusammengesetzten Grössen hervor, welche wir im Ganzen als Funktionen einfacher Grössen charakterisiren können. Das erste Kapitel dieses Abschnittes behandelt die Funktionen im Allgemeinen, woran sich die algebraische Multi-

plikation und Division anschliesst, das zweite die Differenzialrechnung, das dritte die Lehre von den Reihen und das vierte endlich die Integralrechnung, und zwar alle diese nur in sofern als extensive Grössen in Betracht gezogen werden. Doch glaube ich, dass auch die entsprechenden Zweige der gewöhnlichen (auf Zahlgrössen sich beziehenden) Mathematik und namentlich die Integralrechnung durch diese Darstellung nicht nur wesentlich vereinfacht, sondern auch mannigfach ergänzt und weiter gefördert sind.

Da der Stoff seit der ersten Bearbeitung bedeutend angewachsen ist, so habe ich die Anwendungen auf die Physik ganz weglassen müssen; doch hoffe ich, wenn mir Zeit und Kraft dazu gestattet ist, eine mathematische Bearbeitung der wichtigsten Zweige der Physik in selbstständigen Werken folgen zu lassen, in denen ich von der hier vorgetragenen Wissenschaft Anwendung machen werde.

Ich habe mich eifrig bemüht, überflüssige Kunstausdrücke zu vermeiden und mich auf das möglichst geringste Maass neuer Kunstausdrücke zu beschränken; aber, da man nun einmal ohne Worte nicht reden kann, und daher auch zu neuen Begriffen entweder neue Wortbildungen oder neue Wortverbindungen gebraucht, oder alten Worten ein neues Gepräge verleihen muss, so blieb doch noch eine ziemliche VIII Menge unvermeidlicher Kunstausdrücke † übrig. Um das Verständniss zu erleichtern, habe ich zunächst die Kunstausdrücke so gewählt, dass sie, wie ich hoffe, durch ihre Bildung selbst unmittelbar an den durch sie dargestellten Begriff erinnern, und dann habe ich am Schlusse ein alphabetisches Verzeichniss derselben mit Hinweisung auf die Stellen, wo sie erklärt sind, gegeben.

Es bleibt mir noch übrig, auf verwandte Bestrebungen anderer Mathematiker hinzuweisen. Es beziehen sich diese fast ohne Ausnahme auf diejenigen Gegenstände, welche ich als Anwendungen der Ausdehnungslehre auf die Geometrie bezeichnet habe (also auf die §§ 24, 28—30, 37—40, 56, 74—79, 91, 92, 101, 102, 114—119, 144—148, 159—170 der Ausdehnungslehre von 1844 und auf die Nrn. 216—347 des vorliegenden Werkes). Bei der ersten Bearbeitung (1844) war mir unter den hier einschlagenden Arbeiten nur das berühmte Werk des Begründers der geometrischen Analyse: der barycentrische Calcul von Möbius, bekannt, welches die Addition der Punkte lehrte. Hingegen waren mir die Arbeiten über die geometrische Addition der Strecken (von gegebener Länge und Richtung), sowie über die Bedeutung der imaginären Grössen unbekannt geblieben.

Die letztere wurde in ihrer Vollständigkeit zuerst in einer Ab-

handlung von Gauss (Göttinger gelehrte Anzeigen 1831) dargestellt, auf welche mich Gauss auf Veranlassung der den gleichen Gegenstand behandelnden Stelle in der Vorrede zur Ausdehnungslehre (p. *XI* bis *XIV* {S. 12 bis 14 dieser Ausgabe}) brieflich aufmerksam machte. Schon in dieser Darstellung des Imaginären lag der Begriff der geometrischen Addition von Strecken in Einer Ebene. Der erste, welcher die geometrische Addition der Strecken in ihrer ganzen Allgemeinheit gelehrt hat, scheint Bellavitis gewesen zu sein, indem er schon 1835 (Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto, 5° volume) den hierher gehörigen Calcul aufstellte (vgl. unten Nr. 227 Anm.).

Unabhängig davon entwickelte Möbius (1843) in seiner Mechanik des Himmels die Gesetze der geometrischen Addition der Strecken und wandte sie auf die Probleme der Mechanik des Himmels an. Nach dem Erscheinen meiner Ausdehnungslehre (von 1844) mehrten sich die Arbeiten auf dem Gebiete der geometrischen Analyse. Ins Besondere waren es wieder Möbius und Bellavitis, welche die Wissenschaft wesentlich weiter förderten und auch zum Verständniss und zur weiteren Verbreitung der von mir vorgetragenen geometrischen Rechnungsmethode in bedeutender Weise beitrugen. Dazu kamen nun noch meine eigenen Arbeiten über diesen Gegenstand, welche theils in meiner Schrift: „Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik, gekrönte Preisschrift, Leipzig 1847", welche Möbius durch eine daran angeschlossene lichtvolle Darstellung den Mathematikern zugänglicher zu machen suchte, theils in Crelle's Journal (Bd. 31, 36, 42, 44, 49, 52) niedergelegt sind. Ferner trat ein Jahr nach dem Erscheinen meiner linealen Ausdehnungslehre Saint-Venant mit der geometrischen Multiplikation der Strecken hervor (Comptes † rendus, IX Tome 21 p. 620 sq., 15. Septembre 1845), welche identisch ist mit der von mir in jenem Werke dargestellten äusseren Multiplikation der Strecken (§ 28—40). Offenbar kannte er dies Werk nicht, und ich schickte daher zwei Exemplare desselben an Cauchy mit der Bitte, eins davon an Saint-Venant abzugeben, dessen Adresse mir unbekannt war.

Späterhin veröffentlichte Cauchy in mehreren Aufsätzen, welche in den Comptes rendus von 1853*) abgedruckt sind, eine Methode, um vermittelst gewisser symbolischer Grössen, welche er clefs algébriques nennt, algebraische Gleichungen und verwandte Probleme zu lösen; eine Methode, welche genau mit der in meiner Ausdehnungslehre von 1844 (§ 45, 46 und 93) dargestellten übereinstimmt. Ich bin weit davon entfernt, den berühmten Mathematiker eines Plagiats beschul-

*) {Bd. 36, S. 70—75, 129—136, 161—169.}

digen zu wollen, doch glaubte ich, es mir und der Sache schuldig zu sein, dass ich deshalb eine Prioritätsreclamation an die Pariser Akademie richtete. Allein die Commission, welcher diese Reclamation im April 1854 zur Prüfung und Berichterstattung übergeben wurde (Comptes rendus Tome 38 p. 743 f.), hat nie etwas von sich hören lassen, und auch Cauchy hat seitdem über den Gegenstand nichts mehr veröffentlicht.

Es sind die erwähnten Abhandlungen Cauchy's die einzigen, welche ausserhalb des Gebietes der Geometrie einen Berührungspunkt mit meiner Ausdehnungslehre (von 1844) darbieten. Und da auch diese Abhandlungen einen selbstständigen Ursprung beanspruchen, so scheint es, als ob der eigentliche Kern meines Werkes, abgesehen von dem geometrischen Beiwerk desselben, nirgends zu verwandten Bestrebungen angeregt habe. Und dennoch bin ich an dies neue Werk, welches das alte in sich aufnehmen und zum Abschlusse bringen sollte, mit frischem Muthe herangegangen.

Denn ich bin der festen Zuversicht, dass die Arbeit, welche ich auf die hier vorgetragene Wissenschaft verwandt habe, und welche einen bedeutenden Zeitraum meines Lebens und in demselben die gespannteste Anstrengung meiner Kräfte in Anspruch genommen hat, nicht verloren sein werde. Zwar weiss ich wohl, dass die Form, die ich der Wissenschaft gegeben, eine unvollkommene ist und sein muss. Aber ich weiss auch und muss es aussprechen, auch auf die Gefahr hin, für anmaassend gehalten zu werden, — ich weiss, dass wenn auch dies Werk noch neue siebzehn Jahre oder länger hinaus müssig liegen bleiben sollte, ohne in die lebendige Entwickelung der Wissenschaft einzugreifen, dennoch eine Zeit kommen wird, wo es aus dem Staube der Vergessenheit hervorgezogen werden wird, und wo die darin niedergelegten Ideen ihre Frucht tragen werden. Ich weiss, dass, wenn es mir auch nicht gelingt, in einer bisher vergeblich von mir ersehnten Stellung einen Kreis von Schülern um mich zu sammeln, welche ich mit jenen Ideen befruchten und zur weiteren Entwickelung und Bereicherung derselben anregen könnte, dennoch einst diese Ideen, wenn auch in veränderter Form, neu erstehen und mit der Zeitentwickelung X in lebendige Wechselwirkung † treten werden. Denn die Wahrheit ist ewig, ist göttlich; und keine Entwickelungsphase der Wahrheit, wie geringe auch das Gebiet sei, was sie umfasst, kann spurlos vorübergehen; sie bleibt bestehen, wenn auch das Gewand, in welches schwache Menschen sie kleiden, in Staub zerfällt.

Stettin, den 29. August 1861.

Erster Abschnitt.

Die einfachen Verknüpfungen extensiver Grössen.

Kapitel 1. **Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung extensiver Grössen.**

§ 1. **Begriffe und Rechnungsgesetze.**

1. Erklärung. Ich sage, eine Grösse a sei aus den Grössen $b, c, \ldots$ durch die Zahlen $\beta, \gamma, \ldots$ abgeleitet, wenn

$$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$

ist, wo $\beta, \gamma, \ldots$ reelle Zahlen sind, gleichviel ob rational oder irrational, ob gleich Null oder verschieden von Null. Auch sage ich, a sei in diesem Falle numerisch abgeleitet aus $b, c, \ldots$.

2. Erklärung. Ferner sage ich, dass zwei oder mehrere Grössen $a, b, c, \ldots$ in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, oder dass der Verein der Grössen $a, b, c, \ldots$ einer Zahlbeziehung unterliege, wenn irgend eine derselben sich aus den übrigen numerisch ableiten lässt, also wenn sich zum Beispiel

$$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$

setzen lässt, wo $\beta, \gamma, \ldots$ reelle Zahlen sind. Besteht der Verein nur aus Einer Grösse a, so soll nur in dem Falle gesagt werden, der Verein unterliege einer Zahlbeziehung, wenn $a = 0$ ist.

Wenn *zwei* Grössen a und b, von denen keine null ist, in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so bezeichne ich dies durch

$$a \equiv b,$$

und sage a sei kongruent b.

Anmerkung. Zwei reelle Zahlen stehen also immer, zwei verschieden benannte Grössen stehen nie in einer Zahlbeziehung zu einander. Null ist aus jeder Grössenreihe numerisch ableitbar, nämlich durch die Zahlen $0, 0, \ldots$. Mehrere Grössen also, unter denen eine null ist, stehen stets in einer Zahlbeziehung zu einander. 2

Das Zeichen ($\equiv$) ist in ähnlichem Sinne von Möbius (in seinem barycentrischen Kalkül) gebraucht. Die Benennung (kongruent) gründet sich auf geo-

metrische Betrachtungen. Zur Bezeichnung abstrakter Beziehungen ist sie von Gauss gebraucht.

3. Erklärung. Einheit nenne ich jede Grösse, welche dazu dienen soll, um aus ihr eine Reihe von Grössen numerisch abzuleiten, und zwar nenne ich die Einheit eine ursprüngliche, wenn sie nicht aus einer anderen Einheit abgeleitet ist. Die Einheit der Zahlen, also die Eins, nenne ich die absolute Einheit, alle übrigen relative. Null soll nie als Einheit gelten.

4. Erklärung. Ein System von Einheiten nenne ich jeden Verein von Grössen, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und welche dazu dienen sollen, um aus ihnen durch beliebige Zahlen andere Grössen abzuleiten.

Anm. Hierher gehört auch der Fall, wo der Verein nur aus einer Einheit besteht (die jedoch nach Nr. 3 nicht null sein darf).

5. Erklärung. Extensive Grösse nenne ich jeden Ausdruck, welcher aus einem Systeme von Einheiten (welches sich jedoch nicht auf die absolute Einheit beschränkt) durch Zahlen abgeleitet ist, und zwar nenne ich diese Zahlen die zu den Einheiten gehörigen Ableitungszahlen jener Grösse; zum Beispiel ist das Polynom

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots,$$

oder

$$\Sigma \alpha e \text{ oder } \Sigma \alpha_r e_r,$$

wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ reelle Zahlen sind, und $e_1, e_2, \ldots$ ein System von Einheiten bilden, eine extensive Grösse, und zwar ist dieselbe aus den Einheiten $e_1, e_2, \ldots$ durch die zugehörigen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ abgeleitet. Nur wenn das System bloss aus der absoluten Einheit (1) besteht, ist die abgeleitete Grösse keine extensive, sondern eine Zahlgrösse.

Den Ausdruck *Grösse* überhaupt werde ich nur für diese beiden Gattungen derselben festhalten. Wenn die extensive Grösse aus den *ursprünglichen Einheiten* abgeleitet werden kann, so nenne ich jene Grösse eine extensive Grösse erster Stufe.

3 Anm. Aus der Elementarmathematik setzen wir die Rechnungsgesetze für Zahlen, und auch für die sogenannten „benannten Zahlen", das heisst, für die aus Einer Einheit abgeleiteten extensiven Grössen voraus; jedoch nur für den Fall, dass jene Einheit eine ursprüngliche ist.

6. Erklärung. Zwei extensive Grössen, die aus demselben System von Einheiten abgeleitet sind, addiren, heisst, ihre zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen addiren, das heisst,

$$\Sigma \alpha e + \Sigma \beta e = \Sigma (\alpha + \beta) e.$$

7. Erklärung. Eine extensive Grösse von einer andern, aus

demselben Systeme von Einheiten abgeleiteten **subtrahiren**, heisst die Ableitungszahlen der ersteren von den zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen der letzteren subtrahiren, das heisst,

$$\Sigma \alpha e - \Sigma \beta e = \Sigma (\alpha - \beta) e.$$

Anm. In Bezug auf die Klammerbezeichnung halte ich die Bestimmung fest, dass ein ohne Klammern geschriebenes Polynom oder Produkt aus mehreren Faktoren gleichbedeutend ist dem mit Klammern geschriebenen Ausdruck, in welchem alle Klammern gleich zu Anfang eintreten, also

$$a + b + c = (a + b) + c, \quad abc = (ab) c$$

und so weiter.

8. *Für extensive Grössen a, b, c gelten die Fundamentalformeln:*

1) $a + b = b + a,$

2) $a + (b + c) = a + b + c,$

3) $a + b - b = a,$

4) $a - b + b = a.$

Beweis. Es sei

$$a = \Sigma \alpha e, \quad b = \Sigma \beta e, \quad c = \Sigma \gamma e,$$

so ist

1)
$$\begin{aligned} a + b &= \Sigma \alpha e + \Sigma \beta e = \Sigma (\alpha + \beta) e && \text{[nach 6]} \\ &= \Sigma (\beta + \alpha) e = \Sigma \beta e + \Sigma \alpha e && \text{[6]} \\ &= b + a. \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} a + (b + c) &= \Sigma \alpha e + (\Sigma \beta e + \Sigma \gamma e) \\ &= \Sigma \alpha e + \Sigma (\beta + \gamma) e && \text{[6]} \\ &= \Sigma (\alpha + (\beta + \gamma)) e && \text{[6]} \\ &= \Sigma (\alpha + \beta + \gamma) e \\ &= \Sigma (\alpha + \beta) e + \Sigma \gamma e && \text{[6]} \\ &= \Sigma \alpha e + \Sigma \beta e + \Sigma \gamma e && \text{[6]} \\ &= a + b + c. \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} a + b - b &= \Sigma \alpha e + \Sigma \beta e - \Sigma \beta e \\ &= \Sigma (\alpha + \beta) e - \Sigma \beta e && \text{[6]} \\ &= \Sigma (\alpha + \beta - \beta) e && \text{[7]} \\ &= \Sigma \alpha e = a. \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} a - b + b &= \Sigma \alpha c - \Sigma \beta c + \Sigma \beta c \\ &= \Sigma (\alpha - \beta) e + \Sigma \beta e && \text{[7]} \\ &= \Sigma (\alpha - \beta + \beta) e && \text{[6]} \\ &= \Sigma \alpha e = a. \end{aligned}$$

9. *Für extensive Grössen gelten die sämmtlichen Gesetze algebraischer Addition und Subtraktion.*

Beweis. Denn diese Gesetze können, wie bekannt, aus den vier Fundamentalformeln in Nr. 8 abgeleitet werden.

10. Erklärung. Eine extensive Grösse mit einer Zahl multipliciren heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen mit dieser Zahl multipliciren, das heisst,

$$\Sigma \alpha e \,.\, \beta = \beta \,.\, \Sigma \alpha e = \Sigma(\alpha\beta)\, e.$$

11. Erklärung. Eine extensive Grösse durch eine Zahl, die nicht gleich Null ist, dividiren, heisst, ihre sämmtlichen Ableitungszahlen durch diese Zahl dividiren, das heisst,

$$\Sigma \alpha e : \beta = \sum \frac{\alpha}{\beta} e.$$

12. *Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen* (a, b) *durch Zahlen* (β, γ) *gelten die Fundamentalformeln:*

1) $$a\beta = \beta a,$$

2) $$a\beta\gamma = a(\beta\gamma),$$

3) $$(a + b)\gamma = a\gamma + b\gamma,$$

4) $$a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma,$$

5) $$a \,.\, 1 = a,$$

6) $$a\beta = 0$$

dann und nur dann, wenn entweder $a = 0$, *oder* $\beta = 0$,

7) $$a : \beta = a \frac{1}{\beta},$$

wenn $\beta \gtrless 0$ *ist*).*

Beweis. Es sei $a = \Sigma \alpha e$, $b = \Sigma \beta e$, wo die Summe sich auf das System der Einheiten $e_1, \ldots e_n$ bezieht, so ist

5 1) $a\beta = \beta a$ nach der Definition [s. Formel in Nr. 10].

2) $a\beta\gamma = (\Sigma \alpha e)\beta\gamma = (\Sigma(\alpha\beta) e)\gamma$ [10]

$= \Sigma(\alpha\beta\gamma)\, e$ [10]

$= \Sigma \alpha(\beta\gamma)\, e = (\Sigma \alpha e)(\beta\gamma)$ [10]

$= a(\beta\gamma).$

*) Das Zeichen $\gtrless$ zusammengesetzt aus $>$ und $<$ soll ungleich bedeuten.



3) $(a+b)\gamma = (\Sigma\alpha e + \Sigma\beta e)\gamma = \Sigma(\alpha+\beta)e.\gamma$ [6]

$= \Sigma(\alpha+\beta)\gamma e$ [10]

$= \Sigma(\alpha\gamma+\beta\gamma)e = \Sigma(\alpha\gamma)e + \Sigma(\beta\gamma)e$ [6]

$= \Sigma\alpha e.\gamma + \Sigma\beta e.\gamma$ [10]

$= a\gamma + b\gamma$.

4) $a(\beta+\gamma) = \Sigma\alpha e.(\beta+\gamma) = \Sigma\alpha(\beta+\gamma)e$ [10]

$= \Sigma(\alpha\beta+\alpha\gamma)e = \Sigma\alpha\beta e + \Sigma\alpha\gamma e$ [6]

$= \Sigma\alpha e.\beta + \Sigma\alpha e.\gamma$ [10]

$= a\beta + a\gamma$.

5) $a.1 = \Sigma\alpha e.1 = \Sigma\alpha e$ [10]

$= a$.

6) a) wenn $a = 0$ ist, so ist

$$a\beta = 0.\beta = 0,$$

b) wenn $\beta = 0$ ist, so ist

$a\beta = a.0 = \Sigma\alpha e.0 = \Sigma 0e$ [10]

$= \Sigma 0$ [5. Anm.]

$= 0,$

c) wenn $a\beta = 0$, so hat man

$0 = a\beta = \Sigma\alpha e.\beta = \Sigma\alpha\beta e$ [10].

Hieraus folgt nun, dass alle Produkte $\alpha\beta$, das heisst $\alpha_1\beta$, $\alpha_2\beta$, ..., $\alpha_n\beta$ null sein müssen. Denn gesetzt, es wäre eins derselben, zum Beispiel $\alpha_1\beta$ nicht null, so hätte man aus der Gleichung

$$0 = \alpha_1\beta e_1 + \alpha_2\beta e_2 + \cdots + \alpha_n\beta e_n$$

durch Multiplikation mit $\frac{1}{\alpha_1\beta}$ die Gleichung

$$0 = e_1 + \frac{\alpha_2\beta}{\alpha_1\beta}e_2 + \cdots + \frac{\alpha_n\beta}{\alpha_1\beta}e_n$$

oder

$$e_1 = \left(-\frac{\alpha_2\beta}{\alpha_1\beta}\right)e_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n\beta}{\alpha_1\beta}\right)e_n,$$

das heisst, e_1 wäre aus $e_2, \ldots e_n$ numerisch ableitbar, oder, zwischen den Einheiten $e_1, \ldots e_n$ bestände eine Zahlbeziehung, † was gegen die 6 Annahme ist, da $e_1, e_2, \ldots e_n$ ein System von Einheiten bilden sollen. Somit ist

$$0 = \alpha_1\beta = \alpha_2\beta = \cdots = \alpha_n\beta,$$

also entweder $\beta = 0$, oder, wenn $\beta \gtrless 0$ ist,



$$0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n,$$

also

$$a = \Sigma \alpha e = \Sigma 0 e = \Sigma 0 \qquad [5. \text{ Anm.}]$$
$$= 0,$$

das heisst, wenn $a\beta = 0$ ist, so muss entweder β oder a gleich Null sein.

7) $$a : \beta = \Sigma \alpha e : \beta = \sum \frac{\alpha}{\beta} e, \qquad [11]$$

da β nicht null ist,

$$= \sum \left(\alpha \frac{1}{\beta}\right) e = \Sigma \alpha e \,.\, \frac{1}{\beta} \qquad [10]$$
$$= a \frac{1}{\beta}.$$

13. *Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen durch Zahlen gelten die algebraischen Gesetze der Multiplikation und Division.*

Beweis. Denn aus den Fundamentalformeln (1 bis 6) des vorhergehenden Satzes folgen in bekannter Weise die sämmtlichen algebraischen Gesetze der Multiplikation, und durch Formel (7) desselben Satzes wird die Division, ebenso wie in der Algebra, auf die Multiplikation zurückgeführt. Also gelten auch die algebraischen Gesetze der Division für die Division extensiver Grössen durch Zahlen.

§ 2. Zusammenhang zwischen den aus einem System von Einheiten ableitbaren Grössen.

14. Erklärung. Die Gesammtheit der Grössen, welche aus einer Reihe von Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ numerisch ableitbar sind, nenne ich das aus jenen Grössen ableitbare Gebiet (das Gebiet der Grössen $a_1, \ldots a_n$), und zwar nenne ich es ein Gebiet n-ter Stufe, wenn jene Grössen von erster Stufe (das heisst, aus n ursprünglichen Einheiten numerisch ableitbar) sind, *und sich das Gebiet nicht aus weniger als n solchen Grössen ableiten lässt.* Ein Gebiet, welches ausser der Null keine Grösse enthält, heisst ein Gebiet nullter Stufe.

7 Anm. Das Gebiet erster Stufe ist also die Gesammtheit der Vielfachen einer Grösse erster Stufe, wenn man nämlich unter *Vielfachem einer Grösse* jedes Produkt der Grösse mit einer reellen Zahlgrösse versteht.

15. Erklärung. Zwei Gebiete heissen identisch, wenn jede Grösse des ersten Gebietes zugleich Grösse des zweiten ist, und umgekehrt. Wenn jede Grösse eines Gebietes (A) zugleich Grösse eines andern (B) ist (ohne dass das Umgekehrte nothwendig stattfindet), so nenne ich beide Gebiete einander incident, und sage dann, das erste Gebiet (A) sei dem zweiten untergeordnet, das zweite dem ersten

übergeordnet. Die Gesammtheit der Grössen, welche zweien oder mehreren Gebieten zugleich angehören, heisst ihr gemeinschaftliches Gebiet, und die Gesammtheit der Grössen, welche sich aus den Grössen zweier oder mehrerer Gebiete numerisch ableiten lassen, ihr verbindendes Gebiet.

Anm. Ist zum Beispiel das Gebiet A aus den Einheiten e_1, e_2, e_3 abgeleitet und das Gebiet B aus den Einheiten e_2, e_3, e_4, so ist das den Gebieten A und B gemeinschaftliche Gebiet das aus den Einheiten e_2, e_3 abgeleitete, und das A und B verbindende Gebiet das aus den Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4 abgeleitete.

16. *Zwischen n Grössen $a_1, \ldots a_n$ herrscht dann und nur dann eine Zahlbeziehung, wenn sich eine Gleichung*

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$$

aufstellen lässt, in welcher die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ nicht alle zugleich null sind.

Beweis. Denn, wenn in der Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$$

auch nur Eine der Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ von Null verschieden ist, zum Beispiel α_1, so ist die mit dieser Zahl verbundene Grösse a_1 aus den übrigen numerisch ableitbar; denn dann ist

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} a_n.$$

Umgekehrt, wenn irgend eine Zahlbeziehung zwischen den Grössen $a_1, \ldots a_n$ herrscht, zum Beispiel

$$a_1 = \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \cdots + \beta_n a_n,$$

so wird

$$-a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \cdots + \beta_n a_n = 0,$$

eine Gleichung, in welcher wenigstens der Koefficient von a_1 ungleich Null ist. 8

17. *Wenn n Grössen in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, und sie nicht alle null sind, so muss sich aus ihnen ein Verein von weniger als n Grössen aussondern lassen, welcher keiner Zahlbeziehung unterliegt, und aus dem die übrigen Grössen numerisch ableitbar sind.*

Beweis. Es seien $a_1, \ldots a_n$ die in einer Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen, so muss (nach Nr. 2) sich eine derselben aus den übrigen numerisch ableiten lassen; dies sei a_n und sei etwa

$$a_n = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1}.$$

Herrscht nun zwischen den Grössen $a_1, \ldots a_{n-1}$ abermals eine Zahlbeziehung, so wird wieder eine derselben etwa a_{n-1} aus den übrigen

$a_1, \ldots a_{n-2}$ numerisch ableitbar sein müssen. Es sei

$$a_{n-1} = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_{n-2} a_{n-2}.$$

Führt man diesen Ausdruck für a_{n-1} in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_{n-1}\beta_1) a_1 + \cdots + (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}\beta_{n-2}) a_{n-2},$$

also ist dann auch a_n aus $a_1, \ldots a_{n-2}$ numerisch ableitbar.

Dies Verfahren wird man fortsetzen können, so lange als noch zwischen den jedesmal übrig bleibenden Grössen eine Zahlbeziehung stattfindet. Man wird also zuletzt entweder zu einer Schaar von mehreren Grössen kommen, die in keiner Zahlbeziehung mehr zu einander stehen, und aus denen die übrigen numerisch ableitbar sind, oder es bleibt zuletzt nur Eine Grösse, etwa a_1, übrig, aus der alle übrigen numerisch ableitbar sind. Im letztern Falle darf diese Eine Grösse a_1 nicht null sein, weil sonst alle übrigen Grössen, als numerisch daraus ableitbar, auch null sein würden, was der Annahme widerstreitet. In beiden Fällen gelangt man also (Nr. 2) zu einem Vereine, der keiner Zahlbeziehung mehr unterliegt, und aus dem alle übrigen der n Grössen $a_1, \ldots a_n$ numerisch ableitbar sind.

18. *Wenn in einem Verein von Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ die erste a_1* 9 *nicht null ist, und keine der folgenden † sich aus den vorhergehenden numerisch ableiten lässt, so unterliegt der Verein keiner Zahlbeziehung.*

Beweis. Denn gesetzt, er unterliege einer Zahlbeziehung, so müsste (nach 16) zwischen den Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ eine Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$$

aufgestellt werden können, in welcher nicht alle Koefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ zugleich null sind. Es sei α_r der letzte unter diesen Koefficienten, welcher von Null verschieden ist, so erhält man

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_r a_r = 0,$$

also, wenn r grösser als 1 ist,

$$a_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_r} a_2 - \cdots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} a_{r-1},$$

das heisst, a_r ist aus den vorhergehenden Grössen $a_1, \ldots a_{r-1}$ numerisch ableitbar, gegen die Voraussetzung. Ist aber $r = 1$, so hat man

$$\alpha_1 a_1 = 0;$$

also, da dann α_1 ungleich Null angenommen ist,

$$a_1 = 0,$$

was gleichfalls der Voraussetzung widerstreitet. Also kann keine Zahlbeziehung zwischen den Grössen $a_1, \ldots a_n$ herrschen.

19. *Wenn eine Grösse a_1 aus n Grössen $b_1, b_2, \ldots b_n$ numerisch ableitbar ist, und dabei die zu b_1 gehörige Ableitungszahl ungleich Null ist, so ist das aus den n Grössen $b_1, b_2, \ldots b_n$ ableitbare Gebiet identisch mit dem aus den n Grössen $a_1, b_2, \ldots b_n$ ableitbaren.*

Beweis. Es sei $a_1 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n$, wo β_1 ungleich Null ist, so ist

$$b_1 = \frac{1}{\beta_1} a_1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} b_2 - \cdots - \frac{\beta_n}{\beta_1} b_n.$$

Ist nun c numerisch ableitbar aus $b_1, b_2, \ldots b_n$, etwa

$$c = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_n b_n,$$

so erhält man c als aus $a_1, b_2, \ldots b_n$ abgeleitet, indem man hier statt b_1 den gefundenen Werth setzt, nämlich

$$c = \frac{\gamma_1}{\beta_1} a_1 + \left(\gamma_2 - \frac{\gamma_1 \beta_2}{\beta_1}\right) b_2 + \cdots + \left(\gamma_n - \frac{\gamma_1 \beta_n}{\beta_1}\right) b_n.$$

Umgekehrt, ist c numerisch ableitbar aus $a_1, b_2, \ldots b_n$, etwa 10

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n,$$

so erhält man c als aus $b_1, b_2, \ldots b_n$ abgeleitet, indem man statt a_1 seinen Werth $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n$ setzt, nämlich

$$c = \alpha_1 \beta_1 b_1 + (\alpha_2 + \alpha_1 \beta_2) b_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_1 \beta_n) b_n.$$

Also, jede Grösse, die einem der beiden Gebiete angehört, gehört auch dem andern an, das heisst, beide Gebiete sind identisch.

20. *Wenn m Grössen $a_1, \ldots a_m$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, aus n Grössen $b_1, \ldots b_n$ numerisch ableitbar sind, so kann man stets zu den m Grössen $a_1, \ldots a_m$ noch $(n - m)$ Grössen $a_{m+1}, \ldots a_n$ von der Art hinzufügen, dass sich die Grössen $b_1, \ldots b_n$ auch aus $a_1, \ldots a_n$ numerisch ableiten lassen, und also das Gebiet der Grössen $a_1, \ldots a_n$ identisch ist dem Gebiete der Grössen $b_1, \ldots b_n$; auch kann man jene $(n - m)$ Grössen aus den Grössen $b_1, \ldots b_n$ selbst entnehmen.*

Beweis. Nach der Annahme ist a_1 aus $b_1, \ldots b_n$ ableitbar. Von den Zahlen, durch welche diese Ableitung erfolgt, muss mindestens Eine von Null verschieden sein, weil sonst a_1 selbst null wäre, also der Verein der m Grössen (nach 2) einer Zahlbeziehung unterläge.

Es sei die zu b_1 gehörige Zahl von Null verschieden, und dies wird man immer annehmen können, da man ja die Indices beliebig wählen kann. Dann ist (nach 19) das aus $b_1, b_2, \ldots b_n$ ableitbare Gebiet identisch dem aus $a_1, b_2, \ldots b_n$ ableitbaren. Man habe nun für irgend ein r, welches $< m$ ist, gefunden, dass das Gebiet der Grössen $b_1, b_2, \ldots b_n$ identisch sei dem Gebiete der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_r$,

$b_{r+1}, \ldots b_n$, so wird nun, da nach der Hypothesis a_{r+1} aus $b_1, b_2, \ldots b_n$ ableitbar ist, es auch (vermöge der Gebiets-Identität) aus $a_1, a_2, \ldots a_r$, $b_{r+1}, \ldots b_n$ ableitbar sein. In dem Ausdrucke dieser Ableitung

$$a_{r+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \beta_n b_n$$

muss nothwendig einer der Koefficienten, die zu $b_{r+1}, \ldots b_n$ gehören, von Null verschieden sein, weil sonst zwischen den Grössen $a_1, \ldots a_{r+1}$ eine Zahlbeziehung stattfände, gegen die Hypothesis; es sei dies etwa 11 β_{r+1}, so ist (nach 19) das aus $a_1, \ldots a_r, b_{r+1}, \ldots b_n$ ableitbare † Gebiet identisch dem aus $a_1, \ldots a_{r+1}, b_{r+2}, \ldots b_n$ ableitbaren; also auch dies letztere Gebiet identisch dem Gebiete der Grössen $b_1, \ldots b_n$. Diesen Schluss kann man also von $r = 1$ an verfolgen, bis $r = m$ wird; das heisst, es wird dann das Gebiet $a_1, \ldots a_m, b_{m+1}, \ldots b_n$ identisch dem Gebiete $b_1, \ldots b_n$; und bezeichnet man dann die so übrig gebliebenen Grössen $b_{m+1}, \ldots b_n$ beziehlich mit $a_{m+1}, \ldots a_n$, so wird das Gebiet der Grössen $a_1, \ldots a_n$ identisch dem Gebiete der Grössen $b_1, \ldots b_n$.

21. *Wenn n Grössen $(a_1, \ldots a_n)$, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, aus n andern Grössen $(b_1, \ldots b_n)$ numerisch ableitbar sind, so ist das Gebiet der ersten Grössenreihe identisch dem der letzteren.*

Beweis. Man hat nur in dem vorhergehenden Satze $m = n$ zu setzen, so erfolgt der zu erweisende Satz.

22. *Wenn n Grössen $(a_1, \ldots a_n)$ aus weniger als n Grössen $(b_1, \ldots b_m)$ numerisch ableitbar sind, so stehen jene n Grössen stets in einer Zahlbeziehung zu einander.*

Beweis. Es seien $a_1, \ldots a_n$ aus $b_1, \ldots b_m$ ableitbar, wo $m < n$ ist. Nun können $a_1, \ldots a_m$ entweder in einer Zahlbeziehung zu einander stehen oder nicht. Im ersteren Falle stehen auch $a_1, \ldots a_n$, da unter ihnen die Grössen $a_1, \ldots a_m$ vorkommen, in einer Zahlbeziehung zu einander. Im zweiten Falle ist das Gebiet der Grössen $a_1, \ldots a_m$ (nach 21) identisch dem Gebiete der Grössen $b_1, \ldots b_m$, also ist jede aus $b_1, \ldots b_m$ numerisch ableitbare Grösse auch aus $a_1, \ldots a_m$ numerisch ableitbar, also sind namentlich die Grössen $a_{m+1}, \ldots a_n$, welche nach der Hypothesis aus $b_1, \ldots b_m$ ableitbar sind, auch aus $a_1, \ldots a_m$ ableitbar, das heisst, auch im zweiten Falle besteht zwischen $a_1, \ldots a_n$ eine Zahlbeziehung.

23. *Wenn ein Gebiet n-ter Stufe aus n Grössen erster Stufe ableitbar ist, so stehen diese in keiner Zahlbeziehung zu einander, und umgekehrt: Wenn n Grössen erster Stufe in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so ist das aus ihnen ableitbare Gebiet ein Gebiet n-ter Stufe.*

12 Beweis. Es sei A das aus den n Grössen erster Stufe † $a_1, \ldots a_n$

ableitbare Gebiet. Wenn nun zuerst A ein Gebiet n-ter Stufe ist, so können $a_1, \ldots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen; denn dann würde sich eine dieser Grössen aus den übrigen $n-1$ numerisch ableiten lassen, also auch das Gebiet aus diesen $n-1$ Grössen ableitbar sein, was dem Begriffe des Gebietes n-ter Stufe (nach 14) widerstreitet. Zweitens umgekehrt, wenn $a_1, \ldots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so können sie (nach 22) nicht aus weniger als n Grössen numerisch abgeleitet werden, also auch das aus $a_1, \ldots a_n$ ableitbare Gebiet nicht, also ist dies Gebiet (nach 14) von n-ter Stufe.

24. *Jedes Gebiet n-ter Stufe kann aus n {ihm angehörenden} Grössen erster Stufe, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, abgeleitet werden, und zwar aus beliebigen n solcher Grössen des Gebietes.*

Beweis. Denn es seien $a_1, \ldots a_n$ die Grössen, aus denen ursprünglich das betrachtete Gebiet hervorgegangen ist, und seien $b_1, \ldots b_n$ n Grössen dieses Gebietes, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Da $b_1, \ldots b_n$ dem aus $a_1, \ldots a_n$ abgeleiteten Gebiete angehören, so werden sich (nach 14) die Grössen $b_1, \ldots b_n$ aus $a_1, \ldots a_n$ numerisch ableiten lassen, und da zugleich jene Grössen $b_1, \ldots b_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen (Voraussetzung), so wird (nach 21) das aus $b_1, \ldots b_n$ ableitbare Gebiet identisch dem aus $a_1, \ldots a_n$ ableitbaren.

Anm. Durch diesen Satz ist jeder specifische Unterschied zwischen den ursprünglichen Einheiten und den daraus numerisch abgeleiteten Grössen aufgehoben, indem man jedes Gebiet, statt aus den ursprünglich zu Grunde gelegten n Einheiten, auch aus beliebigen n Grössen dieses Gebietes, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, ableiten, und diese Grössen also statt jener ersteren als Einheiten setzen kann. Es hätte sich dieser wichtige Satz auch direkt aus der Theorie der Elimination ableiten lassen. In der That ist unser Satz nur eine Transformation des Satzes: Wenn n Grössen $y_1, \ldots y_n$ ganze homogene Funktionen ersten Grades von n anderen $x_1, \ldots x_n$ sind, und die ersteren in keinem anderen Falle alle zugleich null werden können, als wenn auch die letzteren alle null werden, so lassen sich auch die letzteren $(x_1, \ldots x_n)$ als ganze homogene Funktionen ersten Grades von den ersteren $(y_1, \ldots y_n)$ darstellen.

Doch ist der hier gelieferte Beweis nicht nur elementarer, sondern hat auch 13 den Vorzug, dass dabei die wesentlichsten einfachen Beziehungen zwischen den extensiven Grössen klarer hervortreten.

25. *Die Stufenzahlen zweier Gebiete sind zusammengenommen ebenso gross als die Stufenzahlen ihres gemeinschaftlichen und ihres verbindenden Gebietes zusammengenommen, das heisst, wenn m und n die Stufenzahlen der gegebenen Gebiete sind, r die ihres gemeinschaftlichen, v die ihres verbindenden Gebietes, so ist*

$$m + n = r + v.$$

Beweis. Es seien A und B die beiden gegebenen Gebiete m-ter

und n-ter Stufe, und sei A aus den Grössen $a_1, \ldots a_m$, B aus den Grössen $b_1, \ldots b_n$ ableitbar. Dann kann (nach 23) weder zwischen $a_1, \ldots a_m$, noch zwischen $b_1, \ldots b_n$ eine Zahlbeziehung herrschen. Ferner möge sich ein Verein von r, aber auch nicht von mehr, Grössen finden lassen, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und welche beiden Gebieten zugleich angehören. Diese Annahme wird immer zulässig sein, da r auch null sein darf. Es seien $c_1, \ldots c_r$ diese Grössen. Dann wird man (nach 20) in die Reihe der Grössen $a_1, \ldots a_m$ statt r derselben, etwa statt $a_1, \ldots a_r$ die Grössen $c_1, \ldots c_r$ in der Art einführen können, dass das aus dieser neuen Grössenreihe ableitbare Gebiet identisch sei dem Gebiete A. Ebenso wird man in die Reihe der Grössen $b_1, \ldots b_n$ statt r derselben, etwa statt $b_1, \ldots b_r$ die Grössen $c_1, \ldots c_r$ in der Art einführen können, dass das aus dieser neuen Grössenreihe ableitbare Gebiet dem Gebiete B identisch sei. Dann ist also A aus den m Grössen $c_1, \ldots c_r, a_{r+1}, \ldots a_m$ ableitbar, und B aus den n Grössen $c_1, \ldots c_r, b_{r+1}, \ldots b_n$. Keine dieser Grössenreihen unterliegt (nach 23) einer Zahlbeziehung. Dann ist klar, dass alle aus $c_1, \ldots c_r$ ableitbaren Grössen den Gebieten A und B gemeinschaftlich sind; aber auch keine andern, da es sonst, wider die Annahme, mehr als r in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen geben würde, die beiden Gebieten A und B gemeinschaftlich wären. Das den Gebieten A und B gemeinschaftliche Gebiet ist also das aus $c_1, \ldots c_r$
14 abgeleitete Gebiet, also (nach 23) ein † Gebiet r-ter Stufe.

Nun bilden ferner alle Grössen $c_1, \ldots c_r, a_{r+1}, \ldots a_m, b_{r+1}, \ldots b_n$ eine Reihe von Grössen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Denn gesetzt, es herrschte zwischen ihnen eine Zahlbeziehung, so müsste diese von der Form

$$a + b + c = 0$$

sein, wo a aus $a_{r+1}, \ldots a_m$, b aus $b_{r+1}, \ldots b_n$, c aus $c_1, \ldots c_r$ abgeleitet ist. Hier könnte weder a noch b null sein. Denn wäre a null, so wäre $b + c = 0$, und es bestände also eine Zahlbeziehung zwischen den Grössen $b_{r+1}, \ldots b_n, c_1, \ldots c_r$, was, wie bewiesen, unmöglich ist; und wäre b null, so bestände eine Zahlbeziehung zwischen $a_{r+1}, \ldots a_m$, $c_1, \ldots c_r$, was gleichfalls als unmöglich nachgewiesen ist.

Stellen wir die obige Gleichung in der Form dar

$$a = -b - c,$$

so ist die linke Seite aus $a_{r+1}, \ldots a_m$ numerisch abgeleitet, gehört also dem Gebiete A an, die rechte Seite ist aus $b_{r+1}, \ldots b_n, c_1, \ldots c_r$ numerisch abgeleitet, gehört also dem Gebiete B an, folglich gehört a dann beiden Gebieten zugleich an. Da aber a aus $a_{r+1}, \ldots a_m$ numerisch

abgeleitet ist, und zwischen $a_{r+1}, \dots a_m, c_1, \dots c_r$ keine Zahlbeziehung herrscht (wie oben gezeigt wurde), so ist a nicht aus $c_1, \dots c_r$ ableitbar. Also würden dann die Gebiete A und B mehr als r in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen gemeinschaftlich haben, was gegen die Voraussetzung ist. Somit folgt, dass der ganze Verein der Grössen $c_1, \dots c_r, a_{r+1}, \dots a_m, b_{r+1}, \dots b_n$ keiner Zahlbeziehung unterliegt. Das aus diesen Grössen ableitbare Gebiet besteht aber aus den sämmtlichen Grössen, welche sich aus den Grössen der Gebiete A und B ableiten lassen, das heisst, ist ihr verbindendes Gebiet. Die Stufenzahl desselben sei v, so ist (nach 23) v gleich der Anzahl der Grössen $c_1, \dots c_r, a_{r+1}, \dots a_m, b_{r+1}, \dots b_n$, das heisst

$$v = m + n - r,$$

oder

$$m + n = r + v.$$

26. *Zwei Gebiete (A und B), welche beziehlich von α-ter und β-ter Stufe sind und in einem Gebiete n-ter Stufe liegen, haben, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, mindestens ein Gebiet von $(\alpha + \beta - n)$-ter Stufe gemein.*

Beweis. Das A und B verbindende Gebiet sei von v-ter Stufe, 15 das ihnen gemeinschaftliche von r-ter Stufe, so ist (nach 25)

$$\alpha + \beta = r + v, \text{ oder } r = \alpha + \beta - v.$$

Da {aber} A und B in einem Gebiete n-ter Stufe liegen, so liegt auch ihr verbindendes Gebiet in diesem Gebiete n-ter Stufe, also ist v entweder ebenso gross oder kleiner als n, also $r = \alpha + \beta - v$ entweder ebenso gross als $\alpha + \beta - n$ oder grösser.

Anm. Die bisher entwickelten Sätze finden sich schon, wenn gleich meist in anderen Formen, in meiner ersten Bearbeitung der Ausdehnungslehre, vom Jahre 1844, und zwar Satz 19 und 24 sind genau in der entsprechenden Form in § 20 jenes Werkes, Satz 25 in § 126 enthalten, und auch die Idee des Beweises für diese Sätze ist hier und dort dieselbe.

§ 3. Die Zahl als Quotient extensiver Grössen und Ersetzung der Gleichungen zwischen extensiven Grössen durch Zahlgleichungen.

27. Erklärung. Ich nenne zwei Vereine von Gleichungen einander ersetzend, wenn sich jeder von beiden Vereinen aus dem andern ableiten lässt.

Anm. Hierbei ist auch der Fall eingeschlossen, in welchem einer der beiden Vereine oder jeder von beiden nur aus einer Gleichung besteht.

28. *Eine Grösse x, welche aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen $a_1, \dots a_n$ abgeleitet ist, ist dann und nur dann null, wenn ihre n Ableitungszahlen null sind, das heisst, die Gleichung*

(a) $$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = 0$$

wird ersetzt durch die n Gleichungen:

(b) $$0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Beweis. Denn wäre irgend eine der Ableitungszahlen von Null verschieden, so würde vermöge der Gleichung (a) (nach 16) zwischen $a_1, \ldots a_n$ eine Zahlbeziehung herrschen, gegen die Annahme. Gilt also die Gleichung (a), so gilt auch der Gleichungsverein (b). Umgekehrt, gilt der letzte Verein, so folgt daraus die Gleichung (a). Also wird diese Gleichung durch jenen Verein ersetzt.

16 **29.** *Zwei Grössen eines Gebietes n-ter Stufe sind dann und nur dann einander gleich, wenn ihre n zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen einander gleich sind, das heisst, die Gleichung*

(a) $$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n$$

wird ersetzt durch die n Gleichungen

(b) $$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \quad \alpha_n = \beta_n.$$

Beweis. Denn die Gleichung (a) wird ersetzt durch die Gleichung

$$(\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) e_n = 0,$$

und diese (nach 28) durch die n Gleichungen

$$0 = \alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n,$$

das heisst, durch die n Gleichungen

$$\alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 = \beta_2, \ \ldots, \ \alpha_n = \beta_n.$$

30. Erklärung. Wenn eine extensive Grösse b aus einer andern a, die nicht null ist, sich numerisch ableiten lässt, so verstehe ich unter $\frac{b}{a}$ die Zahl, durch welche b aus a abgeleitet werden kann, das heisst

$$\frac{\alpha a}{a} = \alpha,$$

wenn $a \gtrless 0$.

31. *Wenn zwei Grössen (a und b) aus derselben Grösse (c) numerisch abgeleitet sind, und die zweite (b) nicht null ist, so kann man, statt die erste durch die zweite zu dividiren, die Ableitungszahlen entsprechend dividiren, das heisst*

$$\frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{\alpha}{\beta},$$

wenn $\beta c \gtrless 0$.

Beweis. Wenn $\beta c \gtrless 0$ ist, so ist (nach 12, 6) auch $\beta \gtrless 0$ und

$c \gtrless 0$. Dann ist $\alpha c = \frac{\alpha}{\beta}(\beta c)$ (nach 13), also

$$\frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}(\beta c)}{\beta c} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad [30].$$

32. *Eine Gleichung, deren Glieder alle aus derselben Grösse (a) numerisch ableitbar sind, wird durch eine Gleichung ersetzt, die man erhält, indem man alle Glieder der ersteren durch eine beliebige aus jener Grösse (a) numerisch ableitbare, † aber von Null verschiedene Grösse* 17 *dividirt, das heisst, die Gleichung*

(a) $$\alpha a + \beta a + \cdots = \alpha_1 a + \beta_1 a + \cdots$$

wird ersetzt durch die Gleichung

(b) $$\frac{\alpha a}{\varrho a} + \frac{\beta a}{\varrho a} + \cdots = \frac{\alpha_1 a}{\varrho a} + \frac{\beta_1 a}{\varrho a} + \cdots,$$

wenn $\varrho a \gtrless 0$.

Beweis. Wenn $\varrho a \gtrless 0$, so muss (nach 12, 6) sowohl $\varrho \gtrless 0$ als $a \gtrless 0$ sein. Somit kann man a auch, da es von Null verschieden ist, als Einheit betrachten. Dann wird (nach 29) die Gleichung (a) ersetzt durch

$$\alpha + \beta + \cdots = \alpha_1 + \beta_1 + \cdots,$$

oder, wenn man durch $\varrho \gtrless 0$ dividirt, durch die Gleichung

$$\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\beta}{\varrho} + \cdots = \frac{\alpha_1}{\varrho} + \frac{\beta_1}{\varrho} + \cdots,$$

das heisst (nach 31), durch die Gleichung

$$\frac{\alpha a}{\varrho a} + \frac{\beta a}{\varrho a} + \cdots = \frac{\alpha_1 a}{\varrho a} + \frac{\beta_1 a}{\varrho a} + \cdots.$$

33. Erklärung. Wenn die Grössen $a_1, \ldots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und die Grösse

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

ist, so nennen wir, wenn m kleiner als n ist, die Grösse

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m$$

„die Zurückleitung der Grösse a auf das Gebiet $a_1, a_2, \ldots a_m$, unter Ausschliessung des Gebietes $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_n$“. Wir sagen, die Zurückleitungen mehrerer Grössen seien *in demselben Sinne* genommen, wenn die Grössen auf dasselbe Gebiet und unter Ausschliessung desselben Gebietes zurückgeleitet sind.

Anm. Wenn ins Besondere

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

ist, so ist zum Beispiel $\alpha_1 a_1$ die Zurückleitung von a auf das Gebiet a_1, unter

Ausschliessung des Gebietes $a_2, \dots a_n$, ferner: wenn $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ ist, so ist $\alpha_1 a_1$ die Zurückleitung auf das Gebiet a_1, unter Ausschliessung des Gebietes a_2.

34. *Jede Gleichung, deren Glieder Produkte je einer extensiven Grösse mit einer Zahl sind, wird, wenn die extensiven Grössen einem Gebiet n-ter Stufe angehören, ersetzt durch n Zahlengleichungen, die man erhält, indem* 18 *man in der gegebenen Gleichung statt aller extensiven Grössen ihre † zu derselben Einheit gehörigen Ableitungszahlen setzt; und zwar gilt dies, welche n in keiner Zahlbeziehung stehende Grössen des Gebietes man auch als System von Einheiten annehmen mag, das heisst, die Gleichung*

$$\text{(a)} \qquad \alpha a + \beta b + \cdots = \varkappa k + \lambda l + \cdots,$$

in welcher

$$a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n, \quad b = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n, \dots$$
$$k = \varkappa_1 e_1 + \cdots + \varkappa_n e_n, \quad l = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, \dots$$

ist, wird ersetzt durch die n Gleichungen

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots = \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots = \varkappa\varkappa_2 + \lambda\lambda_2 + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots = \varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots, \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass $e_1, \dots e_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen.

Beweis. Setzt man in die Gleichung (a) die Ausdrücke für $a, b, \dots, k, l, \dots$ ein, so erhält man

$$(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots) e_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots) e_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots) e_n =$$
$$= (\varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots) e_1 + \cdots + (\varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots) e_n.$$

Diese Gleichung wird (nach 29) ersetzt durch die n Gleichungen

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots = \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots$$
$$\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots = \varkappa\varkappa_2 + \lambda\lambda_2 + \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots$$
$$\alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots = \varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots.$$

35. *Jede Gleichung, deren Glieder Produkte je einer extensiven Grösse mit einer Zahl sind, bleibt bestehen, wenn man statt aller extensiven Grössen ihre in demselben Sinne genommenen Zurückleitungen setzt.*

Beweis. Man nehme an, die gegebene Gleichung sei die Gleichung (a) des vorhergehenden Satzes, in welcher $a, b, \dots, k, l, \dots$ dieselbe Bedeutung haben wie vorher, so ist zu zeigen, dass diese Gleichung auch fortbesteht, wenn man statt der Grössen $a, b, \dots, k, l, \dots$ ihre Zurückleitungen auf das Gebiet $e_1, \dots e_m$, unter Ausschliessung des Gebietes $e_{m+1}, \dots e_n$, setzt, das heisst, dass auch

(c) $$\alpha a' + \beta b' + \cdots = \varkappa k' + \lambda l' + \cdots$$

sei, wo 19

$$a' = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m, \quad b' = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_m e_m, \ldots$$
$$k' = \varkappa_1 e_1 + \cdots + \varkappa_m e_m, \quad l' = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m, \ldots$$

ist. In der That, die Gleichung (a) wird ersetzt durch die n Gleichungen (b) der vorigen Nummer. Multiplicirt man nun die ersten m dieser n Gleichungen beziehlich mit $e_1, e_2, \ldots e_m$ und addirt die so erhaltenen Gleichungen, so erhält man die zu erweisende Gleichung (c).

Anm. Es liegt hierin zugleich der speciellere Satz, dass gleiche Grössen, in gleichem Sinne zurückgeleitet, auch gleiche Zurückleitungen geben, oder anders ausgedrückt, dass die Zurückleitung einer gegebenen Grösse bestimmt ist, wenn das Gebiet, auf welches, und das Gebiet, unter dessen Ausschliessung zurückgeleitet werden soll, gegeben ist.

36. *Wenn die Zahlen $x_1, \ldots x_n$, durch welche eine extensive Grösse x aus einem System von n Einheiten $e_1, e_2, \ldots e_n$ abgeleitet wird, einer Gleichung m-ten Grades genügen, so genügen auch die Zahlen $y_1, \ldots y_n$, durch welche dieselbe Grösse aus einem System von n andern dasselbe Gebiet liefernden Einheiten $a_1, a_2, \ldots a_n$ abgeleitet wird, einer Gleichung m-ten Grades, und zwar ist die letzte homogen, wenn die erste es ist.*

Beweis. Es ist nach der Annahme

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,$$

und zwischen diesen Ableitungszahlen bestehe die Gleichung

$$f(x_1, \ldots x_n) = 0,$$

in welcher f das Zeichen einer Funktion m-ten Grades ist. Nun müssen die neuen Einheiten $a_1, \ldots a_n$, da sie dem Gebiete $e_1, \ldots e_n$ angehören, aus diesen Einheiten $e_1, \ldots e_n$ ableitbar sein. Es sei

$$a_1 = \Sigma \alpha_{1,r} e_r = \alpha_{1,1} e_1 + \alpha_{1,2} e_2 + \cdots + \alpha_{1,n} e_n,$$
$$a_2 = \Sigma \alpha_{2,r} e_r = \alpha_{2,1} e_1 + \alpha_{2,2} e_2 + \cdots + \alpha_{2,n} e_n,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot$$
$$a_n = \Sigma \alpha_{n,r} e_r = \alpha_{n,1} e_1 + \alpha_{n,2} e_2 + \cdots + \alpha_{n,n} e_n.$$

Ferner, da $y_1, \ldots y_n$ die Ableitungszahlen in Bezug auf diese neuen Einheiten sein sollen, so hat man auch

$$x = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_n a_n,$$

also 20

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n =$$
$$= y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_n a_n,$$
$$= y_1 \Sigma \alpha_{1,r} e_r + y_2 \Sigma \alpha_{2,r} e_r + \cdots + y_n \Sigma \alpha_{n,r} e_r,$$
$$= \Sigma y_r \alpha_{r,1} . e_1 + \Sigma y_r \alpha_{r,2} . e_2 + \cdots + \Sigma y_r \alpha_{r,n} . e_n.$$

Also (nach 29)

$$x_1 = \Sigma \alpha_{r,1} y_r = \alpha_{1,1} y_1 + \alpha_{2,1} y_2 + \cdots + \alpha_{n,1} y_n,$$
$$x_2 = \Sigma \alpha_{r,2} y_r = \alpha_{1,2} y_1 + \alpha_{2,2} y_2 + \cdots + \alpha_{n,2} y_n,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot$$
$$x_n = \Sigma \alpha_{r,n} y_r = \alpha_{1,n} y_1 + \alpha_{2,n} y_2 + \cdots + \alpha_{n,n} y_n,$$

das heisst, $x_1, \ldots x_n$ sind ganze homogene Funktionen ersten Grades von $y_1, \ldots y_n$; folglich, setzt man in

$$f(x_1, \ldots x_n) = 0$$

statt $x_1, \ldots x_n$ diese Werthe, so erhält man eine Funktion m-ten Grades von $y_1, \ldots y_n$ und zwar eine homogene, wenn die erstere eine solche war.

Kapitel 2. Die Produktbildung im Allgemeinen.

§ 1. Produkt zweier Grössen.

37. Erklärung. Unter dem Produkte $[ab]$ einer extensiven Grösse a in eine andere b verstehe ich diejenige extensive Grösse (oder auch Zahlgrösse), die man erhält, indem man zuerst jede der Einheiten, aus denen die erste Grösse a numerisch abgeleitet ist, mit jeder der Einheiten, aus denen die zweite b numerisch abgeleitet ist, zu einem Produkte verknüpft, dessen erster Faktor die Einheit der ersten Grösse und dessen zweiter Faktor die Einheit der zweiten Grösse ist, dann dies Produkt mit dem Produkte derjenigen Ableitungszahlen multiplicirt, mit welchen jene Einheiten verknüpft waren, und die sämmtlichen so gewonnenen Produkte addirt, das heisst, es ist

$$[\Sigma \alpha_r e_r \,.\, \Sigma \beta_s e_s] = \Sigma \alpha_r \beta_s [e_r e_s],$$

wo e_r, e_s die Einheiten, aus denen die Grössen numerisch abgeleitet sind, α_r, β_s die zugehörigen Ableitungszahlen bezeichnen, und die Summe sich auf die verschiedenen Werthe der Indices r und s bezieht.

Anm. Da das Produkt extensiver Grössen nach der Erklärung wieder entweder eine extensive Grösse oder eine Zahlgrösse ist, † so muss dasselbe (nach 5) aus einem System von Einheiten numerisch ableitbar sein. Welches dies System von Einheiten sei, und wie aus ihnen die Produkte $[e_r e_s]$, aus denen jenes Produkt zusammengesetzt ist, numerisch abzuleiten seien, darüber sagt die Definition nichts aus. Soll also der Begriff eines besonderen Produktes genau festgestellt werden, so müssen noch über jenes System von Einheiten und über diese Ableitungen die nöthigen Bestimmungen getroffen werden. Sobald diese Bestimmungen getroffen sind, so geht aus der allgemeinen Gattung der Produktbildungen, wie sie oben festgestellt wurde, eine besondere Art der Produktbildung hervor.

Hat man zum Beispiel das Produkt

$$P = [(x_1 e_1 + x_2 e_2)(y_1 e_1 + y_2 e_2)],$$

so ist dasselbe (nach 37) gleich

$$x_1 y_1 [e_1 e_1] + x_1 y_2 [e_1 e_2] + x_2 y_1 [e_2 e_1] + x_2 y_2 [e_2 e_2].$$

Besondere Arten der Produktbildung würden nun hervorgehen, wenn noch die Einheiten festgesetzt würden, aus denen dies Produkt numerisch abgeleitet werden soll, und die Art bestimmt würde, wie die vier Produkte

$$[e_1 e_1], \; [e_1 e_2], \; [e_2 e_1], \; [e_2 e_2]$$

aus jenen Einheiten numerisch abzuleiten sind. So zum Beispiel könnte festgesetzt werden, dass diese vier Produkte selbst das System der Einheiten bildeten, aus denen P numerisch abzuleiten ist, dann sind $x_1 y_1$, $x_1 y_2$, $x_2 y_1$, $x_2 y_2$ die Ableitungszahlen von P; und wir hätten eine besondere Art der Produktbildung, die sich dadurch auszeichnen würde, dass zu ihrer Feststellung keine Gleichungen erforderlich wären. Oder man könnte drei unter ihnen, etwa $[e_1 e_1]$, $[e_1 e_2]$, $[e_2 e_2]$ als Einheiten festsetzen, und die Bestimmung hinzufügen, dass $[e_2 e_1] = [e_1 e_2]$ sein sollte; dann würden die Ableitungszahlen von P sein

$$x_1 y_1, \; (x_1 y_2 + x_2 y_1), \; x_2 y_2;$$

eine Art der Produktbildung, die sich dadurch auszeichnen würde, dass ihre Gesetze mit denen der algebraischen Multiplikation identisch sein würden. Oder man könnte eine unter ihnen, zum Beispiel $[e_1 e_2]$, als Einheit festsetzen, aus welcher das Produkt P numerisch abzuleiten sein soll, und für die übrigen etwa die Bestimmungen treffen, dass $[e_1 e_1] = 0$, $[e_2 e_1] = -[e_1 e_2]$, $[e_2 e_2] = 0$ sein soll. Dann würde das Produkt P nur eine Ableitungszahl haben, nämlich $x_1 y_2 - x_2 y_1$; eine Produktbildung, die ich unten kombinatorische genannt habe. Ja man könnte auch ein System von anderen Einheiten, unter denen $[e_1 e_1]$, $[e_1 e_2]$, $[e_2 e_1]$, $[e_2 e_2]$ nicht vorkämen, zu Grunde legen, und dann bestimmen, wie diese vier Produkte aus ihnen abzuleiten seien, zum Beispiel könnte man etwa die absolute Einheit zu Grunde legen, und etwa festsetzen, es solle

$$[e_1 e_1] = 1, \; [e_1 e_2] = 0, \; [e_2 e_1] = 0, \; [e_2 e_2] = 1$$

sein, in diesem Falle würde P eine Zahl, nämlich $= x_1 y_1 + x_2 y_2$ sein; eine Produktbildung, die ich unten innere genannt habe.

Gegenwärtig werde ich nur diejenigen Gesetze behandeln, welche aus der allgemeinen Erklärung des Produktes in 37 hervorgehen, und welche also für alle Arten der Produkte gelten. Ich habe das Produkt durch eine Klammer umschlossen, um es von dem gewöhnlichen Produkte der Algebra zu unterscheiden.

38. *Statt zu einer Grösse a einen Faktor b hinzuzufügen, kann man ihn in dem Ableitungsausdruck der ersteren jeder Einheit auf entsprechende Weise hinzufügen, das heisst* 22

$$[\Sigma \alpha_r e_r . b] = \Sigma \alpha_r [e_r b].$$

Beweis. Es sei $b = \Sigma \beta_s e_s$, so ist

$$[\Sigma \alpha_r e_r . b] = [\Sigma \alpha_r e_r . \Sigma \beta_s e_s] = \Sigma \alpha_r \beta_s [e_r e_s] \qquad [37]$$

$$= \Sigma \alpha_1 \beta_s [e_1 e_s] + \Sigma \alpha_2 \beta_s [e_2 e_s] + \cdots \qquad [9]$$

$$\{= \alpha_1 \Sigma \beta_s [e_1 e_s] + \alpha_2 \Sigma \beta_s [e_2 e_s] + \cdots\} \qquad \{10\}$$

$$= \alpha_1 [e_1 . \Sigma \beta_s e_s] + \alpha_2 [e_2 . \Sigma \beta_s e_s] + \cdots \qquad [37]$$

$$= \alpha_1 [e_1 b] + \alpha_2 [e_2 b] + \cdots = \Sigma \alpha_r [e_r b].$$

39. *Ein Produkt zweier Faktoren, dessen einer Faktor eine Summe ist, ist gleich einer Summe von Produkten, die man erhält, indem man in dem ursprünglichen Produkte, statt des zerstückten Faktors nach und nach jedes Stück setzt, das heisst*

$$[(a+b+\cdots)p] = [ap]+[bp]+\cdots$$
$$[p(a+b+\cdots)] = [pa]+[pb]+\cdots.$$

Insbesondere ist

$$[(a+b)c] = [ac]+[bc]$$
$$[c(a+b)] = [ca]+[cb].$$

Beweis. Es sei

$$a = \Sigma\alpha_r e_r, \quad b = \Sigma\beta_r e_r, \quad \cdots,$$

so ist

$$[(a+b+\cdots)p] =$$
$$= [(\Sigma\alpha_r e_r + \Sigma\beta_r e_r + \cdots)p] = [\Sigma(\alpha_r+\beta_r+\cdots)e_r\,.\,p] \quad [9]$$
$$= \Sigma(\alpha_r+\beta_r+\cdots)[e_r p] \quad [38]$$
$$= \Sigma\alpha_r[e_r p] + \Sigma\beta_r[e_r p] + \cdots \quad [9]$$
$$= [\Sigma\alpha_r e_r\,.\,p] + [\Sigma\beta_r e_r\,.\,p] + \cdots \quad [38]$$
$$= [ap]+[bp]+\cdots.$$

Somit ist die erste Formel bewiesen. Den Beweis der zweiten Formel erhält man aus dem der ersten, wenn man den Faktor p überall als ersten Faktor einsetzt.

40. *Statt den einen Faktor eines Produktes (zweier Faktoren) mit einer Zahl $\{\alpha\}$ zu multipliciren, kann man das ganze Produkt mit dieser Zahl multipliciren, das heisst*

$$[(\alpha a)b] = \alpha[ab]$$
$$[b(\alpha a)] = \alpha[ba].$$

Beweis. Es sei $a = \Sigma\alpha_r e_r$, so ist

23

$$[(\alpha a)b] = [(\alpha\,.\,\Sigma\alpha_r e_r)b] = [(\Sigma\alpha\alpha_r e_r)b] \quad [10]$$
$$= \Sigma\alpha\alpha_r[e_r b] \quad [38]$$
$$= \alpha\Sigma\alpha_r[e_r b] \quad [13]$$
$$= \alpha[\Sigma\alpha_r e_r\,.\,b] \quad [38]$$
$$= \alpha[ab].$$

Der Beweis der zweiten Formel ergiebt sich, wenn man b überall als den ersten der beiden Faktoren setzt.

41. *Statt zu einer Grösse, die aus beliebigen Grössen $a, b, \ldots$ numerisch abgeleitet ist, einen Faktor p hinzuzufügen, kann man ihn in dem Ausdruck dieser Ableitung zu jeder der Grössen $a, b, \ldots$ auf entsprechende Weise hinzufügen, das heisst*

$$[(\alpha a + \beta b + \cdots)p] = \alpha[ap] + \beta[bp] + \cdots$$

und

$$[p(\alpha a + \beta b + \cdots)] = \alpha[pa] + \beta[pb] + \cdots.$$

Beweis. $[(\alpha a + \beta b + \cdots)p] = [(\alpha a)p] + [(\beta b)p] + \cdots$ [39]

$= \alpha[ap] + \beta[bp] + \cdots.$ [40]

42. *Das Produkt zweier Faktoren, welche aus beliebigen Grössen numerisch abgeleitet sind, erhält man, indem man zuerst statt jedes Faktors eine der Grössen setzt, aus denen er abgeleitet ist, das so gewonnene Produkt mit dem Produkte der zu den substituirten Grössen gehörigen Ableitungszahlen multiplicirt, und die sämmtlichen Produkte, welche sich auf diese Weise bilden lassen, addirt, das heisst*

$$[\Sigma\alpha_r a_r . \Sigma\beta_s b_s] = \Sigma\alpha_r\beta_s[a_r b_s],$$

wo a_r, b_s *beliebige Grössen,* α_r, β_s *beliebige Zahlen sind.*

Beweis. $[\Sigma\alpha_r a_r . \Sigma\beta_s b_s] = \Sigma\alpha_r[a_r . \Sigma\beta_s b_s]$ [41]

$= \Sigma\alpha_r(\Sigma\beta_s[a_r b_s])$ [41]

$= \Sigma\alpha_r\beta_s[a_r b_s].$ [13]

§ 2. Produkt mehrerer Grössen.

43. Erklärung. Wenn aus einem Produkte ein anderes dadurch abgeleitet werden kann, dass man statt jedes Faktors, der in dem ersten Produkte vorkommt, einen andern (ihm gleichen oder von ihm verschiedenen) Faktor setzt, so nenne ich die beiden Produkte einander entsprechend, und nenne † jeden Faktor des ersten Produktes 24 entsprechend dem für ihn substituirten des andern Produktes. Zweien Grössen oder zweien entsprechenden Produkten beziehungsweise zwei Faktoren in entsprechender Weise hinzufügen, heisst sie so hinzufügen, dass die entstehenden Produkte wieder einander entsprechend werden, und zwar so, dass der in dem einen und der in dem andern Produkte hinzugefügte Faktor entsprechende Faktoren werden, und die bisher einander entsprechenden Faktoren auch entsprechend bleiben.

Ein Produkt, in welchem die Faktoren a, b, ... irgend wie enthalten sind, werde ich, wo es angemessen scheint, mit $P_{a,b,\ldots}$ bezeichnen; dann drückt innerhalb derselben Entwickelung $P_{h,i,\ldots}$ das entsprechende Produkt aus, in welchem die Faktoren h, i, ... der Reihe nach den Faktoren a, b, ... entsprechen.

Anm. Diese Bestimmungen sind unentbehrlich, wenn man allen Zweideutigkeiten entgehen will. Denn, da die Faktoren eines Produktes extensiver Grössen weder unter allen Umständen vertauscht, noch zu besonderen Produkten vereinigt werden dürfen, so ist die Art, wie ein Faktor in das Produkt eingeht, bestimmt zu fixiren. Als Beispiel zweier entsprechender Produkte seien die Produkte $a(bc)$

und $d(ef)$ gewählt, wo die Faktoren sich der Reihe nach entsprechen. Sollen zu ihnen noch beziehlich die Faktoren g und h in entsprechender Weise hinzugefügt werden, so kann dies auf verschiedene Arten geschehen, zum Beispiel so, dass die Produkte $a(bc)g$ und $d(ef)h$ hervorgehen, oder $a(bgc)$ und $d(ehf)$, und so weiter. Was die Bedeutung ausgelassener Klammern betrifft, so verweise ich auf Nr. 7 Anmerkung.

44. *Wenn ein gegebenes Produkt einen Faktor p enthält, der aus beliebigen Grössen $a, b, c, \ldots$ durch die Zahlen q, r, s abgeleitet ist, und man setzt in jenem Produkte statt des Faktors p nach und nach die Grössen $a, b, c, \ldots$, multiplicirt die so erhaltenen Produkte beziehlich mit $q, r, s, \ldots$ und addirt diese Ausdrücke, so ist ihre Summe gleich dem gegebenen Produkte, das heisst*

$$P_{qa+rb+\cdots} = qP_a + rP_b + \cdots.$$

Beweis. Wie das Produkt auch beschaffen sei, immer kann man es so entstanden denken, dass zu dem Faktor p die übrigen Faktoren fortschreitend in bestimmter Weise hinzugetreten seien, nämlich so, dass zu p zuerst ein anderer Faktor (sei es als erster oder als zweiter Faktor des Produkts) † hinzugetreten sei, zu diesem Produkte wieder ein anderer und so fort. Statt nun aber einen Faktor zu einer numerisch abgeleiteten Grösse hinzuzufügen, kann man ihn (nach 41) in dem Ausdruck jener Ableitung zu jeder der Grössen, aus denen jene erstere abgeleitet war, auf entsprechende Weise hinzufügen. Folglich, statt zu $p = qa + rb + \cdots$ die übrigen Faktoren in der genannten Weise fortschreitend hinzuzufügen, kann man sie in dem Ableitungsausdruck in entsprechender Weise zu jeder der Grössen $a, b, \ldots$ hinzufügen, das heisst

$$P_p = qP_a + rP_b + \cdots, \text{ wenn } p = qa + rb + \cdots.$$

45. *Der Satz 42 gilt auch für mehr als zwei Faktoren, das heisst*

$$[\Sigma\alpha_r a_r . \Sigma\beta_s b_s \ldots] = \Sigma\alpha_r\beta_s \ldots [a_r b_s \ldots].$$

Beweis. Gilt der Satz für irgend eine Anzahl von Faktoren, zum Beispiel für $[\Sigma\alpha_r a_r . \Sigma\beta_s b_s \ldots \Sigma\varkappa_m k_m]$, so dass also

$$\text{(a)} \qquad [\Sigma\alpha_r a_r . \Sigma\beta_s b_s \ldots \Sigma\varkappa_m k_m] = \Sigma\alpha_r\beta_s \ldots \varkappa_m [a_r b_s \ldots k_m]$$

ist, so gilt er auch, wenn noch ein Faktor, zum Beispiel $\Sigma\lambda_n l_n$, hinzutritt; denn es ist

$$\begin{aligned}
&[\Sigma\alpha_r a_r . \Sigma\beta_s b_s \ldots \Sigma\varkappa_m k_m . \Sigma\lambda_n l_n] = \\
&= [\Sigma\alpha_r\beta_s \ldots \varkappa_m [a_r b_s \ldots k_m] . \Sigma\lambda_n l_n] && [\text{nach a}] \\
&= \Sigma\alpha_r\beta_s \ldots \varkappa_m\lambda_n [a_r b_s \ldots k_m l_n]. && [42]
\end{aligned}$$

Also, wenn die Formel 45 für irgend eine Anzahl von Faktoren gilt, so gilt sie auch, wenn noch ein Faktor hinzutritt. Nun gilt sie aber (nach 42) für zwei Faktoren, also auch für drei, vier und so weiter, also für beliebig viele.

46. *Statt die Faktoren eines Produktes mit einer Reihe von Zahlen $\{q, r, \ldots\}$ zu multipliciren, kann man das ganze Produkt mit dem Produkte dieser Zahlen multipliciren, das heisst*

$$P_{qa,rb,\ldots} = qr \ldots P_{a,b,\ldots}.$$

Beweis. Nach 44 ist $P_{qa} = qP_a$, also auch

$$P_{qa,rb,sc,\ldots} = qP_{a,rb,sc,\ldots} \quad [44]$$

$$= qrP_{a,b,sc,\ldots} \quad [44]$$

und so weiter, endlich

$$= qrs \ldots P_{a,b,c,\ldots}. \quad [44]$$

47. *Zwei in einem Produkte vorkommende Faktoren, welche in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, kann man ohne Werthänderung des Produktes vertauschen, das heisst*

$$P_{qa,ra} = P_{ra,qa}.$$

Beweis. Es ist 26

$$P_{qa,ra} = qrP_{a,a} \quad [46]$$

$$= rqP_{a,a} = P_{ra,qa}. \quad [46]$$

§ 3. Die verschiedenen Arten der Produktbildung.

48. Erklärung. Wenn die Produktbildung dadurch näher bestimmt wird, dass zwischen den Produkten der Einheiten Zahlbeziehungen bestehen, so nenne ich jede Gleichung, welche eine solche Zahlbeziehung ausdrückt, eine zu jener Art der Produktbildung gehörige Bestimmungsgleichung. Einen Verein von p Bestimmungsgleichungen, von denen keine aus den übrigen gefolgert werden kann, nenne ich, wenn zwischen den Produkten keine andere Zahlbeziehung herrscht, als die aus jenen Gleichungen gefolgert werden kann, ein zu jener Produktbildung gehöriges System von Bestimmungsgleichungen.

49. *Jedes System von m Bestimmungsgleichungen zwischen den n Einheitsprodukten $E_1, \ldots E_n$ kann auf die Form gebracht werden, dass jede der Gleichungen ausdrückt, wie aus $n - m$ jener Einheitsprodukte, zum Beispiel aus $E_1, \ldots E_{n-m}$, die übrigen m numerisch ableitbar sind. Dann bilden $E_1, \ldots E_{n-m}$ ein System von Einheiten, aus denen alle Produkte, die zu dieser Produktbildung gehören, ableitbar sind.*

Beweis. Nach 48 soll jede Gleichung des Systems der m Bestimmungsgleichungen eine Zahlbeziehung zwischen $E_1, \ldots E_n$ ausdrücken. Jede solche Zahlbeziehung wird sich (nach 16) auf die Form

$$\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_n E_n = 0$$

bringen lassen, in welcher die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ nicht alle zugleich null

sind. Es sei eine derselben betrachtet, und sei in ihr etwa α_n ungleich Null, so kann man E_n durch $E_1, \ldots E_{n-1}$ ausdrücken. Substituirt man diesen Ausdruck in die übrigen $(m-1)$ Gleichungen, so werden sie von der Form

$$\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_{n-1} E_{n-1} = 0.$$

In keiner der so erhaltenen Gleichungen dürfen die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ alle zugleich null werden, weil sonst diese Bestimmungsgleichung aus 27 der ersten gefolgert werden könnte, † was dem Begriffe eines Systems von Bestimmungsgleichungen (nach 48) widerspricht. Es sei eine der so erhaltenen Gleichungen betrachtet, und sei in ihr etwa der Koefficient von E_{n-1} ungleich Null; so wird E_{n-1} sich durch $E_1, \ldots E_{n-2}$ ausdrücken lassen, und wenn dieser Ausdruck in die übrigen $(m-2)$ Gleichungen eingeführt wird, so erhalten sie die Form

$$\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_{n-2} E_{n-2} = 0.$$

Da auf diese Weise durch die Anwendung jeder neuen Gleichung immer eine neue unter den Grössen $E_1, \ldots E_n$ aus den übrigen Gleichungen verschwindet, wir wollen annehmen, jedesmal die letzte unter den bis dahin vorhandenen, so behält man zuletzt nur noch die Grössen $E_1, \ldots E_{n-m}$, durch welche sich alle übrigen $E_{n-m+1}, \ldots E_n$ ausdrücken lassen.

50. Erklärung. Jede Produktbildung, deren Bestimmungsgleichungen geltend bleiben, wenn man statt der darin vorkommenden Einheiten beliebige aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen setzt, heisst eine lineale Produktbildung (Multiplikation).

51. *Für Produkte aus zwei Faktoren giebt es ausser derjenigen Produktbildung, welche gar keine Bestimmungsgleichung hat, und derjenigen, deren Produkte alle null sind, nur zwei Gattungen linealer Produktbildung, und zwar ist das System der Bestimmungsgleichungen für die eine*

$$(1) \qquad [e_r e_s] + [e_s e_r] = 0,$$

für die andere

$$(2) \qquad [e_r e_s] = [e_s e_r],$$

wo für r und s, wenn $e_1, e_2, \ldots e_n$ die Einheiten sind, nach und nach jede zwei der Zahlen $1, \ldots n$ gesetzt werden sollen.

Beweis. Jede Bestimmungsgleichung wird bei zwei Faktoren, die aus den Einheiten $e_1, \ldots e_n$ abgeleitet sind, die Form haben

$$(a) \qquad \Sigma \alpha_{r,s} [e_r e_s] = 0,$$

wo die Koefficienten $\alpha_{r,s}$ beliebige Zahlen sind, die aber nicht alle gleichzeitig null werden dürfen, und wo für r und s nach und nach

je zwei der Werthe $1, \ldots n$ in die Summe eingeführt werden sollen. Wir nehmen an, die Produktbildung solle † eine lineale sein; das 28 heisst (nach 50), es soll jede Bestimmungsgleichung noch geltend bleiben, wenn man statt der Einheiten beliebige aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen setzt.

Man setze in (a) $\Sigma x_{r,u} e_u$ statt e_r und $\Sigma x_{s,v} e_v$ statt e_s, wo die Summen sich nur auf die Indices u und v beziehen, und $x_{r,u}$ und $x_{s,v}$ beliebig zu wählende Zahlen bedeuten. Dann erhalten wir

$$0 = \Sigma \alpha_{r,s} [\Sigma x_{r,u} e_u \,.\, \Sigma x_{s,v} e_v]$$
$$= \Sigma \alpha_{r,s} \Sigma x_{r,u} x_{s,v} [e_u e_v], \qquad [42]$$

also

$$0 = \Sigma \alpha_{r,s} x_{r,u} x_{s,v} [e_u e_v], \qquad [13]$$

indem sich nun die Summe auf alle vier Werthe r, s, u, v bezieht. Vertauscht man hier r mit s und u mit v, was man kann, da r, s, u, v in jedem Gliede ganz beliebige der Zahlen $1, \ldots n$ sind, so erhält man

$$0 = \Sigma \alpha_{s,r} x_{s,v} x_{r,u} [e_v e_u],$$

und indem man diese Gleichung mit der obenstehenden addirt, erhält man

$$\text{(b)} \qquad 0 = \Sigma x_{r,u} x_{s,v} (\alpha_{r,s} [e_u e_v] + \alpha_{s,r} [e_v e_u]),$$

eine Gleichung, welche für die Anwendung bequemer ist, als die beiden vorhergehenden. Sie muss für alle Werthe, die man den Grössen $x_{r,u}$, $x_{s,v}$ geben mag, gelten.

Man setze nun in (b) irgend eine der Grössen $x_{r,u}$ etwa $x_{a,c}$ zuerst $= 1$, dann $= -1$, subtrahire die so erhaltenen zwei Gleichungen von einander, und dividire durch 2, so fallen alle Glieder weg, welche $x_{a,c}$ entweder keinmal oder zweimal enthielten, und es bleibt nur

$$\Sigma x_{s,v} (\alpha_{a,s} [e_c e_v] + \alpha_{s,a} [e_v e_c]) = 0,$$

wobei jedoch unter den Werthepaaren von s und v dasjenige auszulassen ist, für welches zugleich $s = a$ und $v = c$ ist. Setzt man nun hierin wieder irgend eine der Grössen $x_{s,v}$, zum Beispiel $x_{b,d}$ zuerst gleich 1 und dann gleich -1, subtrahirt die so erhaltenen zwei Gleichungen und dividirt durch 2, so fallen wieder die Glieder weg, welche $x_{b,d}$ nicht enthalten, und es bleibt

$$\text{(c)} \qquad \alpha_{a,b} [e_c e_d] + \alpha_{b,a} [e_d e_c] = 0$$

zunächst nur für je vier Indices a, b, c, d, von denen nicht † gleich- 29 zeitig der erste dem zweiten, der dritte dem vierten gleich ist.

Hierdurch reducirt sich die Gleichung (b) auf

$$0 = \Sigma x_{r,u} x_{r,u} \alpha_{r,r} [e_u e_u].$$

Setzt man hierin für eine der Grössen $x_{r,u}$, etwa für $x_{a,c}$, nach der

Reihe zwei einander nicht entgegengesetzte Werthe, zum Beispiel 1 und 2 ein, subtrahirt die so erhaltenen Gleichungen von einander und dividirt die Restgleichung in diesem Falle durch 3, so bleibt

(d) $$0 = \alpha_{a,a}[e_c e_c],$$

das heisst, die Gleichung (c) gilt auch für den vorher ausgeschlossenen Fall, dass $a = b$, $c = d$ ist.

Somit folgt aus der Gleichung (a), wenn sie eine lineale Bestimmungsgleichung sein, das heisst, noch geltend bleiben soll, welche aus den Einheiten abgeleitete Grössen man auch statt derselben einführen mag, nothwendig die Gleichungsgruppe (c); aber auch umgekehrt, wenn die Gleichungsgruppe (c) gilt, so folgt aus ihr die Gleichung (b), welche ausdrückt, dass die Gleichung (a) lineal sei.

Setzen wir in (c) die Indices c und d einander gleich, so geht sie über in

(e) $$(\alpha_{a,b} + \alpha_{b,a})[e_c e_c] = 0,$$

und setzen wir in ihr $a = b$, so geht sie über in

(f) $$\alpha_{a,a}([e_c e_d] + [e_d e_c]) = 0.$$

In diesen gleich Null gesetzten Produkten muss (nach 12, 6) jedesmal der eine oder der andere Faktor null sein.

Nehmen wir *zuerst* an, $[e_c e_c]$ sei von Null verschieden, so muss nothwendig für je zwei Indices a und b

$$\alpha_{a,b} + \alpha_{b,a} = 0, \text{ das heisst: } -\alpha_{a,b} = \alpha_{b,a}$$

sein. Setzen wir dies in (c) ein, so erhalten wir

$$\alpha_{a,b}([e_c e_d] - [e_d e_c]) = 0.$$

Sollte hier $[e_c e_d] - [e_d e_c]$ von Null verschieden sein, so müsste der andere Faktor $\alpha_{a,b}$ für je zwei Indices a und b null sein, das heisst, die Gleichung (a) würde identisch null gegen die Annahme. Somit muss in diesem Falle, wo $[e_c e_c]$ von Null verschieden ist,

$$[e_c e_d] - [e_d e_c] = 0, \text{ das heisst: } [e_c e_d] = [e_d e_c]$$

sein, das heisst, es tritt die Gleichungsgruppe (51, 2) ein.

30 Ist nun † *im zweiten Falle* $[e_c e_c] = 0$, oder, indem wir a statt c setzen, $[e_a e_a] = 0$, so können wir diese Gleichung als Bestimmungsgleichung an die Stelle der Gleichung (a) setzen; dann ist $\alpha_{a,a} = 1$, während alle übrigen Koefficienten null sind, und es folgt dann, indem wir diesen Werth $\alpha_{a,a} = 1$ in (f) einsetzen,

$$[e_c e_d] + [e_d e_c] = 0,$$

das heisst, es tritt die Gruppe (51, 1) ein.

Nun wäre noch möglich, dass beide Gruppen (51, 1) und (51, 2)

zugleich geltend wären. Allein dann würde folgen, dass $[e_c e_d] = 0$, also alle Produkte null wären, ein Fall, den wir oben ausgeschlossen hatten.

Es sind also keine andern linealen Produktbildungen möglich, als die im Satze genannten. Dass diese nun in der That lineale sind, folgt sogleich aus der Gleichung (c), verglichen mit (a). In der That, wenn

(g) $$[e_a e_b] \mp [e_b e_a] = 0$$

die Bestimmungsgleichungen sind, und man setzt irgend eine derselben als die Gleichung (a), so ist für sie $\alpha_{a,b} = 1$, $\alpha_{b,a} = \mp 1$, und alle übrigen Koefficienten sind null. Dann geht die Gleichungsgruppe (c) über in

$$[e_c e_d] \mp [e_d e_c] = 0,$$

welche schon in der gegebenen Gruppe (g) enthalten waren. Also sind jene beiden Gattungen der Produktbildung lineal und zwar die einzig möglichen ausser der bestimmungslosen und der verschwindenden.

Anm. Soll also das bisher sich von selbst darbietende Princip, dass nämlich jedes durch eine Gleichung ausdrückbare Gesetz auch bestehen bleibt, wenn man statt der Einheiten beliebige aus ihnen abgeleitete Grössen setzt, auch in der nächsten Entwickelung noch fortbestehen, so ist kein anderer Fortschritt möglich, als der zu den beiden genannten Produktbildungen. Nehmen wir der Einfachheit wegen nur zwei Einheiten e_1 und e_2 an, so ist das System der Bestimmungsgleichungen für die erste Gattung gleichzeitig

$$[e_1 e_1] = [e_2 e_2] = 0 \text{ und } [e_1 e_2] = -[e_2 e_1],$$

und für die zweite

$$[e_1 e_2] = [e_2 e_1].$$

In Bezug auf die Operationen ist die letztere Gattung die einfachere. Ja, da die Bestimmungsgleichungen derselben nichts weiter ausdrücken als die Vertauschbarkeit der Faktoren, so ist diese Multiplikationsgleichung, was die Operationen anlangt, identisch mit der gewöhnlichen Multiplikation der Algebra, weshalb ich sie auch die † algebraische genannt habe*). Es versteht sich von selbst, 31 dass ihr auch eine algebraische Division, Potenzirung, ... zur Seite geht, und dass man für alle diese Verknüpfungen extensiver Grössen unmittelbar die algebraischen Gesetze als geltend annehmen darf. Hingegen ist diese Multiplikation, was die durch sie erzeugten Grössen betrifft, sehr viel komplicirter als die erstere Gattung, welche ich die kombinatorische genannt habe.

In der That, betrachten wir bei zwei Einheiten e_1 und e_2 das Produkt zweier Faktoren

$$[(q_1 e_1 + q_2 e_2)(r_1 e_1 + r_2 e_2)] = q_1 r_1 [e_1 e_1] + q_2 r_2 [e_2 e_2] + q_1 r_2 [e_1 e_2] + q_2 r_1 [e_2 e_1],$$

so reducirt sich dies bei der ersten Gattung, wo $[e_1 e_1] = [e_2 e_2] = 0$, $[e_2 e_1] = -[e_1 e_2]$ ist, auf $(q_1 r_2 - q_2 r_1)[e_1 e_2]$, also auf nur eine Einheit, nämlich $[e_1 e_2]$; ja, wenn in einer Entwickelungsreihe nie mehr als jene beiden ursprünglichen Einheiten e_1 und e_2 vorkommen, so wird man, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, $[e_1 e_2] = 1$ setzen können, und erhält dann als Resultat der Multiplikation eine

*) Crelle's Journal Bd. 49, S. 139. {In der Abhandlung: Sur les différents genres de multiplication.}

Zahl. Ganz anders bei der zweiten Gattung, wo sich jenes Produkt auf

$$q_1 r_1 [e_1 e_1] + q_2 r_2 [e_2 e_2] + (q_1 r_2 + q_2 r_1) [e_1 e_2]$$

reducirt, also auf nicht weniger als drei Einheiten.

Da es in der Entwickelung der Wissenschaft vor allen Dingen darauf ankommt, die nach und nach hervortretenden Grössen in ihrem einfachsten Begriffe zu erfassen, so ist hier der Uebergang zu der ersten Gattung der Multiplikation mit Nothwendigkeit geboten. Ja, da die durch algebraische Multiplikation extensiver Grössen erzeugten Gebilde nicht mehr als einfache Grössen sich darstellen, sondern vielmehr den Funktionen der Algebra sich parallel stellen, so werden wir dieser Multiplikation erst im zweiten Theile dieses Werkes wieder begegnen, welcher die Funktionen behandeln wird.

Ich verweise in Bezug auf die Entwickelung der verschiedenen Multiplikationsgattungen auf die vorher angeführte Abhandlung in Crelle's Journal. Dort habe ich für den obigen Satz einen zwar weitläuftigeren, aber elementareren Beweis gegeben. Die allgemeine Idee der Multiplikation, wie sie im ersten Paragraphen dieses Kapitels entwickelt ist, habe ich schon in der ersten Ausgabe meiner Ausdehnungslehre (§ 10—12) zu Grunde gelegt.

Kapitel 3. **Kombinatorisches Produkt.**

§ 1. **Allgemeine Gesetze der kombinatorischen Multiplikation.**

52. Erklärung. Wenn die Faktoren eines Produktes P aus einem Systeme von Einheiten abgeleitet sind, und je zwei Produkte 32 der Einheiten, welche durch Vertauschung der † beiden letzten Faktoren auseinander hervorgehen, zur Summe Null geben, jedes Produkt aber, was lauter verschiedene Einheiten als Faktoren enthält, von Null verschieden ist, so nenne ich jenes Produkt P ein kombinatorisches, und jene Faktoren desselben seine einfachen Faktoren; das heisst, sind b und c *Einheiten*, A aber eine beliebige *Reihe von Einheiten*, so wird die angegebene Bestimmung ausgedrückt durch die Formel

$$[Abc] + [Acb] = 0.$$

Anm. Warum hier gerade mit dieser besonderen Multiplikationsgattung der Anfang gemacht wird, ist Nr. 51 Anm. entwickelt.

53. *Man kann in jedem kombinatorischen Produkt die beiden letzten (einfachen) Faktoren vertauschen, wenn man nur zugleich das Vorzeichen* ($\mp$) *in das entgegengesetzte verwandelt, das heisst*

$$[Abc] + [Acb] = 0,$$

auch wenn A eine beliebige Reihe von Faktoren ist und b und c einfache Faktoren sind.

Beweis. 1. Es seien zuerst b und c Einheiten. Da nun A eine beliebige Reihe von Faktoren ist, und die Faktoren aus den Einheiten numerisch ableitbar sind, so erhält man, indem man statt der Faktoren

von A ihre Ableitungsausdrücke setzt, und die Klammern löst, (nach 45) einen Ausdruck, der aus den Produkten der Einheiten numerisch ableitbar ist, also die Form hat

$$A = \Sigma \alpha_r E_r,$$

wo E_r Produkte der Einheiten sind. Setzt man dies ein, so wird

$$\begin{aligned}[Abc] + [Acb] &= [\Sigma \alpha_r E_r . bc] + [\Sigma \alpha_r E_r . cb] \\ &= \Sigma \alpha_r [E_r bc] + \Sigma \alpha_r [E_r cb] && [44] \\ &= \Sigma \alpha_r ([E_r bc] + [E_r cb]) && [12, 3] \\ &= \Sigma \alpha_r 0 && [52] \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. Es seien b und c aus den Einheiten $e_1, e_2, \ldots$ numerisch abgeleitet, und sei

$$b = \Sigma \beta_r e_r, \; c = \Sigma \gamma_r e_r,$$

so ist

$$\begin{aligned}[Abc] + [Acb] &= [A . \Sigma \beta_r e_r . \Sigma \gamma_r e_r] + [A . \Sigma \gamma_r e_r . \Sigma \beta_r e_r] \\ &= \Sigma \beta_r \gamma_s [A e_r e_s] + \Sigma \gamma_s \beta_r [A e_s e_r] && [45] \\ &= \Sigma \beta_r \gamma_s ([A e_r e_s] + [A e_s e_r]) && [12] \\ &= \Sigma \beta_r \gamma_s 0 && [\text{Beweis, } 1] \\ &= 0.\end{aligned}$$

33

54. *In einem kombinatorischen Produkte kann man beliebige zwei aufeinander folgende einfache Faktoren vertauschen, wenn man zugleich das Zeichen* ($\mp$) *umkehrt, das heisst*

$$[AbcD] + [AcbD] = 0,$$

wenn A und D beliebige Faktorenreihen, b und c einfache Faktoren sind.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}[AbcD] + [AcbD] &= [[Abc]D] + [[Acb]D] && [7, \text{Anm.}] \\ &= [([Abc] + [Acb])D] && [39] \\ &= 0 . D && [53] \\ &= 0.\end{aligned}$$

55. *In einem kombinatorischen Produkte kann man beliebige zwei einfache Faktoren vertauschen, wenn man zugleich das Zeichen* ($\mp$) *umkehrt, das heisst*

$$P_{a,b} = - P_{b,a},$$

oder

$$P_{a,b} + P_{b,a} = 0.$$

Beweis. Angenommen, zwischen a und b stehen in $P_{a,b}$ noch n einfache Faktoren. Vertauscht man jetzt b mit dem nächst vorhergehenden Faktor, das heisst, rückt man b um eine Stelle nach links,

so ändert sich (nach 54) das Zeichen; rückt man also b nach und nach über die n Faktoren hinweg, welche ursprünglich zwischen a und b standen, so ändert sich das Zeichen n-mal. Jetzt folgt b unmittelbar auf a, vertauscht man jetzt a mit b, so ändert sich das Zeichen noch einmal. Jetzt steht b auf der Stelle, wo ursprünglich a stand; um nun auch a auf die Stelle zu bringen, wo ursprünglich b stand, hat man nun noch a um n Stellen nach rechts zu rücken, wobei sich das Zeichen noch n-mal ändert. Im Ganzen hat es sich $(2n + 1)$-mal geändert; durch die $2n$-malige Aenderung wird das Zeichen aber wieder das ursprüngliche, und da nun noch die einmalige Aenderung hinzukommt, so ist das letzte Zeichen dem ursprünglichen entgegengesetzt, also

$$P_{a,b} = - P_{b,a}, \text{ oder } P_{a,b} + P_{b,a} = 0.$$

34 **56.** Erklärung. Wenn von zwei Grössenreihen jede die Grössen a und b enthält, und zwar jede derselben einmal, und in beiden Reihen a früher steht als b, oder in beiden b früher steht als a, so sage ich, diese beiden Grössen seien in jenen Reihen gleich geordnet, hingegen sie seien in jenen Reihen entgegengesetzt geordnet, wenn in der einen a früher steht als b, in der andern b früher als a.

57. *Zwei kombinatorische Produkte, welche dieselben einfachen Faktoren (aber in verschiedener Folge) enthalten, sind einander gleich oder entgegengesetzt, je nachdem die Anzahl der in beiden Produkten einander entgegengesetzt geordneten Faktorenpaare gerade oder ungerade ist, das heisst*

$$P = (-1)^r Q,$$

wenn P und Q kombinatorische Produkte sind, welche dieselben einfachen Faktoren enthalten, und wenn r die Anzahl der Faktorenpaare ist, welche in P entgegengesetzt geordnet sind, wie in Q.

Beweis. Wenn zuerst je zwei Faktoren, welche in dem einen Produkte, etwa in Q, unmittelbar aufeinander folgen, in beiden Produkten gleich geordnet sind, so leuchtet ein, dass dann beide Produkte identisch sind, und sie also kein entgegengesetzt geordnetes Faktorenpaar enthalten können. So lange es daher in Q noch Faktorenpaare giebt, welche entgegengesetzt geordnet sind, wie in P, so giebt es auch noch mindestens zwei Faktoren, welche in Q unmittelbar auf einander folgen, und welche in Q entgegengesetzt geordnet sind wie in P. Angenommen, a und b seien zwei solche Faktoren. Vertauscht man sie unter einander, so erhält man ein Produkt Q_1, welches dem Produkte Q (nach 54) entgegengesetzt bezeichnet ist, und in welchem alle Faktorenpaare, mit Ausnahme des Faktorenpaares a, b, ebenso geordnet sind wie in Q, während dies Faktorenpaar a, b in Q_1 entgegen-

gesetzt geordnet ist wie in Q, also ebenso geordnet wie in P. Also ist die Anzahl der Faktorenpaare, welche in Q_1 und P entgegengesetzt geordnet sind, um 1 kleiner, als die Anzahl derer, welche in Q und P entgegengesetzt geordnet sind. Ist diese letztere Anzahl also r, so ist die erstere $r-1$.

Ist † nun $r-1$ noch nicht null, das heisst, giebt es noch Faktorenpaare, welche in Q_1 und P entgegengesetzt geordnet sind, so kann man mit Q_1 wieder so verfahren wie vorher mit Q; man erhalte dadurch aus Q_1 das Produkt Q_2, so ist $Q_2 = -Q_1$, also $=(-1)^2 Q$, und die Anzahl der Faktorenpaare, welche in Q_2 und P entgegengesetzt geordnet sind, ist $r-2$. Fährt man in dieser Weise fort, bis man zu Q_r gelangt, so wird $Q_r = (-1)^r Q$, und die Anzahl der Faktorenpaare, die in Q_r und P entgegengesetzt geordnet sind, beträgt $r-r$, also Null, das heisst, die Faktorenpaare in Q_r und P sind sämmtlich gleich geordnet, also $Q_r = P$, somit $P = Q_r = (-1)^r Q$. 35

58. *Wenn man in einem kombinatorischen Produkte eine Reihe von r einfachen Faktoren mit einer* ***unmittelbar darauf folgenden*** *Reihe von s einfachen Faktoren vertauscht (ohne im Uebrigen die Ordnung der Faktoren zu ändern), so ist das so hervorgehende Produkt dem ursprünglichen gleich oder entgegengesetzt, je nachdem rs gerade oder ungerade ist, das heisst*

$$[BC] = (-1)^{rs}[CB], \quad [ABC] = (-1)^{rs}[ACB],$$

wo B eine Reihe von r, C von s einfachen Faktoren darstellt.

Beweis. Es sei $C = c_1 c_2 \dots c_s$, also

$$[ABC] = [ABc_1 c_2 \dots c_s].$$

Vertauscht man nun c_1 mit dem letzten einfachen Faktor von B, das heisst, rückt man c_1 um Eine Stelle vor, so ändert sich (nach 54) das Vorzeichen des ganzen Produktes; rückt c_1 also um r einfache Faktoren vor, das heisst, rückt man ihn vor die Faktoren von B, so ändert sich das Zeichen r-mal, also wird

$$[ABc_1 c_2 \dots c_s] = (-1)^r [Ac_1 Bc_2 c_3 \dots c_s],$$

also dies

$$\begin{aligned} &= (-1)^r (-1)^r [Ac_1 c_2 Bc_3 \dots c_s] \\ &= (-1)^{2r} [Ac_1 c_2 Bc_3 \dots c_s] \\ &= (-1)^{3r} [Ac_1 c_2 c_3 Bc_4 \dots c_s] \\ &= \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &= (-1)^{sr} [Ac_1 c_2 \dots c_s B] \end{aligned}$$

oder

$$[ABC] = (-1)^{rs}[ACB],$$

und wenn man hierin $A = 1$ setzt

$$[BC] = (-1)^{rs}[CB].$$

59. *Wenn man in einem kombinatorischen Produkte eine Reihe von* 36 *q einfachen Faktoren mit einer {von ihr} durch r einfache † Faktoren getrennten Reihe von s einfachen Faktoren vertauscht, so ist das so hervorgehende Produkt dem ursprünglichen gleich oder entgegengesetzt, je nachdem $rs + sq + qr$ gerade oder ungerade ist, das heisst*

$$[ABC] = (-1)^{rs+sq+qr}[CBA],$$

wo A, B, C Reihen von beziehlich q, r, s einfachen Faktoren darstellen.

Beweis. Es ist

$$[ABC] = (-1)^{(q+r)s}[CAB] \qquad [58]$$
$$= (-1)^{qs+rs}(-1)^{qr}[CBA] \qquad [58]$$
$$= (-1)^{rs+sq+qr}[CBA].$$

60. *Wenn zwei einfache Faktoren eines kombinatorischen Produktes einander gleich sind, so ist das Produkt null, das heisst*

$$P_{a,a} = 0.$$

Beweis. Es sei $P_{a,b}$ irgend ein kombinatorisches Produkt, welches die Faktoren a und b enthält, und $P_{b,a}$ das durch Vertauschung von a und b aus ihm hervorgehende, so ist (nach 55)

$$P_{a,b} + P_{b,a} = 0,$$

also, wenn a gleich b ist,

$$P_{a,a} + P_{a,a} = 0,$$

das heisst $2P_{a,a} = 0$, somit auch $P_{a,a} = 0$.

61. *Ein kombinatorisches Produkt ist null, wenn zwischen seinen einfachen Faktoren eine Zahlbeziehung herrscht, das heisst*

$$[a_1 a_2 a_3 \dots a_m] = 0,$$

wenn eine der Grössen $a_1, \dots a_m$ sich aus den übrigen numerisch ableiten lässt, zum Beispiel

$$a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots + \alpha_m a_m$$

ist.

Beweis. Man erhält, indem man den Werth von a_1 in das Produkt einsetzt,

$$[a_1 a_2 a_3 \dots a_m] = [(\alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots + \alpha_m a_m) a_2 a_3 \dots a_m],$$

also (nach 44)

$$\begin{aligned}[a_1 a_2 a_3 \dots a_m] &= \alpha_2 [a_2 a_2 a_3 \dots a_m] + \alpha_3 [a_3 a_2 a_3 \dots a_m] + \cdots + \\ &\qquad + \alpha_m [a_m a_2 a_3 \dots a_m] \\ &= \alpha_2 . 0 + \alpha_3 . 0 + \cdots + \alpha_m . 0 \qquad [60] \\ &= 0.\end{aligned}$$

62. Erklärung. Unter der Determinante aus n Reihen von je n Zahlen versteht man, wenn man die r-te Zahl der s-ten Reihe mit $\alpha_r^{(s)}$ bezeichnet, dasjenige Polynom, welches man aus dem Produkte $\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)} \dots \alpha_n^{(n)}$ dadurch erhält, dass man in ihm nach und nach die unteren Indices auf alle möglichen Arten versetzt, während man die oberen unverändert lässt, dann jedes dieser Produkte mit dem $+$ oder $-$ Zeichen versieht, je nachdem die Anzahl derjenigen Paare von Indices, welche unten entgegengesetzt geordnet sind wie oben, gerade oder ungerade ist, und diese sämmtlichen Glieder addirt. Man bezeichnet diese Determinante mit $\Sigma \mp \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)} \dots \alpha_n^{(n)}$, das heisst, man setzt 37

$$\Sigma \mp \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)} \dots \alpha_n^{(n)} = \Sigma (-1)^u \alpha_r^{(1)}\alpha_s^{(2)} \dots \alpha_w^{(n)},$$

wo $r, s, \dots w$ den Zahlen $1, 2, \dots n$, in irgend einer Ordnung genommen, gleich sind, wo die Summe sich auf alle möglichen Ordnungen dieser Art bezieht, und u die Anzahl der Index-Paare bezeichnet, welche unten entgegengesetzt geordnet sind, wie oben.

Anm. Der Vollständigkeit wegen habe ich diesen Begriff der Determinante hier aufstellen zu müssen geglaubt, zumal da es zweckmässig schien, die Zeichenbestimmung in der einfachen Form, wie sie hier dargestellt ist, festzusetzen, während die sonst gebräuchliche, durch Cauchy eingeführte Form der Zeichenbestimmung ein Zurückgehen auf die Permutations-Gesetze nothwendig machen würde. Dass man übrigens statt der unteren Indices auch die oberen vertauschen kann, leuchtet ein, doch ist es unangemessen, eine solche zwiefache Bestimmung in eine strenge Definition aufzunehmen.

63. *Das kombinatorische Produkt von n einfachen Faktoren, welche aus n Grössen $a_1, a_2, \dots a_n$ numerisch abgeleitet sind, erhält man, indem man aus den n Reihen von Zahlen, durch welche jene Faktoren aus den n Grössen $a_1, a_2, \dots a_n$ abgeleitet sind, die Determinante bildet, und diese mit dem kombinatorischen Produkte der Grössen $a_1, \dots a_n$ multiplicirt, wobei nämlich die Zahlen, durch welche der erste jener Faktoren aus $a_1, \dots a_n$ abgeleitet ist, die erste Reihe bilden, und so fort, das heisst, es ist*

$$[(\alpha_1^{(1)}a_1 + \cdots + \alpha_n^{(1)}a_n)(\alpha_1^{(2)}a_1 + \cdots + \alpha_n^{(2)}a_n) \dots (\alpha_1^{(n)}a_1 + \cdots + \alpha_n^{(n)}a_n)] =$$
$$= \Sigma \mp \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)} \dots \alpha_n^{(n)} . [a_1 a_2 \dots a_n].$$

Beweis. Es ist (nach 45) das Produkt auf der linken Seite 38

$$= \Sigma \alpha_r^{(1)}\alpha_s^{(2)} \dots \alpha_w^{(n)} [a_r a_s \dots a_w],$$

wo jeder der Indices $r, s, \dots w$ nach und nach jeden der Werthe $1, \dots n$ annehmen soll. Sind von diesen Werthen zwei oder mehrere einander gleich, so enthält das Produkt $[a_r a_s \dots a_r]$ gleiche Faktoren, ist also (nach 60) null. Lassen wir daher die Glieder, welche diese Produkte enthalten, weg, so bleiben nur die übrig, in denen die n Indices $r, s, \dots w$ in irgend welcher Ordnung den Werthen $1, 2, \dots n$ gleich sind. Es ist also dann (nach 57) das Produkt $[a_r a_s \dots a_w]$ gleich $(-1)^u [a_1 a_2 \dots a_n]$, wenn u die Anzahl der Faktorenpaare ist, welche in dem Produkte $[a_r a_s \dots a_w]$ entgegengesetzt geordnet sind wie in $[a_1 a_2 \dots a_n]$, das heisst, die Anzahl derjenigen Paare von Indices, welche in dem Produkte $\alpha_r^{(1)} \alpha_s^{(2)} \dots \alpha_w^{(n)}$ unten entgegengesetzt geordnet sind wie oben; somit ist das gegebene Produkt

$$= \Sigma(-1)^u \alpha_r^{(1)} \alpha_s^{(2)} \dots \alpha_w^{(n)} . [a_1 a_2 \dots a_n],$$

das heisst (nach 62)

$$= \Sigma \pm \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \dots \alpha_n^{(n)} . [a_1 a_2 \dots a_n].$$

64. Erklärung. Unter multiplikativen Kombinationen aus einer Reihe von Grössen verstehe ich die Kombinationen ohne Wiederholung aus diesen Grössen, und zwar jede Kombination aufgefasst als kombinatorisches Produkt, dessen einfache Faktoren die Elemente der Kombination sind; so zum Beispiel sind $[ab]$, $[ac]$, $[bc]$ die multiplikativen Kombinationen aus den Grössen a, b, c zur zweiten Klasse.

65. *Jedes kombinatorische Produkt von m einfachen Faktoren, welche aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen $a_1, \dots a_n$ numerisch abgeleitet sind, ist aus den multiplikativen Kombinationen dieser Grössen zur m-ten Klasse numerisch ableitbar, und zwar ist die zu irgend einer dieser Kombinationen gehörige Ableitungszahl die Determinante aus denjenigen m^2 Ableitungszahlen jener m Faktoren, welche zu den m Elementen dieser Kombination gehören, das heisst*

$$[\Sigma\alpha_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a}} . \Sigma\beta_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{b}} \dots] = \sum \{\Sigma \pm \alpha_r \beta_s \dots\} [a_r a_s \dots],$$

wo $r < s < \cdots$.

89 Beweis. Es ist

$$[\Sigma\alpha_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a}} . \Sigma\beta_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{b}} \dots] = \Sigma(\alpha_{\mathfrak{a}} \beta_{\mathfrak{b}} \dots)[a_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b}} \dots]. \qquad [45]$$

Da (nach 60) $[a_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b}} \dots]$ null ist, sobald zwei der Faktoren, also hier zwei der Indices $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$ gleich sind, so können wir die Bedingung hinzufügen, dass $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$ alle von einander verschieden seien. Nun seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$, nachdem sie steigend geordnet sind, $= r, s, t, \dots$, also $r < s < t < \cdots$, und sei u die Anzahl der Grössenpaare, welche in

der Reihe $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ entgegengesetzt geordnet sind, wie in $r, s, t, \ldots$, so ist $[a_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b}} \ldots] = (-1)^u [a_r a_s \ldots]$, somit ist das gegebene Produkt

$$= \Sigma\{\alpha_{\mathfrak{a}} \beta_{\mathfrak{b}} \ldots (-1)^u [a_r a_s \ldots]\}$$

Aber nach der Definition (62) ist $\Sigma(-1)^u \alpha_{\mathfrak{a}} \beta_{\mathfrak{b}} \ldots$, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$, in irgend einer Ordnung genommen, gleich $r, s, \ldots$ sind, gleich der Determinante $\Sigma \mp \alpha_r \beta_s \ldots$, also

$$[\Sigma \alpha_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a}} \,.\, \Sigma \beta_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{b}} \ldots] = \sum' \{\Sigma \mp \alpha_r \beta_s \ldots\} [a_r a_s \ldots],$$

wo $r < s < \cdots$.

66. Umkehrung von 61. *Wenn ein kombinatorisches Produkt null ist, so stehen seine einfachen Faktoren in einer Zahlbeziehung zu einander, das heisst, wenn*

$$[a_1 a_2 \ldots a_m] = 0$$

ist, so muss sich eine Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m = 0$$

aufstellen lassen, in welcher die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ nicht alle zugleich null sind.

Beweis. Es sei das kombinatorische Produkt

$$[a_1 a_2 \ldots a_m] = 0.$$

Zu zeigen ist, dass $a_1, a_2, \ldots a_m$ in einer Zahlbeziehung stehen müssen.

Angenommen, sie ständen in keiner Zahlbeziehung zu einander. Bilden dann $e_1, \ldots e_n$ das System der Einheiten, aus denen $a_1, \ldots a_n$ numerisch abgeleitet sind, so kann man (nach 20) zu den m Grössen $a_1, \ldots a_m$ noch $n - m$ Grössen $a_{m+1}, \ldots a_n$ annehmen, so {dass} sich aus $a_1, \ldots a_n$ die Einheiten $e_1, \ldots e_n$ numerisch ableiten lassen. Führt man die Ausdrücke dieser Ableitungen in das kombinatorische Produkt $[e_1 e_2 \ldots e_n]$ ein, † und löst die Klammern auf, so erhält man (nach 63) eine Gleichung der Form 40

$$[e_1 e_2 \ldots e_n] = \alpha [a_1 a_2 \ldots a_n],$$

wo α eine Zahl ist.

Nun ist aber $[a_1 a_2 \ldots a_m] = 0$, also auch

$$[a_1 a_2 \ldots a_m a_{m+1} \ldots a_n] = 0,$$

also

$$[e_1 e_2 \ldots e_n] = \alpha \,.\, 0 = 0.$$

Dies widerstreitet aber der Erklärung in 52, nach welcher $[e_1 e_2 \ldots e_n]$ von Null verschieden ist. Also ist die Annahme, dass $a_1, \ldots a_m$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, unmöglich. Sie stehen also in einer Zahlbeziehung zu einander.

67. *Ein kombinatorisches Produkt ändert seinen Werth nicht, wenn*

man zu einem einfachen Faktor desselben ein beliebiges Vielfaches eines andern einfachen Faktors desselben Produktes addirt, das heisst

$$P_{a,b+qa} = P_{a,b},$$

wenn q eine Zahl ist, und P ein kombinatorisches Produkt bezeichnet.

Beweis. Es ist

$$P_{a,b+qa} = P_{a,b} + qP_{a,a} \qquad [44]$$
$$= P_{a,b}. \qquad [60]$$

68. *Die sämmtlichen Sätze kombinatorischer Multiplikation bleiben noch bestehen, wenn man statt der n ursprünglichen Einheiten beliebige n aus ihnen abgeleitete Grössen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, einführt.*

Beweis. Erstens gelten alle in der Definition des kombinatorischen Produktes gegebenen Bestimmungen, auch wenn man statt des Systems der n ursprünglichen Einheiten n solche Grössen setzt, wie sie der Lehrsatz bestimmt. Nämlich, es ist auch für diesen Fall (nach 53)

$$[Abc] + [Acb] = 0,$$

und das Produkt der sämmtlichen n Grössen ist von Null verschieden, denn wäre es gleich Null, so müsste (nach 66) zwischen den n Faktoren eine Zahlbeziehung herrschen, gegen die Voraussetzung. Diese beiden Bestimmungen waren nun die einzigen in der Definition enthaltenen. Ferner gelten aber auch alle in den ersten beiden Kapiteln entwickelten Gesetze für den Fall jener Substitution. Aus jener De-
41 finition und † diesen Gesetzen waren aber die sämmtlichen Gesetze der kombinatorischen Multiplikation abgeleitet. Also gelten diese Gesetze auch nach jener Substitution.

§ 2. Das kombinatorische Produkt als Grösse.

Vorbemerkung. Wenn eine Verknüpfung von Grössen wieder als Eine Grösse erkannt werden soll, so müssen die folgenden Fragen beantwortet werden: Wann sind zwei solche Verknüpfungen einander gleich oder von einander verschieden? wann stehen sie in einer Zahlbeziehung zu einander, und in welcher? Für die Vollendung des Begriffs wird es dann noch wichtig sein, die sämmtlichen verschiedenen Grössenreihen ableiten zu können, deren jede, wenn sie der fraglichen Verknüpfung unterworfen wird, dieselbe Grösse liefert, wie die andern.

Diese Fragen sollen hier für das kombinatorische Produkt beantwortet werden, wobei wir den Begriff der multiplikativen Kombinationen zu Grunde legen.

69. *Wenn die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so stehen auch ihre multiplikativen Kombinationen zu einer beliebigen Klasse in keiner Zahlbeziehung zu einander, das heisst, die Gleichung*

(a) $$\alpha A + \beta B + \cdots = 0,$$

in welcher $A, B, \ldots$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1, \ldots a_n$ zu irgend einer Klasse sind, und $\alpha, \beta, \ldots$ Zahlen bedeuten, wird ersetzt durch die Gleichungsgruppe

(b) $$\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \ldots.$$

Beweis. Es sei die Gleichung (a) als geltend angenommen. Man multiplicire die ganze Gleichung kombinatorisch mit denjenigen unter den Grössen $a_1, \ldots a_n$, welche in dem Produkte A nicht vorkommen; es sei A_1 diese Faktorenreihe, so dass also das kombinatorische Produkt $[AA_1]$ die sämmtlichen Grössen $a_1, \ldots a_n$ als Faktoren enthält. Dann erhält man

$$\alpha[AA_1] + \beta[BA_1] + \cdots = 0.$$

Da nun A und B verschiedene Kombinationen sind, so muss B wenigstens einen Faktor enthalten, der nicht in A enthalten ist. Es sei a_r ein solcher, so muss a_r in A_1 enthalten sein, da A_1 von den Faktoren $a_1, \ldots a_n$ alle diejenigen † enthält, die in A nicht vorkommen. 42 Somit kommt a_r sowohl in B als in A_1 vor, folglich ist das kombinatorische Produkt $[BA_1]$ (nach 60) null. Aus demselben Grunde auch $[CA_1]$ und so weiter. Somit reducirt sich die Gleichung auf

$$\alpha[AA_1] = 0.$$

Also muss (nach 12, 6) entweder α oder $[AA_1]$ null sein. Da nun $[AA_1]$ ein kombinatorisches Produkt von n Grössen $a_1, \ldots a_n$ ist, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so ist dasselbe ungleich Null (nach 66). Somit muss der andere Faktor, also α, null sein. Aus demselben Grunde sind $\beta, \ldots$ null, das heisst, zwischen den Kombinationen $A, B, \ldots$ herrscht keine Zahlbeziehung.

70. *Zwei kombinatorische Produkte (A und B), die nicht null sind, stehen dann und nur dann in einer Zahlbeziehung zu einander, wenn die aus ihren einfachen Faktoren ableitbaren Gebiete identisch sind; das heisst*

(a) $$A \equiv B$$

dann und nur dann, wenn die einfachen Faktoren von A dasselbe Gebiet liefern wie die von B; oder:

(b) $$[a_1 a_2 \ldots a_m] \equiv [b_1 b_2 \ldots b_m]$$

dann und nur dann, wenn sich jede aus $a_1, \ldots a_m$ numerisch ableitbare Grösse auch aus $b_1, \ldots b_m$ ableiten lässt, also wenn stets

$$\text{(c)} \qquad x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_m b_m$$

gesetzt werden kann, welche Werthe auch entweder $x_1, \ldots x_m$, *oder* $y_1, \ldots y_m$ *haben mögen.*

Beweis. 1. Angenommen zuerst, das Gebiet $a_1, \ldots a_m$ sei identisch dem Gebiete $b_1, \ldots b_m$, so sind die Grössen $a_1, \ldots a_m$ aus $b_1, \ldots b_m$ numerisch ableitbar. Dann ist (nach 63)

$$[a_1 a_2 \ldots a_m] = \alpha [b_1 b_2 \ldots b_m],$$

wo α eine Zahl ist (nämlich die dort beschriebene Determinante). Diese Gleichung drückt aus, dass die beiden kombinatorischen Produkte in {einer} Zahlbeziehung stehen, und da auch keins von beiden null ist, so gilt (nach 2) die Kongruenz:

$$[a_1 a_2 \ldots a_m] \equiv [b_1 b_2 \ldots b_m].$$

2. Umgekehrt sei angenommen, diese Kongruenz gelte, also die beiden kombinatorischen Produkte stehen in einer Zahlbeziehung zu einander, ohne null zu sein, und sei

$$[a_1 a_2 \ldots a_m] = \alpha [b_1 b_2 \ldots b_m].$$

43 Man füge auf beiden Seiten den kombinatorischen Faktor b_1 hinzu, so erhält man

$$[a_1 a_2 \ldots a_m b_1] = \alpha [b_1 b_2 \ldots b_m b_1].$$

Aber $[b_1 b_2 \ldots b_m b_1]$ ist, da es zwei gleiche Faktoren (b_1) enthält, (nach 60) null; also ist auch

$$[a_1 a_2 \ldots a_m b_1] = 0.$$

Folglich stehen (nach 66) die einfachen Faktoren dieses Produktes, das heisst $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1$, in einer Zahlbeziehung zu einander. Also muss sich (nach 16) eine Gleichung der Form

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m + \beta_1 b_1 = 0$$

aufstellen lassen, in welcher die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1$ nicht alle zugleich null sind. In dieser Gleichung kann auch β_1 nicht null sein, weil sonst zwischen den Grössen $a_1, a_2, \ldots a_m$ (nach 16) eine Zahlbeziehung herrschen, also das kombinatorische Produkt $[a_1 a_2 \ldots a_m]$ (nach 61) null sein müsste, was der Voraussetzung widerstreitet. Wenn nun aber β_1 ungleich Null ist, so kann man die obige Gleichung durch β_1 dividiren, und erhält

$$b_1 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} a_1 - \frac{\alpha_2}{\beta_1} a_2 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\beta_1} a_m,$$

das heisst, b_1 ist aus $a_1, \ldots a_m$ numerisch ableitbar. Aus demselben Grunde sind auch $b_2, b_3, \ldots b_m$ aus $a_1, \ldots a_m$ numerisch ableitbar.

Nun stehen aber auch $b_1, \ldots b_m$ in keiner Zahlbeziehung zu einander, weil sonst das kombinatorische Produkt $[b_1 b_2 \ldots b_m]$ (nach 61) null sein müsste, was der Voraussetzung widerstreitet; also sind {die} m Grössen $b_1, \ldots b_m$, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, aus {den} m Grössen $a_1, \ldots a_m$ numerisch ableitbar, folglich ist (nach 21) das aus der ersten Grössenreihe ableitbare Gebiet dem aus der zweiten ableitbaren identisch.

Anm. Da zwei gleiche Grössen immer in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so folgt aus dem vorhergehenden Satze unmittelbar, dass zwei gleiche kombinatorische Produkte immer ein und dasselbe Gebiet haben, dem seine einfachen Faktoren angehören, und dass daher ausser diesem Gebiete nur noch der durch eine Zahl darstellbare metrische Werth gegeben zu sein braucht, damit der ganze Werth des kombinatorischen Produktes genau bestimmt sei. Ist nämlich dann in dem Gebiete irgend ein kombinatorisches Produkt gegeben, aus dessen einfachen Faktoren das Gebiet ableitbar ist, so wird † jedes andere kombinatorische 44 Produkt, aus dessen einfachen Faktoren dasselbe Gebiet ableitbar ist, durch eine blosse Zahl bestimmt sein, welche das Verhältniss dieses Produktes zu jenem darstellt.

71. Erklärung. Wenn man aus einer Reihe von Grössen eine zweite Reihe dadurch ableitet, dass man zu irgend einer Grösse der Reihe ein Vielfaches der benachbarten Grösse der Reihe addirt, während man alle übrigen Grössen der Reihe ungeändert lässt, so sage ich, es sei die erste Reihe in die zweite durch eine einfache lineale Aenderung umgewandelt; leitet man aus dieser zweiten Reihe wieder durch einfache lineale Aenderung eine dritte ab, und so fort, so sage ich, es sei die erste Reihe in die letzte durch mehrfache lineale Aenderung umgewandelt. In beiden Fällen also sage ich, es sei die erste Reihe in die letzte durch lineale Aenderung umgewandelt.

Wenn also p und q irgend zwei aufeinander folgende Grössen der Reihe sind, so lässt sich durch einfache lineale Aenderung umwandeln die Reihe

$$\ldots \quad p, \qquad q, \quad \ldots$$

in

$$\ldots p + \alpha q, \qquad q, \quad \ldots$$

oder in

$$\ldots \quad p, \qquad q + \alpha p, \ldots,$$

wo α eine beliebige Zahl ist.

Anm. Die Wahl des Ausdrucks bezieht sich auf den Gegensatz zu einer weiter unten zu behandelnden Aenderung, welche ich circuläre Aenderung nenne. Beide Ausdrücke gehen auf die Geometrie zurück und zwar auf die beiden Fundamentalgebilde der Geometrie, die gerade Linie und den Kreis, oder vielmehr auf das Lineal und den Zirkel, indem, wie ich später zeigen werde, die lineale Aenderung in der Geometrie sich einfach mittelst des Lineals, die circuläre mittelst des Zirkels bewerkstelligen lässt.

72. *Bei der linealen Aenderung einer Grössenreihe bleibt das kombinatorische Produkt dieser Grössenreihe ungeändert.*

Beweis. Nach 67 ändert ein kombinatorisches Produkt seinen Werth nicht, wenn man zu einem Faktor ein beliebiges Vielfaches eines andern Faktors desselben addirt, also ändert es seinen Werth nicht bei einfacher linealer Aenderung seiner Faktoren, also auch nicht bei mehrfacher.

73. *Man kann durch lineale Aenderung zwei beliebige Grössen einer* 45 *Reihe beliebig im umgekehrten Verhältniss † ändern; das heisst, es lässt sich durch lineale Aenderung umwandeln die Reihe*

$$\ldots p, \ldots q, \ldots$$

in

$$\ldots \alpha p, \ldots \frac{q}{\alpha}, \ldots .$$

Beweis. *Erstens* seien p und q zwei aufeinander folgende Grössen der Reihe, so lässt sich (nach 71) durch lineale Aenderung nach und nach verwandeln:

$$p, \qquad q$$

in

$$p, \qquad q + (\alpha - 1)p,$$

dies wieder in

$$p + q + (\alpha - 1)p, \qquad q + (\alpha - 1)p,$$

das heisst in

$$\alpha p + q, \qquad q + (\alpha - 1)p;$$

dies in

$$\alpha p + q, \qquad q + (\alpha - 1)p - \frac{\alpha - 1}{\alpha}(\alpha p + q),$$

das heisst in

$$\alpha p + q, \qquad \frac{q}{\alpha},$$

und dies endlich in

$$\alpha p + q - q, \qquad \frac{q}{\alpha},$$

das heisst in

$$\alpha p, \qquad \frac{q}{\alpha}.$$

Zweitens: Sind p und q durch die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_n$ getrennt, so verwandelt sich durch lineale Aenderung, indem man die im ersten Theil als zulässig erwiesene Umwandlung anwendet,

$$p,\ p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_n,\ q$$

in

$$\alpha p,\ \frac{p_1}{\alpha},\ p_2,\ \ldots\ p_n,\ q,$$

dies in

$$\alpha p,\ p_1,\ \frac{p_2}{\alpha},\ \ldots\ p_n,\ q,$$

und, indem man so fortfährt, so erhält man zuletzt

$$\alpha p,\ p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_n,\ \frac{q}{\alpha},$$

das heisst

$$\ldots\ p,\qquad \ldots\qquad q,\ \ldots$$

geht über in

$$\ldots\ \alpha p,\qquad \ldots\qquad \frac{q}{\alpha},\ \ldots.$$

74. *Aus einer beliebigen Grössenreihe kann man durch lineale Aenderung jede andere Reihenfolge derselben Grössen ableiten, vorausgesetzt, dass man für den Fall, dass das kombinatorische Produkt der abgeleiteten Grössenreihe dem der ursprünglichen entgegengesetzt ist, das Vorzeichen von einer der Grössen der neuen Reihe ändert; das heisst, wenn* $a', b', c', \ldots$ *dieselben Grössen sind wie* $a, b, c, \ldots$, *nur in anderer Reihenfolge, so lässt sich durch lineale Aenderung umwandeln:*

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ \textit{in:}\quad a',\ b',\ c',\ \ldots \qquad 46$$

wenn

$$[abc\ \ldots] = [a'b'c'\ \ldots]$$

ist, hingegen

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ \textit{in:}\quad -a',\ b',\ c',\ \ldots$$

wenn

$$[abc\ \ldots] = -[a'b'c'\ \ldots]$$

ist.

Beweis. 1. Wenn p und q zwei beliebige {auf einander folgende} Grössen jener Reihe sind, so verwandeln sich durch lineale Aenderung, indem man nämlich abwechselnd zum ersten und zweiten Faktor beziehlich den zweiten und ersten addirt und subtrahirt, Schritt für Schritt

$$p,\qquad q$$

in

$$p+q,\qquad q,$$

dies in

$$p+q,\qquad q-(p+q),$$

das heisst, in

$$p+q,\qquad -p,$$

dies in

$$q,\qquad -p.$$

2. Man kann also durch lineale Aenderung zwei aufeinander folgende Grössen der Reihe in die umgekehrte Ordnung bringen, wenn

man nur das Vorzeichen der einen ändert. Somit kann man auch durch lineale Aenderung jede Grösse der Reihe auf jede Stelle bringen, bei gehöriger Zeichenänderung.

Es seien nun $a', b', c', \ldots$ dieselben Grössen wie $a, b, c, \ldots$ aber in anderer Reihenfolge, so wird man die Reihe $a, b, c, \ldots$ durch lineale Aenderung in eine Reihe umwandeln können, deren Grössen der Reihe nach mit $a', b', c', \ldots$ entweder gleich oder ihnen entgegengesetzt sind. Nun kann man (nach 73) durch lineale Aenderung zwei beliebige Grössen p, q einer Reihe im umgekehrten Verhältniss ändern, das heisst, so ändern, dass, wenn die eine Grösse p in αp übergeht, dann die andere q in $\frac{q}{\alpha}$ übergehe; also kann man namentlich die zuletzt gefundene Reihe so ändern, dass jede beliebige Grösse p derselben, welche einer der Grössen $a, b, c, \ldots$ entgegengesetzt ist, in $(-1)p$, das heisst in $-p$, übergeht, während die erste Grösse jener Reihe, nämlich $\mp a'$ in $\mp \frac{a'}{-1}$, das heisst in $\pm a'$ übergeht. Wendet man diese Aenderung nach und nach auf jede Grösse jener Reihe an, welche einer der Grössen $a, b, c, \ldots$ entgegengesetzt ist, nur nicht auf die erste Grösse $\mp a'$ jener Reihe, so erhält man zuletzt entweder die Reihe

$$a', b', c', \ldots \text{ oder } -a', b', c', \ldots,$$

47 wo noch das Vorzeichen von a' zu bestimmen ist. Da nun † diese Reihe aus $a, b, c, \ldots$ durch lineale Aenderung hervorgegangen ist, so muss (nach 72) im ersten Falle

$$[abc \ldots] = [a'b'c' \ldots],$$

im zweiten

$$[abc \ldots] = [-a'b'c' \ldots] = -[a'b'c' \ldots]$$

sein.

75. *Wenn man zu irgend einer Grösse (p) einer Grössenreihe ein Vielfaches einer andern Grösse (q) jener Reihe addirt, also statt p setzt $p + \alpha q$, während man alle übrigen Grössen jener Reihe unverändert lässt, so lässt sich die so hervorgehende Reihe aus der ursprünglichen durch lineale Aenderung ableiten, das heisst, es lässt sich durch lineale Aenderung umwandeln*

$$p, \quad \ldots \quad q$$

in

$$p + \alpha q, \quad \ldots \quad q,$$

oder auch in

$$p, \quad \ldots \quad q + \alpha p.$$

Beweis. Wenn in der gegebenen Reihe zwischen p und q keine Grösse steht, so folgt das zu erweisende unmittelbar aus der De-

finition [71]. Stehen zwischen p und q die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_n$, so ist (nach 74) durch lineale Aenderung umzuwandeln

$$p, \quad p_1, \; p_2, \ldots \; p_n, \quad q$$

in

$$p, \quad q, \; p_1, \; p_2, \; \ldots \; \mp p_n;$$

und dies (nach 71) in

$$p + \alpha q, \; q, \; p_1, \; p_2, \; \ldots \; \mp p_n;$$

dies wieder (nach 74) in

$$p + \alpha q, \; p_1, \; p_2, \ldots \; p_n, \; \mp q,$$

wo das Vorzeichen von q noch zu bestimmen ist.

Da die letzte Reihe aus der ersten durch lineale Aenderung hervorgegangen ist, so ist das kombinatorische Produkt der ersten Reihe (nach 72) dem der letzten gleich; also

$$[p p_1 p_2 \ldots p_n q] = [(p + \alpha q) p_1 p_2 \ldots p_n (\mp q)]$$
$$= \mp [(p + \alpha q) p_1 p_2 \ldots p_n q].$$

Aber es ist (nach 67)

$$[p p_1 p_2 \ldots p_n q] = + [(p + \alpha q) p_1 p_2 \ldots p_n q],$$

das heisst, es gilt in der vorigen Formel das $+$Zeichen, also haben wir statt $\mp q$ zu setzen q, das heisst, die gewonnene Reihe ist $p + \alpha q$, $p_1, p_2, \ldots p_n, q$. Es verwandelt sich also durch lineale Aenderung

$$p, \ldots q \quad \text{in:} \quad p + \alpha q, \ldots q,$$

und auf dieselbe Weise folgt, dass sich auch durch lineale Aenderung 48 umwandeln lässt

$$p, \ldots q \quad \text{in:} \quad p, \ldots q + \alpha p.$$

76. *Wenn zwei von Null verschiedene kombinatorische Produkte einander gleich sind, so lassen sich die einfachen Faktoren des einen aus denen des andern durch lineale Aenderung ableiten, das heisst, wenn*

(a) $$[abc \ldots] = [ABC \ldots] \gtrless 0$$

ist, so lässt sich durch lineale Aenderung die Grössenreihe

(b) $$a, b, c, \ldots \; \textit{in:} \; A, B, C, \ldots$$

umwandeln [Umkehrung von 72].

Beweis. Da die von Null verschiedenen kombinatorischen Produkte $[abc \ldots]$ und $[ABC \ldots]$ einander gleich sind, und sie also in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so müssen (nach 70) die aus ihren einfachen Faktoren ableitbaren Gebiete identisch sein; das heisst, die aus der Grössenreihe $a, b, c, \ldots$ numerisch ableitbaren Grössen müssen auch aus $A, B, C, \ldots$ numerisch ableitbar sein und umgekehrt.

Also müssen namentlich $A, B, C, \ldots$ selbst aus $a, b, c, \ldots$ numerisch ableitbar sein. In den Ausdrücken dieser Ableitung darf nicht der Koefficient von irgend einer der Grössen $a, b, c, \ldots$, zum Beispiel der von a, in allen gleichzeitig null sein; denn sonst wären die Grössen $A, B, C, \ldots$, deren Anzahl n sei, aus den $n-1$ Grössen $b, c, \ldots$ ableitbar; also würde (nach 22) eine Zahlbeziehung zwischen ihnen herrschen, ihr Produkt also (nach 61) null sein, gegen die Annahme.

Es sei a' eine der Grössen $A, B, C, \ldots$ und zwar eine solche, in deren Ableitungsausdruck der Koefficient von a nicht null sei, und sei

$$a' = \alpha_1 a + \beta_1 b + \cdots,$$

wo also $\alpha_1 \gtrless 0$ ist; so lässt sich durch lineale Aenderung nach und nach umwandeln

$$a, \qquad b, c, \ldots l$$

in

$$\alpha_1 a, \qquad b, c, \cdots \frac{l}{\alpha_1}, \qquad [73]$$

dies in

$$\alpha_1 a + \beta_1 b + \cdots, \; b, c, \cdots \frac{l}{\alpha_1}, \qquad [75]$$

das heisst in

$$a', \qquad b, c, \cdots \frac{l}{\alpha_1}.$$

49 Nun muss aber (nach 19) das aus $a', b, c, \ldots$ ableitbare Gebiet identisch sein dem aus $a, b, c, \ldots$ ableitbaren, also müssen namentlich die Grössen $A, B, C, \ldots$ aus $a', b, c, \ldots$ ableitbar sein. Nun ist es wieder, aus demselben Grunde wie vorher, unmöglich, dass der Koefficient von b in allen Ausdrücken dieser Ableitung zugleich null sei. Es sei b' eine der Grössen $A, B, C, \ldots$ und zwar eine solche, in der jener Koefficient nicht null ist, und sei

$$b' = \alpha_2 a' + \beta_2 b + \gamma_2 c + \cdots,$$

so lässt sich durch lineale Aenderung, auf dieselbe Weise wie vorher,

$$a', b, c, \cdots \frac{l}{\alpha_1}$$

umwandeln in

$$a', b', c, \cdots \frac{l}{\alpha_1 \beta_2}.$$

Ebenso sei {c' eine der Grössen $A, B, C, \ldots$ und zwar sei}

$$c' = \alpha_3 a' + \beta_3 b' + \gamma_3 c + \delta_3 d + \cdots,$$

wo γ_3 ungleich Null ist, so lässt sich wieder durch lineale Aenderung

$$a', b', c, \cdots\cdots \frac{l}{\alpha_1 \beta_2}$$

umwandeln in

$$a', b', c', d, \cdots \frac{l}{\alpha_1 \beta_2 \gamma_3}.$$

Auf diese Weise fahre man fort bis zur vorletzten Grösse. Diese sei k, so erhält man zuletzt die Grössenreihe

$$a', b', c', \ldots, k', \frac{l}{\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \ldots \varkappa_{n-1}}.$$

Da nun diese Grössenreihe aus der ursprünglichen $a, b, c, \ldots$ hervorgegangen ist, so muss (nach 72) ihr kombinatorisches Produkt gleich dem jener Grössenreihe sein; also

$$\left[a'b'c' \ldots k' \frac{l}{\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \ldots \varkappa_{n-1}}\right] = [abc \ldots kl].$$

Ferner sind die $n-1$ Grössen $a', b', c', \ldots k'$ aus der Reihe der n Grössen $A, B, C, \ldots K, L$ entnommen, und da $a', b', c', \ldots k'$ alle von einander verschieden sein müssen, weil sonst (nach 60) das kombinatorische Produkt derselben null wäre, was vermöge der soeben entwickelten Gleichung mit der Voraussetzung streitet, so kann von den Grössen $A, B, C, \ldots K, L$ nur noch eine übrig sein, welche nicht unter den Grössen $a', b', c', \ldots k'$ enthalten ist. Dies sei l' und sei $l = \alpha_n a' + \beta_n b' + \cdots + \varkappa_n k' + \lambda_n l'$, so verwandelt sich die zuletzt gewonnene Reihe durch lineale Aenderung in 50

$$a', b', c', \ldots k', \frac{\lambda_n l'}{\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \ldots \varkappa_{n-1}}.$$

Die Grössenreihe $a', b', c', \ldots k', l'$ enthält aber dieselben Grössen, wie die Reihe $A, B, C, \ldots K, L$, nur in anderer Ordnung; also ist (nach 74) $a', b', c', \ldots k', l'$ durch lineale Aenderung umzuwandeln in $A, B, C, \ldots K, \mp L$, also auch

$$a', b', c', \ldots k', \quad \frac{\lambda_n l'}{\alpha_1 \beta_2 \ldots \varkappa_{n-1}}$$

in

$$A, B, C, \ldots K, \mp \frac{\lambda_n L}{\alpha_1 \beta_2 \ldots \varkappa_{n-1}},$$

indem es (nach 73) gleichgültig ist, zu welcher Grösse man den Zahlfaktor $\frac{\mp \lambda_n}{\alpha_1 \beta_2 \ldots \varkappa_{n-1}}$ hinzufügt. Es sei dieser Zahlfaktor $= \varepsilon$, so ist also durch lineale Aenderung aus $a, b, c, \ldots k, l$ schliesslich hervorgegangen $A, B, C, \ldots K, \varepsilon L$. Also ist (nach 72)

$$[abc \ldots kl] = [ABC \ldots K . \varepsilon L] = \varepsilon [ABC \ldots KL].$$

Es ist aber auch nach der Hypothesis

$$[abc \ldots kl] = [ABC \ldots KL].$$

Also auch

$$\varepsilon [ABC \ldots KL] = [ABC \ldots KL],$$

das heisst $\varepsilon = 1$, also ist $\varepsilon L = L$, und somit hat sich durch lineale Aenderung umgewandelt die Reihe:

$$a, b, c, \ldots k, l \text{ in } A, B, C, \ldots K, L,$$

eine Umwandlung, deren Möglichkeit zu erweisen war.

77. Erklärung. Die multiplikativen Kombinationen der ursprünglichen Einheiten zur m-ten Klasse nenne ich Einheiten m-ter Stufe, eine aus diesen Einheiten numerisch abgeleitete Grösse eine Grösse m-ter Stufe, und zwar eine einfache, wenn sie sich als kombinatorisches Produkt von m Grössen erster Stufe darstellen lässt, eine zusammengesetzte, wenn dies nicht möglich ist. {Die Zahlen sollen hierbei als Grössen nullter Stufe gelten.}

Das aus den einfachen Faktoren einer einfachen Grösse ableitbare Gebiet nenne ich das dieser Grösse zugehörige Gebiet, kurz das Gebiet dieser Grösse. Ich nenne endlich eine einfache Grösse A einer andern 51 übergeordnet, untergeordnet, † oder mit ihr incident, je nachdem dies von den Gebieten dieser Grössen gilt (vgl. Nr. 15).

77 b. Zusatz. *Ein kombinatorisches Produkt aus m Grössen erster Stufe ist eine einfache Grösse m-ter Stufe* {77}, *und ist aus den Einheiten m-ter Stufe numerisch ableitbar* {65}.

Anm. Als Beispiel einer zusammengesetzten Grösse führe ich hier die Summe $[ab] + [cd]$ an, wenn a, b, c, d vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen sind. Sollte nämlich $[ab] + [cd]$ eine einfache Grösse, etwa $= [pq]$ sein, so müsste

$$[(ab + cd)(ab + cd)] = [pqpq] = 0$$

sein (nach 60); aber

$$[(ab + cd)(ab + cd)] = [abcd] + [cdab],$$

da $[abab]$ und $[cdcd]$ null sind. Aber (nach 58) ist $[abcd] = [cdab]$. Also

$$[(ab + cd)(ab + cd)] = 2[abcd].$$

Somit müsste, wenn $[ab] + [cd]$ eine einfache Grösse wäre, $[abcd] = 0$ sein, also (nach 66) a, b, c, d in einer Zahlbeziehung stehen, was der Voraussetzung widerstreitet.

§ 3. Aeussere Multiplikation von Grössen höherer Stufe.

78. Erklärung. Zwei Einheiten höherer Stufe äusserlich multipliciren, heisst die einfachen Faktoren derselben, ohne ihre Reihenfolge zu verändern, kombinatorisch multipliciren, das heisst

$$[(e_1 e_2 \ldots e_m)(e_{m+1} \ldots e_n)] = [e_1 e_2 \ldots e_n].$$

Anm. Den Namen der äusseren Multiplikation habe ich gewählt, um zu bezeichnen, dass das Produkt nur dann geltenden Werth hat, wenn der eine Faktor ganz ausserhalb des Gebietes des andern liegt. Es steht der äusseren Multiplikation die innere (s. Kap. 4) gegenüber.

79. *Statt eine einfache Grösse A mit einer andern B äusserlich zu multipliciren, kann man nach der Reihe die einfachen Faktoren der ersten mit denen der zweiten kombinatorisch multipliciren, das heisst*

$$[(ab\ldots)(cd\ldots)] = [ab\ldots cd\ldots].$$

Beweis. Es seien $e_1, \ldots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, und sei

$$a = \Sigma\alpha_{\mathfrak{a}}e_{\mathfrak{a}}, \quad b = \Sigma\beta_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}}, \ldots, \quad c = \Sigma\gamma_{\mathfrak{c}}e_{\mathfrak{c}}, \quad d = \Sigma\delta_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}}, \ldots,$$

so ist

$$[(ab\ldots)(cd\ldots)] = [(\Sigma\alpha_{\mathfrak{a}}e_{\mathfrak{a}}.\Sigma\beta_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}}\ldots)(\Sigma\gamma_{\mathfrak{c}}e_{\mathfrak{c}}.\Sigma\delta_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}}\ldots)]$$

$$= [\Sigma\{\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\ldots[e_{\mathfrak{a}}e_{\mathfrak{b}}\ldots]\}.\Sigma\{\gamma_{\mathfrak{c}}\delta_{\mathfrak{b}}\ldots[e_{\mathfrak{c}}e_{\mathfrak{b}}\ldots]\}] \qquad [45]$$

$$= \Sigma\{\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\ldots\gamma_{\mathfrak{c}}\delta_{\mathfrak{b}}\ldots[(e_{\mathfrak{a}}e_{\mathfrak{b}}\ldots)(e_{\mathfrak{c}}e_{\mathfrak{b}}\ldots)]\} \qquad [42]$$

52

$$= \Sigma\{\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\ldots\gamma_{\mathfrak{c}}\delta_{\mathfrak{b}}\ldots[e_{\mathfrak{a}}e_{\mathfrak{b}}\ldots e_{\mathfrak{c}}e_{\mathfrak{b}}\ldots]\} \qquad [78]$$

$$= [\Sigma\alpha_{\mathfrak{a}}e_{\mathfrak{a}}.\Sigma\beta_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}}\ldots\Sigma\gamma_{\mathfrak{c}}e_{\mathfrak{c}}.\Sigma\delta_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}}\ldots] \qquad [45]$$

$$= [ab\ldots cd\ldots].$$

79b. Zusatz. *Wenn eine einfache Grösse A, welche nicht null ist, einer andern B, welche gleichfalls nicht null ist, untergeordnet ist, so lässt sich die letztere als äusseres Produkt darstellen, dessen einer Faktor A und dessen anderer Faktor eine einfache Grösse C ist, also in der Form*

$$B = [AC].$$

Beweis. Nach 77 ist A dem B untergeordnet, wenn das Gebiet von A dem von B untergeordnet ist, das heisst (nach 15), wenn jede Grösse des ersten Gebietes zugleich Grösse des zweiten ist. Es sei $A = [a_1 a_2 \ldots a_m]$, wo $a_1, \ldots a_m$ Grössen erster Stufe sind, so stehen diese, da A ungleich Null sein soll, in keiner Zahlbeziehung zu einander (61). Ferner sei $B = [b_1 \ldots b_n]$. Da nun die Grössen $a_1, \ldots a_m$ dem Gebiete B angehören sollen, so müssen sie aus $b_1, \ldots b_n$ numerisch ableitbar sein. Dann aber kann man (nach 20) zu den Grössen $a_1, \ldots a_m$ noch $(n-m)$ Grössen $a_{m+1}, \ldots a_n$ von der Art hinzufügen, dass die Gebiete $a_1, \ldots a_n$ und $b_1, \ldots b_n$ identisch sind. Ist aber dies der Fall, so müssen (nach 70) die Produkte $[a_1 \ldots a_n]$ und $[b_1 \ldots b_n]$ in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Es sei

$$[b_1 \ldots b_n] = \alpha[a_1 \ldots a_n] = \alpha[a_1 \ldots a_m a_{m+1} \ldots a_n]$$

$$= [(a_1 \ldots a_m).\alpha(a_{m+1} \ldots a_n)] \quad [79, \{46\}].$$

Also, wenn noch

$$\alpha[a_{m+1} \ldots a_n] = C$$

gesetzt wird, so wird

$$B = [AC].$$

80. *Die Klammersetzung in einem äusseren Produkt ist gleichgültig für das Resultat, das heisst*

$$[A(BC)] = [ABC].$$

Beweis. 1. Es seien A, B, C einfache Grössen $A = [a_1 \dots a_q]$, $B = [b_1 \dots b_r]$, $C = [c_1 \dots c_s]$, so ist

$$\begin{aligned}
[A(BC)] &= [a_1 \dots a_q((b_1 \dots b_r)(c_1 \dots c_s))] \\
&= [a_1 \dots a_q(b_1 \dots b_r c_1 \dots c_s)] && [79] \\
&= [a_1 \dots a_q b_1 \dots b_r c_1 \dots c_s] && [79] \\
&= [((a_1 \dots a_q)(b_1 \dots b_r)(c_1 \dots c_s)] && [79] \\
&= [ABC].
\end{aligned}$$

2. Es seien A, B, C Summen einfacher Grössen, $A = \Sigma A_a$, $B = \Sigma B_b$, $C = \Sigma C_c$, so ist

$$\begin{aligned}
[A(BC)] &= [\Sigma A_a . (\Sigma B_b . \Sigma C_c)] = \Sigma [A_a(B_b C_c)] && [42] \\
&= \Sigma [A_a B_b C_c] && [\text{Beweis } 1] \\
&= [\Sigma A_a . \Sigma B_b . \Sigma C_c] && [45] \\
&= [ABC].
\end{aligned}$$

81. *Wenn $a_1, \dots a_m, b_1, \dots b_n$ Grössen erster Stufe sind, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und A aus $a_1, \dots a_m$ durch Addition und Multiplikation hervorgegangen ist und B aus $b_1, \dots b_n$, und*

$$[AB] = 0$$

ist, so muss entweder $A = 0$ oder $B = 0$ sein.

Beweis. Es sei A von α-ter Stufe, B von β-ter Stufe, und seien $A_1, A_2, \dots$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1, \dots a_m$ zur α-ten Klasse, $B_1, B_2, \dots$ die zur β-ten Klasse aus $b_1, \dots b_n$, so sind (nach 77) A und B darstellbar in den Formen

$$A = \Sigma \alpha_a A_a, \quad B = \Sigma \beta_b B_b,$$

also ist

$$[AB] = \Sigma \alpha_a \beta_b [A_a B_b].$$

Hier sind die $[A_a B_b]$ als multiplikative Kombinationen von $a_1, \dots a_m, b_1, \dots b_n$ zu betrachten. Sie stehen also (nach 69) in keiner Zahlbeziehung zu einander. Also ist (nach 28)

$$\alpha_r \beta_s = 0$$

für jedes r und s; also wenn $B \gtrless 0$ ist, das heisst, irgend eine der Grössen β_s ungleich Null ist, so folgt $\alpha_r = 0$ für jedes r, das heisst $A = 0$.

82. *Wenn eine Summe S einfacher Grössen mit einer von Null verschiedenen Grösse erster Stufe a äusserlich multiplicirt Null giebt, so lässt sich die erstere (S) als äusseres Produkt darstellen, in welchem a ein Faktor ist, das heisst in der Form*

$$S = [aP], \text{ wenn } [aS] = 0.$$

54 Beweis. Es sei S eine Summe von Grössen m-ter Stufe und

seien $e_1, e_2, \ldots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, so kann man (nach 20) zu a stets noch $(n-1)$ andere Grössen $b, c, \ldots$ der Art hinzufügen, dass sich die Grössen $e_1, \ldots e_n$ aus $a, b, c, \ldots$ numerisch ableiten lassen. Dann lässt sich auch jeder einfache Faktor in jeder der Grössen m-ter Stufe, deren Summe S ist, aus $a, b, c, \ldots$ numerisch ableiten. Also lässt sich jede dieser Grössen, und also auch ihre Summe S, aus den multiplikativen Kombinationen zur m-ten Klasse aus $a, b, c, \ldots$ ableiten.

Es seien nun $[aB_1], [aB_2], \ldots$ diejenigen unter diesen Kombinationen, welche a enthalten, und $C_1, C_2, \ldots$ diejenigen unter ihnen, welche a nicht enthalten, und sei

$$S = \beta_1[aB_1] + \beta_2[aB_2] + \cdots + \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots.$$

Da nun nach der Annahme $[aS] = 0$ sein soll, so hat man

$$0 = [aS] = \gamma_1[aC_1] + \gamma_2[aC_2] + \cdots,$$

da $[aaB_1], [aaB_2], \ldots$ null sind. Da nun a nicht in $C_1, C_2, \ldots$ enthalten ist, so sind $[aC_1], [aC_2], \ldots$ {lauter verschiedene} multiplikative Kombinationen, stehen also in keiner Zahlbeziehung zu einander. Somit folgt aus der obigen Gleichung $0 = \gamma_1[aC_1] + \gamma_2[aC_2] + \cdots$, dass $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ alle null sind (nach 28). Folglich ist

$$S = \beta_1[aB_1] + \beta_2[aB_2] + \cdots$$
$$= [a(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \cdots)] = [aP],$$

wenn

$$P = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \cdots$$

gesetzt wird.

83. *Wenn eine Summe S einfacher Grössen mit jeder von m, in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen erster Stufe $a_1, \ldots a_m$ äusserlich multiplicirt Null giebt, so lässt sich S als äusseres Produkt darstellen, in welchem $a_1, \ldots a_m$ Faktoren sind, das heisst in der Form*

$$S = [a_1 a_2 \ldots a_m S_m],$$

wenn

$$0 = [a_1 S] = [a_2 S] = \cdots = [a_m S].$$

Beweis. Es seien $e_1, \ldots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, so lassen sich (nach 20) zu $a_1, \ldots a_m$ noch $n - m$ andere Grössen $a_{m+1}, \ldots a_n$ der Art hinzufügen, dass sich $e_1, \ldots e_n$ aus $a_1, \ldots a_n$ numerisch ableiten lassen. Demnach lassen sich auch alle in S vorkommenden Grössen erster Stufe aus $a_1, \ldots a_n$ numerisch ableiten.

Nun ist angenommen $[a_1 S] = 0$, folglich lässt sich † (nach 82) 55 S in der Form $S = [a_1 S_1]$ darstellen. Hier ist S_1 wieder eine Summe einfacher Grössen. Stellt man die einfachen Faktoren dieser Grössen als Vielfachensummen von $a_1, \ldots a_n$ dar, so kann man, ohne den Werth

des Produktes $[a_1 S_1]$ zu ändern, (nach 67) in allen diesen Vielfachensummen das Glied, das a_1 enthält, weglassen. Nachdem dies geschehen, habe sich S_1 in P_1 verwandelt, so ist

$$S = [a_1 S_1] = [a_1 P_1],$$

wo P_1 nur aus den Grössen $a_2, \ldots a_n$ hervorgegangen ist (kein a_1 enthält).

Nun ist ferner $[a_2 S] = 0$, das heisst

$$0 = [a_2 a_1 P_1], \text{ oder (nach 55) } [a_1 a_2 P_1] = 0.$$

Da nun $[a_2 P_1]$ nur aus den Grössen $a_2, \ldots a_n$ erzeugt ist, so muss (nach 81) entweder a_1 oder $[a_2 P_1]$ null sein. Das erste ist gegen die Annahme, also $[a_2 P_1] = 0$. Somit muss P_1 in der Form $[a_2 S_2]$ darstellbar sein; hier kann wieder in S_2 die Grösse a_2 fortgeschafft werden, ohne den Werth des Produktes $[a_2 S_2]$ zu ändern; es sei $P_1 = [a_2 S_2] = [a_2 P_2]$, wo P_2 nur noch aus $a_3, \ldots a_n$ erzeugt ist (ohne a_1 und a_2), so ist

$$S = [a_1 a_2 S_2] = [a_1 a_2 P_2].$$

Dann ist $[a_3 S] = 0$, also

$$[a_3 a_1 a_2 P_2] = 0, \quad \text{oder} \quad [a_1 a_2 a_3 P_2] = 0.$$

Da nun $[a_3 P_2]$ nur aus $a_3, \ldots a_n$ erzeugt ist, so muss (nach 81) entweder $[a_1 a_2]$ null sein, oder $[a_3 P_2]$. Ersteres ist nicht möglich, weil sonst (nach 66) zwischen a_1 und a_2 eine Zahlbeziehung herrschen würde, gegen die Voraussetzung. Es muss also $[a_3 P_2] = 0$ {sein}, also P_2 in der Form darstellbar $P_2 = [a_3 P_3]$, wo wieder P_3 nur aus $a_4, \ldots a_n$ erzeugt ist, und so fort, bis endlich

$$S = [a_1 a_2 \ldots a_m S_m]$$

wird.

84. *Wenn eine Summe S von Grössen m-ter Stufe mit jeder von m Grössen erster Stufe $a_1, \ldots a_m$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, äusserlich multiplicirt Null giebt, so ist S dem äusseren Produkte dieser m Grössen kongruent, das heisst, wenn*

$$0 = [a_1 S] = \cdots = [a_m S], \text{ so ist } S \equiv [a_1 \ldots a_m].$$

Beweis. Dann ist (nach 83) S in der Form $[a_1 \ldots a_m S_m]$ dar-56 stellbar; hier muss, da S ein Ausdruck m-ter Stufe ist, † S_m von nullter Stufe, also eine Zahl sein {77}, und dann können wir (nach 2) statt $S = [a_1 \ldots a_m S_m]$ schreiben

$$S \equiv [a_1 \ldots a_m].$$

85. *Wenn es $m + 1$ Grössen {erster Stufe} $a_1, \ldots a_{m+1}$ giebt, deren jede mit einer Summe S von Grössen m-ter Stufe äusserlich multiplicirt Null giebt, so ist entweder $S = 0$ oder $[a_1 \ldots a_{m+1}] = 0$.*

Beweis. Gesetzt, es sei $[a_1 \ldots a_{m+1}]$ nicht null, also auch $[a_1 \ldots a_m]$

nicht null, also $a_1, \ldots a_m$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehend, so ist, da zugleich $[a_1 S] = [a_2 S] = \cdots = [a_m S] = 0$ ist, (nach 84) $S = \alpha[a_1 \ldots a_m]$. Nun soll aber auch $[a_{m+1} S] = 0$, also $\alpha[a_1 \ldots a_{m+1}] = 0$ {sein}, also, da $[a_1 \ldots a_{m+1}]$ nach der Annahme von Null verschieden ist, so muss $\alpha = 0$ {sein}, also auch $S = \alpha[a_1 \ldots a_m] = 0$, das heisst, es ist entweder $[a_1 \ldots a_{m+1}]$ oder S null.

§ 4. Ergänzung der Grössen in Bezug auf ein Hauptgebiet.

86. Erklärung. Hauptgebiet nenne ich das Gebiet der ursprünglichen Einheiten, aus welchen alle der Betrachtung unterworfenen Grössen hervorgegangen sind.

87. *Zwei einfache Grössen A und B lassen sich, wenn die Summe ihrer Stufenzahlen die des Hauptgebietes um γ übertrifft, in der Form darstellen*

$$A = [CA_1], \quad B = [CB_1],$$

wo {A_1 und B_1 einfache Grössen sind, und} C eine einfache Grösse von γ-ter Stufe ist.

Beweis. Es sei α die Stufenzahl von A, β die von B, n die des Hauptgebietes, also

$$\alpha + \beta = n + \gamma.$$

Dann haben (nach 26) die Gebiete {von} A und B mindestens ein Gebiet $(\alpha + \beta - n)$-ter, also γ-ter Stufe gemein. Es sei C eine {einfache} Grösse γ-ter Stufe dieses Gebietes, so ist C sowohl der Grösse A, als der Grösse B untergeordnet, also (nach 79b) A in der Form $[CA_1]$ und B in der Form $[CB_1]$ darstellbar, {wo auch A_1 und B_1 einfache Grössen sind}.

88. *Einfache Grössen $(n-1)$-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe geben zur Summe wieder eine einfache Grösse $(n-1)$-ter Stufe.*

Beweis. Es seien A und B die beiden Grössen $(n-1)$-ter Stufe, 57 welche in einem Hauptgebiete n-ter Stufe liegen; so müssen sie, da die Summe $(2n-2)$ ihrer Stufenzahlen die des Hauptgebietes um $n-2$ übertrifft, (nach 87) in der Form

$$A = [Ca], \quad B = [Cb]$$

darstellbar sein, wo C eine Reihe von $n-2$ einfachen Faktoren erster Stufe darstellt, a und b aber Faktoren erster Stufe sind, also

$$A + B = [Ca] + [Cb] = [C(a+b)]. \qquad [39]$$

Hier ist $a + b$, als Summe zweier Grössen erster Stufe, wieder eine Grösse erster Stufe, also ist $A + B$ als kombinatorisches Produkt von $n-1$ Grössen erster Stufe darstellbar, also selbst eine {einfache} Grösse $(n-1)$-ter Stufe.

Anm. Hat man in einem Hauptgebiete n-ter Stufe zwei (einfache) Grössen A und B, deren Stufenzahlen grösser als 1 und kleiner als $n-1$ sind, so giebt ihre Summe im Allgemeinen nicht mehr eine einfache Grösse. So zum Beispiel lässt sich, wenn a, b, c, d vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe sind, die Summe $S = [ab] + [cd]$ nicht mehr in Form eines kombinatorischen Produktes von Faktoren erster Stufe darstellen. In der That müsste dann (nach 60)

$$[SS] = 0$$

sein, also

$$0 = [SS] = [(ab + cd)(ab + cd)] = [abcd] + [cdab],$$

da $[abab]$ und $[cdcd]$ (nach 60) null sind. Aber da (nach 58) $[cdab] = [abcd]$ ist, so hätte man dann

$$0 = 2[abcd],$$

das heisst, es müsste $[abcd]$ null sein, also (nach 66) a, b, c, d in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, gegen die Voraussetzung. Also ist S dann nicht in Form eines kombinatorischen Produktes von Grössen erster Stufe darstellbar, und ist also dann eine zusammengesetzte Grösse.

89. Erklärung. Wenn in einem Hauptgebiete n-ter Stufe das kombinatorische Produkt der ursprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \ldots e_n$ gleich 1 gesetzt ist, und E eine Einheit beliebiger Stufe, das heisst, entweder eine der ursprünglichen Einheiten oder ein kombinatorisches Produkt von mehreren derselben ist, so nenne ich „Ergänzung von E" diejenige Grösse, welche dem kombinatorischen Produkte E' aller in E nicht vorkommenden Einheiten gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem $[EE']$ der absoluten Einheit gleich oder entgegengesetzt ist; 58 ich bezeichne die Ergänzung einer Grösse † durch einen vor das Zeichen der Grösse gesetzten vertikalen Strich, also die von E durch $|E$. Die Ergänzung einer Zahl setze ich dieser Zahl gleich. Also:

$$|E = [EE']E',$$

wenn E und E' die einfachen Faktoren $e_1, \ldots e_n$ enthalten und

$$[e_1 e_2 \ldots e_n] = 1$$

ist; und

$$|\alpha = \alpha,$$

wenn α eine Zahl ist.

Anm. Bei der Definition ist vorausgesetzt, dass $[EE']$ nur entweder $+1$ oder -1 sein könne. In der That, da E und E' kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten sind, und E' alle in E fehlenden Einheiten enthält, so unterscheidet sich $[EE']$ von $[e_1 e_2 \ldots e_n]$ nur durch die Folge seiner Faktoren, und beide sind also (nach 57) einander entweder gleich oder entgegengesetzt, also da $[e_1 e_2 \ldots e_n] = 1$ ist, so ist $[EE'] = \mp 1$.

90. Erklärung. Unter der Ergänzung einer beliebigen Grösse A verstehe ich diejenige Grösse $|A$, die man erhält, wenn man in dem Ausdrucke, welcher die numerische Ableitung jener Grösse aus den Einheiten darstellt, statt jeder dieser Einheiten ihre Ergänzung setzt, das heisst

$$|(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots) = \alpha_1 |E_1 + \alpha_2 |E_2 + \cdots,$$

wo E_1, E_2, ... Einheiten beliebiger Stufe sind.

Zusatz. Wenn n die Stufenzahl des Hauptgebietes und α die der Grösse A ist, so ist $n - \alpha$ die der Ergänzung.

Anm. Der vertikale Strich erscheint also nach diesen Definitionen mit den Eigenschaften eines Faktors. Es hat dieser Faktor, wie sich weiter unten zeigen wird, eine auffallende Analogie mit dem imaginären Ausdruck $\sqrt{-1}$, so dass man ihn unter gewissen Umständen dadurch ersetzen kann. Den vertikalen Strich habe ich gewählt, um darauf hinzudeuten, dass, wie ich unten zeigen werde, diese Ergänzung geometrisch durch das auf einem gegebenen Gebilde senkrecht stehende Gebilde dargestellt wird.

91. *Das äussere Produkt einer Einheit in ihre Ergänzung ist* 1, *das heisst*

$$[E|E] = 1.$$

Beweis. Wenn E' das kombinatorische Produkt aller in E nicht enthaltenen ursprünglichen Einheiten ist, so ist (nach 89)

$$|E = \mp E',$$

je nachdem

$$[EE'] = \mp 1.$$

Also, wenn das untere Zeichen gilt, so ist

$$[E|E] = [EE'] = 1,$$

und, wenn das obere gilt, so ist 59

$$[E|E] = -[EE'] = -(-1) = 1.$$

92. *Die Ergänzung der Ergänzung einer Grösse A ist dieser Grösse A gleich oder entgegengesetzt, je nachdem das Produkt der Stufenzahlen dieser Grösse einerseits und ihrer Ergänzung andrerseits gerade oder ungerade ist, das heisst*

$$||A = (-1)^{qr} A,$$

wenn q die Stufenzahl von A und r die von $|A$ ist.

Beweis. Angenommen sei *zuerst*, dass A ein kombinatorisches Produkt der ursprünglichen Einheiten sei, und $B = |A$ seine Ergänzung, so enthält nach der Definition B alle die Einheiten, welche dem A fehlen, und zwar so, dass $[A|A] = 1$, also

$$[AB] = 1$$

ist. Die Ergänzung von B wiederum ist, da A alle Einheiten enthält, die der Grösse B fehlen, (nach 89) der Grösse A gleich oder entgegengesetzt, je nachdem $[BA]$ der absoluten Einheit gleich oder entgegengesetzt ist; nun ist (nach 58) $[BA] = (-1)^{qr}[AB]$, wenn q und r die Stufenzahlen von A und B sind; also, da $[AB] = 1$ ist,

$$[BA] = (-1)^{qr},$$



somit auch die Ergänzung von $|B$ gleich $+A$ oder $-A$, je nachdem $(-1)^{qr}$ gleich $+1$ oder -1 ist, das heisst

$$||B = (-1)^{qr} A.$$

Aber B war gleich $|A$ angenommen, somit

$$||A = (-1)^{qr} A,$$

wenn A ein kombinatorisches Produkt der ursprünglichen Einheiten ist.

Es sei *zweitens* A eine beliebige Grösse q-ter Stufe, ihre Ergänzung von r-ter Stufe, und sei

$$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots,$$

wo $E_1, E_2, \ldots$ kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Zahlen sind, so ist (nach 90)

$$|A = \alpha_1 |E_1 + \alpha_2 |E_2 + \cdots,$$

somit, da $|E_1$, $|E_2$ wieder Einheitsprodukte sind,

$$||A = \alpha_1 ||E_1 + \alpha_2 ||E_2 + \cdots.$$

60 Nun sind $E_1, E_2, \ldots$ von gleicher Stufe mit A, also von q-ter Stufe, und ihre Ergänzungen von r-ter Stufe; also ist nach dem ersten Theile des Beweises $||E_1 = (-1)^{qr} E_1$, $||E_2 = (-1)^{qr} E_2, \ldots$, somit

$$||A = (-1)^{qr}(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots)$$
$$= (-1)^{qr} A.$$

93. *Ist die Stufenzahl* (n) *des Hauptgebietes ungerade, so ist*

$$||A = A.$$

Ist n gerade, so ist

$$||A = (-1)^q A,$$

wenn q die Stufenzahl von A ist.

Beweis. Denn dann ist die Stufenzahl von $|A$ gleich $(n-q)$, also (nach 92) $||A = (-1)^{q(n-q)} A$. Ist nun n ungerade, so ist entweder q oder $n-q$ gerade, also $(-1)^{q(n-q)} = 1$ und also dann $||A = A$. Ist n gerade, so ist $q(n-q)$ gerade oder ungerade, je nachdem q es ist, also dann $(-1)^{q(n-q)} = (-1)^q$, und $||A = (-1)^q A$.

Anm. Sind q und r beide ungerade, wie zum Beispiel, wenn man die Ergänzungen von Grössen erster Stufe in einem Gebiet zweiter Stufe betrachtet, so wird $||A = -A$, so dass also in diesem Falle das Zeichen | denselben Gesetzen unterliegt, wie $i = \sqrt{-1}$, und wir erhalten daher hier eine reelle Bedeutung des Imaginären.

Es wird sich bei der Anwendung auf die Geometrie zeigen, dass Strecken, das heisst Linien von bestimmter Richtung und Länge, als Grössen erster Stufe zu betrachten sind, und dass in Bezug auf sie die Ebene als Gebiet zweiter Stufe erscheint, so dass also hier der obenerwähnte Fall, wo $||A = -A$ ist, eintritt. Ich werde zeigen, dass die Ergänzung einer Strecke, wenn man als ursprüngliche

Einheiten zwei gegeneinander senkrechte Strecken von gleicher Länge annimmt, die auf ihr senkrechte Strecke ist, und man sieht daher schon hier, dass die reelle Bedeutung, die wir hier dem Imaginären beilegen, genau der geometrischen Bedeutung desselben, wie sie von Gauss zuerst aufgefasst wurde, entspricht; nur dass diese Bedeutung hier in allgemeinerer Form hervortritt.

§ 5. Produkt in Bezug auf ein Hauptgebiet.

94. Erklärung. Wenn die Summe der Stufenzahlen zweier Einheiten kleiner oder ebenso gross ist als die Stufenzahl n des Hauptgebietes, so verstehe ich unter ihrem progressiven Produkte ihr äusseres Produkt, jedoch mit der † Bestimmung, dass das progressive Produkt der n ursprünglichen Einheiten 1 sei. Hingegen, wenn die Summe der Stufenzahlen zweier Einheiten grösser ist als die Stufenzahl (n) des Hauptgebietes, so verstehe ich unter ihrem regressiven (eingewandten) Produkte diejenige Grösse, deren Ergänzung das progressive Produkt der Ergänzungen jener Einheiten ist. 61

Das progressive und {das} regressive Produkt fasse ich zusammen unter dem Namen des auf ein Hauptgebiet bezüglichen Produktes. Die Bezeichnung ist für alle diese Produkte dieselbe, nämlich die einer das Produkt umschliessenden Klammer. Also

$$|[EF] = [|E|F],$$

wenn die Summe der Stufenzahlen von E und F grösser ist, als die Stufe (n) des Hauptgebietes, und

$$[e_1 e_2 \ldots e_n] = 1,$$

wenn $e_1, e_2, \ldots e_n$ die Reihe der ursprünglichen Einheiten ist.

Anm. Auf die hier behandelte Multiplikation und auf die algebraische lassen sich alle Multiplikationen, die überhaupt für die Wissenschaft von Interesse sind, zurückführen. Es kommt daher nur darauf an, diese beiden Multiplikationsgattungen von einander durch die Bezeichnung unzweideutig zu unterscheiden.

Wenn man bei der algebraischen Multiplikation alle überflüssigen Klammern vermeidet, also nie ein algebraisches Produkt, welches mit einer andern Grösse durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division verbunden werden soll, durch eine Klammer umschliesst, so wird eine in diesen Fällen angewandte Klammer stets ein unzweideutiges Zeichen der bezüglichen Multiplikation sein. In denjenigen Fällen, wo das algebraische Produkt so verknüpft wird, dass eine Klammersetzung nöthig wird, also, wenn das Produkt potenzirt oder logarithmirt werden soll, oder in ein Funktionzeichen (wozu auch Summenzeichen, Differenzialzeichen, und so weiter gerechnet werden können) einrückt, so wird wieder alle Zweideutigkeit gehoben, wenn man in diesem Falle entweder für die bezügliche Multiplikation zwei Klammern anwendet, oder, was bequemer erscheint, für diese Fälle dem algebraischen Produkte stets die runde Klammer, dem bezüglichen die eckige zuweist, während man in den erstgenannten Fällen nach Bequemlichkeit über beide verfügt.

Es ist noch zu erwähnen, dass die gewählte Bezeichnung für die verschiedenen Arten der bezüglichen Multiplikation, sobald das Hauptgebiet bekannt ist, durchaus zureichend ist und keinen Verwechselungen Raum giebt, und dass die Rechnungsgesetze überall dieselben sind, und nur noch von den Stufenzahlen der zu verknüpfenden Grössen und von der des Hauptgebietes abhängen.

62 **95.** ***Wenn q und r die Stufenzahlen zweier Grössen A und B sind, und n die des Hauptgebietes, so ist die Stufenzahl des Produktes $[AB]$ erstens gleich $q + r$, wenn $q + r$ kleiner als n ist, zweitens gleich $q + r - n$, wenn $q + r$ grösser oder ebenso gross als n ist, in beiden Fällen also kongruent der Summe der Stufenzahlen in Bezug auf den Modul n, das heisst, wenn***

$$C = [AB],$$

so ist

$$s \equiv q + r \quad (Mod.\ n),$$

wo q, r, s, n beziehlich die Stufenzahlen von A, B, C und vom Hauptgebiete sind.

Beweis. Ist $q + r < n$ und

$$A = [a_1 a_2 \ldots a_q], \quad B = [b_1 b_2 \ldots b_r],$$

wo $a_1, \ldots a_q$, $b_1, \ldots b_r$ Grössen erster Stufe sind, so ist $[AB]$ als progressives Produkt zu betrachten, also

$$C = [AB] = [(a_1 a_2 \ldots a_q)(b_1 b_2 \ldots b_r)]$$
$$= [a_1 a_2 \ldots a_q b_1 b_2 \ldots b_r], \qquad [79]$$

also (nach 77) die Stufenzahl des Produktes $= q + r$.

Wenn $q + r = n$ ist, so wird, da (nach 94) das Produkt der n Einheiten $= 1$ gesetzt ist, und also auch das Produkt von n Grössen erster Stufe eine Zahl wird, die Zahlen aber (nach 77) als Grössen nullter Stufe aufzufassen sind, die Stufenzahl des Produktes gleich Null, also $= q + r - n$.

Wenn endlich $q + r$ grösser als n ist, so ist (nach 94), wenn A und B Einheiten beliebiger Stufen sind,

$$|C = [|A\ B].$$

Aber (nach 90, Zusatz) sind die Stufenzahlen von $|A$, $|B$, $|C$ gleich $n - q$, $n - r$, $n - s$; nun ist $n - q + n - r = n - (q + r - n)$, also kleiner als n, somit ist (nach dem ersten Theile des Beweises) die Stufenzahl des Produktes $[A|B]$ gleich der Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren, also

$$n - s = n - q + n - r,$$

das heisst

$$s = q + r - n.$$

Somit gilt das zu erweisende Gesetz für den Fall, dass A und B Einheiten beliebiger Stufen sind. Da nun aber jede aus den Einheiten

numerisch abgeleitete Grösse mit den Einheiten von gleicher Stufe ist, so gilt der Satz auch für beliebige Grössen.

96. *Wenn n die Stufenzahl des Hauptgebietes ist, so ist die Stufenzahl eines beliebigen auf dies Gebiet bezüglichen † Produktes der Summe* 63 *der Stufenzahlen seiner Faktoren kongruent, in Bezug auf den Modul n, oder, die Stufenzahl des Produktes ist gleich dem Divisionsreste, welcher bleibt, wenn man die Summe der Stufenzahlen aller Faktoren durch die Stufenzahl des Hauptgebietes dividirt; also, wenn*

$$R = [ABC\ldots]$$

ist, so ist

$$\varrho \equiv \alpha + \beta + \gamma + \cdots \ (Mod.\ n),$$

wenn ϱ, α, β, γ, ... die Stufenzahlen von R, A, B, C, ... sind und n die des Hauptgebietes ist.

Beweis. In 95 ist gezeigt, dass die Stufenzahl des Produktes zweier Grössen der Summe der Stufenzahlen dieser Grössen kongruent ist, in Bezug auf den Modul n. Tritt nun zu dem Produkte noch ein Faktor hinzu, so bleibt aus gleichem Grunde das Gesetz noch bestehen, und so fort, also gilt es für beliebig viele Faktoren. Da nun die Stufenzahl immer kleiner als n und nie negativ ist, so gilt der Satz auch in der zweiten Fassung.

Anm. So zum Beispiel ist die Stufenzahl eines Produktes von sieben Faktoren dritter Stufe, in Bezug auf ein Hauptgebiet vierter Stufe, gleich Eins (s. Crelle's Journal Bd. 49, S. 12). {In der Abhandlung: Grundsätze der stereometrischen Multiplikation.}

97. *Das Produkt der Ergänzungen zweier Grössen ist die Ergänzung des Produktes dieser Grössen, das heisst*

$$[|A|B] = |[AB].$$

Beweis. 1. Wenn die Stufenzahlen α und β der Grössen A und B zusammen grösser sind als die Stufenzahl n des Hauptgebietes, das heisst, $\alpha + \beta > n$.

Dann sei

$$A = \Sigma\alpha_r E_r, \quad B = \Sigma\beta_s F_s,$$

wo E_r, F_s Einheiten sind, so ist (nach 90)

$$|A = \Sigma\alpha_r |E_r \text{ und } |B = \Sigma\beta_s |F_s.$$

Also

$$\begin{aligned} [|A|B] &= [\Sigma\alpha_r|E_r . \Sigma\beta_s|F_s] = \Sigma\alpha_r\beta_s[|E_r|F_s] && [42] \\ &= \Sigma\alpha_r\beta_s\,|[E_rF_s] && [94] \\ &= |\Sigma\alpha_r\beta_s[E_rF_s] && [90] \\ &= |[\Sigma\alpha_rE_r . \Sigma\beta_sF_s] && [42] \\ &= |[AB]. \end{aligned}$$

2. Wenn $\alpha + \beta = n$ ist, dann gilt der Satz zunächst für die Einheiten.

64 Es seien E und F Einheiten, das heisst, kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten $e_1, \ldots e_n$.

Enthält zuerst E eine ursprüngliche Einheit, die auch in F vorkommt, so können in E und F, da sie zusammen nur n einfache Faktoren enthalten, nicht alle ursprünglichen Einheiten vorkommen; es muss also mindestens eine dieser Einheiten, etwa e_1, in beiden Grössen E und F fehlen; nun enthält $|E$ alle ursprünglichen Einheiten die in E fehlen, also auch e_1, und $|F$ alle die in F fehlen, also auch e_1, somit enthalten $|E$ und $|F$ beide die ursprüngliche Einheit e_1, es ist also (nach 60) $[|E|F] = 0$, aber auch $[EF] = 0$, da E und F nach der Annahme beide ein und dieselbe ursprüngliche Einheit enthalten, somit

$$[|E|F] = [EF].$$

Wenn zweitens E keine ursprüngliche Einheit enthält, die auch in F vorkommt, so muss, da E und F im Ganzen n Faktoren enthalten, deren jeder eine der ursprünglichen Einheiten ist, $[EF]$ ein Produkt sämmtlicher n Einheiten sein. Dann aber ist (nach 89)

$$|E = [EF]F \text{ und } |F = [FE]E,$$

wo $[EF]$ und $[FE]$ nur entweder $+1$ oder -1 sind. Dann ist

$$[|E|F] = [EF][FE][FE].$$

Aber $[FE][FE]$ ist entweder 1.1 oder $(-1).(-1)$, also beidemale 1 Somit ist

$$[|E|F] = [EF],$$

wie im vorigen Falle. Da nun $[EF]$ eine Zahl ist, so ist (nach 89) $[EF] = |[EF]$. Somit in beiden Fällen

$$[|E|F] = |[EF].$$

Da nun das Gesetz für Einheiten gilt, so folgt ganz wie in Beweis 1, dass es auch für beliebige Grössen gilt, vorausgesetzt, dass die Summe der Stufenzahlen n sei.

3. Wenn $\alpha + \beta < n$, dann sei $A = |A'$ und $B = |B'$. Ist nun zuerst n *ungerade*, so ist (nach 93)

$$|A = ||A' = A' \text{ und ebenso } |B = ||B' = B'.$$

Also

$$[|A|B] = [A'B'] = [A'B']. \qquad \text{[nach 93]}$$

Aber, da die Stufenzahlen von A' und B' beziehlich $= n - \alpha$, $n - \beta$

65 sind (90, Zusatz), so sind die Stufenzahlen von A' und B' † zusammengenommen $= 2n - \alpha - \beta = n + (n - \alpha - \beta)$. Nun ist $n - \alpha - \beta$

positiv, da $\alpha + \beta$ nach der Annahme kleiner als n ist, somit ist $n + (n - \alpha - \beta) > n$, also die Summe der Stufenzahlen von A' und B' grösser als n. Also ist nach Beweis 1

$$|[A'B'] = [|A'|B'] = [AB].$$

Also

$$||[A'B'] = |[AB],$$

aber auch

$$||[A'B'] = [|A|B],$$

wie oben gezeigt, also

$$[|A|B] = |[AB].$$

{Ist endlich n *gerade*, so ist (nach 93)

$$|A = ||A' = (-1)^{n-\alpha}A' \text{ und } |B = ||B' = (-1)^{n-\beta}B',$$

also

$$[|A|B] = (-1)^{2n-\alpha-\beta}[A'B'].$$

Nun ist die Summe der Stufenzahlen von A' und B', wie schon vorhin beim Falle eines ungeraden n gezeigt wurde, grösser als n. Es wird daher (nach Beweis 1)

$$|[A'B'] = [|A'|B'] = [AB]$$

und somit

$$|[AB] = ||[A'B'].$$

Da aber die Stufensumme der Faktoren des Produktes $[A'B']$, wie soeben erwähnt wurde, grösser als n ist, so hat (nach 95) die Stufenzahl des Produktes $[A'B']$ selbst den Werth

$$(n - \alpha) + (n - \beta) - n = n - \alpha - \beta;$$

es wird also (nach 93)

$$|[AB] = ||[A'B'] = (-1)^{n-\alpha-\beta}[A'B'],$$

oder, da n nach der Voraussetzung eine gerade Zahl ist, auch

$$|[AB] = (-1)^{2n-\alpha-\beta}[A'B'].$$

Man erhält daher für $|[AB]$ denselben Werth wie oben für $[|A|B]$, also gilt die Formel

$$[|A|B] = |[AB]$$

auch in diesem letzten Falle.}

Zusatz. *Wenn das Produkt zweier Grössen ein progressives ist, so ist das ihrer Ergänzungen ein regressives, vorausgesetzt, dass man das Produkt nullter Stufe zugleich als ein progressives und als ein regressives betrachtet.*

Beweis. Denn ist $[AB]$ ein progressives Produkt, so ist {nach 94} $\alpha + \beta \overline{\lessgtr} n$, wenn α und β die Stufenzahlen von A und B sind. Dann sind {nach 90, Zusatz} die der Ergänzungen $n - \alpha$ und $n - \beta$, aber

$n - \alpha - \beta \geqq 0$, also auch $n - \alpha + n - \beta \geqq n$, das heisst {nach 94}, das Produkt der Ergänzungen {ist} ein regressives.

98. *Das Produkt der Ergänzungen mehrerer Grössen ist die Ergänzung des Produktes dieser Grössen, das heisst*

$$[|A|B|C\ldots] = |[ABC\ldots].$$

Beweis. Es gelte der Satz für m Faktoren, das heisst, es sei

$$[|A_1|A_2\ldots|A_m] = |[A_1A_2\ldots A_m],$$

so gilt er auch für $m+1$ Faktoren. Denn es komme noch ein Faktor $|A_{m+1}$ auf beiden Seiten obiger Gleichung hinzu, so ist

$$[|A_1|A_2\ldots|A_m|A_{m+1}] = [|(A_1A_2\ldots A_m)|A_{m+1}]$$
$$= |[A_1A_2\ldots A_mA_{m+1}]. \qquad [97]$$

Gilt der Satz also für irgend eine Faktorenzahl, so gilt er auch für die nächst höhere, also auch für jede höhere Faktorenzahl. Da er nun (nach 97) für zwei Faktoren gilt, so gilt er auch für beliebig viele.

99. *Ins Besondere ist*

$$[|a|b\ldots] = |[ab\ldots],$$

wenn a, b, ... Grössen erster Stufe sind.

Zusatz. Es folgt hieraus, dass ein regressives Produkt, dessen Faktoren die Ergänzungen von Grössen erster Stufe sind, als ein kombinatorisches betrachtet werden kann, dessen einfache Faktoren von $(n-1)$-ter Stufe sind.

66 **100.** *Die Ergänzung eines Polynoms erhält man, indem man, ohne die Vorzeichen der Glieder zu ändern, von jedem die Ergänzung nimmt, das heisst*

$$|(A \mp B \mp \cdots) = |A \mp |B \mp \cdots.$$

Beweis. Es sei

$$A = \Sigma\alpha_r E_r, \quad B = \Sigma\beta_r E_r, \; \ldots,$$

so ist

$$|(A \mp B \mp \cdots) = |(\Sigma\alpha_r E_r \mp \Sigma\beta_r E_r \mp \cdots) = |\Sigma(\alpha_r \mp \beta_r \mp \cdots)E_r$$
$$= \Sigma(\alpha_r \mp \beta_r \mp \cdots)|E_r \qquad [90]$$
$$= \Sigma\alpha_r|E_r \mp \Sigma\beta_r|E_r \mp \cdots$$
$$= |\Sigma\alpha_r E_r \mp |\Sigma\beta_r E_r \mp \cdots \qquad [90]$$
$$= |A \mp |B \mp \cdots.$$

101. *Eine Gleichung, in welcher keine andern Verknüpfungen als die in Kap. 1 und 3 behandelten vorkommen, bleibt auch bestehen, wenn man statt der darin vorkommenden Grössen ihre Ergänzungen setzt, das heisst, wenn*

$$f(A, B, \ldots) = \varphi(A', B', \ldots)$$

ist, wo f und φ Zeichen von Verknüpfungen sind, die den genannten Kapiteln angehören, so ist

$$f(|A, |B, \ldots) = \varphi(|A', |B', \ldots).$$

{*Ebenso folgt umgekehrt aus der letzten Gleichung die erste.*}

Beweis. Da gleiche Grössen, derselben Verknüpfung unterworfen, Gleiches liefern, so muss, wenn

$$f(A, B, \ldots) = \varphi(A', B', \ldots)$$

ist, auch

$$|f(A, B, \ldots) = |\varphi(A', B', \ldots)$$

sein. Nun können keine andern Verknüpfungen vorkommen als Addition, Subtraktion und die bezügliche Multiplikation, zu welcher auch die Multiplikation mit Zahlen gerechnet werden darf. Für Addition und Subtraktion ist in Satz 100 bewiesen, dass man, statt von der Verknüpfung, von den Verknüpfungsgliedern die Ergänzungen nehmen kann, und dasselbe gilt (nach 98) von der bezüglichen Multiplikation, also für alle auf beiden Seiten vorkommenden Verknüpfungen.

{Andrerseits ergiebt sich aus 92 sofort, dass für jede beliebige Grösse A von q-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe die Gleichung

$$||A = (-1)^{q(n-q)}(-1)^{q(n-q)} A = A$$

gilt. Weiss man daher, dass eine Gleichung von der Form

$$f(|A, |B, \ldots) = \varphi(|A', |B', \ldots)$$

besteht, so erkennt man, indem man den oben bewiesenen Satz dreimal auf diese Gleichung anwendet, dass auch die Gleichung

$$f(A, B, \ldots) = \varphi(A', B', \ldots)$$

gültig ist.}

Anm. Es tritt hierdurch die volle Reciprocität zwischen beliebigen Grössen und ihren Ergänzungen, also überhaupt zwischen Grössen m-ter und $(n-m)$-ter Stufe hervor, wenn das Hauptgebiet von n-ter Stufe ist; namentlich ist die Reciprocität zwischen Grössen erster und $(n-1)$-ter Stufe von Interesse. Noch anschaulicher wird sich diese Reciprocität weiter unten entfalten.

102. *Wenn E, F, G Einheiten sind, deren Stufenzahlen zusammen n (Stufenzahl des Hauptgebietes) betragen, so ist* 67

$$[EF \,.\, EG] = [EFG]\, E.$$

Beweis. Wir können zwei Fälle unterscheiden, entweder $[EFG]$ enthält gleiche Faktoren oder nicht. Enthält es gleiche, so muss, da die Anzahl seiner einfachen Faktoren, nach der Voraussetzung, gleich n, gleich der Anzahl der ursprünglichen Einheiten ist, eine dieser Einheiten, etwa e_1, unter den Faktoren von $[EFG]$ fehlen.

Nun sei $[EF] = |Q$, so muss (nach 89) Q diesen auch in $[EF]$ fehlenden Faktor e_1 enthalten; ebenso sei $[EG] = |R$, so muss R diesen Faktor gleichfalls enthalten. Also ist dann (nach 60) $[QR]$ gleich Null. Nun ist

$$[EF \,.\, EG] = [|Q|R] = |[QR], \qquad [97]$$

also gleich der Ergänzung von $[QR] = 0$, also (nach 89) selbst null. Aber es ist auch $[EFG]$, da es nach der Annahme gleiche Faktoren enthält, null, somit beide Seiten der zu erweisenden Gleichung null.

Wenn dagegen $[EFG]$ keine gleichen Faktoren enthält, so muss es, da es n Faktoren enthalten soll und zwar keine andern als ursprüngliche Einheiten, ein Produkt der n ursprünglichen Einheiten sein. Dann ist (nach 89 {und 80})

$$|G = [GEF][EF], \quad |F = [FEG][EG].$$

Da hier $[GEF]$ und $[FEG]$ als Produkte sämmtlicher Einheiten $e_1, \ldots e_n$ gleich $\mp [e_1 e_2 \ldots e_n]$, also (nach 94) $= \mp 1$ sind, und die Multiplikation mit ∓ 1 gleiches Resultat mit der Division durch ∓ 1 liefert, so können wir die obigen Gleichungen auch so schreiben:

$$[EF] = [GEF]|G, \quad [EG] = [FEG]|F.$$

Dann wird, da man überdies Zahlfaktoren beliebig ordnen darf,

$$[EF \,.\, EG] = [GEF][FEG][|G|F] = [GEF][FEG]|[GF] \qquad [97]$$
$$= [GEF][FEG][GFE]E. \qquad [89]$$

Nun ist $[EF] = \mp [FE]$ (nach 58). Vertauscht man also in dem gewonnenen Ausdrucke *zweimal* E mit F, so bleibt sein Werth ungeändert, und so wird er

$$= [GEF][EFG][GEF]E.$$

68 Aber, da $[GEF] = \mp 1$ ist, so wird $[GEF][GEF] = 1$ und somit erhält man

$$[EF \,.\, EG] = [EFG]E.$$

103. *Wenn A, B, C einfache Grössen sind und die Summe ihrer Stufenzahlen gleich der Stufenzahl n des Hauptgebietes ist, so ist*

$$[AB \,.\, AC] = [ABC]A.$$

Beweis. Angenommen, die Formel 103 gelte für den Fall, dass A, B, C keine andern Faktoren enthalten als die, welche einer gegebenen Reihe von n Grössen erster Stufe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ angehören, so zeige ich, dass sie auch noch gelte, wenn man statt einer dieser n Grössen, etwa statt a_1, eine aus ihnen numerisch abgeleitete setzt, etwa

$$a' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots = \Sigma \alpha_r a_r.$$

Es kann a_1 entweder in A oder B oder C enthalten sein. Ist a_1 in B enthalten, so sei $B = [a_1 D]$, und verwandle sich B durch die obige Substitution in $B' = [a' D]$. Dann wird

$$[AB'.AC] = [A\{(\Sigma\alpha_r a_r)D\}.AC] = \Sigma\alpha_r[A(a_r D).AC]$$
$$= \Sigma\alpha_r[A(a_r D)C]\,A,$$

da nach der Annahme Formel 103 für den Fall, dass die betrachteten Grössen nur $a_1, a_2, \ldots$ als einfache Faktoren enthalten, gelten soll. Also ist

$$[AB'.AC] = \Sigma\alpha_r[A(a_r D)C]A = [A\{(\Sigma\alpha_r a_r)D\}C]A = [A(a'D)C]A$$
$$= [AB'C]A.$$

Genau dieselben Schlüsse gelten, wenn a_1 in C enthalten ist. Es bleibt also nur der Fall zu behandeln, wo a_1 in A enthalten ist.

In diesem Falle verwandle sich zunächst a_1 in $a' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, und sei $A = [a_1 D]$, also

$$A' = [a'D] = \alpha_1[a_1 D] + \alpha_2[a_2 D],$$

das heisst

$$(*) \qquad A' = \alpha_1 A + \alpha_2[a_2 D].$$

Sollte a_2 noch in D enthalten sein, so wäre der letzte Summand (nach 60) null; es verwandelte sich also A nur in sein Vielfaches, also würde dann

$$[A'B.A'C] = \alpha_1^2[AB.AC] = \alpha_1^2[ABC]A$$
$$= [\alpha_1 ABC]\alpha_1 A = [A'BC]A'.$$

Also bleibt nur noch der Fall zu betrachten, wo a_2 in B oder in C, zum Beispiel in B vorkommt. In diesem Falle sei † $B = [a_2 E]$. 69
Es war, wie oben (*) gezeigt, $A' = \alpha_1 A + \alpha_2[a_2 D]$, und da a_2 in B als Faktor enthalten ist, und also $[a_2 DB]$ null wird, so ist

$$(**) \qquad [A'B] = \alpha_1[AB];$$

ferner ist

$$[A'C] = [(\alpha_1 A + \alpha_2[a_2 D])C] = \alpha_1[AC] + \alpha_2[a_2 DC],$$

also

$$[A'B.A'C] = \alpha_1^2[AB.AC] + \alpha_1\alpha_2[AB.a_2 DC]$$
$$= \alpha_1^2[ABC]\,A + \alpha_1\alpha_2[AB.a_2 DC].$$

Aber

$$[AB.a_2 DC] = [a_1 D(a_2 E).a_2 DC] = -[a_2 D(a_1 E).a_2 DC] \quad [\{80\}, 55]$$
$$= -[a_2 D(a_1 E)C][a_2 D].$$

Letzteres nämlich ist der Fall, da die drei Grössen $[a_2 D]$, $[a_1 E]$ und C keine andern Faktoren enthalten, als solche, die der Grössenreihe

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ angehören, und die Summe der Stufenzahlen n ist, also die Bedingungen alle erfüllt sind, unter denen die Geltung der Formel

$$[AB \,.\, AC] = [ABC]A$$

angenommen war. Somit wird

$$\begin{aligned}[A'B \,.\, A'C] &= \alpha_1^2[ABC]A - \alpha_1\alpha_2[a_2 D(a_1 E)C][a_2 D] \\ &= \alpha_1^2[ABC]A + \alpha_1\alpha_2[a_1 D(a_2 E)C][a_2 D] \quad [\{80\}, 55] \\ &= \alpha_1^2[ABC]A + \alpha_1\alpha_2[ABC][a_2 D] \\ &= \alpha_1[ABC](\alpha_1 A + \alpha_2[a_2 D]) \\ &= [\alpha_1 ABC]\,A' \qquad [*] \\ &= [A'BC]A'. \qquad (**)\end{aligned}$$

Dasselbe gilt, wenn a_2 in C statt in B enthalten war. Also ist gezeigt, dass die Formel immer bestehen bleibt, wenn man einen Faktor a_1 in $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ verwandelt, also auch, wenn man diesen wieder in $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ verwandelt und so fort.

Es ist also jetzt vollständig erwiesen, dass, wenn die Formel 103 für irgend eine Reihe von n Grössen erster Stufe $a_1, a_2, \ldots a_n$ gilt, welche die einfachen Faktoren der Grössen A, B, C bilden, sie auch noch bestehen bleibt, wenn man statt *irgend eines* dieser Faktoren eine aus jenen Grössen $a_1, \ldots a_n$ numerisch abgeleitete {Grösse} setzt. Da sich dasselbe wieder auf die so hervorgehende Reihe von Grössen anwenden lässt, so folgt, dass die Formel auch noch bestehen bleibt, wenn man *statt der einfachen Faktoren* der Grössen A, B, C *beliebige aus jenen Grössen* $a_1, \ldots a_n$ *numerisch abgeleitete Grössen* setzt.

In der That, es seien zum Beispiel $b_1, \ldots b_n$ solche aus $a_1, \ldots a_n$ numerisch abgeleitete Grössen. Wie diese auch beschaffen seien, immer wird sich (nach 17) unter ihnen ein Verein von m Grössen angeben 70 lassen, welche in keiner Zahlbeziehung † zu einander stehen, und aus denen sich, wenn m kleiner als n ist, die übrigen numerisch ableiten lassen. Es seien nun $b_1, \ldots b_m$ diese Grössen, aus denen $b_{m+1}, \ldots b_n$ numerisch ableitbar sind; dann kann man (nach 20) statt m der Grössen $a_1, \ldots a_n$, die Grössen $b_1, \ldots b_m$ in der Art einführen, dass das Gebiet der so erhaltenen Grössen dem Gebiete der Grössen $a_1, \ldots a_n$ identisch wird. Es seien $a_1, \ldots a_m$ die Grössen, statt deren man in dieser Weise $b_1, \ldots b_m$ einführen kann, so wird nun das Gebiet der Grössen $a_1, \ldots a_n$ identisch dem Gebiete der Grössen $b_1, \ldots b_m$, $a_{m+1}, \ldots a_n$, oder, indem man dieselbe Schlussfolge Schritt für Schritt anwendet: Es wird das Gebiet

$a_1, a_2, \ldots a_n$ identisch dem Gebiet $b_1, a_2, \ldots a_n$,

dies wieder identisch $b_1, b_2, a_3, \ldots a_n$,

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

und endlich identisch $b_1, b_2, \ldots b_m, a_{m+1}, \ldots a_n$.

Gilt nun Formel 103 für $a_1, \ldots a_n$, so gilt sie auch, wenn man statt des Faktors a_1 die aus $a_1, \ldots a_n$ abgeleitete Grösse b_1 setzt, also für $b_1, a_2, \ldots a_n$. Da nun das Gebiet $a_1, \ldots a_n$ mit dem Gebiete $b_1, a_2, \ldots a_n$ identisch ist, und b_2 nach der Annahme aus $a_1, \ldots a_n$ ableitbar ist, so ist es auch aus $b_1, a_2, \ldots a_n$ ableitbar, folglich bleibt Formel 103 noch bestehen, wenn man b_2 statt a_2 setzt, das heisst für die Reihe $b_1, b_2, a_3, \ldots a_n$, und so fort, endlich noch für die Reihe $b_1, b_2, \ldots b_m, a_{m+1}, \ldots a_n$. Ferner, da nach der Annahme $b_{m+1}, \ldots b_n$ aus $b_1, b_2, \ldots b_m$ numerisch ableitbar sind, so bleibt nun 103 auch noch bestehen, wenn man nach und nach in der Reihe $b_1, \ldots b_m, a_{m+1}, \ldots a_n$, statt $a_{m+1}, \ldots a_n$ die Grössen $b_{m+1}, \ldots b_n$ setzt, also auch für die Reihe $b_1, \ldots b_n$, das heisst, für jede beliebige aus $a_1, \ldots a_n$ numerisch abgeleitete Grössenreihe. Nun gilt aber 103 für die ursprünglichen Einheiten $e_1, \ldots e_n$ (nach 102), also für eine beliebige Reihe von Grössen erster Stufe, welche die einfachen Faktoren von A, B, C bilden, das heisst, für beliebige einfache Grössen A, B, C.

104. *Auch wenn B und C zusammengesetzte Grössen sind, A aber eine einfache Grösse und die Summe der Stufenzahlen von A, B, C gleich der Stufenzahl des Hauptgebietes ist, so ist*

$$[AB \,.\, AC] = [ABC]A.$$

Beweis. Es sei 71

$$B = \Sigma \beta_r E_r, \quad C = \Sigma \gamma_s F_s,$$

wo E_r und F_s Einheitsprodukte sind, so ist

$$\begin{aligned} [AB \,.\, AC] &= \Sigma \beta_r \gamma_s [AE_r \,.\, AF_s] && [42] \\ &= \Sigma \beta_r \gamma_s [AE_r F_s] A && [103] \\ &= [A \Sigma \beta_r E_r \,.\, \Sigma \gamma_s F_s] A && [45] \\ &= [ABC] A. \end{aligned}$$

Anm. Dieser Satz gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn A eine zusammengesetzte Grösse ist. Ist zum Beispiel $A = [ab] + [cd]$, wo a, b, c, d in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen sollen, und ist $B = c$, $C = d$, so wird in Bezug auf ein Gebiet vierter Stufe

$$[AB \,.\, AC] = [(ab + cd)c \,.\, (ab + cd)d] = [abc \,.\, abd],$$

da $[cdc]$ und $[cdd]$ verschwinden; aber $[abc \,.\, abd] = [abcd][ab]$. Also ist

$$[AB \,.\, AC] = [abcd][ab].$$

Dagegen ist

$$[ABC]\,A = [(ab+cd)cd]([ab]+[cd]) = [abcd]([ab]+[cd])$$
$$= [abcd][ab] + [abcd][cd].$$

Also sind beide Ausdrücke um $[abcd][cd]$ von einander verschieden.

105—107. *Wenn A, B, C einfache Grössen sind, und ihr Produkt von nullter Stufe ist, so ist*

105. $$[AB\,.\,AC] = [ABC]A$$

106. $$[AB\,.\,BC] = [ABC]B$$

107. $$[AC\,.\,BC] = [ABC]C,$$

das heisst, wenn zwei Produkte (P und Q) einfacher Grössen, welche einen gemeinschaftlichen Faktor haben, zu multipliciren sind, und dieser gemeinschaftliche Faktor entweder in dem zweiten Produkte (Q) als erster Faktor oder in dem ersten (P) als zweiter Faktor vorkommt, so kann man diesen Faktor mit dem Produkte der übrigen Faktoren multipliciren, vorausgesetzt, dass dies letztere Produkt von nullter Stufe ist. In beiden Fällen ist das Gesammtprodukt von gleichem Werthe.

Beweis. 1. Sind α, β, γ die Stufenzahlen von A, B, C, und n die des Hauptgebietes, so muss, da $[ABC]$ von nullter Stufe sein soll, (nach 96) $\alpha+\beta+\gamma$ durch n theilbar sein, also, da α, β, γ kleiner als n sind, entweder gleich n oder gleich $2n$ sein. Ist $\alpha+\beta+\gamma=n$, so ist die Geltung der Formel 105 schon in 103 bewiesen. Ist dagegen $\alpha+\beta+\gamma=2n$, so sei

72 $$A = |A', \quad B = |B', \quad C = |C'$$

und seien α', β', γ' die Stufenzahlen von A', B', C', so ist

$$\alpha' = n-\alpha, \quad \beta' = n-\beta, \quad \gamma' = n-\gamma, \quad [90, \text{Zusatz}]$$

also

$$\alpha'+\beta'+\gamma' = 3n-(\alpha+\beta+\gamma) = 3n-2n = n.$$

Somit

$$[AB\,.\,AC] = ([|A'|B'][|A'|C']) = |[A'B'\,.\,A'C'] \quad [97]$$
$$= |[A'B'C'\,.\,A'], \quad [103]$$

da nämlich $\alpha'+\beta'+\gamma'=n$ ist. Dies ist aber (nach 98)

$$= [|A'|B'|C']|A' = [ABC]A.$$

2. Es sei $[AB]=[BD]$, so ist D von gleicher Stufe mit A, also

$$[AB\,.\,BC] = [BD\,.\,BC] = [BDC]B \quad [105]$$
$$= [ABC]B,$$

da $[BD]=[AB]$ ist.

3. Es sei $[BC]=[CD]$, so ist D von gleicher Stufe mit B, also

$$[AC.BC] = [AC.CD] = [ACD]C \qquad [106]$$
$$= [ABC]C,$$

da $[CD] = [BC]$ ist.

Anm. Es lassen sich die in 105—107 aufgestellten Gesetze so erweitern, dass sie auch für den Fall gelten, wo $[ABC]$ nicht von nullter Stufe ist, wenn man sie nämlich in den folgenden Formen darstellt:

$$[AB.AC] = [A.ABC]$$
$$[AB.BC] = [B.ABC]$$
$$[AC.BC] = [C.ABC].$$

Den Beweis dieser Formeln, die ich in dieser allgemeineren Bedeutung im Folgenden nicht anwenden werde, überlasse ich dem Leser.

108. *Wenn A, B, C einfache Grössen sind, und die Summe der Stufenzahlen von A und C gleich der des Hauptgebietes, und B dem A untergeordnet ist, so ist*

$$[A.BC] = [AC]B$$
$$[CB.A] = [CA]B.$$

Beweis. Denn dann ist (nach 79b) A in der Form $[BD]$ darstellbar, und also

$$[A.BC] = [BD.BC] = [BDC]B \qquad [105]$$
$$= [AC]B$$

und

$$[CB.A] = [CB.BD] = [CBD]B \qquad [106]$$
$$= [CA]B.$$

109. *Ein bezügliches Produkt zweier einfacher Grössen, die nicht null sind, ist dann, und nur dann von Null verschieden, wenn die Stufenzahl ihres gemeinschaftlichen Gebietes den kleinsten, oder, was dasselbe ist, die Stufenzahl ihres verbindenden Gebietes den grössten Werth hat, den sie bei gegebenen Stufenzahlen der beiden Faktoren und des Hauptgebietes haben kann, das heisst, wenn α und β die Stufenzahlen der Faktoren A und B, n die des Hauptgebietes ist, γ die des gemeinschaftlichen, δ die des verbindenden Gebietes, so ist,*

73

wenn $\alpha + \beta \overline{\overline{<}} n$, das heisst, das Produkt ein progressives ist,

$$[AB] \gtrless 0$$

dann und nur dann, wenn

$$\gamma = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\alpha + \beta = \delta;$$

und wenn $\alpha + \beta > n$, das heisst, das Produkt ein regressives ist, so ist

$$[AB] \gtrless 0$$

dann und nur dann, wenn

oder, was dasselbe,

$$\gamma = \alpha + \beta - n,$$

$$\delta = n$$

ist.

Beweis. 1. Wenn $\alpha + \beta \overline{<} n$ ist, so ist das Produkt (nach 94) progressiv, also (nach 61, 66) dann und nur dann null, wenn seine einfachen Faktoren in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Ist also $[AB] = 0$, so lässt sich von den einfachen Faktoren des Produktes $[AB]$ einer aus den $\alpha + \beta - 1$ übrigen numerisch ableiten (nach 2). Also werden dann sämmtliche einfache Faktoren jenes Produktes von einem Gebiete von niederer als $(\alpha + \beta)$-ter Stufe umfasst, das heisst, $\delta < \alpha + \beta$. Ist hingegen $[AB] \gtrless 0$, so stehen die einfachen Faktoren dieses Produktes (nach 61) in keiner Zahlbeziehung zu einander, ihr verbindendes Gebiet ist also von $(\alpha + \beta)$-ter Stufe, das heisst, $\alpha + \beta = \delta$. Somit ist, wenn $\alpha + \beta \overline{<} n$ ist, $[AB]$ dann und nur dann von Null verschieden, wenn $\alpha + \beta = \delta$ ist.

2. Es sei $\alpha + \beta > n$ und $\alpha + \beta - n = \gamma$. Dann haben die Gebiete A und B, da sie beziehlich von α-ter und β-ter Stufe sind, (nach 26) mindestens ein Gebiet $(\alpha + \beta - n)$-ter, das heisst, γ-ter Stufe gemein. Es sei C eine Grösse von γ-ter Stufe in diesem Gebiete, so sind (nach 79 b) A und B in den Formen $A = [CA_1]$, $B = [CB_1]$ darstellbar. Somit wird

$$[AB] = [CA_1 \,.\, CB_1] = [CA_1 B_1]C, \qquad [103]$$

74 weil die Summe der Stufenzahlen von C, A_1 und B_1

$$= \gamma + (\alpha - \gamma) + (\beta - \gamma) = \alpha + \beta - \gamma = n$$

ist. Es ist aber $[CA_1 B_1]C$, da $[CA_1 B_1]$ von nullter Stufe, also eine Zahl ist, dann und nur dann null, wenn $[CA_1 B_1]$, das heisst $[AB_1]$ null ist. Aber nach Beweis 1 ist $[AB_1]$ dann und nur dann null, wenn A und B_1 von einem Gebiet von niederer als n-ter Stufe umfasst werden; aber da C in $A = [CA_1]$ liegt, so werden dann auch A und $[CB_1]$, das heisst, A und B von einem Gebiete niederer als n-ter Stufe umfasst, das heisst, $\delta < n$. Somit ist, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, $[AB]$ dann und nur dann von Null verschieden, wenn $\delta = n$ ist.

3. Nach 25 ist die Summe der Stufenzahlen zweier Gebiete gleich der Summe der Stufenzahlen ihres gemeinschaftlichen und ihres verbindenden Gebietes, das heisst

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta.$$

Die Bedingung in Beweis 1, dass $\alpha + \beta = \delta$ sei, ist also identisch mit der, dass $\gamma = 0$ sei, und die Bedingung in Beweis 2, dass $\delta = n$ sei, ist identisch mit der, dass

$$\alpha + \beta - n = \gamma$$

sei. Somit ist der zweite Wortausdruck unseres Satzes bewiesen. Nun ist aber klar, dass, wenn $\alpha + \beta \overline{\overline{<}} n$ ist, die kleinste Stufenzahl, die das den Grössen A und B gemeinschaftliche Gebiet haben kann, null, und die grösste, die das verbindende Gebiet haben kann, $\alpha + \beta$ ist. Auf der andern Seite, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, so ist die grösste Stufenzahl, die das verbindende Gebiet haben kann, n, also (nach 26) die kleinste, die das gemeinschaftliche Gebiet haben {kann}, $\alpha + \beta - n$. Somit stimmt der erste Wortausdruck mit dem zweiten überein, und der Satz ist erwiesen.

110. *Alle Gesetze der auf ein Hauptgebiet bezüglichen Multiplikation gelten auch noch, wenn man überall statt der ursprünglichen Einheiten eine beliebige Reihe von n Grössen setzt, die aus jenen numerisch abgeleitet sind, und deren kombinatorisches Produkt* 1 *ist.*

Beweis. Es seien $e_1, \ldots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, und $a_1, \ldots a_n$ aus ihnen numerisch abgeleitet, und zwar so, dass

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = 1$$

ist.

Nach 89 wurde unter der Ergänzung $|E$ eines Einheitsproduktes 75 E diejenige Grösse verstanden, welche dem kombinatorischen Produkte E' aller in E nicht vorkommender Einheiten gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem $[EE']$ der absoluten Einheit gleich oder entgegengesetzt ist, diejenige Grösse also, welche der Gleichung

$$|E = [EE']E'.$$

genügt. Bezeichnen wir nun diejenige Grösse, welche aus einem Produkte A, in welchem nur die Grössen $a_1, \ldots a_n$ vorkommen, auf entsprechende Weise gebildet ist, für den Augenblick mit IA, das heisst, bezeichnen wir mit IA diejenige Grösse, welche dem kombinatorischen Produkte A' aller derjenigen Grössen jener Reihe $a_1, \ldots a_n$, welche in A nicht vorkommen, gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem $[AA']$ der absoluten Einheit gleich oder entgegengesetzt ist, so dass also

$$\text{(a)} \qquad IA = [AA']A'$$

ist, {und setzen wir ferner wieder, wenn α eine Zahl bedeutet,

$$\text{(b)} \qquad I\alpha = \alpha$$

und endlich

$$\text{(c)} \qquad I\Sigma\alpha_r A_r = \Sigma\alpha_r IA_r,$$

entsprechend der Erklärung 90}, so haben wir zunächst zu beweisen,

dass die als Definition des bezüglichen Produktes (in 94) aufgestellte Bestimmung auch bei dieser Einsetzung der Grössen $a_1, \ldots a_n$ an die Stelle der ursprünglichen Einheiten noch ihre Geltung behalte, das heisst, dass

(d) $$I[AB] = [IA.IB]$$

sei, wenn A und B nur Grössen aus der Reihe $a_1, \ldots a_n$ als einfache Faktoren enthalten, und die Summe $(\alpha + \beta)$ der Stufenzahlen von A und B grösser ist als die Stufenzahl n des Hauptgebietes.

{Es sei *zuerst* $[AB] = 0$, so müssen, da $\alpha + \beta > n$ ist, die Gebiete von A und B (nach 109) von einem Gebiete von niederer als n-ter Stufe umfasst werden. In A und B werden daher nicht alle n einfachen Faktoren $a_1, \ldots a_n$ vorkommen, sondern nur eine gewisse Zahl δ von ihnen, wo $\delta < n$ ist, während die $n - \delta$ übrigen sowohl in A als in B fehlen. Da nun IA nur die Faktoren enthält, die in A nicht vorkommen, und, da für IB entsprechendes gilt, so werden IA und IB diese $n - \delta$ Faktoren, die in A und B fehlen, gemein haben. Da überdies die Summe der Stufenzahlen von IA und IB den Werth $n - \alpha + n - \beta$ hat und somit kleiner als n ist, so wird (nach 109)

$$[IA.IB] = 0.$$

Da aber auch $[AB] = 0$ war und die Ergänzung einer Zahl (nach b) auch in dem jetzigen Sinne gleich dieser Zahl, also die von Null wieder Null ist, so ergiebt sich

$$I[AB] = [IA.IB].$$

Es sei *zweitens* $[AB]$ von Null verschieden, so muss (nach 109) das verbindende Gebiet der Gebiete von A und B die Stufenzahl n haben, das gemeinschaftliche Gebiet dagegen die Stufenzahl $\alpha + \beta - n$. Da nun die Grössen A und B beide Produkte von Faktoren aus der Reihe der n Grössen $a_1, \ldots a_n$ sind, so ist klar, dass jeder der n Faktoren $a_1, \ldots a_n$ mindestens in einer der beiden Grössen A und B vorkommt und dass ausserdem A und B gerade $\alpha + \beta - n$ unter diesen einfachen Faktoren gemein haben. Ist C das Produkt dieser $\alpha + \beta - n$ Faktoren, so lassen sich A und B in den Formen

$$A = [CA_1], \quad B = [CB_1]$$

darstellen, wo $[A_1CB_1]$ alle n einfachen Faktoren enthält und somit eine Zahl ist. Es wird aber (nach 103)

$$[AB] = [CA_1 . CB_1] = [CA_1B_1]C$$

und ferner (nach c)

$$I[AB] = [CA_1B_1]IC,$$

oder, da (nach a)

$$IC = [CA_1B_1][A_1B_1]$$

ist,

$$I[AB] = [CA_1B_1][CA_1B_1][A_1B_1].$$

Andrerseits ist

$$IA = I[CA_1] = [CA_1B_1]B_1, \quad IB = I[CB_1] = [CB_1A_1]A_1,$$

demnach wird

$$[IA \, . \, IB] = [CA_1B_1][CB_1A_1][B_1A_1],$$

und da dieser Ausdruck (nach 58) seinen Werth nicht ändert, wenn man zweimal A_1 mit B_1 vertauscht, so ergiebt sich wieder

$$I[AB] = [IA \, . \, IB],$$

also ist diese Formel allgemein bewiesen.}

Es gilt also die Bestimmung, durch welche der Begriff der be- (76) züglichen Multiplikation festgestellt wurde, auch, wenn man statt der ursprünglichen Einheiten die Grössen $a_1, \ldots a_n$ einführt; alle früheren Gesetze gelten aber, wenn man statt der n ursprünglichen Einheiten beliebige n Grössen {setzt}, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, das heisst, deren kombinatorisches Produkt nicht null ist, also auch, wenn man statt derselben die Grössen $a_1, \ldots a_n$ setzt. Aus diesen früheren Sätzen und der in der Definition festgestellten Bestimmung sind aber alle folgenden Gesetze abgeleitet, folglich gelten auch diese noch bei der angegebenen Substitution.

Anm. Durch das Fortbestehen der Multiplikations-Gesetze, auch wenn man eine Reihe lineal ableitbarer Einheiten den ursprünglichen substituirt, ist die Multiplikation als lineale bedingt, und erst im folgenden Kapitel werden wir zu einer Produktbildung übergehen, bei welcher das Fortbestehen der für die ursprünglichen Einheiten geltenden Gesetze nur in einem viel beschränkteren Umfange stattfindet.

Zu bemerken ist noch, dass die oben mit IA bezeichnete Grösse im Allgemeinen nicht mit der Ergänzung von A, die wir mit $|A$ bezeichneten, zusammenfällt. Zum Beispiel ist in einem Gebiete dritter Stufe, wenn e_1, e_2, e_3 die ursprünglichen Einheiten sind und $[e_1e_2e_3] = 1$ ist, die Ergänzung von $e_1 + e_2$, da $|e_1 = [e_2e_3]$, $|e_2 = [e_3e_1]$ ist, gleich $[e_2e_3] + [e_3e_1]$; denn (nach 90) ist

$$|(e_1 + e_2) = |e_1 + |e_2 = [e_2e_3] + [e_3e_1].$$

Dagegen, wenn

$$a_1 = e_1 + e_2, \quad a_2 = e_2, \quad a_3 = e_3$$

ist, so ist zwar $[a_1a_2a_3] = [e_1e_2e_3] = 1$, aber, bei Anwendung der Bezeichnung 77 in obigem Satze,

$$Ia_1 = [a_1a_2a_3][a_2a_3] = [a_2a_3] = [e_2e_3],$$

also von $|a_1$ um $[e_3e_1]$ verschieden. Im folgenden Kapitel {s. Nr. 167 und 168} wird sich ergeben, welche Beziehungen zwischen $e_1, \ldots e_n$ und $a_1, \ldots a_n$ stattfinden müssen, wenn $|A = IA$ sein soll.

111. *Wenn*

$$1 = [a_1 \ldots a_n] = [PP'] = [AA'] = [BB'] = [CC'] = \cdots$$

ist, und P, P', A, A', B, B', C, C', ... keine andern einfachen Faktoren enthalten, als die der Reihe $a_1, \ldots a_n$ angehören, und

$$P = [ABC\ldots]$$

ist, so ist auch

$$P' = [A'B'C'\ldots].$$

Beweis. Es sei unter IA dasselbe verstanden, wie im vorigen Beweise, so ist

$$IP = [PP']P' = P', \quad IA = [AA']A' = A', \ldots .$$

Nun ist, da nach dem vorigen Satze alle früheren Sätze, also namentlich auch Satz 98 noch gilt, wenn man überall das Zeichen I statt $|$ setzt,

$$I[ABC\ldots] = [IA.IB.IC\ldots],$$

also

$$IP = [IA.IB.IC\ldots].$$

Also, da $IP = P'$, $IA = A'$, $IB = B'$, $IC = C'$, ... ist,

$$P' = [A'B'C'\ldots].$$

112. *Wenn man aus n Grössen erster Stufe, deren kombinatorisches Produkt 1 liefert, die multiplikativen Kombinationen zur $(n-1)$-ten Klasse bildet, und die Elemente jeder Kombination alphabetisch, die Kombinationen selbst lexikographisch unter der Annahme ordnet, dass die Reihe jener n Grössen als ein Alphabet betrachtet wird, so ist das Produkt aus den $n-m$ ersten dieser Kombinationen gleich dem Produkt aus den m ersten jener n Grössen, das heisst*

$$[A_n \ldots A_{m+1}] = [a_1 \ldots a_m],$$

wenn

$$A_r = [a_1 \ldots a_{r-1}a_{r+1} \ldots a_n]$$

und

$$[a_1 \ldots a_n] = 1$$

ist.

Beweis. 1. Ich beweise zuerst, dass

$$[a_1 \ldots a_r A_r] = [a_1 \ldots a_{r-1}]$$

78 sei. Es ist nach der gewählten Bezeichnung

$$A_r = [a_1 \ldots a_{r-1}a_{r+1} \ldots a_n].$$

Also

$$\begin{aligned}[a_1 \ldots a_r A_r] &= [a_1 \ldots a_r(a_1 \ldots a_{r-1}a_{r+1} \ldots a_n)] \\ &= [a_1 \ldots a_r a_{r+1} \ldots a_n][a_1 \ldots a_{r-1}] \quad [105 \{\text{und } 80\}] \\ &= [a_1 \ldots a_{r-1}],\end{aligned}$$

da $[a_1 \ldots a_n] = 1$ ist.

2. Somit ist

$$[A_n A_{n-1}] = [a_1 \ldots a_{n-1} A_{n-1}] = [a_1 \ldots a_{n-2}]$$

$$[A_n A_{n-1} A_{n-2}] = [a_1 \ldots a_{n-2} A_{n-2}] = [a_1 \ldots a_{n-3}]$$

und so fort. Also

$$[A_n A_{n-1} \dots A_{n-r}] = [a_1 \dots a_{n-r-1}].$$

Also, wenn $n - r - 1 = m$ ist,

$$[A_n A_{n-1} \dots A_{m+1}] = [a_1 \dots a_m].$$

113. *Wenn $C_1, C_2, \dots$ die multiplikativen Kombinationen {zu einer bestimmten Klasse} aus den einfachen Faktoren (erster Stufe) einer von Null verschiedenen Grösse B sind, und D_r jedesmal aus denjenigen Faktoren von B besteht, welche in C_r fehlen, und zwar die Faktoren so geordnet, dass jedesmal*

$$[C_r D_r] = B$$

ist, so ist für jede Grösse A, deren Stufenzahl die Stufenzahl der D_r zu der des Hauptgebietes ergänzt,

$$[AB] = \Sigma[AD_r]C_r = [AD_1]C_1 + [AD_2]C_2 + \cdots.$$

Beweis. Es möge m die Anzahl der einfachen Faktoren von B sein und n die Stufe des Hauptgebietes, α die Stufenzahl von A, und sei $B = [b_1 b_2 \dots b_m]$.

Da nun nach der Annahme B von Null verschieden ist, so stehen (nach 61) $b_1, \dots b_m$ in keiner Zahlbeziehung zu einander, folglich lassen sich (nach 20) zu ihnen noch $n - m$ Grössen erster Stufe $b_{m+1}, \dots b_n$ von der Art hinzufügen, dass sich alle Grössen erster Stufe, welche dem betrachteten Hauptgebiete angehören, aus ihnen numerisch ableiten lassen. Dann lässt sich A als Grösse α-ter Stufe aus den multiplikativen Kombinationen der n Grössen $b_1, \dots b_n$ zur α-ten Klasse numerisch ableiten, also sich in der Form

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots = \Sigma \alpha_r A_r$$

darstellen, wenn $A_1, A_2, \dots$ die multiplikativen Kombinationen † aus $b_1, \dots b_n$ zur α-ten Klasse sind. Es seien diese Kombinationen $A_1, A_2, \dots$ so gewählt, dass jedesmal A_r aus denjenigen jener n Grössen besteht, welche in D_r fehlen. Dies ist allemal möglich, da D_r nach der Annahme $n - \alpha$ jener Grössen enthält. Dann ist [79]

$$[AB] = [\Sigma \alpha_r A_r . B] = \Sigma \alpha_r [A_r B] \quad [41]$$
$$= \Sigma \alpha_r [A_r . C_r D_r],$$

da nach der Annahme $B = [C_r D_r]$ ist. Da nun C_r nur solche jener n Grössen $b_1, \dots b_n$ enthält, die dem D_r fehlen, und A_r sämmtliche in D_r fehlenden Grössen $b_1, \dots b_n$ enthält, so ist C_r dem A_r untergeordnet, somit (nach 108)

$$[A_r . C_r D_r] = [A_r D_r] C_r,$$

also

$$[AB] = \Sigma \alpha_r [A_r D_r] C_r.$$

Nun ist aber {nach 60} $[A_s D_r] = 0$, wenn s von r verschieden ist, weil dann A_s mindestens einen Faktor enthält, der auch in D_r vorkommt, also kann man statt $\alpha_r[A_r D_r]$ schreiben $\Sigma\alpha_s[A_s D_r]$, wo sich die Summe nur auf den Index s bezieht, das heisst, es ist

$$\alpha_r[A_r D_r] = \Sigma\alpha_s[A_s D_r] = [\Sigma\alpha_s A_s . D_r] = [A D_r],$$

somit

$$[AB] = \Sigma[AD_r]C_r.$$

§ 6. Vertauschung der Faktoren und Auflösung der Klammern in einem reinen und {in einem} gemischten Produkte.

114. Erklärung. Wenn mehr als zwei Grössen A, B, C, ... so zu einem Produkte verknüpft sind, dass sie keiner anderen als der progressiven Multiplikation unterliegen, so nenne ich das Produkt ein rein progressives Produkt jener Grössen, wenn sie dagegen keiner andern als der regressiven Multiplikation unterliegen, oder, falls das Gesammtprodukt von nullter Stufe ist, nur die letzte, das Gesammtprodukt bildende Multiplikation eine progressive ist, so nenne ich das Produkt ein rein regressives, in beiden Fällen ein reines, in jedem andern Falle ein gemischtes. Das heisst, wenn in dem Produkte $[ABCD \ldots JK]$, das Produkt $[AB]$ ein progressives, das Produkt der zwei Grössen $[AB]$ und C wieder ein progressives, ebenso das Produkt der zwei Grössen $[ABC]$ und D, und so fort, endlich auch
80 das Produkt der zwei Grössen $[ABCD \ldots J]$ † und K ein progressives ist, so ist $[ABCD \ldots JK]$ ein rein progressives Produkt der Grössen A, B, C, D, ... J, K. Wenn hingegen alle jene Produkte regressive sind, oder wenigstens nur das letzte, nämlich das der zwei Grössen $[ABCD \ldots J]$ und K ein progressives Produkt, und zwar von nullter Stufe ist, so ist $[ABCD \ldots JK]$ ein rein regressives Produkt der Grössen A, B, C, D, ... J, K.

Anm. Dass das Produkt auch in dem Falle als ein rein regressives betrachtet wird, wenn die letzte Multiplikation, die das ganze Produkt nullter Stufe bildet, eine progressive ist, beruht darauf, dass die progressive Multiplikation, welche ein Produkt nullter Stufe bildet, auch insofern zugleich als regressive Multiplikation betrachtet werden kann, als alle speciellen Gesetze regressiver Multiplikation ebenso für dieselbe gelten, wie die speciellen Gesetze progressiver Multiplikation. Als Beispiel einer solchen rein regressiven Multiplikation diene das Produkt $[ab \,.\, ac \,.\, bc]$, wenn das Hauptgebiet von dritter Stufe ist.

115. *Wenn ein Produkt mehrerer Grössen $[ABC \ldots]$ ein rein progressives ist, so ist das Produkt der Ergänzungen $[|A|B|C \ldots]$ ein rein regressives und umgekehrt.*

Beweis. Denn (nach 97, Zusatz) gilt dies für zwei Faktoren, also da $[AB]$ ein progressives ist, so ist $[|A|B]$ ein regressives, und da

$[(AB)C]$ ein progressives ist, so ist $[|(AB)|C]$ ein regressives, also $[|A|B|C]$ ein rein regressives, und so weiter.

116. *Ein Produkt von m Grössen A, B, C, ... J, K ist ein rein progressives, wenn die Summe der Stufenzahlen dieser Grössen ebenso gross oder kleiner als die Stufenzahl (n) des Hauptgebietes ist, hingegen ein rein regressives, wenn jene Summe ebenso gross oder grösser als $n(m-1)$ ist, ein gemischtes, wenn jene Summe grösser als n und kleiner als $n(m-1)$ ist.*

Beweis. 1. Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Stufenzahlen der Grössen $A, B, C, \ldots$. Wenn

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \iota + \varkappa \overline{\overline{<}} n$$

ist, so ist auch $\alpha + \beta < n$, also das Produkt $[AB]$ (nach 94) ein progressives; aber auch $\alpha + \beta + \gamma < n$, also das Produkt der zwei Grössen $[AB]$ und C ein progressives, und so fort. Endlich auch

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \iota + \varkappa \overline{\overline{<}} n,$$

also auch das Produkt der zwei Grössen $[ABC\ldots J]$ und K, da die Stufe von $[ABC\ldots J]$ (nach 96) gleich $\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \iota$ ist, ein progressives. † Ebenso folgt das Umgekehrte, dass nämlich, wenn 81 $[ABC\ldots JK]$ ein rein progressives Produkt ist,

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \iota + \varkappa \overline{\overline{<}} n$$

sein muss.

2. Wenn

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \iota + \varkappa \overline{\overline{>}} n(m-1)$$

ist, so können wir dies auch so schreiben:

$$(n-\alpha) + (n-\beta) + (n-\gamma) + \cdots + (n-\iota) + (n-\varkappa) \overline{\overline{<}} n,$$

weil nämlich m die Anzahl der Grössen $A, B, C, \ldots, J, K$ ist. Da nun $n-\alpha$ die Stufenzahl der Ergänzung von A, das heisst die Stufenzahl von $|A$ ist, ..., so ist das Produkt

$$[|A|B|C\ldots|J|K]$$

nach Beweis 1 ein rein progressives, folglich (nach 115) $[ABC\ldots JK]$ ein rein regressives.

116 b.*) *Das reine Produkt von Grössen erster Stufe oder von* (98) *Grössen $(n-1)$-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe ist ein kombinatorisches Produkt dieser Grössen.*

Beweis. Das reine Produkt von Einheiten erster Stufe ist (nach 114, 94) ein progressives, also (nach 94) ein äusseres, also (nach 78) ein

*) {Dieser Satz steht in der Originalausgabe auf S. 98 als Nr. 132, gehört aber hierher hinter Nr. 116.}

kombinatorisches Produkt der Einheiten; also {ist} auch (nach 52) das reine Produkt von beliebigen Grössen erster Stufe ein kombinatorisches Produkt dieser Grössen. Das reine Produkt von Grössen $(n-1)$-ter Stufe ist aber (nach 101) genau denselben Gesetzen unterworfen, wie das von Grössen erster Stufe, also auch den Gesetzen der kombinatorischen Multiplikation, das heisst jenes Produkt ist ein kombinatorisches Produkt jener Grössen $(n-1)$-ter Stufe.

(81) **117.** *Die Stufenzahl eines rein progressiven Produktes ist null, wenn die Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren gleich der Stufenzahl n des Hauptgebietes ist, in jedem andern Falle ist die Stufenzahl jenes Produktes gleich der Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren. Die Stufenzahl eines rein regressiven Produktes ist $= \varsigma - (m-1)n$, wenn ς die Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren und m die Anzahl dieser Faktoren ist.*

Beweis. Für zwei Faktoren ist der Satz in 95 bewiesen. Ist nun das Produkt $[ABC \dots JK]$ ein rein progressives, und sind $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \iota, \varkappa$ die Stufenzahlen von $A, B, C, \dots J, K$, so ist die von $[AB]$ gleich $\alpha + \beta$, also die von $[(AB)C]$ gleich $\alpha + \beta + \gamma, \dots$; also die von $[ABC \dots J]$ gleich $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \iota$. Ist nun

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \iota + \varkappa < n,$$

so ist nach demselben Satze (95) die Stufenzahl von $[(ABC \dots J)K]$ gleich $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \iota + \varkappa$; wenn aber

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \iota + \varkappa = n$$

ist, so ist sie nach demselben Satze null.

Ist zweitens das Produkt $[ABC \dots JK]$ ein rein regressives, so ist nach dem angeführten Satze die Stufenzahl von $[AB]$ gleich $\alpha + \beta - n$, also die von $[(AB)C]$ gleich $\alpha + \beta + \gamma - 2n, \dots$, also, wenn m die Anzahl der Faktoren von $[ABC \dots JK]$ ist, die Stufenzahl dieses Produktes gleich $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \iota + \varkappa - (m-1)n$.

118. *Das Gebiet eines rein progressiven Produktes ist gleich dem seine sämmtlichen Faktoren verbindenden Gebiete, und das Gebiet eines rein regressiven Produktes gleich dem seinen sämmtlichen Faktoren gemeinschaftlichen Gebiete, vorausgesetzt, dass in beiden Fällen das Produkt nicht null ist.*

82 Beweis. 1. Es sei $[AB \dots]$ ein rein progressives Produkt und

$$A = [a_1 \dots a_q], \quad B = [b_1 \dots b_r], \dots,$$

wo $a_1, \dots a_q, b_1, \dots b_r, \dots$ Grössen erster Stufe sind, so erhält man

$$[AB \dots] = [(a_1 \dots a_q)(b_1 \dots b_r) \dots].$$

Da nun das progressive Produkt stets zugleich ein äusseres ist, so kann man (nach 80) die Klammern weglassen und es wird der letzte Ausdruck

$$= [a_1 \ldots a_q b_1 \ldots b_r \ldots].$$

Das Gebiet des Produktes ist also (nach 77) das aus seinen einfachen Faktoren $a_1, \ldots a_q$, $b_1, \ldots b_r, \ldots$ numerisch ableitbare Gebiet. Ebenso ist das Gebiet von A das aus $a_1, \ldots a_q$ ableitbare Gebiet, und so weiter, und (nach 15) ist das aus den Grössen zweier oder mehrerer Gebiete $A, B, \ldots$ ableitbare Gebiet das diese letzteren verbindende Gebiet, also das Gebiet des progressiven Produktes $[AB \ldots]$ das die Faktoren $A, B, \ldots$ verbindende Gebiet.

2. Es sei $[AB]$ ein von Null verschiedenes regressives Produkt, also die Stufenzahlen α und β der Faktoren A und B zusammen grösser als n, so haben A und B ein Gebiet $(\alpha + \beta - n)$-ter Stufe gemein {26}; aber auch kein Gebiet höherer Stufe, weil sonst (nach 109) das Produkt null sein würde. Also lassen sich {nach 87} A und B auf einen gemeinschaftlichen Faktor D von $(\alpha + \beta - n)$-ter Stufe von der Art bringen, dass $A = [DE]$, $B = [DF]$ und D, E, F einfache Grössen sind; dann ist (nach 105)

$$[AB] = [DE \,.\, DF] = [DEF]\, D \equiv D,$$

da $[DEF]$ eine von Null verschiedene Zahl ist, das heisst, das Gebiet von $[AB]$ ist gleich dem den Faktoren A und B gemeinschaftlichen Gebiete. Tritt nun noch ein Faktor C hinzu, so wird

$$[ABC] \equiv [DC] \equiv G,$$

wenn G das dem D und C gemeinschaftliche Gebiet ist, also das den A, B, C gemeinschaftliche, und so weiter.

119. *In einem reinen Produkte kann man Klammern beliebig setzen und weglassen, das heisst*

$$[A(BC)] = [ABC],$$

wenn $[ABC]$ *ein reines Produkt ist.*

Beweis. 1. Wenn das Produkt ein rein progressives ist, † so ist 83 es (nach 94) auch ein äusseres, also (nach 80) die Klammersetzung gleichgültig fürs Resultat.

2. Wenn das Produkt $[ABC]$ ein rein regressives ist, so ist (nach 115) das Produkt $[|A|B|C]$ ein rein progressives, also nach Beweis 1

$$[|A(|B|C)] = [|A|B|C],$$

das heisst (nach 101)

$$[A(BC)] = [ABC].$$

119b. *Ein reines Produkt behält seinen Werth, wenn man seine Faktoren in lauter Faktoren erster oder $(n-1)$-ter Stufe auflöst, je nachdem das gegebene Produkt ein progressives oder regressives war. Auch behauptet das Produkt in Bezug auf diese neuen Faktoren seinen Charakter, als rein progressives oder regressives, das heisst, wenn*

$$P = [AB \ldots E]$$

ein reines Produkt der Faktoren $A, B, \ldots E$ ist, und

$$A = [a_1 \ldots a_q], \quad B = [a_{q+1} \ldots a_r], \quad \ldots, \quad E = [a_{t+1} \ldots a_u]$$

und $a_1, \ldots a_u$ Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe sind, je nachdem das Produkt $[AB \ldots E]$ ein progressives oder regressives ist, so ist auch

$$P = [a_1 a_2 \ldots a_u],$$

und zwar auch dies Produkt ein rein progressives oder regressives, je nachdem das gegebene Produkt $[AB \ldots E]$ es war.

Beweis. Wenn das Produkt $[AB \ldots E]$ ein rein progressives ist, so ist {nach 116} die Summe der Stufenzahlen von $A, B, \ldots E$, das heisst u, $\overline{<} n$, somit bleibt es auch (nach 116) ein rein progressives in Bezug auf die Faktoren $a_1, \ldots a_u$, wenn man statt A setzt $[a_1 \ldots a_q]$, und so weiter, folglich kann man (nach 119) die Klammern weglassen und erhält $P = [a_1 a_2 \ldots a_u]$.

Ist aber $[AB \ldots E]$ ein rein regressives Produkt, so wird $[|A|B \ldots |E]$ (nach 115) ein rein progressives; und wenn $A = [a_1 \ldots a_q]$ ist, ..., und $a_1, \ldots a_u$ Grössen $(n-1)$-ter Stufe sind, so ist $|A = [|a_1 \ldots |a_q]$ und so weiter, wo $|a_1, \ldots, |a_q$ Grössen erster Stufe sind, somit nach dem ersten Theile des Beweises

$$[|A|B \ldots |E] = [|a_1 \ldots |a_u].$$

Also auch (nach 101)

$$[AB \ldots E] = [a_1 \ldots a_u],$$

und dies ein rein regressives Produkt (nach 115).

183 **119c.*)** *Wenn $a, b, \ldots$ die Stufenzahlen {der Faktoren} eines reinen Produktes P {sind} (114), n die des Hauptgebietes, v die Stufenzahl des verbindenden, g. die des gemeinschaftlichen Gebietes {aller Faktoren} (15) und p die des Produktes ist, und $n-a=a'$, $n-b=b'$, ..., $n-g=g'$ gesetzt wird, so ist*

*) {Dieser Satz steht in der Originalausgabe auf S. 183 als Nr. 287, gehört aber hierher, hinter Nr. 119b.}

1) *wenn das Produkt P ein progressives ist, P dann und nur dann von Null verschieden, wenn*

$$v = a + b + \cdots$$

ist, und zwar ist dann $p = v$,

2) *wenn das Produkt P ein regressives ist, so ist P dann und nur dann von Null verschieden, wenn*

$$g' = a' + b' + \cdots$$

ist, und zwar ist dann $p = g$.

Beweis. 1. Wenn das Produkt P ein progressives ist, so kann man die Faktoren (nach 119b) in lauter Faktoren erster Stufe auflösen; die Anzahl dieser Faktoren erster Stufe ist (nach 77) $a + b + \cdots$, ihr Produkt ist (nach 61 und 66) dann und nur dann von Null verschieden, wenn die Faktoren erster Stufe in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, das heisst (nach 23), wenn das verbindende Gebiet von $(a + b + \cdots)$-ter Stufe, also $v = a + b + \cdots$ ist. Dann ist die Stufe des Produktes (nach 77) $= a + b + \cdots$, das heisst $= v$.

2. Wenn das Produkt P ein regressives ist, so gilt der Satz zunächst für zwei Faktoren. Denn nach 109 ist {in diesem Falle} P dann und nur dann von Null verschieden, wenn $g = a + b - n$, das heisst

$$n - g = n - a + n - b,$$

also

$$g' = a' + b'$$

ist. Nach 95 ist ferner $p = a + b - n$, also $= g$. Somit gilt der Satz für zwei Faktoren. Aus ihm erhält man aber durch wiederholte Anwendung den Satz für beliebig viele Faktoren.

120. *Ein reines Produkt bleibt sich selbst kongruent, wenn man die Ordnung der Faktoren beliebig ändert, das heisst* 84

$$P_{A,B} \equiv P_{B,A}.$$

Beweis. 1. Sind q und r die Stufenzahlen von A und B, und ist zuerst das Produkt $[AB]$ ein progressives, so ist (nach 58)

$$[AB] = (-1)^{qr}[BA],$$

also

$$[AB] \equiv [BA].$$

Ist das Produkt $[AB]$ ein regressives, die Stufe des Hauptgebietes n, so ist $[|A|B]$ (nach 115) ein progressives Produkt, und da $n - q$ und $n - r$ die Stufen von $|A$ und $|B$ sind,

$$[|A|B] = (-1)^{(n-q)(n-r)}[|B|A],$$

also (nach 101)

$$[AB] = (-1)^{\text{[illegible]}}[BA],$$

also auch

$$[AB] \equiv [BA].$$

2. Ist ferner das Produkt $[PAB]$ ein reines, so ist

$$[PAB] = [P . AB] \qquad [119]$$
$$\equiv [P . BA]$$

nach Beweis 1 und nach 2, 40; dies wieder

$$= [PBA], \qquad [119]$$

also

$$[PAB]\ .\ [PBA],$$

das heisst, das Produkt bleibt sich kongruent, wenn man zwei auf einander folgende Faktoren vertauscht.

3. Durch Vertauschung zweier auf einander folgender Faktoren kann man nun nach und nach jeden Faktor auf jede beliebige Stelle bringen, also den Faktoren jede beliebige Ordnung geben, während dabei nach Beweis 2 das Produkt sich kongruent bleibt.

121. *Wenn ein reines Produkt zwei einander incidente Faktoren enthält, von denen keiner die Stufenzahl Null hat, so ist das Produkt null, das heisst* $P_{A,B} = 0$, *wenn* P {*ein*} *reines Produkt* {*ist*} *und* A *und* B *die incidenten Faktoren sind.*

Beweis. 1. Sind A und B die einander incidenten Faktoren, also der eine dem andern untergeordnet, etwa B dem A, so ist B das gemeinschaftliche Gebiet und A das verbindende, also das Produkt $[AB]$, da die Stufe von B grösser als Null, und die von A kleiner als n ist, (nach 109) null.

85 2. Enthält aber ein Produkt P zwei einander incidente † Faktoren A und B, so kann man (nach 120) die Faktoren so ordnen, dass A und B auf einander folgen, wobei das Produkt sich selbst kongruent bleibt, also auch (nach 2) in dem einen Falle null bleibt, wenn es in dem andern null ist. Dann kann man (nach 119) diese beiden Faktoren in eine Klammer schliessen. Ihr Produkt ist null nach Beweis 1, also ein Faktor von P null, also auch P selbst null.

122. *Ein gemischtes Produkt* $[ABC]$ *dreier* {*einfacher*} *Grössen,* {*von denen die letzte* $C \gtrless 0$ *ist,*} *ist dann und nur dann null, wenn entweder* $[AB] = 0$ *ist, oder alle drei Grössen* A, B, C *von einem Gebiete von niederer als* n*-ter Stufe umfasst werden, oder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben.*

Beweis. Es seien α, β, γ die Stufenzahlen von A, B, C, also $\alpha + \beta + \gamma > n$ und $< 2n$ (nach 116). Es sei $[AB] \gtrless 0$, und sei

zuerst $\alpha + \beta > n$ etwa $= n + \delta$, so lassen sich (nach 87) A und B auf einen gemeinschaftlichen Faktor δ-ter Stufe D bringen, so dass $A = [DE]$, $B = [DF]$ sind, so ist

$$[AB] = [DEF]D, \qquad [103]$$

also, da $[AB]$ nach der Annahme $\gtrless 0$ ist, so muss auch $[DEF] \gtrless 0$ sein. Dann ist

$$[ABC] = [DEF][DC],$$

also, da $[DEF]$ eine von Null verschiedene Zahl ist, so ist $[ABC]$ dann und nur dann null, wenn $[DC]$ es ist. Die Stufe von $[DC]$ ist $= \delta + \gamma = \alpha + \beta - n + \gamma$, also $< n$, da $\alpha + \beta + \gamma < 2n$ ist. Also ist das Produkt $[DC]$, {da D und C ungleich Null sind} (nach 109) dann und nur dann null, wenn D und C ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben, das heisst (da D das gemeinsame Gebiet von A und B ist), wenn A, B und C ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben.

Es sei *zweitens* $\alpha + \beta \overline{\overline{<}} n$, so ist $[AB]$ ein progressives Produkt, also, da $[AB]$ nach der Annahme $\gtrless 0$ ist, {und auch C von Null verschieden ist,} das Produkt $[(AB)C]$ (nach 109) dann und nur dann null, wenn $[AB]$ und C, das heisst A, B und C, von einem Gebiete niederer als n-ter Stufe umfasst werden. Somit bewiesen.

123. *Die Ordnung, in welcher man mit zwei einander incidenten einfachen Grössen fortschreitend multiplicirt, ist gleichgültig für das Resultat, das heisst*

$$[ABC] = [ACB],$$

wenn B incident C.

Beweis. 1. Wenn B oder C von nullter Stufe, das heisst Zahlen sind, so findet die Gleichheit beider Seiten statt (nach 13). Wenn die Produkte reine sind, so sind beide Seiten (nach 121) null, folglich ist der Satz nur noch zu erweisen für den Fall des gemischten Produktes, in welchem B und C von höherer als nullter Stufe sind; das heisst (wenn α, β, γ die Stufenzahlen von A, B, C sind, und n die des Hauptgebietes) für den Fall, dass $\alpha + \beta + \gamma > n$ und $< 2n$ {116} und β und γ von Null verschieden sind.. 86

Wir können, da die zu erweisende Formel sich nicht ändert, wenn man B und C mit einander verwechselt, annehmen, dass $\beta \overline{\overline{<}} \gamma$ sei, das heisst, da B und C einander incident sind, dass B dem C untergeordnet sei. Ausserdem nehmen wir zunächst an, auch A sei eine einfache Grösse. Da die Summe $\alpha + \beta$ ebenso gross oder kleiner als die Summe $\alpha + \gamma$ ist, so sind nur drei Fälle möglich: entweder beide Summen sind kleiner als n, oder beide grösser als n, oder es ist $\alpha + \gamma \overline{\overline{>}} n$ und $\alpha + \beta \overline{\overline{<}} n$.

2. Sind beide Summen kleiner als n, also auch $\alpha + \gamma < n$, so werden die drei Grössen A, B, C, von denen B der Grösse C untergeordnet ist, von einem Gebiete $(\alpha + \gamma)$-ter Stufe, also von einem Gebiete von niederer als n-ter Stufe umfasst, somit sind (nach 122) sowohl $[ABC]$ als $[ACB]$ null, also

$$[ABC] = [ACB].$$

3. Sind $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma > n$, so sind $(n - \alpha) + (n - \beta)$ und $(n - \alpha) + (n - \gamma) < n$, also dann, da $n - \alpha$, $n - \beta$, $n - \gamma$ die Stufenzahlen der Ergänzungen von A, B, C sind,

$$[|A|B|C] = [|A|C|B] \qquad \text{(nach Beweis 2)},$$

also (nach 101)

$$[ABC] = [ACB].$$

4. Ist $\alpha + \gamma \overline{\gtrless} n$ und $\alpha + \beta \overline{\overline{<}} n$, ersteres etwa $= n + \delta$, wo δ auch null sein kann, so müssen (nach 87) A und C sich auf einen gemeinschaftlichen Faktor D von δ-ter Stufe bringen lassen in der Art, dass $C = [DE]$ sei, wo D und E einfache Grössen sind und D dem A untergeordnet ist. Dann ist E von $(\gamma - \delta)$-ter Stufe, also die Summe der Stufenzahlen von A und E gleich $\alpha + \gamma - \delta = n$, somit ist (nach 108)

$$[AC] = [A \,.\, DE] = [AE]D,$$

also

$$[ACB] = [AE][DB].$$

87 Hier ist das Produkt $[DB]$ ein progressives, da

$$\delta + \beta = \alpha + \beta + \gamma - n < n$$

ist, indem das Produkt ein gemischtes sein sollte. Wenn nun $[DB]$ null ist, so haben (nach 109) D und B ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein, dann haben aber auch, da D dem A untergeordnet ist, A und B dies Gebiet gemein, das Produkt $[AB]$ ist aber, da $\alpha + \beta \overline{\overline{<}} n$ ist, ein progressives, folglich dies (nach 109) null. Also dann auch $[ABC] = 0$, ebenso wie $[ACB]$, und somit beide einander gleich. Ist aber $[DB] \gtrless 0$, so ist, da D und B beide dem C untergeordnet sind, auch ihr verbindendes Gebiet $[DB]$ dem Gebiete von C untergeordnet, also C (nach 79b) in der Form $[DBF]$ darstellbar, wo F wieder eine einfache Grösse ist. Dann wird, da wir oben $C = [DE]$ setzten, $E = [BF]$ gesetzt werden können, und man erhält:

$$[ACB] = [AE][DB] = [ABF][DB].$$

Ferner:

$$[ABC] = [AB \,.\, DBF] = [ABF][DB] \qquad \text{(nach 108)},$$

weil nämlich D dem A untergeordnet ist, also $[DB]$ dem $[AB]$, und

weil $[ABF] = [AE]$, wie oben gezeigt, von nullter Stufe ist. Also erhält man $[ACB] = [ABC]$.

5. Hiermit sind, da $\beta \leqq \gamma$ angenommen war, alle Fälle erschöpft, sofern A eine einfache Grösse ist. Ist nun A eine zusammengesetzte Grösse, so ist sie immer (nach 77) aus einfachen Grössen numerisch ableitbar. Es sei $A = \Sigma \alpha_r A_r$, wo alle A_r einfache Grössen sind, so ist

$$[ABC] = \Sigma \alpha_r [A_r BC] \qquad [44]$$
$$= \Sigma \alpha_r [A_r CB] \qquad \text{[nach Beweis 1—4]}$$
$$= [ACB]. \qquad [44]$$

124. *Wenn q, r, s die Stufenzahlen dreier {von Null verschiedener} einfacher Grössen A, B, C sind und n die des Hauptgebietes, so sind die Produkte $[ABC]$ und $[ACB]$ nur in folgenden {sechs} Fällen kongruent:*

$$[ABC] \equiv [ACB],$$

a) wenn $q + r + s \leqq n$ ist, dann ist

$$[ABC] = (-1)^{rs} [ACB],$$

b) wenn $q + r + s \geqq 2n$ ist, dann ist

$$[ABC] = (-1)^{(n-r)(n-s)} [ACB],$$

c) wenn $[AB]$ und $[AC]$ null sind, dann ist

88

$$[ABC] = [ACB] = 0,$$

d) wenn $[ABC]$ ein gemischtes Produkt ist und A, B und C entweder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben oder von einem Gebiete von niederer als n-ter Stufe umfasst werden; dann ist

$$[ABC] = [ACB] = 0,$$

e) wenn {das Produkt $[ABC]$ gemischt ist und} $q + r + s = n + t$ ist, und B und C entweder ein Gebiet von t-ter Stufe gemein haben oder von einem Gebiete t-ter Stufe umfasst werden; dann ist

$$[ABC] = (-1)^{(r-t)(s-t)} [ACB],$$

f) wenn B und C einander incident sind; dann ist

$$[ABC] = [ACB].$$

Beweis. Formel a) ist in 58 bewiesen.

Ist $q + r + s \geqq 2n$, so ist $(n - q) + (n - r) + (n - s) \leqq n$, also, da $n - q$, $n - r$, $n - s$ die Stufenzahlen der Ergänzungen von A, B, C sind, so ist in diesem Falle

$$[A|B|C] = (-1)^{(n-r)(n-s)} [A|C|B]. \qquad \text{(Formel a)}$$

Also (nach 101)

$$[ABC] = (-1)^{(n-r)(n-s)}[ACB].$$

Somit ist Formel b) bewiesen.

Da in diesen beiden Fällen $q + r + s$ entweder $\overline{\lt} n$ oder $\overline{\gt} 2n$ war, so bleibt nur der Fall übrig, wo $q + r + s > n$ und $< 2n$ ist, also der Fall des gemischten Produktes.

Angenommen zuerst, $[ABC]$ sei null. Ein gemischtes Produkt $[ABC]$ {dessen dritter Faktor C von Null verschieden ist} ist (nach 122) dann und nur dann null, wenn entweder $[AB] = 0$ ist, oder alle drei Grössen A, B, C von einem Gebiete niederer als n-ter Stufe umfasst werden, oder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben. Tritt einer der beiden letzten Fälle ein, so ist sowohl $[ABC]$ als $[ACB]$ null, und also $[ABC] = [ACB] = 0$, somit Formel d) bewiesen. Tritt aber von diesen beiden Fällen keiner ein, so kann $[ABC]$ nicht anders null werden, als wenn $[AB]$ null ist; ist dies der Fall und soll dann $[ABC]$ kongruent $[ACB]$ sein, so muss auch $[ACB]$ null sein, dies kann aber, da die beiden genannten Fälle ausgeschlossen sind {und $B \gtrless 0$ ist}, nicht anders geschehen, als wenn auch $[AC]$ null ist, und es tritt also dann der Fall c) ein.

89 Es bleiben also nur noch † die Fälle des von Null verschiedenen gemischten Produktes übrig. Da $q + r + s < 2n$ und $> n$ ist, so können wir $q + r + s = n + t$ setzen, wo $t > 0$ und $< n$ ist. Nun seien hier (genau wie in 123) drei Fälle unterschieden.

Erstens der, wo die Summen $q + s$ und $q + r$ beide *kleiner* als n sind. Dann ist, da $[AB]$ und $[AC]$ dann von Null verschiedene progressive Produkte sind, $q + r$ die Stufe von $[AB]$ und $q + s$ die von $[AC]$. Dann haben $[AB]$ und C (nach 26, {87}) einen Faktor von $(q + r + s - n)$-ter, das heisst t-ter Stufe gemein. Dieser sei D, und sei $C = [DE]$, so ist die Summe der Stufenzahlen von A, B, E gleich n, und D ist dem $[AB]$ untergeordnet. Folglich ist dann (nach 108)

$$[ABC] = [AB \,.\, DE] = [ABE]\, D.$$

Also, da $[ABE]$ eine Zahl ist, so ist $[ABC] \equiv D$; somit muss, wenn $[ABC] \equiv [ACB]$ sein soll, auch $[ACB] \equiv D$ sein, das heisst, $[AC]$ und B müssen sich auf einen mit D kongruenten gemeinschaftlichen Faktor bringen lassen, also auch auf den Faktor D selbst. Folglich muss D dem B untergeordnet sein, es war aber auch dem C untergeordnet, das heisst, B und C lassen sich auf den gemeinschaftlichen Faktor t-ter Stufe D bringen, das heisst, {sie} haben ein Gebiet t-ter Stufe gemein, was die erste Bedingung der Formel e) ist.

Es sei $B = [DF]$, so ist

$$[ABC] = [AB\,.\,DE] = [ABE]D \qquad [108]$$
$$= [A(DF)E]D = [ADFE]D \qquad [119]$$
$$[ACB] = [AC\,.\,DF] = [ACF]D \qquad [108]$$
$$= [A(DE)F]D = [ADEF]D. \qquad [119]$$

Da nun $C = [DE]$ war, so ist E von $(s - t)$-ter Stufe, und da $B = [DF]$ war, so ist F von $(r - t)$-ter Stufe, somit

$$[ADFE]D = (-1)^{(r-t)(s-t)}[ADEF]D, \qquad [58]$$

also

$$[ABC] = (-1)^{(r-t)(s-t)}[ACB],$$

was die Formel e) ist.

Sind *hingegen* die beiden Summen $q + r$ und $q + s$ *grösser* als n, so sind die Summen $(n - q) + (n - r)$ und $(n - q) + (n - s)$ kleiner als n, und $(n - q) + (n - r) + (n - s) = n + (n - t)$. Folglich sind in diesem Falle (nach Fall e) die Produkte $[|A|B|C]$ und $[|A|C|B]$ nur dann einander kongruent, † wenn sich $|B$ und $|C$ auf 90 einen gemeinschaftlichen Faktor von $(n - t)$-ter Stufe bringen lassen. Dieser sei $|D$ und sei $|B = [|D|F]$, $|C = [|D|E]$, so ist (nach e)

$$[|A|B|C] = (-1)^{(t-r)(t-s)}[|A|C|B].$$

Aber (nach 98 {und 101}) ist dann

$$B = [DF], \quad C = [DE]$$
$$[ABC] = (-1)^{(t-r)(t-s)}[ACB] = (-1)^{(r-t)(s-t)}[ACB],$$

das heisst, es tritt die zweite Bedingung der Formel e) und diese selbst ein, indem nämlich das Produkt $B = [DF]$, da B von geringerer Stufe als D ist, als regressives erscheint, und ebenso $[DE]$, und also B und C beide dem D untergeordnet sind, also von dem Gebiete D umfasst werden.

Es bleibt somit nur noch der {*dritte*} Fall übrig, wo von den Summen $q + r$ und $q + s$ die eine, etwa die erstere, ebenso gross oder kleiner, die andere ebenso gross oder grösser als n ist. Dann lassen sich (nach 26 {und 87}) $[AB]$ und C auf einen gemeinschaftlichen Faktor $(q + r + s - n)$-ter, das heisst t-ter Stufe bringen. Dieser sei D, und sei $C = [DE]$*), so wird

$$[ABC] = [AB\,.\,DE] = [ABE]D. \qquad [108]$$

Ferner sei $q + s = n + v$, so haben A und C einen Faktor von

---

*) Sollte $q + r = n$ sein, so würde E von nullter Stufe sein, was in dem obigen Beweise mit eingeschlossen ist; dasselbe gilt im Folgenden von F.

v-ter Stufe gemein, dieser sei F, und sei $C = [FG]$, so ist

$$[AC] = [A\,.\,FG] = [AG]F. \qquad [108]$$

Also

$$[ACB] = [AG][FB].$$

Soll also $[ABC] \equiv [ACB]$ sein, so muss, da $[ABE]$ und $[AG]$ von Null verschiedene Zahlen sind, $D \equiv [FB]$ sein, das heisst, B ist dem D untergeordnet, aber auch D dem C, also B dem C untergeordnet, das heisst, B und C sind einander incident. Dies ist die Bedingung der Formel f) und (nach 123) ist dann

$$[ABC] = [ACB].$$

Somit der Satz vollständig bewiesen.

125. *In denselben und in keinen andern Fällen* (*wie in* 124) *ist*

$$[BAC] \equiv [B\,.\,AC].$$

91 Beweis. Es ist in den in 124 angenommenen Fällen

$$[BAC] \equiv [ABC] \qquad [120]$$
$$\equiv [ACB] \qquad [124]$$
$$\equiv [B\,.\,AC], \qquad [120]$$

und umgekehrt folgt aus der Kongruenz von 125 wieder die von 124.

Anm. Es ergiebt sich ins Besondere für Fall c) und d)

$$[BAC] = [B\,.\,AC] = 0,$$

für Fall a) und b) {vgl. 119}

$$[BAC] = [B\,.\,AC].$$

Dagegen spaltet sich der Fall e) in zwei Fälle; nämlich, wenn die Summen $q+r$ und $q+s$ kleiner als n sind, so ist

$$[BAC] = (-1)^{qt}[B\,.\,AC],$$

und wenn jene Summen grösser als n sind,

$$[BAC] = (-1)^{(n-q)(n-t)}[B\,.\,AC].$$

Der Fall f) spaltet sich in zwei Fälle, nämlich, wenn $q+r$ kleiner, und $q+s$ grösser als n ist, so wird

$$[BAC] = (-1)^{r(n-s)}[B\,.\,AC],$$

wenn umgekehrt $q+r$ grösser, und $q+s$ kleiner als n ist,

$$[BAC] = (-1)^{(n-r)s}[B\,.\,AC].$$

Wenn eine der Summen gleich n ist, so gilt sowohl diejenige Formel, bei welcher die Summe grösser, als diejenige, wo sie kleiner als n vorausgesetzt war, indem dann beide Formeln identisch werden. Auch ist zu bemerken, dass wenn in f), das heisst, in dem Falle der Incidenz von B und C, die Bedingung eintritt, dass beide Summen grösser als n, oder beide kleiner als n sind, sowohl $[BAC]$, als $[B\,.\,AC]$ null werden, und also zugleich der Fall c) oder d) statt hat.

126. *Ein Produkt nullter Stufe bleibt sich selbst kongruent, wenn man die Ordnung aller seiner Faktoren umkehrt, oder die letzten Faktoren in beliebiger Anzahl mit umgekehrter Ordnung zu einem Produkte zusammenfasst, das heisst*

$$[A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n] \equiv [A_n A_{n-1} \ldots A_2 A_1]$$
$$\equiv [A_1 A_2 \ldots A_{n-r-1} . A_n A_{n-1} \ldots A_{n-r}].$$

Beweis. Es sei zuerst

$$[A_1 A_2 \ldots A_{n-2}] = P,$$

so ist

$$[A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n] = [P A_{n-1} A_n].$$

Da das Produkt von nullter Stufe sein soll, so muss die Summe der Stufenzahlen von P, A_{n-1}, A_n (nach 96) durch n theilbar, also, da die einzelnen Stufenzahlen > 0 und $< n$ sind, entweder gleich n oder gleich $2n$ sein; im ersteren Falle ist das Produkt der drei Grössen P, A_{n-1}, A_n ein rein progressives, † im letzteren ein rein regressives, 92 in beiden also ein reines, somit (nach 119, 120)

$$[P A_{n-1} A_n] \equiv [P . A_n A_{n-1}],$$

oder

$$[A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n] \equiv [A_1 \ldots A_{n-2} . A_n A_{n-1}].$$

Betrachten wir diesen Ausdruck als ein Produkt der drei Grössen $[A_1 \ldots A_{n-3}]$, A_{n-2} und $[A_n A_{n-1}]$, so erhalten wir auf gleiche Weise den zuletzt gewonnenen Ausdruck

$$\equiv [A_1 \ldots A_{n-3} . A_n A_{n-1} A_{n-2}].$$

Wendet man dies Verfahren r-mal an, so erhält man

$$[A_1 \ldots A_n] \equiv [A_1 \ldots A_{n-r-1} . A_n A_{n-1} \ldots A_{n-r}],$$

das heisst, das Produkt bleibt sich selbst kongruent, wenn man die letzten Faktoren in beliebiger Anzahl (r) mit umgekehrter Ordnung zu einem Produkte zusammenfasst. Hiernach wird nun auch

$$[A_1 A_2 \ldots A_n] \equiv [A_1 . A_n A_{n-1} \ldots A_2],$$

somit (nach 58)

$$\equiv [A_n A_{n-1} \ldots A_2 A_1],$$

also {ist} auch der erste Theil des Satzes bewiesen.

§ 7. Zurückleitung und Ersetzung.

127. Erklärung. Wenn n die Stufenzahl des Hauptgebietes, $A_1, \ldots A_\nu$ die multiplikativen Kombinationen aus den n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe

$a_1, \ldots a_n$ zu irgend einer Klasse und $A_1, \ldots A_u$ die multiplikativen Kombinationen aus m derselben, etwa aus $a_1, \ldots a_m$ zur gleichen Klasse sind, und

$$C = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_v A_v,$$
$$C_1 = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_u A_u$$

ist, so nenne ich C_1 die Zurückleitung von C auf das Gebiet $[a_1 \ldots a_m]$, unter Ausschluss des Gebietes $[a_{m+1} \ldots a_n]$, und zwar nenne ich die Zurückleitung eine progressive, wenn $a_1, \ldots a_n$ Grössen erster Stufe, eine regressive, wenn $a_1, \ldots a_n$ Grössen $(n-1)$-ter Stufe sind. Die Zurückleitungen mehrerer Grössen heissen in demselben Sinne genommen, wenn sie auf dasselbe Gebiet und unter Ausschluss desselben Gebietes zurückgeleitet sind (vgl. 33).

Anm. Ist zum Beispiel das Hauptgebiet von vierter Stufe (wie zum Beispiel der Raum), und sind a, b, c, d vier in keiner Zahlbeziehung zu einander 98 stehende Grössen erster Stufe (zum Beispiel vier nicht in ein und derselben Ebene liegende Punkte), so ist $C_1 = [bc] + [ca] + [ab]$ (im Raume eine Linie) die (progressive) Zurückleitung von

$$C = [bc] + [ca] + [ab] + [ad] + [bd] + [cd]$$

auf das Gebiet $[abc]$ (also auf die Ebene abc), unter Ausschluss des Gebietes d.

Bezeichnen wir ferner $[bcd]$ mit a', $[cad]$ mit b', $[abd]$ mit c' und $[acb]$ mit d', so sind a', b', c', d' Grössen $(n-1)$-ter Stufe, da $n = 4$ ist und setzen wir noch $[abcd] = 1$, so ist

$$[b'c'] = [ad], \quad [c'a'] = [bd], \quad [a'b'] = [cd],$$
$$[a'd'] = [bc], \quad [b'd'] = [ca], \quad [c'd'] = [ab],$$

und es wird

$$C = [a'd'] + [b'd'] + [c'd'] + [b'c'] + [c'a'] + [a'b'].$$

Dann wird, wenn

$$C' = [b'c'] + [c'a'] + [a'b']$$

ist, C' die (regressive) Zurückleitung von C auf das Gebiet $[a'b'c']$, unter Ausschluss des Gebietes d' sein, das heisst, da $[a'b'c'] = [cd \, . \, abd] = d$, und $d' = [abc]$ ist, C' ist die Zurückleitung von C auf das Gebiet d, unter Ausschluss des Gebietes $[abc]$.

So erscheint also in der Geometrie die Zurückleitung einer Linie auf eine Ebene als progressive Zurückleitung, und die einer Linie auf einen Punkt als regressive Zurückleitung. Die Zurückleitung selbst ist in der Geometrie gleichbedeutend mit der Projektion im weitesten und prägnantesten Sinne des Wortes (siehe unten {Nr. 129, 164—166, 200}).

Wir haben oben (33) die in der Definition bestimmte Grösse C_1 die Zurückleitung der Grösse C auf das Gebiet der Grössen $A_1, A_2, \ldots A_u$ genannt. Dieser Benennungsweise haben wir hier die für die Anwendung bequemere zur Seite gesetzt.

128. *Je nachdem die Stufenzahl des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, grösser oder kleiner als die Stufenzahl der zurückgeleiteten Grösse ist, erscheint die Zurückleitung als progressive oder regressive. Wenn die Stufenzahl jenes Gebietes gleich der Stufenzahl der zurück-*

geleiteten Grösse ist, so kann die Zurückleitung sowohl eine progressive als eine regressive sein.

Beweis. Es seien $a_1, \ldots a_n$ Grössen *erster Stufe*, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und seien $A_1, \ldots A_v$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1, \ldots a_n$ zur p-ten Klasse, und $A_1, \ldots A_u$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1, \ldots a_m$ zur p-ten Klasse und

$$C = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_v A_v, \quad C_1 = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_u A_u,$$

also (nach 127) C_1 die progressive Zurückleitung der Grösse C auf das Gebiet $[a_1 \ldots a_m]$ unter Ausschluss des Gebietes † $[a_{m+1} \ldots a_n]$, so 94 würde es, wenn $m < p$ wäre, gar keine Kombinationen aus $a_1, \ldots a_m$ zur p-ten Klasse geben, also auch keine progressive Zurückleitung. Es muss also für die progressive Zurückleitung $m \geqq p$ sein, da aber m die Stufenzahl des Gebietes $[a_1 \ldots a_m]$ und p die der multiplikativen Kombinationen $A_1, \ldots A_v$, also auch die von C ist, so muss die Stufenzahl des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, ebenso gross oder grösser sein als die der zurückgeleiteten Grösse.

Macht man im Uebrigen dieselben Annahmen wie vorher, mit dem einzigen Unterschiede, dass $a_1, \ldots a_n$ Grössen $(n-1)$-*ter Stufe* sind (in dem Hauptgebiete n-ter Stufe), so ist die Zurückleitung eine regressive; und auch hier muss, aus gleichem Grunde wie vorher, $m \geqq p$ sein. Fasst man nun aber die Grössen $(n-1)$-ter Stufe $a_1, \ldots a_m$ als Ergänzungen von Grössen erster Stufe auf, so wird (nach 98) ihr Produkt $[a_1 \ldots a_m]$ die Ergänzung eines Produktes von m Grössen erster Stufe, seine Stufenzahl also (nach 90, Zusatz) gleich $n - m$; ebenso wird die von C gleich $n - p$. Da aber $n - m \leqq n - p$ ist, so ist die Stufenzahl des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, ebenso gross oder kleiner als die der zurückgeleiteten Grösse.

Ist also die Stufenzahl jenes Gebietes grösser oder kleiner als die Stufenzahl der zurückgeleiteten Grösse, so wird die Zurückleitung im ersteren Falle eine progressive, im letzteren eine regressive sein. Sind hingegen die genannten Stufenzahlen einander gleich, so wird die Zurückleitung sowohl eine progressive als auch eine regressive sein können.

129. *Die Zurückleitung A' einer Grösse A auf ein Gebiet B, unter Ausschluss des Gebietes C, ist*

$$A' = \frac{[B.AC]}{[BC]},$$

also

$$A' = [B.AC],$$

wenn $[BC] = 1$ ist.

Beweis. Es seien $a_1, \ldots a_n$ n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe, und $A_1, \ldots A_\nu$ die multiplikativen Kombinationen {zu einer gewissen Klasse} aus $a_1, \ldots a_n$, und $A_1, \ldots A_u$ die aus $a_1, \ldots a_m$ und $A = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_\nu A_\nu$, also $A' = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_u A_u$, und sei

$$[a_1 \ldots a_m] = B, \quad [a_{m+1} \ldots a_n] = C,$$

so ist

$$[AC] = [(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_u A_u + \alpha_{u+1} A_{u+1} + \cdots + \alpha_\nu A_\nu) C].$$

Aber, da $A_1, \ldots A_u$ die Kombinationen aus $a_1, \ldots a_m$ sind und $A_{u+1}, \ldots A_\nu$ diejenigen Kombinationen aus $a_1, \ldots a_n$, welche nicht zugleich Kombinationen aus $a_1, \ldots a_m$ sind, so muss † jede der Grössen $A_{u+1}, \ldots A_\nu$ mindestens einen der Faktoren $a_{m+1}, \ldots a_n$ enthalten, also mindestens einen Faktor mit $C = [a_{m+1} \ldots a_n]$ gemein haben. Die Produkte $[A_{u+1} C], \ldots [A_\nu C]$ sind aber in Bezug auf die Faktoren $a_1, \ldots a_n$ reine (nach 114 {127, 128 und 119b}), somit, da sie gleiche Faktoren enthalten, null {nach 121}, also wird

$$[AC] = [(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_u A_u) C] = \alpha_1 [A_1 C] + \cdots + \alpha_u [A_u C].$$

Folglich ist

$$[B \,.\, AC] = \alpha_1 [B \,.\, A_1 C] + \cdots + \alpha_u [B \,.\, A_u C].$$

Da nun jede der Grössen $A_1, \ldots A_u$ aus Faktoren besteht, die in B enthalten sind, so ist jede derselben mit B incident, somit, da auch die Stufenzahlen von B und C zusammen n betragen, so ist (nach 108)

$$[B \,.\, A_1 C] = [BC] A_1, \ldots, \quad [B \,.\, A_u C] = [BC] A_u,$$

also

$$[B \,.\, AC] = [BC](\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_u A_u) = [BC] A'.$$

Also, da $[BC]$ eine Zahl ist,

$$A' = \frac{[B \,.\, AC]}{[BC]}.$$

130. *Jede Gleichung, deren Glieder Vielfache je einer Grösse m-ter Stufe sind, bleibt bestehen, wenn man statt aller dieser Grössen ihre in demselben Sinne genommenen Zurückleitungen setzt; oder, wenn*

$$P = \alpha A + \beta B + \cdots$$

ist, und $P', A', B', \ldots$ die in gleichem Sinne genommenen Zurückleitungen von $P, A, B, \ldots$, und $\alpha, \beta, \ldots$ Zahlen sind, so ist auch

$$P' = \alpha A' + \beta B' + \cdots.$$

Beweis. Es sei Q das Gebiet, auf welches zurückgeleitet wird, und R das ausgeschlossene Gebiet und $[QR] = 1$, so erhält man aus der Gleichung

$$P = \alpha A + \beta B + \cdots$$

durch Multiplikation

$$[PR] = \alpha[AR] + \beta[BR] + \cdots$$

und

$$[Q \,.\, PR] = \alpha[Q \,.\, AR] + \beta[Q \,.\, BR] + \cdots,$$

das heisst (nach 129)

$$P' = \alpha A' + \beta B' + \cdots.$$

131. *Die progressive Zurückleitung eines rein progressiven und die regressive eines rein regressiven Produktes ist gleich dem Produkte der in demselben Sinne genommenen Zurückleitungen der Faktoren jenes Produktes, das heisst, wenn das reine Produkt* P 96

$$P = [AB \ldots E]$$

ist, und P', A', B', $\ldots$ E' *die in gleichem Sinne genommenen Zurückleitungen von* P, A, B, $\ldots$ E *sind (und zwar progressive oder regressive, je nachdem das Produkt progressiv oder regressiv ist), so ist auch*

$$P' = [A'B' \ldots E'].$$

Beweis. 1. Es sei

$$A = [a_1 \ldots a_q], \quad B = [a_{q+1} \ldots a_r], \ldots, \quad E = [a_{t+1} \ldots a_v],$$

wo $a_1, \ldots a_v$ Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe sind, je nachdem das Produkt $[AB \ldots E]$ ein progressives oder regressives war. Dann ist

$$P = [a_1 \ldots a_v]$$

{nach 119b} ein reines Produkt von Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe. Ferner sei $Q = [u_1 \ldots u_m]$ das Gebiet, auf welches zurückgeleitet wird, $R = [u_{m+1} \ldots u_n]$ das ausgeschlossene Gebiet und $[QR] = 1$, wobei $u_1, \ldots u_n$ Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe sind, je nachdem $a_1, \ldots a_v$ es sind. Dann ist (nach 129)

$$\begin{aligned} P' &= [Q \,.\, PR] \\ &= [u_1 \ldots u_m(a_1 \ldots a_v \,.\, u_{m+1} \ldots u_n)]. \end{aligned}$$

Wenn nun das ursprüngliche Produkt $[AB \ldots E]$ ein *progressives* ist, so soll auch die Zurückleitung eine progressive, das heisst (nach 128), die Stufenzahl von Q ebenso gross oder grösser als die von P sein, das heisst $m \geqq v$, folglich $v + n - m \leqq n$, das heisst, das Produkt $[a_1 \ldots a_v \,.\, u_{m+1} \ldots u_n]$ {ist} ein rein progressives, also auch

$$= [a_1 \ldots a_v u_{m+1} \ldots u_n],$$

und da alle Faktoren von erster Stufe sind, ein kombinatorisches (nach 94, 78). Nun sei

$$a_r = \alpha_1^{(r)} u_1 + \cdots + \alpha_n^{(r)} u_n,$$

so können wir (nach 67) in dem Produkte $[a_1 \ldots a_v u_{m+1} \ldots u_n]$ statt $a_r = \alpha_1^{(r)} u_1 + \cdots + \alpha_n^{(r)} u_n$ setzen: $\alpha_1^{(r)} u_1 + \cdots + \alpha_m^{(r)} u_m$, weil $u_{m+1}, \ldots u_n$ als Faktoren in jenem Produkte vorkommen; aber $\alpha_1^{(r)} u_1 + \cdots + \alpha_m^{(r)} u_m$ 97 ist die Zurückleitung von a_r auf das Gebiet † $Q = [u_1 \ldots u_m]$, mit Ausschluss des Gebietes $R = [u_{m+1} \ldots u_n]$. Somit wird, wenn wir diese Zurückleitung mit a'_r bezeichnen,

$$P' = [u_1 \ldots u_m (a'_1 \ldots a'_v . u_{m+1} \ldots u_n)].$$

Hier ist $[a'_1 \ldots a'_v]$ dem $[u_1 \ldots u_m]$ untergeordnet, also (nach 108)

$$P' = [u_1 \ldots u_n][a'_1 \ldots a'_v] = [a'_1 \ldots a'_v].$$

Aus gleichem Grunde ist

$$A' = [a'_1 \ldots a'_q], \quad B' = [a'_{q+1} \ldots a'_r], \ldots, \quad E' = [a'_{t+1} \ldots a'_v].$$

Somit {wird}

$$P' = [A'B' \ldots E'].$$

2. Wenn das ursprüngliche Produkt $[AB \ldots E]$ ein *regressives* ist, und also auch die Zurückleitung von P auf Q, unter Ausschluss von R, eine regressive, das heisst {nach 128}, die Stufenzahl von P grösser oder ebenso gross als die von Q ist, so {ersetze man zunächst sämmtliche Grössen durch ihre Ergänzungen. Dann} kehrt sich das regressive Produkt und ebenso die regressive Zurückleitung (nach 115 und 90, Zusatz) in das progressive Produkt und in die progressive Zurückleitung um. Sind daher P_1, Q_1, R_1, A_1, $B_1, \ldots E_1$ die Ergänzungen von P, Q, R, A, $B, \ldots E$, und P'_1, A'_1, $B'_1, \ldots E'_1$ die Zurückleitungen von P_1, A_1, $B_1, \ldots E_1$ auf Q_1, unter Ausschluss von R_1, so ist (nach 101)

$$P_1 = [A_1 B_1 \ldots E_1],$$

und nach Beweis 1

$$(*) \qquad P'_1 = [A'_1 B'_1 \ldots E'_1].$$

Ferner ist (nach 129)

$$P' = [Q . PR], \quad P'_1 = [Q_1 . P_1 R_1] = |[Q . PR], \quad \text{[nach 97]}$$

also $P'_1 = |P'$ und ebenso

$$A'_1 = |A', \quad B'_1 = |B', \ldots,$$

also (nach *)

$$P' = [|A' |B' \ldots |E']$$

$$P' = [A'B' \ldots E']. \qquad \text{[nach 101]}$$

3. Sind nun endlich A, $B, \ldots E$ zusammengesetzte Grössen,

$$A = \Sigma \alpha_r A_r, \quad B = \Sigma \beta_s B_s, \ldots, \quad E = \Sigma \varepsilon_v E_v,$$

wo A_r, $B_s, \ldots E_v$ einfache Grössen sind, und sind A'_r, $B'_s, \ldots E'_v$ die Zurückleitungen von A_r, $B_s, \ldots E_v$, so ist

$$P = [\Sigma\alpha_r A_r . \Sigma\beta_s B_s \ldots \Sigma\varepsilon_v E_v] = \Sigma\alpha_r\beta_s \ldots \varepsilon_v [A_r B_s \ldots E_v] \quad \{45\}$$
$$= \Sigma\alpha_r\beta_s \ldots \varepsilon_v P_{r,s,\ldots v},$$

wenn

$$P_{r,s,\ldots v} = [A_r B_s \ldots E_v]$$

ist. Also (nach 130)

$$P' = \Sigma\alpha_r\beta_s \ldots \varepsilon_v P'_{r,s,\ldots v} = \Sigma\alpha_r\beta_s \ldots \varepsilon_v [A'_r B'_s \ldots E'_v]$$

nach Beweis 1 und 2; und dies 98

$$= [\Sigma\alpha_r A'_r . \Sigma\beta_s B'_s \ldots \Sigma\varepsilon_v E'_v] \quad \text{[nach 45]}$$
$$= [A' B' \ldots E']. \quad [130]$$

133*). *Eine Gleichung, deren Glieder Grössen m-ter Stufe sind, wird, wenn n die Stufe des Hauptgebietes ist, durch so viel Zahlgleichungen ersetzt, als es Kombinationen ohne Wiederholung aus n Elementen zur m-ten Klasse giebt; und zwar erhält man einen ersetzenden Verein von Gleichungen, indem man die gegebene Gleichung nach und nach mit den multiplikativen Kombinationen zur $(n-m)$-ten Klasse aus einer beliebigen Schaar von n Grössen erster Stufe, deren Produkt 1 ist, multiplicirt.*

Beweis. Es sei

(a) $$P = A + B + \cdots$$

die gegebene Gleichung, in welcher $P, A, B, \ldots$ Grössen m-ter Stufe sind, es seien ferner $e_1, \ldots e_n$ Grössen erster Stufe, deren Produkt $[e_1 \ldots e_n] = 1$ ist, und seien $E_1, E_2, \ldots E_v$ die multiplikativen Kombinationen zur m-ten Klasse aus $e_1, \ldots e_n$, und $F_1, F_2, \ldots F_v$ die ergänzenden Kombinationen, das heisst, die Kombinationen aus denselben Elementen zur $(n-m)$-ten Klasse und zwar so geordnet, dass

$$[E_1 F_1] = [E_2 F_2] = \cdots = [E_v F_v] = 1$$

sei, so ist zu zeigen, dass die obige Gleichung ersetzt wird durch den Verein von Gleichungen, der aus

(b) $$[P F_r] = [A F_r] + [B F_r] + \cdots$$

dadurch hervorgeht, dass man statt r nach und nach setzt $1, 2, \ldots v$. 99

Es sind (nach 77) $P, A, B, \ldots$ numerisch ableitbar aus $E_1, \ldots E_v$. Nun sei

$$P = \pi_1 E_1 + \cdots + \pi_v E_v, \quad A = \alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_v E_v, \quad B = \beta_1 E_1 + \cdots + \beta_v E_v,$$

und so weiter, so ist

$$[P F_r] = [\Sigma\pi_s E_s . F_r] = \Sigma\pi_s [E_s F_r].$$

Aber, da E_s und F_r, wenn $s \gtrless r$ ist, nothwendig gleiche Elemente

*) Die Nr. 132 der Originalausgabe steht jetzt auf S. 85 f. als Nr. 116 b.

$(e_1, \ldots e_n)$ als Faktoren enthalten, so ist {nach 60} für diesen Fall $[E_s F_r] = 0$, also

$$[PF_r] = \pi_r[E_r F_r] = \pi_r.$$

Aus gleichem Grunde ist

$$[AF_r] = \alpha_r, \quad [BF_r] = \beta_r, \ldots.$$

Gilt nun die Gleichung (a), so gilt auch die aus ihr durch Multiplikation hervorgegangene Gleichungsgruppe (b). Gilt umgekehrt die letztere, so hat man für jedes r von $1, \ldots v$, indem man für $[PF_r]$, $[AF_r]$, $[BF_r]$, ... die gefundenen Werthe setzt,

$$\pi_r = \alpha_r + \beta_r + \cdots,$$

also auch

$$\pi_r E_r = \alpha_r E_r + \beta_r E_r + \cdots$$

für jedes r von 1 bis v. Addirt man diese sämmtlichen Gleichungen, so erhält man

$$\Sigma \pi_r E_r = \Sigma \alpha_r E_r + \Sigma \beta_r E_r + \cdots,$$

das heisst

$$P = A + B + \cdots.$$

Somit ersetzen sich die Gleichung (a) und der Gleichungsverein (b) gegenseitig.

Zusatz. Ins Besondere wird die Gleichung

$$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots$$

ersetzt durch den Gleichungsverein

$$[AF_r] = \alpha_r,$$

das heisst durch die Gleichungen

$$[AF_1] = \alpha_1, \quad [AF_2] = \alpha_2, \cdots.$$

§ 8. Elimination der Unbekannten aus algebraischen Gleichungen durch kombinatorische Multiplikation.

134. Aufgabe. *Aus n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten diese zu finden.*

100 Auflösung 1. Die n Gleichungen seien

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \alpha_1^{(1)} x_1 + \alpha_2^{(1)} x_2 + \cdots + \alpha_n^{(1)} x_n = \beta^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} x_1 + \alpha_2^{(2)} x_2 + \cdots + \alpha_n^{(2)} x_n = \beta^{(2)} \\ \quad \cdot \qquad\quad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \\ \alpha_1^{(n)} x_1 + \alpha_2^{(n)} x_2 + \cdots + \alpha_n^{(n)} x_n = \beta^{(n)}. \end{cases}$$

Man multiplicire diese Gleichungen beziehlich mit n extensiven

Grössen $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots e^{(n)}$, deren kombinatorisches Produkt Eins ist, und addire sie, so erhält man, indem man

(b) $$\begin{cases} \alpha_1^{(1)} e^{(1)} + \alpha_1^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \alpha_1^{(n)} e^{(n)} = a_1 \\ \alpha_2^{(1)} e^{(1)} + \alpha_2^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \alpha_2^{(n)} e^{(n)} = a_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_n^{(1)} e^{(1)} + \alpha_n^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \alpha_n^{(n)} e^{(n)} = a_n \\ \beta^{(1)} e^{(1)} + \beta^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \beta^{(n)} e^{(n)} = b \end{cases}$$

setzt, die Gleichung

(c) $$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b,$$

eine Gleichung, welche {nach 29} die gegebenen Gleichungen (a) ersetzt. Um aus ihr x_1 zu finden, fügt man beiden Seiten der Gleichung die Faktoren $a_2, a_3, \ldots a_n$ hinzu, so erhält man, da

$$[a_2 a_2 a_3 \ldots a_n], \quad [a_3 a_2 a_3 \ldots a_n], \ldots [a_n a_2 a_3 \ldots a_n]$$

(nach 60) null sind,

(d) $$x_1 [a_1 a_2 \ldots a_n] = [b a_2 a_3 \ldots a_n].$$

Und ebenso

$$x_2 [a_1 a_2 \ldots a_n] = [a_1 b a_3 \ldots a_n], \ldots.$$

Angenommen nun *zuerst*, das Produkt $[a_1 a_2 \ldots a_n]$, {das als Grösse n-ter Stufe eine Zahl ist,} sei ungleich Null, so erhält man

(e) $$x_1 = \frac{[b\ a_2 a_3 \ldots a_n]}{[a_1 a_2 a_3 \ldots a_n]},$$

und ebenso

(e) $$\begin{cases} x_2 = \dfrac{[a_1 b\ a_3 \ldots a_n]}{[a_1 a_2 a_3 \ldots a_n]}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \cdot \\ x_n = \dfrac{[a_1 a_2 \ldots a_{n-1} b\ ]}{[a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n]}. \end{cases}$$

Es ist für diesen Fall noch zu zeigen, dass diese Werthe der Unbekannten in der That der Gleichung (c) genügen.

Da das Produkt $[a_1 a_2 \ldots a_n]$ nach der für diesen Fall gemachten Annahme ungleich Null ist, so stehen $a_1, \ldots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander. Da nun $a_1, \ldots a_n$ aus $e_1, \ldots e_n$ numerisch abgeleitet sind und in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so muss (nach 21) jede aus $e_1, \ldots e_n$ numerisch ableitbare † Grösse, also namentlich b, 101 auch aus $a_1, \ldots a_n$ numerisch ableitbar sein; es sei

$$b = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_n a_n.$$

Substituirt man diesen Werth in (e), so wird

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \ \ldots, \quad x_n = y_n,$$

also

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_n a_n,$$

das heisst $= b$. Also wird der Gleichung (c) durch die Werthe (e) genügt, somit auch den ursprünglichen Gleichungen.

Angenommen *zweitens*, das kombinatorische Produkt $[a_1 a_2 \ldots a_n]$ sei gleich Null, so stehen $a_1, \ldots a_n$ in einer Zahlbeziehung zu einander, dann muss es unter ihnen (nach 17) solche geben, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und aus denen die übrigen numerisch ableitbar sind; es seien dies $a_1, \ldots a_r$ und seien $a_{r+1}, \ldots a_n$ aus ihnen numerisch ableitbar. Dann muss also vermöge der Gleichung (c) auch b aus diesen Grössen $a_1, \ldots a_r$ numerisch ableitbar sein. Tritt also der Fall ein, dass, vermöge der Natur der gegebenen Gleichungen, b nicht aus $a_1, \ldots a_r$ numerisch ableitbar ist, während es doch $a_{r+1}, \ldots a_n$ sind, so enthalten jene Gleichungen einen Widerspruch. Wird hingegen diese Bedingung erfüllt, so sei die Gleichung (c) in der Form geschrieben:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_r a_r = c,$$

wo

$$c = b - x_{r+1} a_{r+1} - x_{r+2} a_{r+2} - \cdots - x_n a_n$$

ist, und man erhält

$$\text{(f)} \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{[c\, a_2 a_3 \ldots a_r]}{[a_1 a_2 a_3 \ldots a_r]}, \\ x_2 &= \frac{[a_1\, c\, a_3 \ldots a_r]}{[a_1 a_2 a_3 \ldots a_r]} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdots \cdot \\ x_r &= \frac{[a_1 a_2 \ldots a_{r-1} c]}{[a_1 a_2 \ldots a_{r-1} a_r]}, \end{aligned} \right.$$

während x_{r+1} bis x_n ganz willkürlich sind.

Anm. Setzt man für die Grössen $a_1, \ldots a_n$ und b in der Gleichung (e) ihre Werthe aus (b) ein, so erhält man, vermöge 63, die bekannten Ausdrücke

$$x_1 = \frac{\Sigma \mp \beta_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \alpha_3^{(3)} \ldots \alpha_n^{(n)}}{\Sigma \mp \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \alpha_3^{(3)} \ldots \alpha_n^{(n)}}, \ \ldots.$$

Ich füge hier noch eine zweite Auflösungsmethode bei, welche zwar auf den ersten Anblick nicht so einfach erscheint, aber dennoch ihre grossen Vorzüge hat, und deren eigentliches Wesen späterhin in ein noch helleres Licht treten wird {vgl. Nr. 500—527}.

Auflösung 2. Man bringe die sämmtlichen Gleichungen auf die Form, dass ihre rechte Seite null ist. Die Gleichungen seien

102

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)}x_1 + \alpha_2^{(1)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(1)}x_n = 0 \\ \alpha_0^{(2)} + \alpha_1^{(2)}x_1 + \alpha_2^{(2)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(2)}x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)}x_1 + \alpha_2^{(n)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(n)}x_n = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen sind also dieselben, wie in der vorigen Auflösung, nur dass $\alpha_0^{(r)} = -\beta_0^{(r)}$ ist. Der Symmetrie wegen fügen wir noch dem ersten Gliede jeder Gleichung die Unbekannte x_0 als Faktor bei, die wir dann schliesslich gleich 1 setzen.

Nun nehme man ein System von $(n+1)$ Einheiten $e_0, e_1, \ldots e_n$ an, deren Produkt Eins ist. Dann ist (nach 91)

$$(\beta)\quad [e_0|e_0] = [e_1|e_1] = [e_2|e_2] = \cdots = [e_n|e_n] = [e_0 e_1 e_2 \ldots e_n] = 1.$$

Ferner ist, da $|e_s$ (nach 89) alle übrigen Einheiten ausser e_s als Faktoren enthält,

$$(\beta)\quad [e_r|e_s] = 0, \text{ wenn } r \gtrless s \text{ ist.} \qquad \text{[nach 60]}$$

Wenn nun

$$(\gamma)\quad \begin{cases} x_0|e_0 + x_1|e_1 + \cdots + x_n|e_n = X \\ \alpha_0^{(1)}e_0 + \alpha_1^{(1)}e_1 + \cdots + \alpha_n^{(1)}e_n = a^{(1)} \\ \alpha_0^{(2)}e_0 + \alpha_1^{(2)}e_1 + \cdots + \alpha_n^{(2)}e_n = a^{(2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_0^{(n)}e_0 + \alpha_1^{(n)}e_1 + \cdots + \alpha_n^{(n)}e_n = a^{(n)} \end{cases}$$

gesetzt wird, so ergiebt sich leicht, dass die gegebenen Gleichungen (α) identisch sind mit den Gleichungen

$$(\delta)\quad [a^{(1)}X] = 0,\ [a^{(2)}X] = 0, \ldots,\ [a^{(n)}X] = 0.$$

In der That, setzt man zum Beispiel in der ersten dieser Gleichungen statt $a^{(1)}$ und X ihre Werthe aus (γ), so wird dieselbe vermöge des Gleichungssystems (β) identisch mit der ersten der Gleichungen in (α), und so bei den übrigen.

Angenommen nun *zuerst*, $a^{(1)}, \ldots a^{(n)}$ stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander.

Da X eine Grösse n-ter Stufe ist und sie mit jeder der n Grössen erster Stufe $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(n)}$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, zu einem kombinatorischen Produkte verbunden, Null giebt, so muss X (nach 84) mit dem kombinatorischen Produkte jener Grössen in † einer Zahlbeziehung stehen, also ist, wenn λ eine noch unbestimmte Zahl ist, 103

$$(\varepsilon)\quad X = \lambda A, \text{ wo } A = [a^{(1)}a^{(2)} \ldots a^{(n)}]$$

ist; und da aus dieser Gleichung wieder umgekehrt die Gleichungen (δ) folgen, so ersetzt sie die Gleichungen (δ), also auch die ursprünglichen (α). Fügt man nun zu der gewonnenen Gleichung den Faktor e_0 hinzu, so erhält man, da

$$[e_0 X] = [e_0(x_0 | e_0 + x_1 | e_1 + \cdots)] = x_0 [e_0 | e_0] + x_1 [e_0 | e_1] + \cdots,$$

das heisst, vermöge (β), $= x_0$ ist, die Gleichung

$$(\zeta) \qquad x_0 = \lambda [e_0 A],$$

und ebenso

$$(\zeta) \qquad x_1 = \lambda [e_1 A], \quad x_2 = \lambda [e_2 A], \ldots,$$

das heisst

$$(\eta) \qquad x_0 : x_1 : x_2 : \cdots = [e_0 A] : [e_1 A] : [e_2 A] : \cdots,$$

und, da x_0 gleich 1 ist, so hat man $1 = \lambda [e_0 A]$ {und somit}

$$(\vartheta) \qquad x_1 = \frac{[e_1 A]}{[e_0 A]}, \quad x_2 = \frac{[e_2 A]}{[e_0 A]}, \quad \cdots.$$

Die Auflösung ist also nur dann möglich, wenn $[e_0 A]$ von Null verschieden ist; wenn hingegen $[e_0 A] = 0$ ist, obwohl A von Null verschieden ist, so lehrt die Gleichung $1 = \lambda [e_0 A]$, dass dann die gegebenen Gleichungen einen Widerspruch enthalten.

Ferner lässt sich zeigen, dass in dem angenommenen Falle ($A \gtrless 0$ und $[e_0 A] \gtrless 0$) die Werthe (ϑ) die gegebenen Gleichungen (α) erfüllen. Denn, wird

$$\lambda = \frac{1}{[e_0 A]}$$

gesetzt, so werden die Gleichungen (ζ) erfüllt, die wir auch so schreiben können:

$$[e_0 X] = \lambda [e_0 A], \quad [e_1 X] = \lambda [e_1 A], \quad \ldots$$

oder

$$0 = [e_0 (X - \lambda A)] = [e_1 (X - \lambda A)] = \cdots.$$

Also giebt die Grösse n-ter Stufe $X - \lambda A$ mit dem System der $n + 1$ Einheiten $e_0, \ldots e_n$ einzeln kombinatorisch multiplicirt Null; also ist (nach 85) jene Grösse selbst null, das heisst

$$X - \lambda A = 0$$

oder

$$X = \lambda A,$$

welche Gleichung nach dem Obigen die gegebenen Gleichungen (α) ersetzt.

104 Angenommen sei *zweitens*, $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(n)}$ stehen in einer Zahlbeziehung zu einander, ohne jedoch alle null zu sein, so giebt es

(nach 17) unter ihnen eine Schaar von Grössen, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und aus denen die übrigen numerisch ableitbar sind. Es mögen $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)}$ eine solche Schaar bilden, und die übrigen $a^{(r+1)}, \ldots a^{(n)}$ aus ihnen numerisch ableitbar sein, und sei zum Beispiel

$$a^{(n)} = \alpha_1 a^{(1)} + \alpha_2 a^{(2)} + \cdots + \alpha_r a^{(r)},$$

dann ergiebt sich auch für jedes X, dass

$$[a^{(n)} X] = \alpha_1 [a^{(1)} X] + \alpha_2 [a^{(2)} X] + \cdots + \alpha_r [a^{(r)} X]$$

ist, das heisst, es wird die n-te der gegebenen Gleichungen aus den r ersten gewonnen, indem man diese beziehlich mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ multiplicirt; das heisst, die $n - r$ letzten Gleichungen sind aus den r ersten Gleichungen numerisch ableitbar, jeder Werth X, der diese erfüllt, erfüllt auch die $n - r$ letzten. Es bleiben also nur r Gleichungen zu erfüllen übrig, und können somit die $(n - r)$ letzten Unbekannten willkürlich angenommen, und dann die übrigen nach dem obigen Verfahren bestimmt werden.

Anm. Die zweite Auflösungsmethode hat den Vorzug, dass sie den sämmtlichen n Unbekannten Eine einzige Unbekannte n-ter Stufe substituirt und diese aufs Einfachste finden lehrt.

135. Aufgabe. *Aus $n + 1$ Gleichungen, welche in Bezug auf n Unbekannte vom ersten Grade sind, diese Unbekannten zu eliminiren.*

Auflösung. Die Gleichungen seien

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \alpha_0^{(0)} + \alpha_1^{(0)} x_1 + \alpha_2^{(0)} x_2 + \cdots + \alpha_n^{(0)} x_n = 0 \\ \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} x_1 + \alpha_2^{(1)} x_2 + \cdots + \alpha_n^{(1)} x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)} x_1 + \alpha_2^{(n)} x_2 + \cdots + \alpha_n^{(n)} x_n = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man sie beziehlich mit $n + 1$ Grössen $e^{(0)}, e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots e^{(n)}$, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, addirt die so gewonnenen Gleichungen und setzt

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} \alpha_0^{(0)} e^{(0)} + \alpha_0^{(1)} e^{(1)} + \alpha_0^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \alpha_0^{(n)} e^{(n)} = a_0 \\ \alpha_1^{(0)} e^{(0)} + \alpha_1^{(1)} e^{(1)} + \alpha_1^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \alpha_1^{(n)} e^{(n)} = a_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_n^{(0)} e^{(0)} + \alpha_n^{(1)} e^{(1)} + \alpha_n^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \alpha_n^{(n)} e^{(n)} = a_n, \end{cases}$$

so erhält man

$$\text{(c)} \quad a_0 + x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = 0.$$

Fügt man die kombinatorischen Faktoren $a_1, a_2, \ldots a_n$ hinzu, so 105

erhält man, da $[a_1 a_1 a_2 \ldots a_n]$, ... null sind,

(d) $$[a_0 a_1 a_2 \ldots a_n] = 0,$$

was die verlangte Eliminationsgleichung ist.

136. Aufgabe. *Aus zwei Gleichungen, welche in Bezug auf eine der Unbekannten algebraisch und von beliebigem Grade sind, diese Unbekannte zu eliminiren.*

Auflösung 1. Es sei, in Bezug auf die Unbekannte y, die eine Gleichung vom m-ten, die andere vom n-ten Grade, und seien die beiden Gleichungen

(a) $$\begin{cases} a_0 + a_1 y + \cdots + a_m y^m = 0, \\ b_0 + b_1 y + \cdots + b_n y^n = 0, \end{cases}$$

wo $a_0, a_1, \ldots a_m$ und $b_0, b_1, \ldots b_n$ beliebige Funktionen der andern Unbekannten sind. Multiplicirt man die erstere nach und nach mit $1, y, y^2, \ldots y^{n-1}$, die letztere nach und nach mit $1, y, y^2, \ldots y^{m-1}$, so erhält man die Gleichungen

(b) $$\begin{cases} a_0 + a_1 y + \cdots + a_m y^m = 0 \\ \quad a_0 y + \cdots\cdots + a_m y^{m+1} = 0 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a_0 y^{n-1} + \cdots\cdots + a_m y^{m+n-1} = 0 \\ b_0 + b_1 y + \cdots + b_n y^n = 0 \\ \quad b_0 y + \cdots\cdots + b_n y^{n+1} = 0 \\ \qquad \vdots \\ \qquad b_0 y^{m-1} + \cdots\cdots + b_n y^{m+n-1} = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese nach der Reihe mit $n + m$ Einheiten, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, nämlich $e_1, e_2, \ldots e_{n+m}$, addirt die so gewonnenen Gleichungen und setzt

(c) $$\begin{cases} a_0 e_1 + b_0 e_{n+1} = u_1, \\ a_1 e_1 + a_0 e_2 + b_1 e_{n+1} + b_0 e_{n+2} = u_2, \\ a_2 e_1 + a_1 e_2 + a_0 e_3 + b_2 e_{n+1} + b_1 e_{n+2} + b_0 e_{n+3} = u_3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_m e_n + b_n e_{n+m} = u_{m+n}, \end{cases}$$

so erhält man die Gleichung

(d) $$u_1 + u_2 y + u_3 y^2 + \cdots + u_{m+n} y^{m+n-1} = 0;$$

und fügt man ihr die kombinatorischen Faktoren $u_2, u_3, \ldots u_{m+n}$ hinzu, so erhält man:

(e) $$[u_1 u_2 u_3 \ldots u_{m+n}] = 0,$$

was die verlangte Eliminationsgleichung ist.

Auflösung 2. Es seien die gegebenen Gleichungen dieselben 106 wie in Auflösung 1 (a), und sei aus ihnen das System (b) abgeleitet. Man nehme $m+n$ Einheiten $e_0, e_1, \ldots e_{m+n-1}$, deren Produkt $=1$ ist.

Wenn nun

$$(\alpha)\quad \begin{cases} |e_0 + y|e_1 + \cdots + y^{m+n-1}|e_{m+n-1} = Y \\ a_0 e_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_m e_m = c_0 \\ a_0 e_1 + a_1 e_2 + \cdots + a_m e_{m+1} = c_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0 e_{n-1} + a_1 e_n + \cdots + a_m e_{m+n-1} = c_{n-1} \\ b_0 e_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n = d_0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ b_0 e_{m-1} + b_1 e_m + \cdots + b_n e_{m+n-1} = d_{m-1}, \end{cases}$$

so werden die Gleichungen (b) gleichbedeutend mit den Gleichungen

$$(\beta)\quad \begin{cases} [c_0 Y] = [c_1 Y] = \cdots = [c_{n-1} Y] = 0 \\ [d_0 Y] = [d_1 Y] = \cdots = [d_{m-1} Y] = 0. \end{cases}$$

Da nun Y eine Grösse $(n+m-1)$-ter Stufe ist, die nicht null ist, so müssen die $n+m$ Grössen $c_0, c_1, \ldots c_{n-1}, d_0, d_1, \ldots d_{m-1}$ in einer Zahlbeziehung zu einander stehen (nach 85). Also hat man

$$[c_0 c_1 \ldots c_{n-1} d_0 d_1 \ldots d_{m-1}] = 0,$$

was die verlangte Eliminationsgleichung ist.

Anm. 1. Es lässt sich bei dieser letzten Methode noch die Unbekannte y auf eine sehr einfache Weise ausdrücken, wenn nämlich vorausgesetzt wird, dass es unter den $n+m$ Grössen $c_0, c_1, \ldots c_{n-1}, d_0, d_1, \ldots d_{m-1}$, solche $n+m-1$ Grössen giebt, welche nicht in einer Zahlbeziehung zu einander stehen; es seien dies etwa $c_1, \ldots c_{n-1}, d_0, d_1, \ldots d_{m-1}$ und sei ihr kombinatorisches Produkt der Kürze wegen mit A bezeichnet; dann folgt (nach 84) aus den Gleichungen

$$0 = [c_1 Y] = [c_2 Y] = \cdots = [c_{n-1} Y] = [d_0 Y] = [d_1 Y] = \cdots = [d_{m-1} Y],$$

dass

$$Y = pA$$

ist, wo p eine unbekannte Zahl darstellt. Aber nun ist $Y = |e_0 + y|e_1 + \cdots$, also $[e_0 Y] = [e_0 | e_0] = 1$ und $[e_1 Y] = y$, also hat man

$$1 = [e_0 Y] = p[e_0 A]$$
$$y = [e_1 Y] = p[e_1 A],$$

also, indem man die zweite durch die erste dividirt,

$$y = \frac{[e_1 A]}{[e_0 A]},$$

wodurch y gefunden ist, während die Eliminationsgleichung in der Form 107

$$[c_0 A] = 0$$

erscheint.

Anm. 2. Diese Auflösungsmethoden (in der ersten der hier mitgetheilten Formen) habe ich bereits in der ersten Ausgabe der Ausdehnungslehre (1844) mitgetheilt, und von ihr in Grunert's Archiv (1845) einen Auszug gegeben. Späterhin hat Cauchy in einer Reihe von Aufsätzen, welche in den Comptes rendus von 1853 veröffentlicht sind, dieselbe Methode mitgetheilt, ohne jedoch meiner oder meines Werkes, welches ich ihm bereits 1847 zugeschickt hatte, Erwähnung zu thun. In Folge einer Prioritäts-Reclamation, welche ich in dieser Beziehung an die Pariser Akademie der Wissenschaften richtete, ist eine Commission zur Prüfung derselben ernannt worden, ohne dass jedoch darüber bisher Bericht erstattet wäre; was freilich auch kaum nöthig erscheint, da die Sache selbst keinem Zweifel Raum lässt. Zu erwähnen habe ich noch, dass ich durch die Cauchy'schen Aufsätze veranlasst bin, die Klammer zur Bezeichnung der kombinatorischen und überhaupt der auf ein Hauptgebiet bezüglichen Multiplikation anzuwenden.

Kapitel 4. Inneres Produkt.

§ 1. Grundgesetze der inneren Multiplikation.

137. Erklärung. Unter dem inneren Produkte zweier Einheiten von beliebigen Stufen verstehe ich das bezügliche Produkt der ersten in die Ergänzung der zweiten; das heisst, wenn E und F Einheiten beliebiger Stufen sind, so ist

$$[E|F]$$

das innere Produkt der Einheiten E und F.

138. *Das innere Produkt zweier beliebiger Grössen ist gleich dem bezüglichen Produkt der ersten in die Ergänzung der zweiten, das heisst, es ist*

$$[A|B]$$

das innere Produkt der Grössen A und B.

Beweis. Es seien $A_1, \dots A_n$ die Einheiten, aus denen A, und $B_1, \dots B_m$ die Einheiten, aus denen B numerisch abgeleitet ist, und sei

$$A = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n, \quad B = \beta_1 B_1 + \cdots + \beta_m B_m;$$

ferner sei für den Augenblick das Zeichen $\times$ als das der innern Multiplikation gewählt, so ist

$$\begin{aligned}[A \times B] &= [(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n) \times (\beta_1 B_1 + \cdots + \beta_m B_m)] \\ &= \Sigma \alpha_r \beta_s [A_r \times B_s], \qquad [42]\end{aligned}$$

108 wenn nämlich die Summe sich auf die Werthe $1, \dots n$ für r und $1, \dots m$ für s bezieht. Da nun A_r und B_s Einheiten sind, so ist (nach 137) $[A_r \times B_s]$ gleich $[A_r|B_s]$, also

$$[A \times B] = \Sigma \alpha_r \beta_s [A_r | B_s] = [\Sigma \alpha_r A_r . \Sigma \beta_s | B_s] \qquad [42]$$
$$= [A \Sigma \beta_s | B_s] = [A | \Sigma \beta_s B_s] \qquad [90]$$
$$= [A | B].$$

Anm. Eine besondere Bezeichnung für das innere Produkt erscheint also jetzt als überflüssig, indem das Ergänzungszeichen die Stelle des Zeichens für die innere Multiplikation vollständig vertritt. Und es ist nur zu beachten, dass dies Zeichen auch wie ein Multiplikationszeichen behandelt werden darf.

In meinen früheren Arbeiten (Geometrische Analyse, gekrönte Preisschrift, Leipzig 1847) habe ich das Zeichen $\times$ für das innere Produkt eingeführt, eine Bezeichnung, die nun entbehrlich ist.

139. *Die Stufenzahl des inneren Produktes, dessen beide Faktoren nach der Reihe die Stufenzahlen α und β haben, während die des Hauptgebietes n beträgt, ist entweder gleich $n + \alpha - \beta$, oder gleich $\alpha - \beta$, je nachdem β grösser als α ist, oder nicht.*

Beweis. Es seien A und B die beiden Faktoren, deren Stufenzahlen beziehlich α und β sind, so ist {nach 90, Zusatz} die Stufenzahl von $|B$ gleich $n - \beta$. Ist nun zuerst β grösser als α, so ist auch n grösser als $\alpha + n - \beta$; das heisst, die Summe der Stufenzahlen von A und $|B$ ist kleiner als die des Hauptgebietes, also (nach 95) die Stufenzahl des Produktes $[A|B]$ gleich jener Summe, das heisst, gleich $\alpha + n - \beta$. Ist aber β ebenso gross oder kleiner als α, so ist auch n ebenso gross oder kleiner als $\alpha + n - \beta$, das heisst, die Summe der Stufenzahlen von A und $|B$ ist ebenso gross oder grösser als n, also (nach 95) die Stufenzahl des Produktes $[A|B]$ um n kleiner als jene Summe, das heisst, gleich $\alpha - \beta$.

140. *Die Anzahl der Einheiten, aus denen sich ein inneres Produkt numerisch ableiten lässt, ist gleich der Anzahl der Kombinationen aus so viel Elementen, als die Stufenzahl des Hauptgebietes, und zur so vielten Klasse, als die positive Differenz der Stufenzahlen beider Faktoren beträgt.*

Beweis. Nach 139 ist die Stufenzahl des Produktes entweder gleich $n + \alpha - \beta$, oder gleich $\alpha - \beta$, je nachdem † β grösser als α ist, 109 oder nicht. Die Einheiten von gleicher Stufe sind im ersten Falle die multiplikativen Kombinationen aus den n ursprünglichen Einheiten zur $(n + \alpha - \beta)$-ten, im zweiten zur $(\alpha - \beta)$-ten Klasse. Aber die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur $(n + \alpha - \beta)$-ten Klasse ist, nach einem bekannten Satze der Kombinationslehre, gleich der Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur $(\beta - \alpha)$-ten Klasse. Die Anzahl der Einheiten, aus denen sich das Produkt ableiten lässt, ist also im *ersten* Falle gleich der Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur $(\beta - \alpha)$-ten Klasse, im *zweiten* Falle zur $(\alpha - \beta)$-ten

Klasse. In *beiden* Fällen ist daher die Klassenzahl dieser Kombinationen der positiven Differenz von α und β gleich.

141. *Das innere Produkt zweier Grössen gleicher Stufe ist eine Zahl.*

Beweis. Denn die Differenz der Stufenzahlen ist dann null, also das Produkt {nach 139} von nullter Stufe, das heisst eine Zahl.

142. *Das innere Produkt zweier gleicher Einheiten ist Eins, das zweier verschiedener Einheiten gleicher Stufe Null, das heisst*

$$[E_r|E_r] = 1, \quad [E_r|E_s] = 0.$$

Beweis. $[E_r\,E_r] = 1$ (nach {137 und} 91). Ferner ist $|E_s$ (nach 89) dem kombinatorischen Produkte aller in dem Produkte E_s nicht vorkommenden Einheiten erster Stufe gleich; da nun E_r von E_s verschieden, beide aber Produkte von einer gleichen Anzahl ursprünglicher Einheiten sind, so enthält E_r nothwendig solche Einheiten als Faktoren, die in E_s fehlen, also in $|E_s$ vorkommen; also ist $[E_r|E_s]$ (nach 60) gleich Null.

143. *Wenn $E_1, \ldots E_m$ Einheiten von beliebiger, aber alle von gleicher Stufe sind, so ist*

$$[(\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m)|(\beta_1 E_1 + \cdots + \beta_m E_m)] = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_m\beta_m.$$

Beweis. Es sei

$$\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m \text{ mit } \Sigma\alpha_r E_r, \text{ und } \beta_1 E_1 + \cdots + \beta_m E_m \text{ mit } \Sigma\beta_s E_s$$

bezeichnet, so ist

$$[\Sigma\alpha_r E_r|\Sigma\beta_s E_s] = \Sigma\alpha_r\beta_s[E_r|E_s]. \qquad [42]$$

Nun ist (nach 142) das Produkt $[E_r|E_s]$ gleich Null, wenn E_r und E_s verschiedene Einheiten sind, und gleich Eins, wenn r gleich s ist, somit wird der gewonnene Ausdruck

$$= \Sigma\alpha_r\beta_r = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_m\beta_m.$$

144. *Die beiden Faktoren eines inneren Produktes sind vertauschbar, wenn sie von gleicher Stufe sind, das heisst*

$$[A\,B] = [B|A],$$

wenn A und B von gleicher Stufe sind.

110 Beweis. Wenn $E_1, \ldots E_m$ die Einheiten darstellen, welche mit A und B von gleicher Stufe sind, und $A = \Sigma\alpha_r E_r$, $B = \Sigma\beta_s E_s$ ist, so ist (nach 143)

$$[A|B] = \Sigma\alpha_r\beta_r = \Sigma\beta_r\alpha_r = [B|A].$$

145. Erklärung. Wir schreiben der Kürze wegen

$$[A|A] = A^2$$

und nennen es das innere Quadrat von A.

146. *Es ist*

$$(\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m)^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_m^2.$$

Beweis.

$$(\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m)^2 = [(\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m) | (\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m)] \quad [145]$$
$$= \alpha_1 \alpha_1 + \cdots + \alpha_m \alpha_m \quad [143].$$

147. *Das innere Produkt zweier Einheiten E und F ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn die eine der andern incident ist, das heisst*

$$[E|F] = 0,$$

wenn E und F nicht einander incident sind,

$$[E|F] \gtrless 0,$$

wenn E und F einander incident sind.

Beweis. Für Einheiten gleicher Stufe ist der Satz in 142 bewiesen. Nun seien E und F zwei Einheiten ungleicher Stufe, und zwar {zunächst F *von höherer Stufe als* E, so dass also die Summe der Stufenzahlen von E und $|F$ kleiner als n (vgl. den Beweis von 139) und demnach das Produkt $[E|F]$ *progressiv* ist. Es sei

$$E = [F_1 G],$$

wo F_1 dem F untergeordnet ist, aber das Gebiet G keine Grösse erster Stufe mit F gemein hat. Dann ist E dem F incident oder nicht, jenachdem G von nullter Stufe (eine Zahl) ist oder nicht. Es sei ferner

$$F \doteq [F_1 F_2]$$

und sei $[F_1 F_2 G H]$ gleich dem Produkte aller ursprünglichen Einheiten und also gleich der absoluten Einheit. Dann ist (nach 89) $[GH]$ die Ergänzung von $[F_1 F_2]$, das heisst von F, also

$$[E|F] = [F_1 G \,.\, GH].$$

Das Produkt auf der rechten Seite ist hier aber (nach 109) von Null verschieden oder gleich Null, jenachdem die Stufenzahl des gemeinschaftlichen Gebietes G gleich Null oder grösser als Null ist, das heisst, jenachdem E und F einander incident sind oder nicht.

Jetzt sei zweitens} E *von höherer Stufe als* F, {so dass also die Summe der Stufenzahlen von E und $|F$ grösser als n (vgl. den Beweis von 139) und demnach das Produkt $[E|F]$ *regressiv* ist}. Es sei

$$F = [E_1 G],$$

wo E_1 dem E untergeordnet ist, aber das Gebiet G keine Grösse erster Stufe mit E gemein hat. Dann ist F dem E incident oder nicht, je

nachdem G von nullter Stufe (eine Zahl) ist oder nicht. Es sei ferner

$$E = [E_1 E_2]$$

und sei $[E_1 G E_2 H]$ gleich dem Produkte aller n ursprünglichen Einheiten und also gleich der absoluten Einheit. Dann ist (nach 89) $[E_2 H]$ die Ergänzung von $[E_1 G]$, das heisst $|[E_1 G] = [E_2 H]$, also

$$[E|F] = [E_1 E_2 | E_1 G] = [E_1 E_2 . E_2 H].$$

Ist G *von nullter Stufe*, das heisst, E mit F incident, so ist $[E_1 E_2 H]$ von nullter Stufe, also (nach 106) der Ausdruck

$$[E_1 E_2 . E_2 H] = [E_1 E_2 H] E_2,$$

also von Null verschieden, da E_2 und $[E_1 E_2 H]$ von Null verschieden sind. Ist aber G *von höherer als nullter Stufe*, so ist {die Stufenzahl des verbindenden Gebietes der Grössen $[E_1 E_2]$ und $[E_2 H]$, nämlich} die Summe der Stufenzahlen von E_1, E_2 und H geringer als die Summe der Stufenzahlen von E_1, G, E_2, H, das heisst, kleiner als n, also (nach 109) $[E_1 E_2 . E_2 H] = 0$, das heisst, wenn E und F nicht einander incident sind, so ist $[E|F] = 0$.

111 **148.** *Es ist*

$$[EF|E] = F \text{ und } [F|EF] = |E,$$

wenn E und F Einheiten sind, und $[EF]$ nicht null ist.

Beweis. Es sei das Produkt $[EF]$ *progressiv* und $[EFG]$ sei gleich dem Produkte aller ursprünglichen Einheiten und also gleich Eins, so ist $|E = [FG]$, somit

$$[EF|E] = [EF . FG] = [EFG] F \qquad [106]$$
$$= F.$$

Ferner ist dann $|[EF] = G$, also $[F|EF] = [FG] = |E$.

{Ist das Produkt $[EF]$ *regressiv*, so gilt der Satz, wenn man E und F durch ihre Ergänzungen ersetzt (nach 115), also nach 101 auch für E und F selbst.}

149. *Sind E, F, G Einheiten, und ist F von höherer Stufe als G und das Produkt $[EF]$ progressiv und nicht null, so ist*

$$[EF|EG] = [F|G].$$

Ist ferner F von niederer Stufe als G und das Produkt $[GE]$ progressiv und nicht null, so ist

$$[FE|GE] = [F|G].$$

Sind endlich F und G von gleicher Stufe, und sind die beiden Produkte $[EF]$ und $[GE]$ progressiv und nicht null, so sind beide Formeln gültig.

Beweis. 1. Wenn F und G *nicht einander incident sind*, so sind

auch $[EF]$ und $[EG]$ nicht einander incident, also sind dann (nach 147) jedesmal beide Seiten der zu erweisenden Gleichungen null.

{2. Ist hingegen F mit G *incident*, so müssen die drei im Satze unterschiedenen Fälle getrennt behandelt werden.

a. Setzen wir *zunächst* voraus, *das Produkt* $[EF]$ *sei progressiv und nicht null, und es sei* F *von höherer Stufe als* G; dann ist G, da es zugleich mit F incident sein soll, dem F untergeordnet, und man kann daher F in der Form darstellen

$$F = [GH],$$

wo das Produkt $[GH]$ progressiv und H wieder eine Einheit, oder doch eine negativ genommene Einheit ist. Es wird somit

$$[EF|EG] = [E(GH)|EG],$$

oder, da das Produkt $[E(GH)]$ rein progressiv ist, nach 119

$$[EF|EG] = [EGH|EG]$$

$$= H$$

(nach 148), denn $[EGH] = [EF]$ ist nach Voraussetzung nicht null, und $[EG]$ ist als nicht verschwindendes progressives Produkt zweier Einheiten (nach 77) selbst eine Einheit. Die rechte Seite unserer Gleichung wird aber (wieder nach 148)

$$= [GH|G] = [F|G].$$

b. Setzen wir *zweitens* voraus, *das Produkt* $[GE]$ *sei progressiv und nicht null, und es sei* F *von niederer Stufe als* G; dann ist F, da es zugleich mit G incident sein soll, dem G untergeordnet, und man kann daher G in der Form darstellen

$$G = [HF],$$

wo das Produkt $[HF]$ progressiv und H eine Einheit, oder doch eine negativ genommene Einheit ist. Es wird somit

$$[FE|GE] = [FE|HFE]$$

oder, da das Produkt $[HFE]$ rein progressiv ist, (nach 119)

$$[FE|GE] = [FE|H(FE)]$$

$$= |H$$

(nach 148), denn es ist $[H(FE)] = [HFE] = [GE]$ nicht null. Die rechte Seite ist aber (wieder nach 148)

$$= [F|HF] = [F|G].$$

c. Setzen wir *endlich* voraus, *die Produkte* $[EF]$ *und* $[GE]$ *seien beide progressiv und nicht null, und es seien* F *und* G *von gleicher Stufe;* dann müssen die Gebiete beider Grössen, die ja zugleich einander incident sein sollen, mit einander zusammenfallen; es ist somit sowohl

G dem F, als F dem G untergeordnet, und es gelten daher nach Beweis 2a und b beide Formeln.

Anm. Ein entsprechender Satz gilt auch, wenn $[EF]$ und $[EG]$ *regressive* Produkte sind, nur muss man in diesem Falle die Ausdrücke höherer und niederer Stufe mit einander vertauschen. Der Beweis ist genau so wie in Nr. 148.}

150. ***Wenn q und r die Stufenzahlen von A und B sind und q kleiner als r ist, so ist***

$$[A|B] = (-1)^{q(r-1)}[B|A],$$

das heisst, $[A|B]$ ist der Ergänzung von $[B|A]$ entgegengesetzt, wenn die Stufenzahl von A ungerade und zugleich die von B gerade ist; in jedem andern Falle ist $[A|B]$ der Ergänzung von $[B|A]$ gleich.

112 Beweis. Es ist

$$|[B|A] = [|B||A] \qquad [97]$$
$$= (-1)^{q(n-q)}[|B.A] \qquad [92]$$
$$= (-1)^{q(n-q)}(-1)^{q(n-r)}[A|B] \qquad [58],$$

{denn das Produkt $[|B.A]$ ist progressiv, weil die Summe der Stufenzahlen $n-r+q = n-(r-q) < n$ ist. Der Ausdruck $|[B|A]$ wird also}

$$= (-1)^{q(2n-q-r)}[A|B].$$

Nun ist in Bezug auf den Modul 2 die Grösse $q(2n-q-r)$ kongruent $q(r-q)$ oder kongruent $q(r-1)$, da q^2 mit q gleichzeitig gerade oder ungerade ist, somit

$$|[B|A] = (-1)^{q(r-1)}[A|B],$$

oder auch

$$[A|B] = (-1)^{q(r-1)}|[B|A].$$

Anm. Vermittelst des soeben erwiesenen Satzes kann man den Fall, wo der zweite Faktor eines inneren Produktes von höherer Stufe ist als der erste, immer auf den andern Fall zurückführen, wo der erste Faktor von höherer Stufe ist als der zweite. Diesen letzteren Fall, welcher sich in den oben entwickelten Formeln als der einfachere herausstellte, werde ich jetzt vorzugsweise berücksichtigen.

§ 2. Begriff des Normalen und seine Correlaten.

151. Erklärung. Numerischer Werth einer Grösse A heisst die positive Quadratwurzel aus dem innern Quadrat dieser Grösse. Numerisch gleich heissen zwei Grössen von gleichem numerischen Werth, das heisst, zwei Grössen, deren innere Quadrate gleich sind.

Anm. Für Zahlen, reelle oder imaginäre, ist die Benennung in derselben Weise auch sonst in Gebrauch, indem zuerst numerischer Werth einer positiven Zahl diese selbst, der einer negativen $-a$ die entsprechende positive Zahl a, das heisst, in beiden Fällen die positive Quadratwurzel ihres Quadrates ist. Hat

man eine imaginäre Zahl $a + b\sqrt{-1}$, so sind ihre Einheiten 1 und $\sqrt{-1}$. Eine der beiden Wurzeln von -1 sei mit i bezeichnet, und 1 und i als Einheiten genommen, also $i^2 = 1$, so ist der numerische Werth von $a + bi$ nach der Definition gleich $\sqrt{a^2 + b^2}$, was auch sonst als numerischer Werth der imaginären Grösse $a + bi$ aufgefasst wird. In der Geometrie ist numerischer Werth einer Linie ihre Länge gemessen durch die Längeneinheit, und so weiter.

152. Erklärung. Normal zu einander heissen zwei von Null verschiedene Grössen, deren inneres Produkt null ist. Zwei Gebiete heissen normal zu einander, wenn ihre Theile es sind. Zwei Gebiete heissen allseitig zu einander † normal, wenn jede Grösse erster Stufe, 113 die dem einen Gebiete angehört, zu jeder, die dem andern angehört, normal ist; und zwei Grössen heissen allseitig normal zu einander, wenn ihre Gebiete es sind.

Anm. Der Grund der Benennung ruht in der Geometrie. Nimmt man dort die ursprünglichen Einheiten als gleich lange zu einander senkrechte Strecken an, wie dies stets geschehen muss, so zeigt sich leicht, dass das innere Produkt zweier Strecken dann und nur dann null ist, wenn diese Strecken senkrecht zu einander sind. Statt des Ausdrucks „senkrecht“ habe ich den „normal“ gewählt, als den abstrakteren, der auch eine Anwendung auf nicht räumliche Verhältnisse gestattet.

153. Erklärung. Normalsystem n-ter Stufe heisst ein Verein von n numerisch gleichen (von Null verschiedenen) Grössen erster Stufe, von denen jede zu jeder normal ist; und wenn n zugleich die Stufenzahl des Hauptgebietes ist, so heisst es ein vollständiges Normalsystem. Der numerische Werth jener n Grössen heisse zugleich der numerische Werth des Normalsystems. Einfaches Normalsystem heisst jedes Normalsystem, dessen numerischer Werth Eins ist.

Anm. Im Raume bilden zum Beispiel drei gleich lange und gegen einander senkrechte Strecken ein Normalsystem.

154. Erklärung. Circuläre Aenderung nenne ich jede Transformation eines Vereins, durch welche zwei Grössen a und b des Vereins sich beziehlich in $xa + yb$ und in $\mp(xb - ya)$ verwandeln, vorausgesetzt, dass $x^2 + y^2 = 1$ sei. Ich nenne die circuläre Aenderung eine *positive* oder *negative*, je nachdem a und b sich in $xa + yb$ und $(xb - ya)$, oder in $xa + yb$ und $-(xb - ya)$ verwandeln. Wenn hierbei $x = \cos\alpha$ und $y = \sin\alpha$ ist, und a und b numerisch gleich und zu einander normal sind, so sage ich, *der Verein habe sich von a nach b hin um den Winkel α geändert.*

Anm. Stellt man sich unter a und b zwei gleich lange und zu einander senkrechte Strecken vor, so sieht man leicht, dass durch die circuläre Aenderung, durch welche a in $a_1 = a\cos\alpha + b\sin\alpha$, b in $b_1 = b\cos\alpha - a\sin\alpha$ übergeht, zwei Strecken a_1 und b_1 entstehen, die von derselben Länge sind, wie a und b, und die wieder auf einander senkrecht stehen. Es bleiben also a und b bei jener Aenderung conjugirte Halbmesser eines festen Kreises, wodurch der Name

circuläre Aenderung gerechtfertigt ist. Auch sieht man, dass dann der Winkel von a bis a_1 gleich α ist.

114 Sind übrigens a und b beliebige Strecken, so werden a_1 und b_1 conjugirte Halbmesser einer konstanten Ellipse, in welcher auch a und b conjugirte Halbmesser sind. Von dieser Betrachtungsweise aus würde sich der Name der elliptischen Aenderung empfehlen. Da jedoch die Ellipse immer auf den Kreis reducirbar und der Kreis die einfachere Kurve ist, so habe ich jenen Namen als den einfacheren vorgezogen. Siehe auch Crelle's Journal, Band 49, S. 134. {In der Abhandlung: Sur les différents genres de multiplication.}

155. *Durch circuläre Aenderung geht aus jedem Normalsystem ein numerisch gleiches Normalsystem hervor.*

Beweis. Es seien $a, b, c, \ldots$ die Grössen eines Normalsystems, das heisst, $a^2 = b^2 = c^2 = \cdots$ und $0 = [a|b] = [a|c] = [b|c] = \cdots$, und ändere sich a in $a_1 = xa + yb$ und b in $b_1 = \mp(xb - ya)$, wo $x^2 + y^2 = 1$ ist, so ist zu zeigen, dass $a_1, b_1, c, \ldots$ ein Normalsystem bilden, in welchem $a_1{}^2 = a^2$ ist.

Es ist, da $[a|b] = 0$ ist,

$$\begin{aligned} a_1{}^2 = (xa + yb)^2 &= x^2a^2 + y^2b^2 \\ &= (x^2 + y^2)a^2 && (\text{da } b^2 = a^2) \\ &= a^2 && (\text{da } x^2 + y^2 = 1). \end{aligned}$$

Aus gleichem Grunde ist $b_1{}^2 = a^2$. Ferner ist

$$\begin{aligned} [a_1|b_1] &= \mp[(xa + yb)|(xb - ya)] = \mp xy(b^2 - a^2) && (\text{da } [a|b] = 0) \\ &= 0 && (\text{weil } b^2 = a^2). \end{aligned}$$

Endlich ist

$$[a_1|c] = [(xa + yb)|c] = x[a|c] + y[b|c] = 0,$$

weil $[a|c]$ und $[b|c] = 0$ sind. Aus gleichem Grunde ist $[b_1|c] = 0, \ldots$. Folglich ist das System $a_1, b_1, c, \ldots$ ein Normalsystem, dessen numerischer Werth gleich dem des gegebenen ist.

156. *Das kombinatorische Produkt der Grössen eines Normalsystems bleibt bei* **positiver** *circulärer Aenderung dieses Systems unverändert, und geht bei* **negativer** *in seinen entgegengesetzten Werth über.*

Beweis. Es gehe a in $a_1 = xa + yb$, b in $b_1 = xb - ya$ über, wo $x^2 + y^2 = 1$ ist; so wird

$$\begin{aligned} [a_1b_1] &= [(xa + yb)(xb - ya)] \\ &= x^2[ab] - y^2[ba] && (\text{da } [aa], [bb] \text{ nach 60 null sind}) \\ &= (x^2 + y^2)[ab] && (\text{da } [ba] = -[ab] \text{ ist, nach 55}) \\ &= [ab] && (\text{da } x^2 + y^2 = 1). \end{aligned}$$

115 Also $[a_1b_1] = [ab]$. Kommen nun zu den gleichen Produkten $[ab]$ und $[a_1b_1]$ noch an den entsprechenden Stellen gleiche kombinatorische

Faktoren hinzu, so bleiben die Produkte gleich. {Entsprechendes gilt bei negativer circulärer Aenderung.} Also bewiesen.

157. *Die Grössen eines Normalsystems stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander, und jede Grösse erster Stufe lässt sich aus einem beliebigen vollständigen Normalsystem numerisch ableiten.*

Beweis. 1. Es seien $a, b, c, \ldots$ Grössen eines Normalsystems. Gesetzt nun, es ständen dieselben in einer Zahlbeziehung zu einander, etwa so, dass

$$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$

sei, so multiplicire man beide Seiten innerlich mit a, so wird

$$a^2 = \beta[b|a] + \gamma[c|a] + \cdots = 0,$$

da $[b|a]$, $[c|a]$, ... null sind (nach 153 {und 152}). Also wäre $a^2 = 0$, im Widerspruch mit 153. Es lässt sich also keine der Grössen $a, b, c, \ldots$ aus den übrigen numerisch ableiten, das heisst, sie stehen (nach 2) in keiner Zahlbeziehung zu einander.

2. Ein vollständiges Normalsystem in einem Hauptgebiete n-ter Stufe besteht {nach 153} aus n Grössen, und da diese nach Beweis 1 in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so kann (nach 24) aus ihnen jede Grösse erster Stufe, da sie immer dem Hauptgebiete angehören muss, numerisch abgeleitet werden.

158. *Wenn eine Grösse A zu mehreren Grössen B, C, ... von gleicher Stufe normal ist, so ist sie auch zu jeder Grösse normal, die aus ihnen numerisch ableitbar ist.*

Beweis. Wenn A zu B, C, ... normal ist, so ist (nach 152)

$$0 = [A|B] = [A|C] = \cdots.$$

Somit auch

$$[A|(\beta B + \gamma C + \cdots)] = \beta[A|B] + \gamma[A|C] + \cdots \qquad [41]$$
$$= 0,$$

da $[A|B]$, $[A|C]$, ... null sind.

159. *Die sämmtlichen Grössen erster Stufe, welche zu m Grössen eines vollständigen Normalsystems n-ter Stufe normal sind, gehören dem Gebiete der $n - m$ übrigen Grössen des Systems an.*

Beweis. Es sei das System $a_1, \ldots a_n$ ein vollständiges Normal- 116 system, und seien m seiner Grössen, etwa $a_1, \ldots a_m$ zu irgend einer Grösse erster Stufe a normal, so ist zu zeigen, dass a dem Gebiete $a_{m+1}, \ldots a_n$ angehört.

Nach 157 lässt sich a aus dem vollständigen Normalsystem $a_1, \ldots a_n$ numerisch ableiten. Es sei der Ausdruck dieser Ableitung

$$a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n.$$

Da nun a zu $a_1, a_2, \ldots a_m$ normal ist, so erhält man, indem man zuerst mit a_1 innerlich multiplicirt,

$$0 = [a_1|a] = \alpha_1 a_1^2 + \alpha_2[a_1|a_2] + \cdots + \alpha_n[a_1|a_n] = \alpha_1 a_1^2,$$

da $[a_1|a_2]$ bis $[a_1|a_n]$ als innere Produkte der Grössen eines Normalsystems null sind. Da nun a_1^2 (nach 153) nicht null ist, so folgt aus der Gleichung $\alpha_1 a_1^2 = 0$, dass $\alpha_1 = 0$ ist. Auf gleiche Weise folgt, indem man nach und nach mit $a_2, \ldots a_m$ multiplicirt, dass auch $\alpha_2, \ldots \alpha_m$ null sind. Folglich ist

$$a = \alpha_{m+1} a_{m+1} + \cdots + \alpha_n a_n,$$

das heisst, a gehört dem Gebiete $a_{m+1}, \ldots a_n$ an.

160. *Jedes Normalsystem lässt sich durch fortgesetzte circuläre Aenderung so umwandeln, dass eine seiner Grössen mit einer beliebig gegebenen Grösse erster Stufe, deren numerischer Werth dem des Normalsystems gleich ist und welche dem Gebiete desselben angehört, identisch wird.*

Beweis. Es seien $a_1, \ldots a_n$ die Grössen des gegebenen Normalsystems, und k die gegebene Grösse, welche numerisch gleich a_1 ist, und sei

$$k = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n.$$

Nun wandle man a_1 und a_2 circulär so um, dass dabei a_1 in

$$c_2 = \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$$

übergeht, was (nach 154) möglich ist. Dann ist

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\, c_2,$$

also

$$k = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\, c_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots + \alpha_n a_n.$$

Darauf wandle man c_2 und a_3 circulär so um, dass dabei c_2 in

$$c_3 = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\, c_2 + \alpha_3 a_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}$$

117 übergeht. Dann ist

$$k = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\, c_3 + \alpha_4 a_4 + \cdots + \alpha_n a_n.$$

In dieser Weise fahre man fort, bis

$$k = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{n-1}^2}\, c_{n-1} + \alpha_n a_n$$

wird, und wandle schliesslich c_{n-1} und a_n circulär so um, dass dabei c_{n-1} in

$$c_n = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}^2}\, c_{n-1} + \alpha_n a_n}{\sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}}$$

übergeht, so ist dann

(*) $$k = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}\, c_n.$$

Nun ist nach der Hypothesis

$$a_1{}^2 = k^2 = (\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n)^2 = \alpha_1{}^2 a_1{}^2 + \cdots + \alpha_n{}^2 a_n{}^2,$$

weil $[a_1|a_2], \ldots$ null sind. Und da auch $a_1{}^2 = a_2{}^2 = \cdots = a_n{}^2$ ist, so wird

$$a_1{}^2 = (\alpha_1{}^2 + \cdots + \alpha_n{}^2) a_1{}^2,$$

das heisst, $\alpha_1{}^2 + \cdots + \alpha_n{}^2 = 1$. Dies also in die obige Gleichung (*) eingeführt, giebt, wenn man den positiven Wurzelwerth wählt,

$$k = c_n,$$

das heisst, in dem zuletzt hervorgehenden Normalsystem ist eine Grösse c_n mit der gegebenen k identisch, wie verlangt.

161. *Wenn zwei Normalsysteme gleichen numerischen Werth haben, und ihre Gebiete einander incident sind, so lässt sich durch fortgesetzte circuläre Aenderung, wenn beide von gleicher Stufe sind, jedes aus dem andern ableiten, wenn sie hingegen von ungleicher Stufe sind, das höherer Stufe so umwandeln, dass es die Grössen des andern enthält.*

Beweis. Es seien $a, b, c, \ldots$ und $a_1, b_1, c_1, \ldots$ zwei Normalsysteme von gleichem numerischen Werthe, und seien die Gebiete beider einander incident, und zwar das des letzteren entweder von gleicher oder höherer Stufe als das des ersteren, so müssen (nach 15) alle Grössen $a, b, c, \ldots$ dem Gebiete $a_1, b_1, c_1, \ldots$ angehören. Somit kann man (nach 160) das Normalsystem $a_1, b_1, c_1, \ldots$ circulär so umwandeln, dass eine seiner Grössen $= a$ wird. Das so hervorgehende Normalsystem bestehe aus den Grössen $a, b_2, c_2, \ldots$. Da nun $b, c, \ldots$, als Grössen des Normalsystems $a, b, c, \ldots$, zu a, also zu einer † Grösse 118 des Normalsystems $a, b_2, c_2, \ldots$ normal sind, so müssen sie (nach 159) dem Gebiete der übrigen Grössen dieses Systems, also dem Gebiete $b_2, c_2, \ldots$ angehören. Demnach kann man wieder das System $b_2, c_2, \ldots$ circulär so umwandeln, dass eine seiner Grössen $= b$ wird. Das so hervorgehende Normalsystem bestehe aus den Grössen $b, c_3, d_3, \ldots$, so müssen wieder aus demselben Grunde, wie vorher, $c, d, \ldots$ dem Gebiete $c_3, d_3, \ldots$ angehören. Das Normalsystem $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots$ ist dann durch circuläre Aenderungen übergegangen in $a, b, c_3, d_3, \ldots$.

So kann man, wenn das System $a_1, b_1, \ldots$ von höherer Stufe ist als $a, b, \ldots$, fortfahren, bis das zuletzt hervorgehende System alle Grössen des gegebenen Systemes $a, b, c, \ldots$ enthält, oder wenn beide Systeme von gleicher Stufe sind, so lange bis es alle Grössen des Systems $a, b, c, \ldots$, mit Ausnahme der letzten, enthält. Diese letzte sei q, die vorletzte p, und sei das so hervorgehende Normalsystem $a, b, \ldots p, q_n$, so muss nach der angewandten Schlussfolge q dem Gebiete q_n angehören, das heisst, beide müssen in einer Zahlbeziehung zu einander

stehen. Ist nun $q_n = xq$, wo x eine Zahl ist, so ist, da beide einander numerisch gleich sind, $q_n^2 = q^2$, also $x^2 = 1$, somit $q_n = \mp q$. Ist $q_n = -q$, so hat man nur statt der letzten circulären Aenderung die entgegengesetzte zu nehmen, so fällt dann auch die letzte Grösse des so hervorgehenden Normalsystems mit q zusammen, also ist dann das eine der gegebenen Normalsysteme aus dem andern circulär abgeleitet, wie verlangt.

162. *Das System der ursprünglichen Einheiten ist ein (vollständiges) Normalsystem, dessen numerischer Werth Eins ist.*

Beweis. Es seien $e_1, \ldots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, so ist (nach 142)

$$1 = e_1^2 = \cdots = e_n^2$$
$$0 = [e_1 | e_2] = \cdots.$$

163. *In jedem Gebiete m-ter Stufe lässt sich ein Normalsystem gleicher Stufe von beliebigem numerischen Werth annehmen, und zwar so, dass dies System Theil eines vollständigen Normalsystems sei.*

119 Beweis. Es sei a_1 eine Grösse erster Stufe in dem gegebenen Gebiete m-ter Stufe A, ihr numerischer Werth sei 1. Da nun (nach 162) das System der ursprünglichen Einheiten $e_1, \ldots e_n$ ein vollständiges Normalsystem ist, dessen numerischer Werth 1 ist, so lässt sich (nach 160) dies Normalsystem circulär so umwandeln, dass a_1 eine der Grössen des resultirenden Normalsystems wird. Dann ist a_1 zu den $n - 1$ übrigen Grössen dieses Normalsystems, also auch (nach 158) zu jeder Grösse ihres Gebietes A_1 normal. Dies Gebiet ist von $(n - 1)$-ter Stufe und hat also mit dem Gebiet m-ter Stufe A (nach 26) ein Gebiet gemein, dessen Stufenzahl $n - 1 + m - n = m - 1$ ist.

Es sei in diesem gemeinschaftlichen Gebiete a_2 eine Grösse erster Stufe, deren numerischer Werth 1 ist. Da a_2 also auch dem Gebiete A_1 angehört, so ist sie nach dem Obigen zu a_1 normal, aber auch mit a_1 numerisch gleich, nämlich $= 1$, also bilden a_1 und a_2 ein Normalsystem mit dem numerischen Werth 1. Also lässt sich (nach 161) das vollständige Normalsystem $e_1, \ldots e_n$ in ein anderes Normalsystem umwandeln, welches a_1 und a_2 enthält. Das Gebiet A_2 der übrigen $n - 2$ Grössen dieses Normalsystems ist von $(n - 2)$-ter Stufe, und alle Grössen erster Stufe, die diesem Gebiete angehören, sind normal zu a_1 und a_2. Nun haben A und A_2 ein Gebiet $(m - 2)$-ter Stufe gemein; in ihm sei a_3 eine beliebige Grösse erster Stufe vom numerischen Werthe 1, so hat man schon ein Normalsystem von drei Grössen a_1, a_2, a_3 in A, und so kann man fortfahren.

Hat man so in A ein Normalsystem von $(m - 1)$ Grössen $a_1, \ldots a_{m-1}$

erhalten, so enthält das vollständige Normalsystem, zu dem es gehört, ausserdem noch $n - m + 1$ Grössen; ihr Gebiet, was A_{m-1} heisse, ist von $(n - m + 1)$-ter Stufe, hat also mit dem Gebiete m-ter Stufe A noch ein Gebiet gemein, dessen Stufenzahl $n - m + 1 + m - n = 1$ ist. Es sei a_m eine Grösse dieses Gebietes, deren numerischer Werth 1 ist, so ist a_m, da es in A_{m-1} liegt, zu $a_1, \ldots a_{m-1}$ normal und $a_1, \ldots a_m$ bilden also ein Normalsystem m-ter Stufe in dem Gebiete m-ter Stufe A. Diesem Normalsystem kann man dadurch, dass man alle seine Grössen mit einer und derselben beliebigen Zahl multiplicirt, jeden beliebigen numerischen Werth geben.

§ 3. Gesetze des inneren Produktes, an den Begriff des Normalen geknüpft. 120

164. Erklärung. Normale Zurückleitung A' einer Grösse A auf ein Gebiet B nenne ich die Zurückleitung der Grösse A auf das Gebiet B, unter Ausschluss des zu B ergänzenden Gebietes (vgl. 127 und 33).

Anm. Ist zum Beispiel a, b, c ein vollständiges Normalsystem und $p = qa + rb + sc$ eine beliebige Grösse des Hauptgebietes, so ist die normale Zurückleitung der Grösse p auf das Gebiet $[bc]$ gleich $rb + sc$. Für die Geometrie ist sie identisch mit der senkrechten Projektion.

165. *Die normale Zurückleitung A' einer Grösse A auf ein Gebiet B ist*

$$A' = \frac{[B(A|B)]}{B^2}, \text{ oder } = [B(A|B)],$$

letzteres, wenn der numerische Werth von B gleich 1 ist.

Beweis. Nach 164 ist A' die Zurückleitung von A auf B, unter Ausschluss des zu B ergänzenden Gebietes, das heisst des Gebietes $|B$. Wird $|B$ mit C bezeichnet, so ist (nach 129)

$$A' = \frac{[B \,.\, AC]}{[BC]}, \text{ also } = \frac{[B(A|B)]}{[B|B]} = \frac{[B(A|B)]}{B^2}.$$

166. Zusatz. *Sind ins Besondere A und B von gleicher Stufe, so ist die Zurückleitung*

$$A' = \frac{[A|B]B}{B^2}, \text{ oder } = [A|B]B, \text{ wenn } B^2 = 1.$$

Beweis. Dann ist nämlich (nach 141) $[A|B]$ eine Zahl und kann also statt $[B|(A|B)]$ geschrieben werden $[A|B]B$.

167. *Die Ergänzung des kombinatorischen Produktes A von m Grössen eines vollständigen Normalsystems, welches den numerischen Werth Eins hat, ist dem kombinatorischen Produkte $\{B\}$ der $(n - m)$ übrigen*

Grössen des Systems gleich oder entgegengesetzt, je nachdem $[AB] = +1$ *oder* $= -1$ *ist, das heisst*

$$(*) \qquad |A = [AB]B,$$

wenn die n einfachen Faktoren von $[AB]$ *die n Grössen des Normalsystems sind.*

Beweis. 1. Für das System der ursprünglichen Einheiten ist diese Beziehung in 89 als Definition festgesetzt.

121 2. Ich zeige nun, dass, wenn diese (durch Gleichung (*) dargestellte) Beziehung für irgend ein Normalsystem $a, b, c, \ldots$ gilt, sie auch für jedes aus ihm durch circuläre Aenderung hervorgehende Normalsystem gelte.

Es gehe durch {positive} circuläre Aenderung a in $a_1 = xa + yb$, b in $b_1 = xb - ya$ über. Durch diese verwandle sich A in A_1, B in B_1; so ist zu zeigen, dass auch $|A_1 = [A_1 B_1] B_1$ sei. Da nun A und B zusammen alle Grössen $a, b, \ldots$ des Normalsystems und zwar jede dieser Grössen nur einmal enthalten sollen, so kommen a und b *entweder beide in* A, *oder beide in* B, *oder eine in* A *und die andere in* B *vor.*

Wir haben schon in 156 bewiesen, dass das Produkt $[a_1 b_1]$ bei dieser Aenderung gleich $[ab]$ bleibt; somit bleibt in den *beiden ersten Fällen* sowohl A als B unverändert, also bleibt dann auch die obige Gleichung, die nur A und B enthält, bestehen.

Im *dritten Falle* sei a in A enthalten, b in B, und sei A' die Grösse, die aus A hervorgeht, wenn man darin b statt a setzt, und B' die Grösse, welche aus B hervorgeht, wenn man darin a statt b setzt. Dann unterscheiden sich die kombinatorischen Produkte $[A'B']$ und $[AB]$ nur durch gegenseitige Vertauschung der beiden einfachen Faktoren a und b, folglich ist dann (nach 55) $[A'B'] = -[AB]$. Ferner ist dann

$$A_1 = xA + yA', \quad B_1 = xB - yB',$$

folglich

$$|A_1 = x|A + y|A' \qquad [101].$$

Da nun A und A' nur Grössen des Normalsystems $a, b, c, \ldots$ als einfache Faktoren enthalten, und B und B' die jedesmal übrigen, so gilt (nach der Annahme) für sie die obige Gleichung (*), das heisst, es ist

$$|A = [AB]B, \quad |A' = [A'B']B' = -[AB]B',$$

letzteres, weil $[A'B'] = -[AB]$ war; somit ist

$$|A_1 = x[AB]B - y[AB]B' = [AB](xB - yB') = [AB]B_1.$$

Endlich ist (nach 156) $[A_1 B_1] = [AB]$, indem die einfachen

Faktoren von $[A_1 B_1]$ aus denen von $[AB]$ durch positive circuläre Aenderung hervorgehen. Also ist

$$|A_1 = [A_1 B_1] B_1,$$

das heisst, wenn die Gleichung (*) für irgend ein Normalsystem gilt, so gilt sie auch für jedes daraus durch *positive* circuläre † Aenderung 122 hervorgehende, ebenso aber auch für jedes daraus durch *negative* Aenderung hervorgehende. Denn die positive circuläre Aenderung, wie wir sie oben annahmen, wird (nach 154) in eine negative verwandelt, wenn man das Vorzeichen von b_1 ändert, dann ändert sich auch das Vorzeichen von B_1, wobei die gefundene Gleichung bestehen bleibt.

Also bleibt die Gleichung (*) überhaupt bei jeder circulären Aenderung des Normalsystems bestehen, wenn sie für irgend ein Normalsystem gilt. Nach Beweis 1 gilt sie aber für das Normalsystem der ursprünglichen Einheiten, also nun auch für jedes daraus circulär abgeleitete. Nun lässt sich aber (nach 161) jedes Normalsystem, dessen numerischer Werth 1 ist, aus jenem ableiten, also gilt die Gleichung für jedes Normalsystem, dessen numerischer Werth 1 ist.

168. *Alle bisher aufgestellten Sätze gelten noch, wenn man statt des Systems der ursprünglichen Einheiten ein beliebiges vollständiges Normalsystem setzt, dessen numerischer Werth Eins ist.*

Beweis. Alle in den ersten drei Kapiteln entwickelten Rechnungsgesetze gelten (nach 110) auch dann noch, wenn man statt der n ursprünglichen Einheiten beliebige n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe setzt, also auch, wenn man die Grössen eines vollständigen Normalsystems einsetzt. Ferner gilt (nach 167) der Begriff der Ergänzung, wie er in 89 in Bezug auf das System der ursprünglichen Einheiten aufgestellt ist, auch in Bezug auf jedes Normalsystem, dessen numerischer Werth Eins ist. Aber auf diesem Begriff der Ergänzung und den in den ersten drei Kapiteln entwickelten Rechnungsgesetzen beruhen alle Sätze des inneren Produktes, wie sie bisher entwickelt wurden. Also gelten diese Sätze noch, wenn man statt des Systems der ursprünglichen Einheiten ein Normalsystem setzt, dessen numerischer Werth Eins ist.

Anm. Vermöge des soeben bewiesenen Satzes ist also der Begriff des inneren Produktes in sofern nicht mehr an das System der ursprünglichen Einheiten geknüpft, als man statt dieses Systems ein beliebiges {vollständiges} Normalsystem setzen kann, dessen numerischer Werth Eins ist, ohne dass irgend einer der bisher aufgestellten Sätze eine Aenderung † erleidet. Es erscheint also der Be- 123 griff des inneren Produktes nur noch an den Begriff des Normalsystems geknüpft, und dies tritt daher in den folgenden Entwickelungen statt des Systems der ursprünglichen Einheiten hervor.

169. *Das innere Produkt zweier {einfacher} Grössen ändert seinen Werth nicht, wenn man statt des einen Faktors seine {progressive} normale Zurückleitung auf das Gebiet des andern setzt, das heisst*

$$[A|B] = [A|B']$$

und

$$[B|A] = [B'|A],$$

wenn B' die progressive normale Zurückleitung von B auf das Gebiet A ist (also A von gleicher oder höherer Stufe als B ist).

{Beweis.} Es sei A von m-ter Stufe, B von p-ter, das Hauptgebiet von n-ter, so kann man (nach 163) ein vollständiges Normalsystem $a_1, \dots a_n$ so annehmen, dass m seiner Grössen, etwa $a_1, \dots a_m$, in A liegen, und sein numerischer Werth 1 sei. Die p Faktoren von B sind dann (nach 157) aus $a_1, \dots a_n$ numerisch ableitbar, also B aus den multiplikativen Kombinationen von $a_1, \dots a_n$ zur p-ten Klasse numerisch ableitbar. Diese Kombinationen seien $B_1, B_2, \dots B_q, B_{q+1}, \dots B_r$, wo $B_1, \dots B_q$ die Kombinationen aus $a_1, \dots a_m$ sind, und sei

$$B = \beta_1 B_1 + \cdots + \beta_q B_q + \beta_{q+1} B_{q+1} + \cdots + \beta_r B_r,$$

so sind (nach 147 und 168) $[A|B_{q+1}], \dots [A|B_r]$ alle gleich Null, da jede der Grössen B_{q+1} bis B_r solche Faktoren enthält, die in A nicht vorkommen, und diese Grössen also der Grösse A nicht incident sind, also wird

$$[A|B] = \beta_1 [A|B_1] + \cdots + \beta_q [A|B_q]$$
$$= [A|(\beta_1 B_1 + \cdots + \beta_q B_q)].$$

Aber (nach 127) ist $\beta_1 B_1 + \cdots + \beta_q B_q$ die Zurückleitung von B auf das Gebiet $[a_1 \dots a_m]$, mit Ausschluss des Gebietes $[a_{m+1} \dots a_n]$, letzteres Gebiet ist aber (nach 167) {die} Ergänzung des ersteren; also ist {nach 164} $\beta_1 B_1 + \cdots + \beta_q B_q$ die normale Zurückleitung von B auf das Gebiet $[a_1 \dots a_m]$, das heisst, auf das Gebiet von A, also gleich B', und somit

$$[A|B] = [A|B'].$$

Aus gleichem Grunde ist $[B|A] = [B'|A]$.

170. *Wenn man in einem inneren Produkte zweier {einfacher} gleichstufiger Grössen die eine auf das Gebiet der andern normal zurück-* 124 *leitet, und diese Zurückleitung so wie die Grösse, † auf deren Gebiet zurückgeleitet ist, durch ein und dasselbe Maass misst, dessen numerischer Werth Eins ist, so ist das Produkt der beiden Messungs-Quotienten gleich dem gegebenen inneren Produkt, das heisst*

$$[A|B] = \alpha\beta',$$

wenn $A = \alpha E$, *und die normale Zurückleitung* B' *von* B *auf* A *gleich* $\beta' E$, *und der numerische Werth von* E *gleich Eins ist.*

Beweis. Nach 169 ist

$$[A|B] = [A|B'].$$

Es sei E ein Gebietstheil von A, dessen numerischer Werth Eins ist, und sei $A = \alpha E$, $B' = \beta' E$, so ist $[A|B'] = \alpha\beta'[E|E] = \alpha\beta' E^2 = \alpha\beta'$, da $E^2 = 1$ ist.

171. *Wenn die Gebiete von {zwei einfachen Grössen}* A *und* B *zu einander allseitig normal sind, und* C *eine beliebige Grösse von niederer oder gleicher Stufe wie* B *ist, so ist*

$$[AB|AC] = A^2[B|C]$$

und

$$[CA|BA] = A^2[C|B].$$

Beweis. Es sei ein Normalsystem angenommen, dessen Grössen sich auf die Gebiete A und B vertheilen, und dessen numerischer Werth 1 ist, und sei dasselbe zu einem vollständigen Normalsysteme ergänzt; so ist C aus den multiplikativen Kombinationen der Grössen jenes Normalsystems (69, 77) numerisch ableitbar. Es sei $C = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots$, ferner sei $A = \alpha A_1$, $B = \beta B_1$, wo A_1, B_1 kombinatorische Produkte der Grössen des Normalsystems sind, so ist

$$\begin{aligned}[AB|AC] &= \alpha^2\beta[A_1B_1|A_1(\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots)] \\ &= \alpha^2\beta\gamma_1[A_1B_1|A_1C_1] + \alpha^2\beta\gamma_2[A_1B_1|A_1C_2] + \cdots.\end{aligned}$$

{Man kann nun zeigen, dass die Produkte $[A_1B_1|A_1C_r]$ allen Bedingungen der ersten Formel des Satzes 149 genügen. Es sei n die Stufenzahl des Hauptgebietes und A_1 das Produkt von m Grössen $a_1, \ldots a_m$ des Normalsystems. Dann gehören (nach 159) sämmtliche Grössen erster Stufe, die zu $a_1, \ldots a_m$ normal sind, dem Gebiete der $n - m$ übrigen Grössen $a_{m+1}, \ldots a_n$ dieses Normalsystems an. Das Gebiet von B_1, das nach Voraussetzung zu dem von A_1 allseitig normal ist, wird daher (nach 152) von dem Gebiete dieser $n - m$ Grössen umfasst werden müssen. Die Summe der Stufenzahlen von A_1 und B_1 kann also höchstens $= m + n - m$, das heisst höchstens $= n$ sein, das Produkt $[A_1B_1]$ ist somit nothwendig *progressiv*. Es ist aber auch *von Null verschieden* (nach 109), weil die Gebiete der Grössen A_1 und B_1 keine Grösse erster Stufe mit einander gemein haben. Da nämlich die Gebiete von A_1 und B_1 zu einander allseitig normal sind, so ist (nach 152) jede Grösse erster Stufe des Gebietes von A_1 zu jeder Grösse erster Stufe des Gebietes von B_1 normal. Hätten also die beiden Gebiete eine von Null verschiedene Grösse erster Stufe gemein, so

müsste diese Grösse zu sich selbst normal, ihr inneres Quadrat also null sein, was (nach 146) für eine von Null verschiedene Grösse unmöglich ist. Ausserdem ist nach der Voraussetzung B von höherer oder gleicher Stufe wie C, also auch B_1 *von höherer oder gleicher Stufe wie* C_r. Endlich bleibt (nach 168) der zunächst für *Einheiten höherer Stufe*, das heisst für kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten bewiesene Satz 149 auch noch gültig, wenn an die Stelle der Einheitsprodukte *kombinatorische Produkte der Grössen eines einfachen Normalsystems* treten, also in unserm Falle; das heisst, es ist

$$[A_1 B_1 | A_1 C_r] = [B_1 | C_r],$$

für $r = 1, 2, \ldots$}. Somit wird

$$\begin{aligned}[AB|AC] &= \alpha^2\beta\gamma_1[B_1|C_1] + \alpha^2\beta\gamma_2[B_1|C_2] + \cdots \\ &= \alpha^2\beta[B_1|(\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots)] \\ &= \alpha^2\beta[B_1|C].\end{aligned}$$

Da nun {nach 142 und 168} A_1^2 gleich 1 ist, weil A_1 ein kom- 125 binatorisches † Produkt von Grössen eines einfachen Normalsystems ist, so ist der gefundene Ausdruck

$$\begin{aligned}&= \alpha^2\beta A_1^2[B_1|C] = (\alpha A_1)^2[\beta B_1|C] \\ &= A^2[B|C].\end{aligned}$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich die zweite Formel des Satzes.

172. *Wenn {die einfache Grösse} A mit A von gleicher Stufe, {die einfache Grösse}. B aber von gleicher oder höherer Stufe wie B ist, und $[AB]$ nicht verschwindet, {und wenn endlich $[AB]$ und $[\mathsf{AB}]$ progressive Produkte sind,} so ist*

(a) $$[AB|\mathsf{AB}] = [A|\mathsf{A}][B\,\mathsf{B}] + [A_1|\mathsf{A}][B_1|\mathsf{B}] + \cdots$$

und

(b) $$[\mathsf{BA}|BA] = [\mathsf{B}|B][\mathsf{A}|A] + [\mathsf{B}|B_1][\mathsf{A}|A_1] + \cdots,$$

wo $A, A_1, \ldots$ {alle} die multiplikativen Kombinationen aus den einfachen Faktoren (erster Stufe) von $[AB]$ {sind, deren Stufenzahl gleich der von A ist}, und {wo} $B, B_1, \ldots$ die zu $A, A_1, \ldots$ ergänzenden Kombinationen sind, (so dass also $[AB] = [A_1 B_1] = \cdots$).

Anm. Wenn nämlich A eine der multiplikativen Kombinationen aus $a_1, a_2, \ldots a_m$ ist, so nenne ich diejenige multiplikative Kombination B, welche die sämmtlichen in A nicht enthaltenen Elemente {aus der Reihe $a_1, \ldots a_m$} enthält, und mit einem solchen Vorzeichen $(\pm)$ versehen ist, dass $[AB] = [a_1 a_2 \ldots a_m]$ ist, die zu A ergänzende Kombination.

Beweis. 1. {Es seien *zuerst* die einfachen Faktoren von $[AB]$ alle zu einander normal und sei das System dieser Faktoren $a_1, \ldots a_m$ durch Hinzufügung der Grössen $a_{m+1}, \ldots a_n$ zu einem vollständigen Normalsystem ergänzt; es seien ferner $A, A_1, \ldots A_q, A_{q+1}, \ldots A_t$ diejenigen multiplikativen Kombinationen aus $a_1, a_2, \ldots a_n$, deren Stufenzahl gleich der von A ist, und seien ins besondere $A, A_1, \ldots A_q$ die Kombinationen aus den m ersten Grössen $a_1, \ldots a_m$. Dann ist A, da es mit A von gleicher Stufe ist, aus den multiplikativen Kombinationen $A, A_1, \ldots A_t$ numerisch ableitbar. Es sei

$$\mathsf{A} = \alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_q A_q + \alpha_{q+1} A_{q+1} + \cdots + \alpha_t A_t,$$

so ist

$$\begin{aligned}[AB|\mathsf{AB}] &= [AB|(\alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_q A_q + \alpha_{q+1} A_{q+1} + \cdots + \alpha_t A_t)\mathsf{B}] \\ &= \alpha[AB|A\mathsf{B}] + \alpha_1[AB|A_1\mathsf{B}] + \cdots + \alpha_q[AB|A_q\mathsf{B}] + \\ &\quad + \alpha_{q+1}[AB|A_{q+1}\mathsf{B}] + \cdots + \alpha_t[AB|A_t\mathsf{B}].\end{aligned}$$

Diese Entwickelung vereinfacht sich aber noch; denn es lässt sich zeigen, dass die Glieder der letzten Zeile sämmtlich verschwinden.

Denkt man sich nämlich aus den Grössen $a_1, \ldots a_n$ auch noch die multiplikativen Kombinationen B_i gebildet, deren Stufenzahl mit der von B übereinstimmt, und B als Vielfachensumme der B_i dargestellt, so gehen aus den Gliedern der letzten Zeile unserer Entwickelung lauter Glieder hervor von der Form

$$\alpha_{q+k}\beta_i[AB|A_{q+k}\mathsf{B}_i].$$

Hier enthalten aber die A_{q+k} sämmtlich als Faktor eine der Grössen $a_{m+1}, \ldots a_n$, die in dem Produkte $[AB]$ *nicht* vorkommen, also gilt dasselbe auch von den Produkten $[A_{q+k}\mathsf{B}_i]$, die ja der Voraussetzung zufolge progressiv sind. Diese Produkte sind also dem Produkte $[AB]$ *nicht untergeordnet*. Sie sind ihm aber auch *nicht übergeordnet*; denn, da nach Voraussetzung B von gleicher oder niederer Stufe mit B ist, so muss jedem Produkte $[A_{q+k}\mathsf{B}_i]$ mindestens ein Faktor von $[AB]$ fehlen. Die Produkte $[A_{q+k}\mathsf{B}_i]$ sind also mit $[AB]$ *nicht incident*, und es ist somit (nach 147 und 168) allgemein

$$[AB|A_{q+k}\mathsf{B}_i] = 0.$$

Die obige Entwickelung vereinfacht sich daher zu der folgenden}

$$[AB|\mathsf{AB}] = \alpha[AB|A\mathsf{B}] + \alpha_1[AB|A_1\mathsf{B}] + \cdots + \alpha_q[AB|A_q\mathsf{B}].$$

Da nun (nach der Annahme) $[AB] = [A_1B_1] = \cdots$ ist, so erhalten wir den gefundenen Ausdruck

$$= \alpha[AB|A\mathsf{B}] + \alpha_1[A_1B_1|A_1\mathsf{B}] + \cdots + \alpha_q[A_qB_q|A_q\mathsf{B}].$$

Da nun die einfachen Faktoren von $[AB]$ alle zu einander normal sind, und identisch sind mit denen von $\mp [A_1 B_1], \ldots$ (nach der Annahme), so ist A zu B allseitig normal {nach 152, 158}, und ebenso A_1 zu $B_1, \ldots$. Folglich ist (nach 171) der zuletzt gewonnene Ausdruck

$$= \alpha A^2 [B|\mathsf{B}] + \alpha_1 A_1^2 [B_1|\mathsf{B}] + \cdots + \alpha_q A_q^2 [B_q|\mathsf{B}].$$

126 Nun ist aber

$$[A_r|\mathsf{A}] = [A_r|(\alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_t A_t)] = \alpha_r A_r^2,$$

weil A_r mit den Grössen $A, A_1, \ldots$, ausgenommen A_r, innerlich multiplicirt, Null giebt (nach 147, 168). Also kann man in dem vorher gefundenen Ausdruck $[A_r|\mathsf{A}]$ statt $\alpha_r A_r^2$ setzen, und jener Ausdruck wird

$$= [A|\mathsf{A}][B|\mathsf{B}] + [A_1|\mathsf{A}][B_1|\mathsf{B}] + \cdots + [A_q|\mathsf{A}][B_q|\mathsf{B}],$$

das heisst, die Formel (a) gilt für unsere Voraussetzung.

2. Nun zeige ich {*zweitens*}, dass, wenn die Formel (a) für irgend eine Reihe von einfachen Faktoren gilt, aus denen $[AB]$ besteht, sie auch noch bestehen bleibt, wenn man diese Faktorenreihe lineal ändert (siehe 71), das heisst, statt irgend eines Faktors a setzt $a + \beta b$, wo b einer der andern Faktoren und β eine Zahl ist.

Hierbei behält (nach 72) das Produkt $[AB]$, also auch die linke Seite unserer Formel, denselben Werth. Betrachtet man nun irgend ein Glied der rechten Seite, zum Beispiel $[A_r|\mathsf{A}][B_r|\mathsf{B}]$, so können a und b entweder beide in A_r vorkommen, oder beide in B_r, oder eins in A_r, das andere in B_r. In den beiden ersten Fällen bleibt sowohl der Werth von A_r als der von B_r unverändert, also auch das betrachtete Glied. Im letzten Falle kommt {in der obigen Entwickelung} noch ein anderes Glied $[A_s|\mathsf{A}][B_s|\mathsf{B}]$ vor von der Art, dass A_r und A_s im Uebrigen dieselben Faktoren enthalten, nur dass, wo das eine dieser Produkte den Faktor a enthält, das andere den Faktor b enthalte. Dann stehen B_r und B_s, da sie die jedesmal dem A_r und A_s fehlenden Faktoren enthalten, in derselben gegenseitigen Beziehung zu einander. Es kommt also a in einer der Grössen A_r und A_s vor; es mag a in A_r vorkommen.

Nun sei A' die Grösse, welche aus A_r hervorgeht, indem man darin b statt a setzt, und B' die Grösse, welche aus B_r hervorgeht, indem man darin a statt b setzt. Dann enthält also A' dieselben Faktoren wie A_s und B' wie B_s; es sind also dann A' und B' (nach 57) den Grössen A und B_s entweder gleich oder entgegengesetzt. Da $[A'B']$ aus $[A_r B_r]$ durch Vertauschung der beiden einfachen Faktoren a und b hervorgeht, so ist (nach 55) $[A'B'] = -[A_r B_r]$, und dies $= -[A_s B_s]$ (nach der Annahme). Wenn also $A' = \mp A_s$ ist, so ist

$B' = \pm B_s$. Wenn man nun die lineale Substitution von $a + \beta b$ für a einführt, so verwandelt sich

$$[A_r|\mathsf{A}][B_r|\mathsf{B}] + [A_s|\mathsf{A}][B_s|\mathsf{B}] = [A_r|\mathsf{A}][B_r|\mathsf{B}] - [A'|\mathsf{A}][B'|\mathsf{B}]$$ 127

in

$$[(A_r + \beta A')|\mathsf{A}][B_r|\mathsf{B}] - [A'|\mathsf{A}][(B' + \beta B_r)|\mathsf{B}],$$

weil nämlich B_r und A' kein a enthalten und also unverändert bleiben, während A_r in $A_r + \beta A'$ und B' in $B' + \beta B_r$ sich verwandelt. Also verwandelt sich jene Summe in

$$[A_r|\mathsf{A}][B_r|\mathsf{B}] - [A'|\mathsf{A}][B'|\mathsf{B}] + \beta[A'|\mathsf{A}][B_r|\mathsf{B}] - \beta[A'|\mathsf{A}][B_r|\mathsf{B}],$$

das heisst, da die letzten Glieder sich aufheben, der Werth jener Summe bleibt ungeändert. Es bleibt somit die ganze rechte Seite unserer Formel bei jener linealen Substitution ungeändert, indem die Glieder entweder einzeln ungeändert bleiben oder, wenn sie geändert werden, sich zu Gliederpaaren gruppiren, deren Summen ungeändert bleiben. Da somit beide Seiten der Formel bei linealer Substitution ungeändert bleiben, so bleibt die Formel, wenn sie für irgend eine Faktorreihe gilt, auch bei deren linealer Aenderung bestehen.

3. Es sei endlich die Faktorreihe $a, b, \ldots$ eine ganz beliebige, doch ihr kombinatorisches Produkt $[AB]$ nicht null, so lässt sich (nach 163) stets eine Reihe zu einander normaler Grössen erster Stufe $a_1, a_2, \ldots$ angeben, von der Art, dass $[ab\ldots] = [a_1 a_2 \ldots]$. Dann lässt sich aber (nach 76) die Grössenreihe $a, b, \ldots$ aus $a_1, a_2, \ldots$ durch lineale Aenderung ableiten. Nun gilt nach Beweis 1 unsere Formel (a) für die Reihe der zu einander normalen Faktoren $a_1, a_2, \ldots$, also nach Beweis 2 auch für die durch fortgesetzte lineale Aenderung daraus hervorgehende Faktorreihe $a, b, \ldots$, das heisst allgemein.

{Auf gleiche Weise ergiebt sich die Formel (b) des Satzes 172.}

173. *Wenn A und A von gleicher Stufe sind, ebenso B und $\mathsf{B}, \ldots$, endlich L und Λ, M aber von gleicher oder höherer Stufe ist wie M und $[AB\ldots LM]$ ein nicht verschwindendes kombinatorisches Produkt von Grössen erster Stufe ist, so ist*

$$[AB\ldots LM|\mathsf{AB}\ldots\Lambda\mathsf{M}] = \Sigma[A_a|\mathsf{A}][B_b|\mathsf{B}]\ldots[L_l|\Lambda][M_m|\mathsf{M}],$$

wo $[A_a B_b \ldots L_l M_m]$ dieselben einfachen Faktoren enthält wie $[AB\ldots LM]$, nur in anderer Folge, doch in der Art, dass beide Produkte einander gleich sind, wo ferner A_a ebenso viel Faktoren enthält wie A, B_b wie $B, \ldots$, und wo endlich † die Summe sich auf alle möglichen verschie- 128 *denen Ausdrücke dieser Art bezieht, so dass nämlich $A_a B_b \ldots L_l M_m$ und $A_{a'} B_{b'} \ldots L_{l'} M_{m'}$ als verschiedene Ausdrücke gelten, wenn wenigstens eins der Grössenpaare A_a und $A_{a'}$, B_b und $B_{b'}, \ldots$ aus zwei Grössen besteht, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen.*

Beweis. 1. Für zwei Faktoren ist der Satz in 172 bewiesen, wir können nämlich die Formel 172 auch in folgender Weise schreiben

(*) $$[AB|\mathrm{AB}] = \Sigma[A_a|\mathrm{A}][B_b|\mathrm{B}],$$

wo {die} A_a, B_b die im Satze dargestellte Bedeutung haben, welche mit der Bedeutung der Grössenpaare $A, B, A_1, B_1, \ldots$ in 172 zusammenfällt.

2. Durch wiederholte Anwendung des Satzes für zwei Faktoren gelangt man zu dem Satze für beliebig viele Faktoren. In der That kann man das Produkt $[AB \ldots LM]$ zunächst als aus den zwei Faktoren A und $[BC \ldots LM]$ bestehend ansehen. Dann wird

$$[AB \ldots LM|\mathrm{AB} \ldots \Lambda\mathrm{M}] = [A(BC \ldots LM)|\mathrm{A}(\mathrm{B}\Gamma \ldots \Lambda\mathrm{M})]$$
$$= \Sigma[A_a|\mathrm{A}][(BC \ldots LM)_b|\mathrm{B}\Gamma \ldots \Lambda\mathrm{M}],$$

wo der Index b unter der Klammer andeuten soll, dass der in der Klammer stehende Ausdruck als Eine Grösse, gemäss der Formel (*) behandelt werden soll. Der gefundene Ausdruck ist aus demselben Grunde wieder

$$= \Sigma[A_a|\mathrm{A}][B_b|\mathrm{B}][(CD \ldots LM)_c|\Gamma\Delta \ldots \Lambda\mathrm{M}],$$

und setzt man dies fort, so erhält man ihn zuletzt

$$= \Sigma[A_a|\mathrm{A}][B_b|\mathrm{B}] \ldots [L_l|\Lambda][M_m|\mathrm{M}].$$

Anm. Die gesammte Schaar der Grössenreihe A_a, B_b, ... M_m kann man auf folgende Weise kombinatorisch entwickeln: Man betrachtet die einfachen Faktoren des Produktes $[AB \ldots]$ als kombinatorische Elemente, entwickelt aus ihnen die multiplikativen Kombinationen zur so vielten Klasse, als die Stufe von A beträgt, so erhält man die Grössen A_a; zu jeder derselben entwickelt man die multiplikativen Kombinationen aus den in ihr nicht vorkommenden Elementen zur so vielten Klasse, als die Stufe von B beträgt, so erhält man zu jedem A_a die sämmtlichen zugehörigen Grössen B_b, und so fort; endlich die letzten dieser multiplikativen Kombinationen, die zu der Grösse M gehören, setzt man gleich $\mp M_m$, wobei man das Vorzeichen so bestimmt, dass

$$[A_a B_b \ldots M_m] = [AB \ldots M]$$

wird.

129 Zum Beispiel, wenn $A = [ab]$, $B = [cd]$, $+ C = M = e$ ist, so erhält man folgende Schaar von je drei Grössen, von denen jedesmal die erste eine Grösse A_a, die zweite eine zugehörige Grösse B_b, die dritte die zu beiden gehörige Grösse C_c darstellt:

ab, cd, e	ad, bc, e	bc, ad, e	be, ac, d	$ce, ab, -d$
$ab, ce, -d$	$ad, be, -c$	$bc, ae, -d$	$be, ad, -c$	ce, ad, b
ab, de, c	ad, ce, b	bc, de, a	be, cd, a	$ce, bd, -a$
$ac, bd, -e$	$ae, bc, -d$	$bd, ac, -e$	cd, ab, e	de, ab, c
ac, be, d	ae, bd, c	bd, ae, c	$cd, ae, -b$	$de, ac, -b$
$ac, de, -b$	$ae, cd, -b$	$bd, ce, -a$	cd, bc, a	$de, bc, a.$

174. Zusatz. *Wenn in dem inneren Produkte*

$$[AB \ldots|\mathrm{AB} \ldots]$$

die Grössen A und A von gleicher Stufe sind, ebenso B und B, und so fort, {wenn ferner $A, B, \ldots$ einfache Grössen sind und $[AB\ldots]$ ein äusseres Produkt,} so ist

$$[AB\ldots|\mathsf{A}\mathsf{B}\ldots] = \frac{[A'B'\ldots]}{[AB\ldots]},$$

wo

$$A' = \Sigma[A_r|\mathsf{A}]A_r, \quad B' = \Sigma[B_r|\mathsf{B}]B_r, \ \ldots,$$

und wo die A_r die multiplikativen Kombinationen aus den einfachen Faktoren des äusseren Produktes $[AB\ldots]$ zur so vielten Klasse sind, als die Stufenzahl von A beträgt, und entsprechend die B_r, und so weiter.

Beweis. Nach 173 ist

$$[AB\ldots|\mathsf{A}\mathsf{B}\ldots] = \Sigma[A_a|\mathsf{A}][B_b|\mathsf{B}]\ldots,$$

wo

$$[A_aB_b\ldots] = [AB\ldots]$$

ist, mit den näheren in 173 angegebenen Bestimmungen.

Da nun A mit A von gleicher Stufe ist, also auch A_a mit A, so ist (nach 141) $[A_a|\mathsf{A}]$ eine Zahl und aus gleichem Grunde $[B_b|\mathsf{B}], \ldots$. Folglich können wir statt $\Sigma[A_a|\mathsf{A}][B_b|\mathsf{B}]\ldots$ schreiben

$$= \sum \frac{[A_a|\mathsf{A}][B_b|\mathsf{B}]\ldots[A_aB_b\ldots]}{[A_aB_b\ldots]}.$$

Also, da $[A_aB_b\ldots]$ gleich $[AB\ldots]$ ist,

$$= \Sigma[A_a|\mathsf{A}][B_b|\mathsf{B}]\ldots[A_aB_b\ldots] : [AB\ldots].$$

Oder, da (nach 46) die Zahlfaktoren beliebigen Faktoren eines Produktes zugeordnet werden können,

$$= \Sigma([A_a|\mathsf{A}]A_a \,.\, [B_b|\mathsf{B}]B_b\ldots) : [AB\ldots].$$

Hier enthält (nach 173) jedes Produkt $[A_aB_b\ldots]$ dieselben Faktoren erster Stufe wie $[AB\ldots]$, also enthält in jedem derselben A_a andere als B_b, und so weiter. Da nun aber die Produkte, in denen {irgend zwei der Grössen} A_a, B_b, ... gleiche Faktoren erster Stufe enthalten, † null sind, so können wir diese Produkte zu dem obigen Ausdrucke hinzufügen, und erhalten dann denselben (nach 45) 130

$$= \left[\Sigma[A_r|\mathsf{A}]A_r \,.\, \Sigma[B_r|\mathsf{B}]B_r\ldots\right] : [AB\ldots],$$

das heisst

$$= \frac{[A'B'\ldots]}{[AB\ldots]}.$$

175. *Das innere Produkt zweier Grössen m-ter Stufe A und B, deren jede aus m einfachen Faktoren besteht, ist gleich der Determinante aus m Reihen von je m Gliedern, die man erhält, indem man nach der Ordnung jeden einfachen Faktor von A mit jedem von B zu einem inneren Produkte verknüpft, das heisst, es ist*

$$[abc\ldots|a'b'c'\ldots] = \textit{Determ.}\left\{\begin{matrix}[a|a'], & [a|b'], & [a|c'], & .\\ [b|a'], & [b|b'], & [b|c'], & .\\ [c|a'], & [c|b'], & [c|c'], & .\\ . & . & . & .\end{matrix}\right.$$

$$= \Sigma \mp (\alpha\beta_1\gamma_2\ldots),$$

wo

$$\begin{aligned}\alpha &= [a|a'], & \alpha_1 &= [a|b'], & \alpha_2 &= [a|c'], \ldots\\ \beta &= [b|a'], & \beta_1 &= [b|b'], & \beta_2 &= [b|c'], \ldots\\ \gamma &= [c|a'], & \gamma_1 &= [c|b'], & \gamma_2 &= [c|c'], \ldots\\ . & & . & & . & \ldots\end{aligned}$$

Beweis. Nach 174 ist

$$[abc\ldots|a'b'c'\ldots] = \frac{[a_1b_1c_1\ldots]}{[abc\ldots]},$$

wo

$$\begin{aligned}a_1 &= [a|a']a + [b|a']b + [c|a']c + \cdots = \alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots\\ b_1 &= [a|b']a + [b|b']b + [c|b']c + \cdots = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \cdots\\ c_1 &= [a|c']a + [b|c']b + [c|c']c + \cdots = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \cdots\\ . &\quad . \quad . \quad . \quad \ldots \quad . \quad . \quad . \quad \ldots\end{aligned}$$

ist. Aber (nach 63) ist

$$[(\alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots)(\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \cdots)(\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \cdots)\cdots]$$
$$= \Sigma \mp (\alpha\beta_1\gamma_2\ldots).[abc\ldots].$$

Also

$$[abc\ldots|a'b'c'\ldots] = \frac{[a_1b_1c_1\ldots]}{[abc\ldots]} = \frac{\Sigma\mp(\alpha\beta_1\gamma_2\ldots).[abc\ldots]}{[abc\ldots]}$$
$$= \Sigma \mp (\alpha\beta_1\gamma_2\ldots).$$

176—179. Zusätze. *Ins Besondere ist*

176. $[ab|a'b'] = [a|a'][b|b'] - [a|b'][b|a']$,

177. $[ab]^2 = a^2b^2 - [a|b]^2$,

131 **178.** $[abc]^2 = a^2b^2c^2 - a^2[b|c]^2 - b^2[c|a]^2 - c^2[a|b]^2 +$
$+ 2[a|b][b|c][c|a]$.

179. $$[abcd]^2 = \textit{Determ.}\left\{\begin{matrix}a^2, & [a|b], & [a|c], & [a|d],\\ [b|a], & b^2, & [b|c], & [b|d],\\ [c|a], & [c|b], & c^2, & [c|d],\\ [d|a], & [d|b], & [d|c], & d^2.\end{matrix}\right.$$

180. $[ab|c] = [a|c]b - [b|c]a$,

181. $[abc|d] = [a|d][bc] + [b|d][ca] + [c|d][ab]$,

182. $[abcd|e] = [a|e][bcd] + [b|e][cad] + [c|e][abd] + [d|e][cba]$.

Denn in 180 bis 182 kann man den zweiten Faktor des inneren Produktes (c, d oder e) als Produkt betrachten, dessen zweiter Faktor 1 ist (also $c.1$, $d.1$ oder $e.1$), und kann dann Nr. 173 anwenden; wobei man zu beachten hat, dass nach den Gesetzen kombinatorischer Multiplikation

$$[ab] = -[ba], \quad [a.bc] = [b.ca] = [c.ab]$$

und

$$[a.bcd] = [b.cad] = [c.abd] = [d.cba]$$

ist.

183. *Wenn man aus einer Reihe von (n) Grössen erster Stufe die multiplikativen Kombinationen zu irgend einer Klasse bildet, und jede derselben mit der ergänzenden Kombination zu einem inneren Produkte verknüpft, so ist die Summe dieser Produkte null, das heisst*

$$[A|B] + [A_1|B_1] + \cdots = 0,$$

wenn A, A_1, ... die multiplikativen Kombinationen aus den n Grössen erster Stufe a_1, a_2, ... a_n zu irgend einer (der m-ten) Klasse, und B, B_1, ... die ergänzenden Kombinationen sind.

Beweis. 1. Es sei zuerst angenommen $m \gtreqless n - m$. Da nun A eine der multiplikativen Kombinationen von a_1, ... a_n ist, so wird es die Form haben

$$A = [a_r a_s \ldots a_z],$$

wo r, s, ... z beliebige m verschiedene unter den Zahlen $1, \ldots n$ sind. Da ferner B die ergänzende Kombination zu A ist, so muss es als Faktoren diejenigen $n - m$ unter den Grössen a_1, ... a_n enthalten, welche unter den Grössen a_r, a_s, ... a_z nicht vorkommen. Es seien dies $a_{r'}$, $a_{s'}$, ... $a_{u'}$, so dass also

$$B = (-1)^p [a_{r'} a_{s'} \ldots a_{u'}]$$

ist. Ferner muss das durch $(-1)^p$ angedeutete Vorzeichen (nach 172, Anm.) so bestimmt werden, dass $[AB] = [a_1 \ldots a_n]$ wird, das heisst, dass

$$(*) \qquad (-1)^p [a_r a_s \ldots a_u a_v \ldots a_z a_{r'} a_{s'} \ldots a_{u'}] = [a_1 a_2 \ldots a_n] \qquad 132$$

ist. {Es wird also

$$[A|B] = (-1)^p [a_r a_s \ldots a_u a_v \ldots a_z | a_{r'} a_{s'} \ldots a_{u'}]$$

sein.} Von gleicher Form sind die sämmtlichen übrigen Produkte $[A_1|B_1]$, ... Sollen die Kombinationen A, B, A_1, B_1, ... wohlgeordnete sein, so hat man noch die Bedingungen hinzuzufügen, dass $r < s < \cdots < u < v < \cdots < z$ und $r' < s' < \cdots < u'$ sei. Fügen wir diese Bedingung hinzu, so wird

$$[A|B] + [A_1|B_1] + \cdots = \Sigma(-1)^p [a_r a_s \ldots a_u a_v \ldots a_z | a_{r'} a_{s'} \ldots a_{u'}].$$

Fassen wir hier a_v, ... a_z zu einem Faktor zusammen und fügen

dem zweiten Faktor des inneren Produktes an letzter Stelle noch den Faktor 1 hinzu, so wird die Bedingung von Nr. 173 erfüllt, also wird der obige Ausdruck

(**) $[A|B]+[A_1\, B_1]+\cdots=\Sigma(-1)^p[a_r\, a_{r'}][a_s|a_{s'}]\ldots[a_u\, a_{u'}][a_v a_w\ldots a_z]$,

wobei noch die Gleichung (*) bestehen bleibt, und auch die Bedingungen $r'<s'<\cdots<u'$ und $v<w<\cdots<z$ geltend bleiben, hingegen die Bedingung, dass $r<s<\cdots<u$ sei, wegfällt, und die Summe sich auf alle unter jenen Bedingungen möglichen Glieder bezieht.

Ich zeige nun, dass in dieser Summe alle Glieder paarweise einander entgegengesetzt sind, und sich also heben.

Es sei irgend eins dieser Glieder betrachtet, etwa

$$(-1)^p[a_r|a_{r'}][a_s|a_{s'}]\ldots[a_u\, a_{u'}][a_v a_w\ldots a_z],$$

wo die Indices bestimmte (von einander verschiedene) Werthe haben, die den obigen Bedingungen genügen, und wo nach dem Obigen p einen solchen Werth hat, dass die Gleichung (*) erfüllt wird. Da die Indices $r, r', s, s', \ldots, u, u'$ alle von einander verschieden sind, so wird irgend einer der kleinste unter ihnen sein müssen, und unter den Produkten $[a_r|a_{r'}]$, $[a_s|a_{s'}]$, ... $[a_u|a_{u'}]$ wird irgend eins diesen kleinsten Index enthalten; es sei dies beispielsweise das Produkt $[a_r|a_{r'}]$. Dies angenommen, vertausche man r und r' und ändere das Zeichen, so erhält man einen Ausdruck

(***) $$(-1)^{p+1}[a_{r'}|a_r][a_s\, a_{s'}]\ldots[a_u\, a_{u'}][a_v a_w\ldots a_z],$$

von welchem ich zeigen werde, dass er gleichfalls als Glied in der obigen Summe (**) vorkommt. Sollte der Index r grösser sein als s', 133 so gebe man dem Faktor $[a_{r'}|a_r]$ unter den † übrigen Faktoren $[a_s|a_{s'}]$, ... $[a_u|a_{u'}]$ eine solche Stellung, dass die Bedingung erfüllt wird, vermöge welcher der zweite Index in jedem dieser Faktoren kleiner sein soll als der zweite Index des nächst folgenden Faktors. Ich will annehmen, dass diese Bedingung erfüllt sei, wenn man den Faktor $[a_{r'}|a_r]$ um q Stellen nach rechts rückt, was gestattet ist, da alle diese Faktoren Zahlen sind.

Es ist nun noch zu zeigen, dass auch die durch Gleichung (*) ausgedrückte Bedingung für das so hervorgehende Glied gilt, das heisst, dass sie noch bestehen bleibt, wenn man in ihr $p+1$ statt p setzt, auf der linken Seite $a_{r'}$ mit a_r vertauscht und diese beiden Faktoren um q Stellen nach rechts rückt.

Das Produkt, welches auf diese Weise aus

$$(-1)^p[a_r a_s\ldots a_u a_v\ldots a_z a_{r'} a_{s'}\ldots a_{u'}]$$

hervorgeht, heisse P; so ist

$$P = (-1)^{p+1}[a_{r'}a_s \dots a_u a_v \dots a_s a_r a_{s'} \dots a_{u'}].$$

Denn man kann in diesem Produkte P die Faktoren a_r und $a_{r'}$ gleichzeitig wieder um q Stellen zurückrücken, ohne dass sich (nach 58) der Werth des Produktes ändert. Ferner ist der letzte Ausdruck (nach 55), indem man a_r und $a_{r'}$ vertauscht,

$$\begin{aligned} &= -(-1)^{p+1}[a_r a_s \dots a_u a_v \dots a_s a_{r'} a_{s'} \dots a_{u'}] \\ &= (-1)^p [a_r a_s \dots a_u a_v \dots a_s a_{r'} a_{s'} \dots a_{u'}] \\ &= [a_1 a_2 \dots a_n] \qquad \text{[nach *]}. \end{aligned}$$

Also $P = [a_1 a_2 \dots a_n]$. Also ist jener Ausdruck (***) allen Bedingungen unterworfen, denen die Glieder der Summe (**) unterworfen sind, ist also, da jene Summe alle Glieder enthält, die jenen Bedingungen genügen, selbst ein Glied jener Summe. Dies Glied hebt sich nun mit dem zuerst betrachteten Gliede auf; denn

$$(-1)^p [a_r|a_{r'}][a_s|a_{s'}] \dots [a_u|a_{u'}][a_v a_w \dots a_s] + \\ + (-1)^{p+1}[a_{r'}|a_r][a_s|a_{s'}] \dots [a_u|a_{u'}][a_v a_w \dots a_s]$$

ist null, da $[a_{r'}|a_r] = [a_r|a_{r'}]$ ist (nach 144) und $(-1)^{p+1} = -(-1)^p$ ist. Aber auf dieselbe Weise, wie aus dem ersteren dieser beiden Glieder das letztere hervorgeht, geht aus diesem jenes hervor. Und auf gleiche Weise findet sich zu jedem Gliede jener Summe ein ihm zugepaartes, welches sich mit ihm aufhebt; also ist jene Summe null, also auch das dieser Summe gleiche

$$[A|B] + [A_1|B_1] + \dots = 0.$$

2. Wenn $m < n - m$ ist, so ist (nach 150), wenn noch 134 $m(n - m - 1) = c$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} [A|B] + [A_1|B_1] + \dots &= (-1)^c|[B|A] + (-1)^c|[B_1|A_1] + \dots \\ &= (-1)^c|([B|A] + [B_1|A_1] + \dots) \quad [100]. \end{aligned}$$

Hier ist (nach Beweis 1) die in Klammer geschlossene Summe null, also

$$[A|B] + [A_1|B_1] + \dots = (-1)^c|(0) = 0 \qquad [89].$$

184. Zusatz. *Wenn man aus einer Reihe von $4m$ Grössen erster Stufe $a_1, \dots a_{4m}$ die sämmtlichen multiplikativen Kombinationen $A, B, C, \dots$ zur $2m$-ten Klasse, welche eine dieser Grössen, zum Beispiel a_1, enthalten, bildet, und jede derselben mit der ergänzenden Kombination zu einem inneren Produkte verknüpft, so ist die Summe dieser Produkte null, das heisst,*

$$[A|A'] + [B|B'] + \dots = 0,$$

wo A, B, ... die multiplikativen Kombinationen aus $a_1, \dots a_{4m}$ zur

$2m$-ten Klasse, welche a_1 enthalten, und A', B', ... deren ergänzende Kombinationen sind.

Beweis. Da A, B, ... die sämmtlichen a_1 enthaltenden multiplikativen Kombinationen aus $4m$ Elementen zur $2m$-ten Klasse sind, so sind ihre ergänzenden Kombinationen A', B', ... die sämmtlichen Kombinationen aus denselben Elementen zu derselben Klasse, welche a_1 nicht enthalten. Ferner, da die Stufenzahlen von $A, B, \ldots, A', B', \ldots$ gerade sind, so ist (nach 58) $[AA'] = [A'A]$, und also (nach 172 Anm.), wenn A' die ergänzende Kombination von A ist, auch A die ergänzende Kombination von A', und ebenso B die von B', somit (nach 183)

$$[A|A'] + [B|B'] + \cdots + [A'|A] + [B'|B] + \cdots = 0.$$

Aber (nach 144)

$$[A|A'] = [A'|A], \ [B|B'] = [B'|B], \ldots.$$

Also

$$2[A|A'] + 2[B|B'] + \cdots = 0,$$

das heisst,

$$[A|A'] + [B|B'] + \cdots = 0.$$

185—187. Zusätze. *Ins Besondere ist*

185. $$[ab|cd] + [ac|db] + [ad|bc] = 0,$$

186. $$[ab|c] + [bc|a] + [ca|b] = 0,$$

187. $$[abc|d] - [bcd|a] + [cda|b] - [dab|c] = 0.$$

§ 4. Besondere Sätze über die innere Multiplikation zweier Grössen erster Stufe.

188. *Die Bestimmungsgleichungen für die innere Multiplikation zweier Grössen erster Stufe sind*

(a) $$[e_r|e_s] = 0,$$

wenn $r \gtrless s$,

(b) $$[e_r|e_r] = [e_s|e_s] = \cdots,$$

und zwar gelten dieselben auch, wenn man statt der Einheiten $e_1, e_2, \ldots e_n$ ein beliebiges vollständiges Normalsystem setzt.

Beweis. Die Geltung der beiden Gleichungsgruppen für die Einheiten ist in Nr. 142 bewiesen. Also gelten sie (nach 168) auch für jedes einfache vollständige Normalsystem. Sie gelten aber auch für jedes *beliebige* vollständige Normalsystem. Denn sind a, b zwei Grössen desselben und ist λ der numerische Werth des Normalsystems, so dass $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$ gesetzt werden kann, wo a' und b' den numerischen Werth 1 haben, so ist $[a'|b'] = 0$, also auch $[\lambda a'|\lambda b'] = 0$, das heisst,

$[a|b]=0$ und $[a'|a']=1$, also $[a|a]=[\lambda a'|\lambda a']=\lambda^2[a'|a']=\lambda^2$. Ebenso $[b|b]=\lambda^2$, also $[a|a]=[b|b]$.

Zu zeigen ist noch, dass die beiden obigen Gruppen die vollständigen Bestimmungsgleichungen enthalten, das heisst (nach 48), dass zwischen den Produkten $[e_r|e_s]$ keine andere Zahlbeziehung herrscht, als eine aus jenen beiden Gruppen ableitbare.

Es lassen sich vermöge der beiden Gruppen alle Produkte $[e_r|e_s]$, sofern r gleich s ist, gleich $[e_1|e_1]$ setzen, während sie verschwinden, sobald r von s verschieden ist. Hat man also irgend eine Bestimmungsgleichung

$$\Sigma\alpha_{r,s}[e_r|e_s]=0,$$

so verwandelt sie sich in

$$\Sigma\alpha_{r,r}[e_1|e_1]=0,$$

also, da $[e_1|e_1]$ gleich 1 ist, in

$$\Sigma\alpha_{r,r}=0.$$

Ist aber letzteres der Fall, so geht die Gleichung

$$\Sigma\alpha_{r,s}[e_r|e_s]=0$$

schon aus den obigen beiden Gruppen hervor, somit enthalten jene beiden Gruppen das vollständige System der Bestimmungsgleichungen.

Anm. Für die innere Multiplikation zweier beliebiger Grössen † von den Stufen p und q ($q \overline{\gtrless} p$) ist das System der Bestimmungsgleichungen in den beiden Gleichungsgruppen enthalten:

(a) $$[E|F]=0,$$

wenn E nicht mit F incident ist, {und}

(b) $$[E|EG]=[E'|E'G],$$

wo E, F, G, E' kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten sind, E, E' von p-ter, F, $[EG]$ und $[E'G]$ von q-ter Stufe und die letzteren beiden nicht null sind.

136

189. $[a|b]=[b|a]$ (specieller Fall von Nr. 144).

190. *Es ist*

$$[(\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots)|(\beta_1a_1+\beta_2a_2+\cdots)]=$$
$$=\alpha_1\beta_1a_1^2+\alpha_2\beta_2a_2^2+\cdots,$$

wenn a_1, a_2, ... zu einander normal sind.

Beweis. Denn, wenn $\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots$ mit $\Sigma\alpha_ra_r$ und $\beta_1a_1+\beta_2a_2+\cdots$ mit $\Sigma\beta_sa_s$ bezeichnet wird, so ist

$$[(\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots)|(\beta_1a_1+\beta_2a_2+\cdots)]=[\Sigma\alpha_ra_r|\Sigma\beta_sa_s]=$$
$$=\Sigma\alpha_r\beta_s[a_r|a_s] \quad [42]$$
$$=\Sigma\alpha_r\beta_r[a_r|a_r],$$

weil a_r und a_s, wenn r von s verschieden ist, nach der Annahme zu

einander normal sind, also (nach 152) ihr inneres Produkt null ist. Der letzte Ausdruck ist aber

$$= \Sigma \alpha_r \beta_r a_r^2 = \alpha_1 \beta_1 a_1^2 + \alpha_2 \beta_2 a_2^2 + \cdots.$$

191. *Es ist*

$$[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)|(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)] = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots,$$

wenn $a_1, a_2, \ldots$ ein einfaches Normalsystem bilden.

Beweis. Denn nach 190 ist

$$[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)|(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)] = \\ = \alpha_1 \beta_1 a_1^2 + \alpha_2 \beta_2 a_2^2 + \cdots,$$

aber, wenn $a_1, a_2, \ldots$ ein einfaches Normalsystem bilden, so ist $a_1^2 = a_2^2 = \cdots = 1$, also der gefundene Ausdruck

$$= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots.$$

192. *Wenn $a_1, a_2, \ldots$ zu einander normal sind, so ist*

$$(a_1 + a_2 + \cdots)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots.$$

Beweis aus 190.

193. *Es ist*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2[a|b] + b^2.$$

Beweis. Es ist

$$(a + b)^2 = [(a + b)|(a + b)]$$
$$= [a|a] + [a|b] + [b|a] + [b|b] \qquad [42],$$

137 also (nach 189)

$$= a^2 + 2[a|b] + b^2.$$

194. *Es ist*

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2[b|c] + 2[c|a] + 2[a|b].$$

Beweis wie in 193.

Anm. Die Sätze 192—194 stellen, geometrisch gedeutet, den Pythagoräischen Lehrsatz nebst seiner Erweiterung für die Ebene wie für den Raum dar.

§ 5. Einführung der Winkel.

195. Erklärung. Unter $\angle AB$ (Winkel AB) verstehe ich, wenn A und B von gleicher Stufe aber nicht null, und α und β ihre numerischen Werthe sind, denjenigen Winkel zwischen 0 und π (diese Gränzen mit eingeschlossen), dessen Cosinus gleich dem durch die numerischen Werthe dividirten inneren Produkte jener Grössen ist, das heisst, ich setze

$$\cos \angle AB = \frac{[A|B]}{\alpha\beta}, \; \angle AB = 0 \ldots \pi.$$

Ferner verstehe ich, wenn $a, b, c, \ldots$ Grössen erster Stufe sind, und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ihre numerischen Werthe, unter $\sin(abc\ldots)$ diejenige Zahlgrösse, welche numerisch gleich $\frac{[abc\ldots]}{\alpha\beta\gamma\ldots}$ und nicht negativ ist, das heisst

$$\sin(abc\ldots) \gtreqless 0 \text{ und numerisch } = \frac{[abc\ldots]}{\alpha\beta\gamma\ldots},$$

das heisst,

$$\sin^2(abc\ldots) = \frac{[abc\ldots]^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2\ldots}.$$

196. *Wenn a, b Grössen erster Stufe sind, so ist*

$$\sin(ab) = \sin \angle ab.$$

Beweis. Denn nach 195 ist

$$\sin^2(ab) = \frac{[ab]^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{a^2 b^2 - [a|b]^2}{\alpha^2\beta^2} \qquad [177]$$

$$= \frac{\alpha^2\beta^2 - [a|b]^2}{\alpha^2\beta^2} \qquad [151]$$

$$= 1 - \left(\frac{[a|b]}{\alpha\beta}\right)^2$$

$$= 1 - \cos^2 \angle ab \qquad [195]$$

$$= \sin^2 \angle ab.$$

Und da nach der Definition $\sin(ab)$ nie negativ und $\angle ab$ ein 138 Winkel zwischen 0 und π, also $\sin \angle ab$ auch nicht negativ ist, so folgt aus $\sin^2(ab) = \sin^2 \angle ab$, dass $\sin(ab) = \sin \angle ab$ sei.

197. $[A|B] = \alpha\beta \cos \angle AB$, *wenn A und B von gleicher Stufe und α und β ihre numerischen Werthe sind.*

Beweis aus 195.

198. $[ab]^2 = (\alpha\beta \sin \angle ab)^2$, *wo α und β die numerischen Werthe von a und b sind.*

Beweis. Nach 177 {und 151} ist

$$[ab]^2 = \alpha^2\beta^2 - [a|b]^2$$

$$= \alpha^2\beta^2 - (\alpha\beta \cos \angle ab)^2 \qquad [197]$$

$$= \alpha^2\beta^2 (1 - \cos^2 \angle ab)$$

$$= \alpha^2\beta^2 \sin^2 \angle ab.$$

Anm. In diesen Formeln tritt der Gegensatz zwischen dem äusseren und {dem} inneren Produkte in einfachster Gestalt hervor. Während das innere Produkt zweier Grössen erster Stufe gleich dem Produkte der numerischen Werthe in den Cosinus des Zwischenwinkels ist, so ist der numerische Werth ihres äusseren Produktes gleich dem Produkte ihrer numerischen Werthe in den Sinus des Zwischenwinkels.

199. *Es ist*

$$[ab|cd] = \alpha\beta\gamma\delta \sin \angle ab \sin \angle cd \cos \angle (ab \,.\, cd),$$

wenn α, β, γ, δ die numerischen Werthe von a, b, c, d sind.

Beweis. Der numerische Werth von $[ab]$ ist $([ab]^2)^{\frac{1}{2}}$ und der von $[cd]$ ist $([cd]^2)^{\frac{1}{2}}$, also ist (nach 197)

$$[ab|cd] = ([ab]^2 [cd]^2)^{\frac{1}{2}} \cos \angle (ab \,.\, cd)$$

$$= [(\alpha\beta \sin \angle ab \,.\, \gamma\delta \sin \angle cd)^2]^{\frac{1}{2}} \cos \angle (ab \,.\, cd) \qquad [198].$$

Aber, da das Produkt $\alpha\beta \sin \angle ab \,.\, \gamma\delta \sin \angle cd$ positiv ist, so hebt sich das fortschreitende Potenziren dieser Grösse durch 2 und $\frac{1}{2}$ auf, und es wird

$$[ab|cd] = \alpha\beta\gamma\delta \sin \angle ab \sin \angle cd \cos \angle (ab \,.\, cd).$$

200. *Die normale Zurückleitung von A auf eine Grösse gleicher Stufe B ist numerisch gleich $A \cos \angle AB$.*

Beweis. Wenn A' die normale Zurückleitung von A auf B ist, so ist (nach 166)

$$A' = \frac{[A|B]B}{\beta^2} = \frac{\alpha\beta \cos \angle AB \,.\, B}{\beta^2} \qquad [197]$$

$$= \alpha \cos \angle AB \cdot \frac{B}{\beta},$$

also numerisch gleich

$$A \cos \angle AB \qquad \{151\}.$$

139 **201.** *Wenn a, b, c, ... zu einander normal sind, so ist für jede aus ihnen numerisch ableitbare Grösse k*

$$\frac{k}{\varkappa} = \frac{a}{\alpha} \cos \angle ak + \frac{b}{\beta} \cos \angle bk + \cdots,$$

wo $\varkappa$, α, β, ... die numerischen Werthe von k, a, b, ... sind.

Beweis. Es sei $k = xa + yb + \cdots$, so erhalten wir durch innere Multiplikation mit a, da $[b|a]$, ... null sind,

$$[a|k] = x[a|a] = x\alpha^2 \qquad [151],$$

also

$$x = \frac{[a|k]}{\alpha^2} = \frac{\alpha\varkappa \cos \angle ak}{\alpha^2} \qquad [197]$$

$$= \frac{\varkappa}{\alpha} \cos \angle ak.$$

Aus gleichem Grunde ist $y = \frac{\varkappa}{\beta} \cos \angle bk$, ... Diese Werthe von x, y, ... in die obige Formel eingesetzt, giebt

$$k = \frac{\varkappa}{\alpha} \cos \angle ak \,.\, a + \frac{\varkappa}{\beta} \cos \angle bk \,.\, b + \cdots,$$

das heisst,

$$\frac{k}{\varkappa} = \frac{a}{\alpha} \cos \angle ak + \frac{b}{\beta} \cos \angle bk + \cdots.$$

202. *Wenn $a, b, \ldots$ zu einander normal und k und l aus ihnen numerisch ableitbar sind, so ist*

$$\cos \angle kl = \cos \angle ak \cos \angle al + \cos \angle bk \cos \angle bl + \cdots.$$

Beweis. Nach 195 ist, wenn $\varkappa, \lambda, \alpha, \beta, \ldots$ die numerischen Werthe von $k, l, a, b, \ldots$ sind,

$$\cos \angle kl = \frac{[k|l]}{\varkappa\lambda} = \left[\frac{k}{\varkappa} \middle| \frac{l}{\lambda}\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{a}{\alpha}\cos\angle ak + \frac{b}{\beta}\cos\angle bk + \cdots\right) \middle| \left(\frac{a}{\alpha}\cos\angle al + \frac{b}{\beta}\cos\angle bl + \cdots\right)\right] \quad [201]$$

$$= \frac{a^{\underline{2}}}{\alpha^2} \cos \angle ak \cos \angle al + \frac{b^{\underline{2}}}{\beta^2} \cos \angle bk \cos \angle bl + \cdots,$$

weil $[a|b], \ldots$ null sind. Da nun $a^{\underline{2}} = \alpha^2$, $b^{\underline{2}} = \beta^2, \ldots$, so erhält man

$$\cos \angle kl = \cos \angle ak \cos \angle al + \cos \angle bk \cos \angle bl + \cdots.$$

Zusatz. Man kann diesen Satz auch so ausdrücken: *Statt eine Grösse erster Stufe (k) auf eine andere l zurückzuleiten, kann man jene zuerst auf die Grössen eines Normalsystems zurückleiten und dann die so erhaltenen Zurückleitungen † auf l zurückleiten, und diese letzten* 140 *Zurückleitungen addiren, vorausgesetzt, dass hierbei alle Zurückleitungen normale sind.*

203. *Wenn $a, b, \ldots$ zu einander normal sind, so ist für jedes aus ihnen numerisch ableitbare k*

$$1 = \cos^2 \angle ak + \cos^2 \angle bk + \cdots.$$

Beweis. Die Formel geht aus 202 hervor, wenn man $l = k$ setzt.

204. *Wenn $a, b, \ldots$ zu einander normal und k und l aus ihnen numerisch ableitbar und gleichfalls zu einander normal sind, so ist*

$$0 = \cos \angle ak \cos \angle al + \cos \angle bk \cos \angle bl + \cdots.$$

Beweis. Die Formel geht aus 202 hervor, wenn man k und l zu einander normal annimmt; denn dann wird (nach 152) $[k|l] = 0$, also (nach 195) auch $\cos \angle kl = 0$.

205. *Wenn $a + b + \cdots = 0$ ist, und $\alpha, \beta, \ldots$ die numerischen Werthe von $a, b, \ldots$ sind, so ist*

(a) $$\alpha : \beta : \cdots = \sin a' : \sin b' : \cdots,$$

wo $a', b', \ldots$ die zu $a, b, \ldots$ ergänzenden Kombinationen aus $a, b, \ldots$ sind, {*ferner*}

(b) $$\alpha \cos \angle ax + \beta \cos \angle bx + \cdots = 0,$$

wo x eine beliebige Grösse ist, {*endlich*}

(c) $$\sin a' \cos \angle ax + \sin b' \cos \angle bx + \cdots = 0.$$

Beweis. 1. Multiplicirt man die Gleichung

$$a + b + \cdots = 0$$

kombinatorisch mit $[cd\ldots]$, so erhält man

$$[acd\cdots] + [bcd\cdots] = 0,$$

also

$$[acd\ldots]^2 = [bcd\ldots]^2,$$

wo $[acd\ldots]$ das Produkt aller Grössen $a, b, c, \ldots$, mit Ausnahme von b, und $[bcd\ldots]$ das Produkt aller Grössen, mit Ausnahme von a, ist. Somit ist (nach 195)

$$(\alpha\gamma\delta\ldots)^2 \sin^2(acd\ldots) = (\beta\gamma\delta\ldots)^2 \sin^2(bcd\ldots),$$

oder

$$\alpha^2 \sin^2(acd\cdots) = \beta^2 \sin^2(bcd\cdots).$$

Nun ist $[cad\ldots]$ die ergänzende Kombination zu b, also $= b'$, und $[bcd\ldots]$ die ergänzende zu a, also $= a'$, also $\sin b' = \sin(cad\ldots)$ und $\sin a' = \sin(bcd\ldots)$, also, da α, β, $\sin a'$, $\sin b'$ positiv sind,

$$\alpha \sin b' = \beta \sin a', \text{ das heisst } \alpha : \beta = \sin a' : \sin b',$$

und somit allgemein

$$\alpha : \beta : \cdots = \sin a' : \sin b' : \cdots.$$

141 2. Multiplicirt man die Gleichung $a + b + \cdots = 0$ innerlich mit einer beliebigen, von Null verschiedenen, Grösse erster Stufe x, so erhält man

$$[a|x] + [b|x] + \cdots = 0,$$

also, wenn ξ der numerische Werth von x ist, ist {nach 197}

$$\alpha\xi \cos \angle ax + \beta\xi \cos \angle bx + \cdots = 0,$$

das heisst,

$$\alpha \cos \angle ax + \beta \cos \angle bx + \cdots = 0.$$

3. Substituirt man in die so erhaltene Gleichung die vorher gewonnenen Werthe von $\alpha : \beta : \gamma : \cdots$, so erhält man

$$\sin a' \cos \angle ax + \sin b' \cos \angle bx + \cdots = 0.$$

Anm. Die entwickelten Formeln haben nur dann eine Bedeutung, wenn zwischen den Grössen $a, b, \ldots$ keine andere Beziehung herrscht, als die durch die Gleichung $a + b + \cdots = 0$ dargestellte, das heisst, wenn die n Grössen $a, b, \ldots$ in keinem Gebiete von niederer als $(n-1)$-ter Stufe vereinigt sind. Für drei Grössen enthält die erste den bekannten Satz, dass im Dreieck die Seitenlängen sich wie die Sinus der Gegenwinkel verhalten.

206—213. *Aus den Formeln* 172, 175—178, 183, 185 *ergeben sich mit Hülfe der angegebenen Winkelbezeichnungen folgende Formeln:*

206. $\sin(AB)\sin(\mathsf{AB})\cos\angle(AB\,.\,\mathsf{AB}) =$

$$= \Sigma \sin A_r \sin B_r \sin \mathsf{A} \sin \mathsf{B} \cos\angle A_r\mathsf{A} \cos\angle B_r\mathsf{B},$$

wo {*A mit* A *von gleicher Stufe ist und B mit* B, *wo ferner*} A_r *die Kombinationen aus den einfachen Faktoren von* $[AB]$, *zur so vielten Klasse, als die Stufe von A beträgt, und* B_r *die ergänzenden Kombinationen sind.*

207. $\sin(abc\ldots)\sin(a'b'c'\ldots)\cos\angle(abc\ldots)(a'b'c'\ldots) =$

$$= \textit{Determ.} \begin{cases} \cos\angle aa', & \cos\angle ab', & . \\ \cos\angle ba', & \cos\angle bb', & . \\ . & . & . \end{cases}$$

208. $\sin\angle ab \sin\angle cd \cos\angle(ab.cd) =$

$$= \cos\angle ac \cos\angle bd - \cos\angle bc \cos\angle ad,$$

und, wenn hier a und c statt c und d gesetzt wird:

209. $\sin\angle ab \sin\angle ac \cos\angle(ab.ac) = \cos\angle bc - \cos\angle ab \cos\angle ac,$

eine bekannte Formel der sphärischen Trigonometrie, ferner

210. $$\sin^2\angle ab = 1 - \cos^2\angle ab,$$

was hier als die Transformation von 177 mit aufgeführt ist.

211. $\sin^2(abc) = 1 - \cos^2\angle bc - \cos^2\angle ca - \cos^2\angle ab +$

$$+ 2\cos\angle bc \cos\angle ca \cos\angle ab.$$

212. $\sin A \sin B \cos\angle AB + \sin A_1 \sin B_1 \cos\angle A_1B_1 + \cdots = 0,$ 142

wenn $A, A_1, \ldots$ *die Kombinationen aus* $2n$ *Grössen erster Stufe zur* n*-ten Klasse, und* $B, B_1, \ldots$ *deren ergänzende Kombinationen sind.*

213. $\sin\angle ab \sin\angle cd \cos\angle(ab.cd) + \sin\angle ac \sin\angle db \cos\angle(ac.db) +$

$$+ \sin\angle ad \sin\angle bc \cos\angle(ad.bc) = 0.$$

214—215. Ferner aus 193, 194 ergiebt sich

214. $$(a+b)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\angle ab + \beta^2.$$

215. $(a+b+c)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 +$

$$+ 2\beta\gamma\cos\angle bc + 2\gamma\alpha\cos\angle ca + 2\alpha\beta\cos\angle ab,$$

wo α, β, γ *die numerischen Werthe von* a, b, c *sind.*

{Anm. Vgl. hierzu Nr. 337—340.}

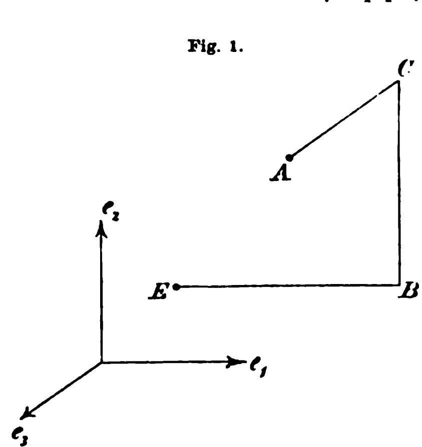
Kapitel 5. **Anwendungen auf die Geometrie.**

§ 1. **Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung von Punkten und Strecken.**

216. Erklärung. Wenn ein Punkt E und drei gegen einander senkrechte und gleich lange Linien als ursprüngliche Einheiten angenommen sind, und α, α_1, α_2, α_3 beliebige Zahlen sind, so verstehe ich

a) unter

$$E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$



den Punkt A, zu welchem man gelangt, indem man {vgl. Fig. 1} von E aus zuerst um eine Strecke EB fortschreitet, welche gleich $\alpha_1 e_1$ ist, das heisst, welche mit e_1 gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist, je nachdem α_1 positiv oder negativ ist, und deren Länge sich zu der von e_1 wie α_1 zu 1 verhält, {indem man} dann von B aus um eine Strecke BC, welche in demselben Sinne gleich $\alpha_2 e_2$, und endlich von C aus um eine Strecke CA, welche in demselben Sinne gleich $\alpha_3 e_3$ ist, fortschreitet;

b) zweitens verstehe ich dann unter

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

eine Strecke, das heisst eine gerade Linie von bestimmter Länge 143 und Richtung, und zwar diejenige Strecke, welche gleiche † Länge und Richtung hat mit der von E nach dem Punkte $E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ gezogenen geraden Linie;

c) drittens unter

$$\alpha(E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = \alpha E + \alpha\alpha_1 e_1 + \alpha\alpha_2 e_2 + \alpha\alpha_3 e_3$$

das α-fache des Punktes $E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, und setze fest, dass für alle diese Grössen und ihre Verknüpfungen die in Kapitel 1 gegebenen Bestimmungen, und also auch die daraus abgeleiteten Sätze gelten.

Anm. Grössen erster Stufe sind also hier die einfachen und vielfachen Punkte und die Strecken von bestimmter Länge und Richtung. Durch die *Erklärungen* in § 1 {des ersten Kapitels} ist dann die Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung dieser Grössen bestimmt, und durch die *Sätze* desselben

Paragraphen die Geltung der algebraischen Verknüpfungsgesetze für sie nachgewiesen und in den folgenden Paragraphen die besonderen Eigenschaften, welche ihnen als extensiven Grössen zukommen. Wir leiten hier zunächst aus diesen formellen Bestimmungen die Konstruktionen ab, durch welche die Resultate der verschiedenen Verknüpfungen erfolgen.

217. *Wenn*

$$A = E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

ist, so sind $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, $\alpha_3 e_3$ *die senkrechten Projektionen von* EA *auf die drei von* E *ausgehenden mit* e_1, e_2, e_3 *gleichgerichteten Axen.*

Beweis folgt unmittelbar aus der Definition.

218. Lehnsatz aus der Geometrie. Gleichgerichtete Strecken, auf dieselbe gerade Linie senkrecht projicirt, liefern gleichgerichtete Projektionen, die sich ihrer Länge nach wie die projicirten Strecken verhalten; und umgekehrt, wenn die senkrechten Projektionen zweier gerader Linien auf drei gegen einander senkrechte Axen gleich lang und gleich gerichtet sind, so sind die projicirten Linien selbst einander gleich lang und gleich gerichtet.

219. Lehnsatz aus der analytischen Geometrie. Wenn A, B, C drei beliebige Punkte einer geraden Linie sind, und AB, BC, AC durch ein Stück DE dieser Linie gemessen, beziehlich die Quotienten α, β, γ geben, wobei jeder Quotient positiv oder negativ genommen ist, je nachdem die gemessene Linie mit der messenden (DE) gleich oder entgegengesetzt {gerichtet} ist, so ist allemal

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

was man auch, der Kürze wegen, schreiben kann 144

$$AB + BC = AC.$$

220. *Mehrere Strecken (von gegebener Richtung und Länge) addirt man, indem man sie, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig an einander legt, das heisst, sie so legt, dass, wo die eine aufhört, die nächst folgende anfängt; dann ist die gerade Linie vom Anfangspunkt der ersten zum Endpunkte der letzten der gesuchten Summe gleich lang und gleichgerichtet.*

Beweis. Erstens für *zwei* Strecken a und b {vgl. Fig. 2}. Es sei

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$
$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

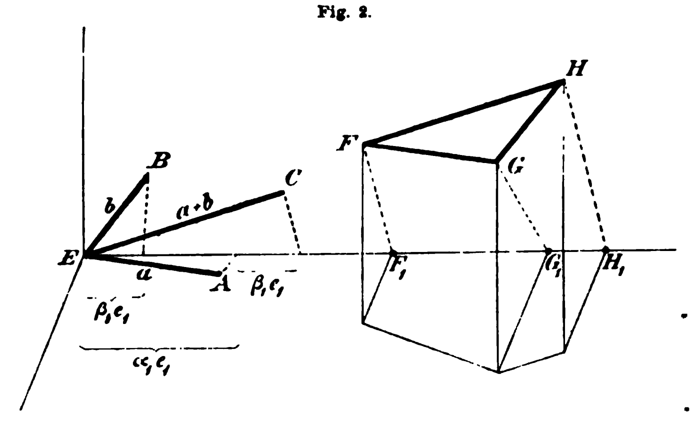
also (nach 6)

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + (\alpha_3 + \beta_3)e_3.$$

Ferner sei $E + a = A$, $E + b = B$, $E + (a + b) = C$, so ist (nach

216) die gerade Linie EA mit a gleich lang und gleichgerichtet, EB mit b, EC mit $a + b$. Endlich sei FG mit EA gleich lang

Fig. 2.



und gleichgerichtet, und GH mit EB, so ist zu beweisen, dass FH mit EC gleich lang und gleichgerichtet sei.

Da FG mit EA gleich lang und gleichgerichtet ist, so gilt dies (nach 218) auch für ihre Projektionen; nach 217 sind aber die Projektionen von EA gleich {lang} und gleichgerichtet mit $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, $\alpha_3 e_3$, somit gilt dies auch für die Projektionen von FG; aus gleichem Grunde sind die Projektionen von GH gleich lang und gleichgerichtet mit $\beta_1 e_1$, $\beta_2 e_2$, $\beta_3 e_3$. Es seien nun F_1, G_1, H_1 die Projektionen von F, G, H auf die von E ausgehende mit e_1 gleichgerichtete Axe, so ist also $F_1 G_1$ mit $\alpha_1 e_1$ gleich lang und gleichgerichtet, $G_1 H_1$ mit $\beta_1 e_1$, das heisst, $F_1 G_1$ und $G_1 H_1$ liefern, durch e_1 gemessen, die Quotienten α_1 und β_1, somit liefert (nach 219), da F_1, G_1, H_1 in Einer geraden Linie liegen, $F_1 H_1$, durch e_1 gemessen, den Quotienten $\alpha_1 + \beta_1$, das heisst, $F_1 H_1$ ist mit $(\alpha_1 + \beta_1)e_1$ gleich lang und gleichgerichtet. $F_1 H_1$ ist aber die Projektion von FH auf die durch E in der Richtung von e_1 gelegte Axe. Wendet man dieselbe Schlussfolge auch auf die übrigen Axen an, so ergiebt sich, dass die Projektionen von FH gleich lang und gleichgerichtet sind mit $(\alpha_1 + \beta_1)e_1$, $(\alpha_2 + \beta_2)e_2$, $(\alpha_3 + \beta_3)e_3$, das
145 heisst, mit den † Projektionen von EC, somit ist (nach 218) FH mit EC gleich lang und gleichgerichtet, das heisst, mit $a + b$, was zu beweisen war.

Zweitens. Hat man nun *mehrere* Strecken a, b, c, ..., und ist a mit FG, b mit GH, c mit HI, ... gleich lang und gleichgerichtet, so ist nach dem ersten Theil des Beweises $a + b$ mit FH gleich lang und gleichgerichtet, also auch wieder, da $a + b$ mit FH, und c mit HI gleich lang und gleichgerichtet ist, $a + b + c$ mit FI, ...

221. *Das Produkt einer Strecke a mit einer Zahl α ist wieder eine Strecke (b), welche mit der ersteren (a) gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist, je nachdem die Zahl α positiv oder negativ ist, und deren Länge sich zu der von a, wie α zu 1 verhält.*

Beweis. Es seien E, e_1, e_2, e_3 als Einheiten genommen, und sei

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

so ist

$$b = \alpha a = \alpha(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)$$
$$= \alpha\alpha_1 e_1 + \alpha\alpha_2 e_2 + \alpha\alpha_3 e_3.$$

Der letzte Ausdruck bedeutet aber (nach 216) eine Strecke, welche gleiche Länge und Richtung hat mit der von E nach dem Punkte $B = E + \alpha\alpha_1 e_1 + \alpha\alpha_2 e_2 + \alpha\alpha_3 e_3$ gezogenen geraden Linie EB. Die Projektionen dieser Linie auf die drei von E ausgehenden mit e_1, e_2, e_3 parallelen Axen sind (nach 217) $\alpha\alpha_1 e_1$, $\alpha\alpha_2 e_2$, $\alpha\alpha_3 e_3$. Ebenso ist $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ eine Strecke, die gleiche Länge und Richtung mit der von E nach dem Punkte $A = E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ gezogenen Linie hat, und $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, $\alpha_3 e_3$ sind die Projektionen von EA auf die genannten drei Axen. Ist nun zuerst α positiv, so sind $\alpha\alpha_1 e_1$, $\alpha\alpha_2 e_2$, $\alpha\alpha_3 e_3$ beziehlich mit $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, $\alpha_3 e_3$ gleichgerichtet, und verhalten sich zu ihnen wie $\alpha : 1$, also gilt dasselbe (nach 218) auch für die projicirten Linien, das heisst, EB ist mit EA gleichgerichtet, und seine Länge verhält sich zu der von EA, wie $\alpha : 1$; da nun b mit EB und a mit EA gleiche Länge und Richtung hat, so sind auch a und b einander gleichgerichtet, und verhalten sich ihrer Länge nach, wie $1 : \alpha$.

Ist aber α negativ $= -\beta$, so sind $\alpha\alpha_1 e_1$, $\alpha\alpha_2 e_2$, $\alpha\alpha_3 e_3$, das heisst, $-\beta\alpha_1 e_1$, $-\beta\alpha_2 e_2$, $-\beta\alpha_3 e_3$, die Projektionen von EB, † und sind (nach 146 216) denen von EA, nämlich $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, $\alpha_3 e_3$ entgegengesetzt gerichtet, somit sind die von BE, nämlich $\beta\alpha_1 e_1$, $\beta\alpha_2 e_2$, $\beta\alpha_3 e_3$, mit denen von EA gleichgerichtet, und ihre Längen verhalten sich, wie $\beta : 1$, also sind auch BE und EA gleichgerichtet, und verhalten sich, wie $\beta : 1$, also sind EB und EA und ebenso also auch b und a einander entgegengesetzt gerichtet, während ihre Längen sich noch wie $\beta : 1$ verhalten.

222. *Die Summe $\alpha A + \beta B + \cdots$, in welcher $A, B, \ldots$ Punkte, $\alpha, \beta, \ldots$ Zahlen sind, ist eine Strecke oder ein vielfacher Punkt, je nachdem $\alpha + \beta + \cdots$ gleich oder ungleich Null ist, und zwar ist*
im ersten Falle

$$\alpha A + \beta B + \cdots = \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots,$$

im zweiten

$$\alpha A + \beta B + \cdots = (\alpha + \beta + \cdots) S,$$

wo

$$(*) \qquad S - R = \frac{\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots}{\alpha + \beta + \cdots},$$

und R ein beliebiger Punkt ist.

Beweis. Es ist

$$A = R + A - R, \quad B = R + B - R, \ldots.$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck $\alpha A + \beta B + \cdots$ ein, so erhält man

$$\alpha A + \beta B + \cdots = (\alpha + \beta + \cdots) R + \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots.$$

Also *erstens*, wenn $\alpha + \beta + \cdots = 0$ ist,

$$= \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots.$$

Ist *hingegen* $\alpha + \beta + \cdots$ von Null verschieden, etwa gleich σ, so wird

$$\alpha A + \beta B + \cdots = \sigma R + \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots$$
$$= \sigma\left(R + \frac{\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots}{\sigma}\right)$$
$$= \sigma S,$$

wenn

$$S = R + \frac{\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots}{\sigma},$$

das heisst,

$$S - R = \frac{\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots}{\sigma}$$

gesetzt ist.

147 Zusatz. *Wenn A und B Punkte sind, so ist A — B die † Strecke, welche mit der geraden Linie BA gleich lang und gleichgerichtet ist.*

Beweis. Nach 216 ist $A - E$ eine Strecke, welche gleich lang und gleichgerichtet ist mit der geraden Linie EA, und $B - E$ eine mit EB gleich lange und gleichgerichtete Strecke; nun ist

$$A - B = (A - E) - (B - E),$$

also

$$= (A - E) + (E - B) = (E - B) + (A - E).$$

Da nun $E - B$ und $A - E$ Strecken sind, die mit BE und EA beziehlich gleich lang und gleichgerichtet sind, so ist ihre Summe (nach 220) mit BA gleich lang und gleichgerichtet, das heisst, $A - B$ mit BA.

Anm. Hierdurch sind also die Strecken auf Differenzen von Punkten zurückgeführt, und ihre durch stetiges Aneinanderlegen gebildete Summe stellt sich als eine Summe solcher Differenzen dar, in denen sich der Endpunkt jeder Strecke mit dem Anfangspunkte der nächst folgenden aufhebt.

223. *Wenn man von einem beweglichen Punkte (R) nach einer*

Reihe fester Punkte $(A, B, \ldots)$ *gerade Linien zieht, und diese, nach konstanten Verhältnissen* $(1:\alpha, 1:\beta, \ldots)$ *ändert (so dass dadurch die Linien* $RA', RB', \ldots$ *hervorgehen, welche mit* $RA, RB, \ldots$ *beziehlich gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, je nachdem* $\alpha, \beta, \ldots$ *positiv oder negativ sind, und sich ihrer Länge nach zu* $RA, RB, \ldots$ *verhalten wie die Zahlen* $\alpha, \beta, \ldots$ *zur Einheit), und dann die so erhaltenen Linien* $(RA', RB', \ldots)$, *ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig aneinander legt, so hat die Linie* (RP) *vom Anfangspunkt* (R) *der ersten zum Endpunkt* (P) *der letzten folgende Eigenschaft:*

1) *wenn die Summe der Verhältnisszahlen* $(\alpha, \beta, \ldots)$ *null ist, so ist diese Linie* (RP) *von konstanter Länge und Richtung,*

2) *wenn die Summe der Verhältnisszahlen ungleich Null ist, so geht diese Linie* (RP) *durch einen festen Punkt* (S), *welcher von dieser Linie* (RP) *den so vielten Theil abschneidet, als jene Summe* $(\alpha + \beta + \cdots)$ *beträgt.*

Beweis. Der Satz ist nur ein anderer Wortausdruck von 222.

Anm. Der Punkt S ist bekanntlich der Schwerpunkt zwischen den Punkten $A, B, \ldots$, wenn deren Gewichte sich wie $\alpha : \beta : \cdots$ verhalten; hier wird er naturgemäss den Namen Summenpunkt führen.

224. *Der Summenpunkt* S *der Summe* $\alpha A + \beta B + \cdots$, *in welcher* 148 $\alpha + \beta + \cdots \gtrless 0$ *ist, hat die Eigenschaft, dass*

$$\alpha(A - S) + \beta(B - S) + \cdots = 0$$

ist; und kein zweiter Punkt besitzt diese Eigenschaft.

Beweis. Denn, setzt man in 222 (*) den Punkt $R = S$, so wird

$$S - S = \frac{\alpha(A - S) + \beta(B - S) + \cdots}{\alpha + \beta + \cdots},$$

das heisst,

$$0 = \alpha(A - S) + \beta(B - S) + \cdots.$$

Soll diese Gleichung noch für einen zweiten Punkt R gelten, also

$$0 = \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots$$

sein, so erhält man durch Subtraktion

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(R - S) + \beta(R - S) + \cdots \\ &= (\alpha + \beta + \cdots)(R - S), \end{aligned}$$

also, da $\alpha + \beta + \cdots$ (nach Hypothesis) ungleich Null ist,

$$0 = R - S,$$

also $R = S$, das heisst, es giebt keinen zweiten von S verschiedenen Punkt, der jene Eigenschaft hat.

225. *Die Summe zweier einfachen Punkte ist gleich ihrer doppelten Mitte, und die Summe zweier vielfachen Punkte ist, wenn die Koefficienten*

gleich bezeichnet sind, ein vielfacher Punkt, dessen Koefficient die Summe der Koefficienten der Summanden ist, und dessen Ort zwischen den Orten der Summanden so liegt, dass er von ihnen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Koefficienten absteht, hingegen, wenn die Koefficienten entgegengesetzt bezeichnet und numerisch nicht gleich sind, ein vielfacher Punkt, dessen Koefficient die algebraische Summe der Koefficienten der Summanden ist, und dessen Ort in der Verlängerung der geraden Linie, welche die Orte der Summanden verbindet, so liegt, dass er von diesen Orten im umgekehrten Verhältnisse ihrer Koefficienten absteht.

Beweis liegt unmittelbar in 222.

226. *Die Summe eines einfachen Punktes und einer Strecke ist der Endpunkt der geraden Linie, welche dieser Strecke gleich lang und gleichgerichtet ist, und deren Anfangspunkt der gegebene Punkt ist.*

149 Beweis. Es sei die gerade Linie AB gleich lang und gleichgerichtet mit der Strecke p, so ist (nach 222, Zusatz)

$$B - A = p.$$

Also

$$A + p = A + B - A = B.$$

227. *Die Summe eines α-fachen Punktes (αA) und einer Strecke (p) ist der α-fache Endpunkt einer geraden Linie (AB), deren α-faches mit dieser Strecke (p) gleich lang und gleichgerichtet und deren Anfangspunkt (A) der gegebene Punkt ist.*

Beweis. $$\alpha A + p = \alpha\left(A + \frac{p}{\alpha}\right),$$

also, wenn das α-fache von AB mit p gleich lang und gleichgerichtet ist, also AB mit $\frac{p}{\alpha}$, so ist

$$B - A = \frac{p}{\alpha},$$

und also

$$\alpha A + p = \alpha(A + B - A) = \alpha B.$$

Anm. Die Addition der Punkte ist zuerst (1827) von Möbius in seinem barycentrischen Kalkül gelehrt worden. Die Addition der Strecken scheint zuerst von Bellavitis in mehreren Aufsätzen (1835, 1837) der Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto veröffentlicht zu sein. Ganz unabhängig davon ist die Bearbeitung meiner Ausdehnungslehre von 1844 (§ 24, § 101—102), in welcher auch zuerst der Zusammenhang zwischen beiden Additionen ans Licht gestellt ist. Es fehlt jedoch sowohl in jenen Werken als auch in diesem der Nachweis, dass es keine andere Addition der Punkte und Strecken giebt, als die hier angegebene, und dennoch erscheint dieser Nachweis nothwendig, wenn jene Addition als eine wirkliche Addition jener Grössen, und nicht bloss als eine abgekürzte Schreibart aufgefasst werden soll, wie letzteres Möbius will. Es ist daher zu zeigen, dass der allgemeine Begriff der Addition, wenn er ins Besondere auf Punkte (oder

auch auf Strecken von gegebener Länge und Richtung) angewandt werden soll, keine andere als die oben dargestellte Addition liefern kann.

Zu dem Ende ist zunächst die allgemeine Bestimmung festzuhalten, dass keine Verknüpfung geometrischer Gegenstände als solche an einen bestimmten Ort im Raume gebunden sein darf; oder, um diese Bestimmung rein mathematisch auszudrücken: „Alle Verknüpfungen räumlicher Grössen müssen von der Art sein, dass jede Gleichung, welche zwischen einem Verein von Punkten stattfindet, auch bestehen bleiben muss, wenn man statt dieser Punkte die entsprechenden Punkte eines kongruenten Vereines setzt.“ Die Addition und Subtraktion ist nun dadurch bestimmt, dass erstens die vier Grundformeln

$$1)\ a + b = b + a,$$ 150

$$2)\ a + (b + c) = a + b + c,$$

$$3)\ a + b - b = a,$$

$$4)\ a - b + b = a$$

gelten; und dass ausserdem die durch die Verknüpfung entstehenden Grössen in möglichst weitem Umfang von gleicher Gattung sein müssen, wie die verknüpften. Diese letztere Bestimmung muss noch individualisirt werden.

Da nach der dritten Grundformel, auch wenn A und B {einfache} Punkte sind,

$$A + B - B = A,$$

also {ebenfalls} ein {einfacher} Punkt, und nach der ersten und dritten

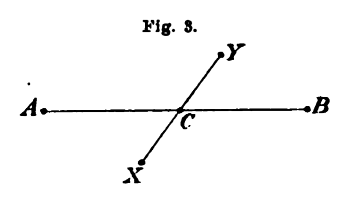
$$A + B - A = B,$$

also auch ein {einfacher} Punkt ist, so liegt die Annahme nahe, dass auch $A + B - C$ als {einfacher} Punkt zu setzen ist. Doch genügt es, diese Annahme nur für den Fall zu machen, dass C die Mitte zwischen A und B ist. Wir machen also, um der angeführten Bestimmung zu genügen, die Annahme, „dass wenn C die Mitte zwischen den {einfachen} Punkten A und B ist, {und C als einfacher Punkt aufgefasst wird,} allemal $A + B - C$ wieder ein {einfacher} Punkt sei.“ Hiermit sind die nothwendigen Annahmen erschöpft.

Zunächst folgt aus dem Gelten der vier Grundformeln das Gelten aller allgemeinen Additions- und Subtraktionsgesetze. Demnächst beweise ich, dass, wenn der Punkt C die Mitte zwischen den Punkten A und B ist, $A + B - C = C$ sei.

Es sei $A + B - C = X$ gesetzt, so kann X nicht von C verschieden sein. Denn angenommen, X wäre von C verschieden {vgl. Fig. 3}, so verlängere man XC um sich selbst bis Y, so dass $XC = CY$ wird. Dreht man nun die Figur, welche die Punkte A, B, C, X enthält, innerhalb der Ebene, in welcher diese Figur liegt, um den Punkt C herum, bis sie einen Winkel von 180° beschrieben hat, so fällt nun A dahin, wo vorher B, B dahin, wo vorher A lag, und X fällt auf Y, das heisst, der Verein A, B, C, X ist kongruent dem Vereine B, A, C, Y. Da nun nach der Annahme

Fig. 3.



$$A + B - C = X$$

war, so muss nach der obigen Bedingung, welcher alle geometrischen Verknüpfungen unterliegen, diese Gleichung auch noch bestehen bleiben, wenn man statt A, B, C, X beziehlich B, A, C, Y setzt, also

$$B + A - C = Y.$$

Also hat man

$$Y = B + A - C = A + B - C \quad \text{(nach Grundformel 1)}$$
$$= X \quad \text{(nach Annahme)},$$

also $Y = X$. Es entstand aber Y aus X dadurch, dass man XC um sich selbst verlängerte bis Y; soll also Y mit X zusammen fallen, so muss X in C fallen, das heisst, es ist $X = C$, also $A + B - C = C$.

Bringt man in dieser Gleichung C auf die rechte Seite, so erhält man

$$A + B = 2C,$$

das heisst, „die Summe zweier {einfacher} Punkte ist das Doppelte des in der Mitte 151 zwischen beiden liegenden {einfachen} Punktes."

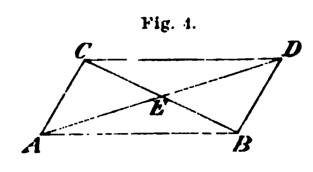


Fig. 4.

Es seien nun AB und CD zwei beliebige gerade Linien von gleicher Länge und Richtung, so ist das Viereck $ABDC$ ein Parallelogramm. Die Diagonalen mögen sich in E schneiden {vgl. Fig. 4}. Da nun die Diagonalen eines Parallelogramms sich halbiren, so ist E sowohl die Mitte zwischen A und D, als auch zwischen B und C, das heisst, es ist

$$A + D = 2E = B + C, \text{ also } A + D = B + C.$$

Bringt man in dieser letzten Gleichung D und B auf die andere Seite, so erhält man

$$A - B = C - D.$$

Umgekehrt, wenn diese letzte Gleichung gilt, so gilt auch die vorhergehende $A + D = B + C$, das heisst, die Mitte zwischen A und D muss zugleich Mitte zwischen B und C sein, das heisst, das Viereck $ABDC$ muss ein Parallelogramm, also AB mit CD gleich lang und gleichgerichtet sein.

Daraus folgt der Satz: „Eine Differenz $A - B$ zweier {einfacher} Punkte ist einer Differenz $C - D$ zweier anderer {einfacher} Punkte dann und nur dann gleich, wenn AB und CD gleich lange und gleichgerichtete Linien sind." Nennt man der Kürze wegen die Differenz $A - B$ oder $-B + A$ eine Strecke, B ihren Anfangspunkt, A ihren Endpunkt, so folgt sogleich der Satz: „Strecken (von gegebener Richtung und Länge) addirt man, indem man sie (ohne ihre Richtung und Länge zu verändern) stetig, das heisst, so aneinander legt, dass der Endpunkt einer jeden mit dem Anfangspunkte der nächstfolgenden zusammen fällt; dann ist die Strecke, welche den Anfangspunkt der ersten Strecke zu ihrem Anfangspunkt und den Endpunkt der letzten zu ihrem Endpunkte hat, die Summe jener Strecken." Denn in der That, es sei zum Beispiel die erste Strecke gleich $-A + B$, die zweite gleich $-B + C$, die dritte gleich $-C + D$, so ist die Summe

$$= -A + B - B + C - C + D = -A + D,$$

was zu beweisen war.

Für die Division einer Strecke durch eine ganze positive Zahl ist noch die Bestimmung zu machen, dass der Quotient wieder eine Strecke sei (wobei unter Strecke hier immer die Differenz zweier Punkte, also eine Strecke von gegebener Länge und Richtung verstanden ist). Dann folgt nach der bekannten Schlussweise, dass das Produkt einer Strecke in eine beliebige ganze oder gebrochene rationale oder irrationale Zahl a wieder eine Strecke ist, welche der gegebenen gleichgerichtet oder entgegengesetzt gerichtet ist, je nachdem a positiv oder negativ ist, und deren Länge sich zu der Länge der gegebenen Linie wie a zu 1 verhält.

Hierdurch löst sich dann die allgemeine Aufgabe, die Summe $aA + bB + \cdots$ zu finden, wo $a, b, \ldots$ Zahlgrössen, $A, B, \ldots$ {einfache} Punkte sind. Nämlich für jeden beliebigen {einfachen} Punkt R ist

$$aA + bB + \cdots = (a + b + \cdots) R + a(A - R) + b(B - R) + \cdots.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem $a + b + \cdots$ null ist, oder nicht. Im ersteren Falle wird

$$aA + bB + \cdots = a(A - R) + b(B - R) + \cdots, \qquad 152$$

also gleich einer Strecke, welche nach dem Obigen konstruirbar ist. Zweitens, wenn $a + b + \cdots = s \gtrless 0$ ist, so wird

$$aA + bB + \cdots = sR + a(A - R) + b(B - R) + \cdots.$$

Hier ist $a(A - R) + b(B - R) + \cdots$ eine Strecke; der s-te Theil dieser Strecke sei so gelegt, dass R sein Anfangspunkt ist; dann sei sein Endpunkt mit S bezeichnet, so ist

$$a(A - R) + b(B - R) + \cdots = s(S - R).$$

Dieser Werth in die obige Gleichung eingesetzt, giebt

$$\begin{aligned} aA + bB + \cdots &= sR + s(S - R) \\ &= s(R + S - R) \\ &= sS, \end{aligned}$$

wodurch die Aufgabe vollständig gelöst, und der Begriff der Addition einfacher und vielfacher Punkte und Strecken vollkommen bestimmt ist, und zwar in Harmonie mit den im Haupttexte gegebenen Bestimmungen.

§ 2. Räumliche Gebiete.

228. Erklärung. Unter einem unendlich entfernten Punkte seien die Richtungen einer geraden Linie, unter einer unendlich entfernten geraden Linie die sämmtlichen Richtungen einer Ebene, unter einer unendlich entfernten Ebene die sämmtlichen Richtungen des Raumes verstanden, das heisst, es sei von zwei parallelen geraden Linien gesagt, dass sie einen unendlich entfernten Punkt gemein haben, von zwei parallelen Ebenen, dass sie eine unendlich entfernte gerade Linie gemein haben, und von allen unendlich entfernten Punkten und geraden Linien, dass sie in einer unendlich entfernten Ebene liegen.

Um die räumlichen Grössen erster Stufe, das heisst, die einfachen oder vielfachen Punkte und die Strecken (von gegebener Länge und Richtung) auf gleiche Weise behandeln zu können, will ich sagen, der Ort einer Strecke sei der unendlich entfernte Punkt, welchen die dieser Strecke parallelen Linien gemein haben, oder auch, es sei jene Strecke eine Grösse erster Stufe, welche in diesen Linien in unendlicher Entfernung liege. Auch will ich der Einfachheit wegen, um den Ausdruck räumliche Grössen erster Stufe durch einen einfacheren zu ersetzen,

153 sowohl die einfachen und vielfachen † Punkte als auch die Strecken kurzweg Punkte nennen, und zwar die letzteren unendlich entfernte.

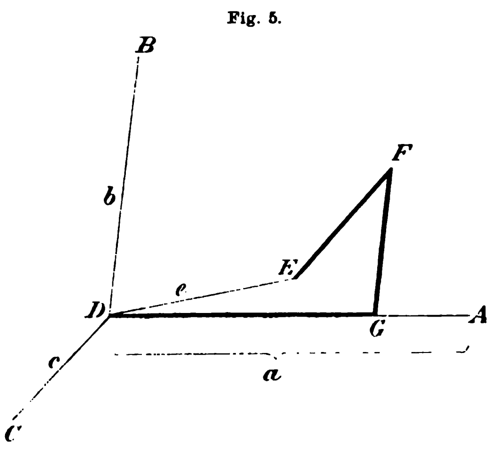
Anm. Zum Wesen der räumlichen Grössen, wie der Grössen überhaupt, gehört ein bestimmter metrischer Werth, vermöge dessen sie (in bestimmten Verhältnissen) vermehrt oder vermindert werden können. Dieser wird bei den einfachen und vielfachen Punkten durch den Zahlkoefficienten dargestellt, bei den Strecken durch ihre Länge.

Es würde an sich noch möglich sein, unendlich entfernte Punkte anzunehmen, deren metrischer Werth nicht durch die Länge einer Strecke, sondern durch einen Zahlkoefficienten dargestellt wäre, das heisst, welche aus dem vielfachen Punkte αA dadurch hervorgingen, dass man, ohne α zu ändern, den Punkt A ins Unendliche verlegte. Allein was dadurch hervorginge, würde, wie man leicht sieht, ganz den Charakter des Unendlichen an sich tragen, insofern es durch Hinzufügung einer endlichen Grösse (eines endlich entfernten Punktes, oder auch einer Strecke) gar nicht verändert würde. Mit solchem Unendlichen darf aber überhaupt gar nicht gerechnet werden, weil kein algebraisches Gesetz für das Unendliche gilt, und die Analysis des Unendlichen überhaupt nur dann zu richtigen Resultaten führen kann, wenn man das Falsche, was man durch Annahme des Unendlichen hineingebracht hat, noch vor der Ableitung irgend eines Resultates wieder herausschafft. Die Strecke dagegen, obgleich man sich der Bequemlichkeit wegen den Ausdruck gestatten darf, dass ihr Ort unendlich entfernt sei, ist doch eine endliche Grösse, indem sie durch Hinzufügung jeder von Null verschiedenen Grösse sich ändert.

229. *Alle Strecken des Raumes lassen sich aus beliebigen drei Strecken, welche nicht Einer Ebene parallel sind, numerisch ableiten.*

Beweis. Es seien a, b, c drei Strecken, welche nicht Einer Ebene parallel sind, und e eine beliebige Strecke, von der gezeigt werden soll, dass sie aus a, b, c numerisch ableitbar ist.

Fig. 5.



Man ziehe von einem beliebigen Punkte D die mit a, b, c, e gleich langen und gleichgerichteten Linien DA, DB, DC, DE {vgl. Fig. 5}, so ist (nach 222, Zusatz) $A-D=a$, $B-D=b$, $C-D=c$, $E-D=e$. Ferner ziehe man durch E die Parallele mit DC, welche die Ebene ABD in F treffe, durch F die Parallele mit DB, welche DA in G treffe, so ist $DG/\!/DA$, $GF/\!/DB$, $FE/\!/DC$.

Es möge sich

$$DG:DA=\alpha:1,\quad GF:DB=\beta:1,\quad FE:DC=\gamma:1$$

algebraisch (das heisst, auch dem Vorzeichen nach) verhalten, so ist (nach 221)

$$G - D = \alpha(A - D) = \alpha a,$$
$$F - G = \beta(B - D) = \beta b,$$
$$E - F = \gamma(C - D) = \gamma c.$$

154

Also addirt

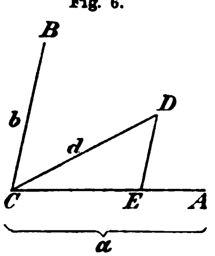
$$E - D = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

das heisst

$$e = \alpha a + \beta b + \gamma c.$$

230. *Alle Strecken einer Ebene lassen sich aus beliebigen zwei einander nicht parallelen Strecken der Ebene numerisch ableiten.*

Beweis. Es seien a, b zwei nicht parallele Strecken einer Ebene und d eine beliebige Strecke der Ebene, von der gezeigt werden soll, dass sie aus a und b numerisch ableitbar ist.



Man ziehe von einem beliebigen Punkte C der Ebene die mit a, b, d gleich langen und gleichgerichteten Linien CA, CB, CD {vgl. Fig. 6}, ziehe durch D eine Parallele mit CB, welche CA in E treffen {möge}, so ist $CE /\!/ CA$, $ED /\!/ CB$. Es verhalte sich algebraisch

$$CE : CA = \alpha : 1, \quad ED : CB = \beta : 1,$$

so ist (nach 221)

$$E - C = \alpha(A - C) = \alpha a,$$
$$D - E = \beta(B - C) = \beta b,$$

also

$$D - C = \alpha a + \beta b, \text{ das heisst, } d = \alpha a + \beta b.$$

{**230a.** *Alle Strecken einer Geraden lassen sich aus einer beliebigen Strecke der Geraden numerisch ableiten.*

Beweis. Es seien a und b zwei Strecken derselben Geraden; es soll gezeigt werden, dass die Strecke b aus a numerisch ableitbar ist.

Man ziehe von einem beliebigen Punkte C der Geraden die mit a und b gleich langen und gleichgerichteten geraden Linien CA und CB; dann ist (222, Zusatz)

$$a = A - C, \quad b = B - C.$$

Verhält sich nun algebraisch $CB : CA = \alpha : 1$, so ist (nach 221)

$$B - C = \alpha(A - C) = \alpha a,$$

das heisst

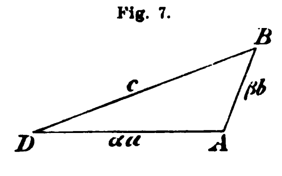
$$b = \alpha a;$$

also ist b wirklich aus a numerisch ableitbar.}

231. ***Wenn zwischen drei Strecken eine Zahlbeziehung herrscht, so sind sie Einer Ebene parallel.***

Beweis. Es seien a, b, c die drei Strecken und

$$c = \alpha a + \beta b$$



ihre Zahlbeziehung. Sollten a und b parallel sein, so würde auch c ihnen parallel sein, und es also unendlich viele Ebenen geben, mit welchen a, b, c zugleich parallel sind. Ist a nicht parallel b, so ziehe man {vgl. Fig. 7} von einem beliebigen Punkte D eine Linie DA, welche mit a parallel ist und sich zu a verhält wie $\alpha : 1$, und von A eine Linie AB, welche mit b parallel ist und sich zu b verhält wie $\beta : 1$, so ist

$$A - D = \alpha a,$$

$$B - A = \beta b.$$

Also addirt

$$B - D = \alpha a + \beta b = c.$$

Folglich ist c eben so wie a und b der Ebene ABD parallel.

155 **232.** ***Alle Punkte des Raumes lassen sich numerisch ableiten aus beliebigen vier Punkten, welche nicht in Einer Ebene liegen; ins Besondere***

1) *aus einem endlich entfernten Punkte und drei nicht Einer Ebene parallelen Strecken,*

2) *aus zwei endlich entfernten, nicht zusammenfallenden Punkten und zwei Strecken, welche nicht Einer durch jene zwei Punkte gelegten Ebene parallel sind,*

3) *aus drei endlich entfernten Punkten, die nicht in Einer geraden Linie liegen, und aus einer Strecke, die der durch die drei Punkte gelegten Ebene nicht parallel ist,*

4) *aus vier endlich entfernten Punkten, die nicht in Einer Ebene liegen.*

Beweis. 1. Es seien a, b, c drei nicht Einer Ebene parallele Strecken und $d' = \delta D$ ein endlich entfernter Punkt, D sein Ort und $e' = \varepsilon E$ ein beliebiger endlich entfernter Punkt und E sein Ort; und sei zu zeigen, dass e' aus a, b, c, d' numerisch ableitbar sei. Nach 229 ist die Strecke $E - D$ aus a, b, c numerisch ableitbar; es sei

$$E - D = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

so ist

$$E = D + \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

das heisst,

$$\frac{e'}{\varepsilon} = \frac{d'}{\delta} + \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

also

$$e' = \frac{\varepsilon}{\delta} d' + \varepsilon\alpha a + \varepsilon\beta b + \varepsilon\gamma c,$$

das heisst, e' aus a, b, c, d' numerisch ableitbar. Ist der abzuleitende Punkt ein unendlich entfernter, das heisst, eine Strecke, so ist diese (nach 229) schon aus a, b, c, also auch aus a, b, c, d' numerisch ableitbar ($= \alpha a + \beta b + \gamma c + 0 d'$).

2. Es seien a, b zwei Strecken, $c' = \gamma C$, $d' = \delta D$ zwei endlich entfernte Punkte, C und D ihre Orte, und sei vorausgesetzt, dass sich durch C und D keine mit a und b parallele Ebene legen lasse. Man setze $C - D = c$, so sind a, b, c drei nicht Einer Ebene parallele Strecken, folglich {ist} jeder Punkt e' (nach Beweis 1) aus a, b, c, d' numerisch ableitbar. Setzt man in dem Ausdrucke dieser Ableitung statt c seinen Werth † $C - D$, das heisst, $\frac{c'}{\gamma} - \frac{d'}{\delta}$, so erhält man einen 156 Ausdruck, durch welchen e' aus a, b, c', d' numerisch abgeleitet ist.

3. Es sei a eine Strecke, $b' = \beta B$, $c' = \gamma C$, $d' = \delta D$ drei endlich entfernte Punkte, B, C, D ihre Orte, und sei vorausgesetzt, dass a nicht mit der Ebene BCD parallel sei. Man setze $B - D = b$, so ist (nach Beweis 2) jeder Punkt e' aus a, b, c', d' numerisch ableitbar. Setzt man in dem Ausdrucke dieser Ableitung statt b seinen Werth $B - D$, das heisst $\frac{b'}{\beta} - \frac{d'}{\delta}$, so erhält man einen Ausdruck, durch welchen e' aus a, b', c', d' numerisch abgeleitet ist.

4. Es seien $a' = \alpha A$, $b' = \beta B$, $c' = \gamma C$, $d' = \delta D$ vier endlich entfernte Punkte, A, B, C, D ihre Orte, und sei vorausgesetzt, dass diese Punkte nicht in Einer Ebene liegen. Man setze $A - D = a$, so ist (nach Beweis 3) jeder Punkt e' aus a, b', c', d' numerisch ableitbar. Setzt man in dem Ausdrucke dieser Ableitung statt a seinen Werth $\frac{a'}{\alpha} - \frac{d'}{\delta}$, so erhält man einen Ausdruck, durch welchen e' aus a', b', c', d' numerisch abgeleitet ist.

Anm. Das erste der vier im Satze bezeichneten Ableitungssysteme ist, wenn die drei Strecken gleich lang sind, das gewöhnliche Parallelkoordinatensystem, das letzte ist, wenn die Punkte einfach sind, das barycentrische von Möbius, wenn sie beliebig sind, das allgemeinste lineale Koordinatensystem, wie es von Plücker und anderen behandelt ist.

233. *Alle Punkte der Ebene lassen sich aus beliebigen drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten derselben numerisch ableiten.*

Beweis wie in 232.

234. *Alle Punkte der geraden Linie lassen sich aus beliebigen zwei räumlich verschiedenen Punkten derselben numerisch ableiten.*

Beweis wie in 232.

235. *Wenn drei Punkte in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so liegen sie in Einer geraden Linie.*

157 Beweis. Es seien a, b, c die drei Punkte, und

$$a = \beta b + \gamma c$$

ihre Zahlbeziehung.

Sind b und c *unendlich entfernt*, das heisst Strecken (nach 228), so ist (nach 221 und 220) auch a eine Strecke. Nach 231 sind dann die drei Strecken a, b, c Einer Ebene parallel, das heisst (nach 228), a, b, c sind unendlich entfernte Punkte, die in Einer unendlich entfernten geraden Linie liegen.

Sind hingegen b und c *nicht beide zugleich unendlich entfernt*, so verbinde man sie durch die gerade Linie DE, und nehme D und E als zwei einfache, endlich entfernte Punkte dieser geraden Linie an. Dann sind (nach 234) b und c, da sie in der durch D und E gelegten geraden Linie liegen, aus D und E numerisch ableitbar, also auch $a = \beta b + \gamma c$. Es sei $a = \delta D + \varepsilon E$.

Ist nun {*zuerst*} $\delta + \varepsilon = 0$, also $\delta = -\varepsilon$, so ist $a = \varepsilon(E - D)$. Aber $\varepsilon(E - D)$ ist eine mit DE parallele Strecke, das heisst, ein unendlich entfernter Punkt der Linie DE, also liegen dann a, b, c in DE.

Ist aber {*zweitens*} $\delta + \varepsilon = \sigma$, von Null verschieden, so ist

$$a = \delta D + \varepsilon E = \sigma D + \varepsilon(E - D),$$

das heisst, $a = \sigma A$, wo $A = D + \frac{\varepsilon}{\sigma}(E - D)$ ist, das heisst $A - D = \frac{\varepsilon}{\sigma}(E - D)$. Also ist $A - D$ mit $E - D$ parallel, das heisst, A ein Punkt der Linie DE, also auch in diesem Falle b, c, d in einer geraden Linie.

Anm. Der letzte Theil des Beweises thut nur dar, dass der Schwerpunkt zweier Punkte mit beliebigen Gewichten in der diese Punkte verbindenden geraden Linie liegt.

236. *Wenn vier Punkte in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so liegen sie in Einer Ebene.*

Beweis. Es seien a, b, c, d vier Punkte und

$$a = \beta b + \gamma c + \delta d$$

die Zahlbeziehung. Sind zuerst b, c, d *alle drei zugleich unendlich entfernt*, so ist zu zeigen, dass a in der unendlich entfernten Ebene liegt, das heisst, auch unendlich entfernt, das heisst, eine Strecke sei. Dies folgt aus 228, da dann b, c, d, also {nach 221} auch ihre Vielfachen Strecken sind, und somit auch (nach 220) ihre Summe.

Sind b, c, d *nicht alle drei zugleich unendlich entfernt*, so sei DEF 158 die durch sie gelegte Ebene und D, E, F † drei einfache, endlich entfernte Punkte dieser Ebene. Dann lassen sich (nach 233) b, c, d

aus D, E, F numerisch ableiten, also auch $\beta b + \gamma c + \delta d$, das heisst a. Es sei

$$a = \delta D + \varepsilon E + \zeta F.$$

Ist *zuerst* $\delta + \varepsilon + \zeta = 0$, so ist

$$a = \delta D + \varepsilon E + \zeta F - (\delta + \varepsilon + \zeta)D = \varepsilon(E - D) + \zeta(F - D),$$

also a aus $E - D$ und $F - D$ numerisch ableitbar, das heisst (nach 231), die Strecken a, $D - E$ und $F - D$ sind Einer Ebene parallel, folglich ist a der Ebene DEF parallel, das heisst, ein unendlich entfernter Punkt dieser Ebene.

Ist {*zweitens*} $\delta + \varepsilon + \zeta = \sigma$ ungleich Null, so ist

$$a = \delta D + \varepsilon E + \zeta F = \sigma D + \varepsilon(E - D) + \zeta(F - D)$$
$$= \sigma A,$$

wenn

$$A = D + \frac{\varepsilon}{\sigma}(E - D) + \frac{\zeta}{\sigma}(F - D)$$

ist, also ist $A - D$ (nach 231) mit der Ebene DEF parallel, das heisst, A {ist} ein Punkt der Ebene DEF, also auch a ein Punkt dieser Ebene.

237. *Das räumliche Gebiet erster Stufe ist ein Punkt (als Ort betrachtet), das zweiter Stufe eine unbegränzte gerade Linie, das dritter Stufe eine unbegränzte Ebene, das vierter Stufe der unbegränzte Raum.*

Beweis. Ein Gebiet n-ter Stufe ist (nach 14) die Gesammtheit der Grössen, welche aus n Grössen numerisch ableitbar sind, vorausgesetzt, dass jene Grössen sich nicht sämmtlich aus weniger als n Grössen numerisch ableiten lassen. Nun sind (nach 232) alle Punkte des Raumes aus vier Grössen erster Stufe numerisch ableitbar; nach 236 bilden die aus drei solcher Grössen ableitbaren Punkte eine Ebene, folglich lassen sich die Punkte des Raumes nicht aus weniger als vier Grössen erster Stufe ableiten. Also ist der Raum ein Gebiet vierter Stufe. Ebenso folgt aus 233 und aus 235, dass das Gebiet dritter Stufe eine Ebene, und aus 234 und daraus, dass aus einem Punkt nur örtlich identische Punkte ableitbar sind, folgt, dass das Gebiet zweiter Stufe eine gerade Linie, so wie das Gebiet erster Stufe ein Punkt sei.

238. Aufgabe. Die Ableitzahlen (Koordinaten), durch welche ein Punkt (p) aus vier nicht in Einer Ebene liegenden † Punkten 159 (a, b, c, d) hervorgeht, auszudrücken durch die Ableitzahlen, durch welche derselbe Punkt (p) aus vier neuen Punkten (a', b', c', d') ableitbar ist; vorausgesetzt, dass diese vier neuen Punkte durch die vier alten ausgedrückt sind.

Auflösung. Es sei

$$1)\quad a' = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d,$$
$$2)\quad b' = \alpha' a + \beta' b + \gamma' c + \delta' d,$$
$$3)\quad c' = \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c + \delta'' d,$$
$$4)\quad d' = \alpha''' a + \beta''' b + \gamma''' c + \delta''' d,$$
$$5)\quad p = x' a + y' b + z' c + u' d,$$
$$6)\quad p = x a' + y b' + z c' + u d'.$$

Man setze in 6) für a', b', c', d', p die Werthe aus 1) bis 5), so erhält man, nach a, b, c, d geordnet,

$$7)\quad x' a + y' b + z' c + u' d =$$
$$= (x\alpha + y\alpha' + z\alpha'' + u\alpha''')a + (x\beta + y\beta' + z\beta'' + u\beta''')b + \cdots.$$

Da hier a, b, c, d nicht in Einer Ebene liegen, so stehen sie (nach 236) in keiner Zahlbeziehung zu einander. Folglich sind (nach 29) in der gefundenen Gleichung die entsprechenden Koefficienten gleich, also

$$x' = x\alpha + y\alpha' + z\alpha'' + u\alpha'''$$
$$y' = x\beta + y\beta' + z\beta'' + u\beta'''$$
$$z' = x\gamma + y\gamma' + z\gamma'' + u\gamma'''$$
$$u' = x\delta + y\delta' + z\delta'' + u\delta'''.$$

Anm. Dies ist die Auflösung des allgemeinsten Problems der Koordinatenverwandlung.

§ 3. Kombinatorische Multiplikation der Punkte.

239. Erklärung. Das Parallelogramm, in welchem AB und BC zwei Seiten sind, werde ich der Kürze wegen das Parallelogramm ABC nennen, und zwar werde ich, wenn es auf diese Weise benannt ist, AB seine erste Seite, BC seine zweite Seite nennen. Ferner alle Parallelogramme, deren erste Seite der Strecke a und deren zweite Seite der Strecke b gleich lang und gleichgerichtet sind, werde ich die Parallelogramme ab nennen.

Zwei Parallelogramme ABC und DEF, welche in parallelen Ebenen liegen, werde ich dann und nur dann als gleichbezeichnet 160 betrachten, wenn man sie durch † parallele Fortbewegung ihrer Ebenen und durch Bewegung der Parallelogramme innerhalb ihrer Ebenen in eine solche Lage bringen kann, dass, während AB und DE in derselben geraden Linie nach derselben Richtung hin liegen, C und F auf ein und derselben Seite dieser geraden Linie sich befinden.

240. Erklärung. Den Spat (das Parallelepipedum), in welchem AB, BC, CD drei nicht in Einer Ebene liegende Kanten sind, werde

ich der Kürze wegen den Spat (das Parallelepipedum) $ABCD$ nennen, AB seine erste, BC seine zweite, CD seine dritte Kante. Und alle Spate (Parallelepipeda), deren erste Kante der Strecke a, deren zweite der Strecke b, und deren dritte Kante der Strecke c gleich lang und gleichgerichtet sind, werde ich die Spate (Parallelepipeda) abc nennen.

Zwei Spate $ABCD$ und $EFGH$ werde ich dann und nur dann als gleichbezeichnet betrachten, wenn man sie in eine solche Lage bringen kann, dass, während ABC und EFG gleichbezeichnete Parallelogramme derselben Ebene werden, D und H auf ein und derselben Seite dieser Ebene liegen.

Zusatz. Die Spate (Parallelepipeda) abc, bca, cab sind einander gleich (auch dem Zeichen nach).

241. Lehnsatz. Zwei Parallelogramme, deren erste und deren zweite Seiten gleich lang und gleichgerichtet sind, sind einander gleich (auch dem Zeichen nach), und liegen in parallelen*) Ebenen. Zwei Spate (Parallelepipeda), deren entsprechende (erste, zweite, dritte) Kanten gleich lang und gleichgerichtet sind, sind einander gleich (auch dem Zeichen nach); das heisst, alle durch dasselbe Symbol ab bezeichneten Parallelogramme und ebenso alle durch dasselbe Symbol abc bezeichneten Spate sind einander gleich (auch dem Zeichen nach).

242. Erklärung. Von zwei Parallelogrammen, die in parallelen Ebenen liegen und ebenso von zwei beliebigen Spaten (Parallelepipeda) sage ich, dass sie sich wie zwei Zahlen α und β verhalten, wenn sie einander gleich- oder entgegengesetzt bezeichnet sind, je nachdem α und β es sind, und sie sich, abgesehen vom Zeichen, wie α zu β verhalten (vgl. 221).

243. Lehnsatz. Zwei Parallelogramme ABC und ABD (von derselben Grundseite AB) sind dann und nur dann gleich (auch dem Zeichen nach), wenn CD mit AB parallel ist. 161

244. Lehnsatz. Zwei Spate (Parallelepipeda) $ABCD$ und $ABCE$ (von derselben Grundfläche ABC) sind dann und nur dann gleich (auch dem Zeichen nach), wenn DE mit der Ebene ABC parallel ist.

Anm. Nach diesen vorbereitenden Sätzen, welche aus der Geometrie entlehnt sind, können wir nun den Begriff des kombinatorischen Produktes von Punkten aus dem allgemeinen Begriffe des kombinatorischen Produktes direkt ableiten.

245. *Das kombinatorische Produkt zweier Punkte ist dann und nur dann null, wenn die beiden Punkte zusammenfallen, das kombinatorische*

*) Zu dem Parallelen ist überall das Identische mit hinzugerechnet.

Produkt dreier Punkte, wenn sie in gerader Linie liegen, das kombinatorische Produkt von vier Punkten, wenn sie in Einer Ebene liegen; das kombinatorische Produkt von fünf Punkten ist immer null.

Beweis. Nach 61 und 66 ist das kombinatorische Produkt zweier oder mehrerer Grössen dann und nur dann null, wenn sie in einer Zahlbeziehung zu einander stehen; nach 216 stehen zwei Punkte dann und nur dann in einer Zahlbeziehung, wenn sie zusammenfallen, drei Punkte (nach 234 und 235), wenn sie in Einer geraden Linie liegen, vier Punkte (nach 233, 236), wenn sie in Einer Ebene liegen, und nach 232 stehen fünf Punkte stets in einer Zahlbeziehung. Also bewiesen.

246. *Wenn A ein endlich entfernter Punkt, b, c, d unendlich entfernte Punkte, das heisst Strecken sind, so folgt*

$$\begin{aligned} &\textit{aus } [Ab] = 0, \textit{ die Gleichung } b = 0, \\ &\textit{aus } [Abc] = 0, \textit{ die Gleichung } [bc] = 0, \\ &\textit{aus } [Abcd] = 0, \textit{ die Gleichung } [bcd] = 0. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $[Abcd] = 0$. Angenommen nun, $[bcd]$ sei ungleich Null, so können (nach 61) b, c, d in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Da aber $[Abcd] = 0$ ist, so muss {nach 66} zwischen A, b, c, d eine Zahlbeziehung herrschen, und da b, c, d in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so müsste (nach 2) A aus b, c, d numerisch 162 ableitbar sein. † Aber aus den unendlich entfernten Punkten oder Strecken b, c, d gehen durch numerische Ableitung (nach {221}, 220) nur Strecken, das heisst, Punkte der unendlich entfernten Ebene hervor, also nicht der endlich entfernte Punkt A. Somit ist die Annahme, dass $[bcd]$ von Null verschieden sei, mit der Voraussetzung im Widerspruch, das heisst, $[bcd]$ muss null sein. Ganz ebenso ergeben sich die übrigen Theile des Satzes.

247. *Ein kombinatorisches Produkt $[AB]$ zweier einfachen Punkte A und B ist einem kombinatorischen Produkte $[CD]$ zweier einfachen Punkte C und D dann und nur dann gleich, wenn die unendlichen geraden Linien AB und CD zusammenfallen, und AB mit CD gleich lang und gleichgerichtet ist.*

Beweis. 1. Es seien die unendlichen geraden Linien AB und CD zusammenfallend, und AB mit CD gleich lang und gleichgerichtet, so ist zu beweisen, dass $[AB] = [CD]$ sei.

Da AB und CD gleich lang und gleichgerichtet sind, so ist (nach 222, Zusatz)

$$(*) \qquad B - A = D - C.$$

Ferner, da A, B, C in Einer geraden Linie liegen (Hypothesis), so sind $B - A$ und $C - A$ Strecken einer und derselben geraden Linie, stehen also (nach 230a) in einer Zahlbeziehung zu einander. Es sei

$$C - A = \alpha(B - A). \tag{**}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
[CD] &= [C(D - C)] && [67] \\
&= [C(B - A)] && [*] \\
&= [(A + C - A)(B - A)] && \\
&= [(A + \alpha(B - A))(B - A)] && [**] \\
&= [A(B - A)] && [67] \\
&= [AB] && [67].
\end{aligned}$$

2. Es sei vorausgesetzt

$$[AB] = [CD],$$

so ist zu beweisen, dass A, B, C, D in Einer geraden Linie liegen und AB und CD gleich lang und gleichgerichtet sind.

Wenn $[AB] = [CD]$ ist, so müssen (nach 76) C und D aus A und B durch lineale Aenderung ableitbar sein. Die einfache lineale Aenderung zweier Grössen besteht (nach 71) darin, dass zu 163 einer derselben ein Vielfaches der andern addirt wird, also zum Beispiel A und B sich verwandeln in A und $B + \alpha A$. Die so hervorgehende neue Grösse ist also aus den beiden ursprünglichen Grössen numerisch abgeleitet, liegt also (nach 235) in der jene Grössen verbindenden geraden Linie, somit werden aus A und B durch fortgesetzte lineale Aenderung nur Punkte der geraden Linie AB hervorgehen; somit liegen C und D in der geraden Linie AB. Nun sei E ein Punkt der geraden Linie AB von der Art, dass CE mit AB gleich lang und gleichgerichtet sei, so ist (nach Beweis 1)

$$[CE] = [AB],$$

und nach der Voraussetzung

$$[AB] = [CD],$$

also auch

$$[CE] = [CD];$$

folglich

$$0 = [CD] - [CE] = [C(D - E)].$$

Somit (nach 246)

$$D - E = 0,$$

das heisst,

$$D = E.$$

Da nun nach der Annahme CE mit AB gleich lang und gleich-

gerichtet ist, so ist auch das mit CE identische CD mit AB gleich lang und gleichgerichtet.

248. Zusatz. *Wenn A, B, C und D einfache Punkte sind, so folgt aus der Gleichung*

$$[AB] = [CD]$$

die Gleichung

$$A - B = C - D,$$

aber nicht umgekehrt aus dieser jene.

249. Erklärung. Wir nennen das Produkt $[AB]$ einen Linientheil und sagen, derselbe sei ein Theil der unbegränzten geraden Linie AB, und er sei mit der begränzten geraden Linie AB gleich lang und gleichgerichtet.

250. Zusatz. *Zwei Linientheile werden also dann und nur dann gleichgesetzt, wenn sie gleich lang, gleichgerichtet und Theile derselben unbegränzten geraden Linie sind.*

251. *Das kombinatorische Produkt eines einfachen Punktes in eine* 164 *Strecke ist ein Linientheil, welcher in der durch † den Punkt parallel der Strecke gezogenen geraden Linie liegt, und der Strecke gleich lang und gleichgerichtet ist.*

Beweis. Es sei A ein einfacher Punkt und p eine Strecke. Man ziehe durch A eine gerade Linie AB, welche mit p gleich lang und gleichgerichtet ist, so ist (nach 222, Zusatz) $p = B - A$, also

$$[Ap] = [A(B-A)] = [AB] \qquad [67],$$

und $[AB]$ ist ein Linientheil, welcher in der geraden Linie AB, also in der durch A mit p parallel gezogenen geraden Linie liegt, und mit AB, also auch mit p, gleich lang und gleichgerichtet ist.

252. *Das Produkt eines Linientheiles $[AB]$ mit einer Zahl α ist ein Linientheil, welcher mit jenem in derselben unbegränzten geraden Linie liegt, und sich zu ihm algebraisch wie $\alpha : 1$ verhält.*

Beweis.
$$\alpha[AB] = \alpha[A(B-A)] \qquad [67],$$
$$= [A \,.\, \alpha(B-A)] \qquad [40].$$

Das letztere Produkt ist (nach 251) ein Linientheil, welcher in der durch A mit $\alpha(B-A)$ parallel gezogenen geraden Linie, das heisst, in der geraden Linie AB liegt, und welcher mit $\alpha(B-A)$ gleich lang und gleichgerichtet ist, das heisst (nach 221), sich zu AB wie $\alpha : 1$ verhält.

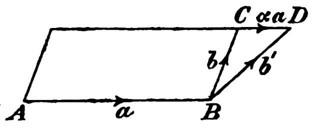
253. *Wenn A und B einfache Punkte, α und β Zahlen sind, so ist $[\alpha A \,.\, \beta B]$ ein Linientheil, der in der unbegränzten geraden Linie*

AB liegt und sich zu der begränzten geraden Linie AB algebraisch wie $\alpha\beta$ zu 1 verhält.

Beweis. $[\alpha A . \beta B] = \alpha\beta[AB]$ (nach 46), also (nach 252) ein Linientheil der unbegränzten geraden Linie AB, welcher sich zu der begränzten AB algebraisch wie $\alpha\beta : 1$ verhält.

254. *Zwei von Null verschiedene kombinatorische Produkte $[ab]$ und $[cd]$ je zweier Strecken a und b, c und d, sind dann und nur dann einander gleich, wenn die Parallelogramme ab und cd gleich an Inhalt und gleichbezeichnet sind und in parallelen Ebenen liegen.*

Beweis. In 72 und 76 ist bewiesen, dass zwei kombinatorische Produkte $[ab]$ und $[cd]$ dann und nur dann einander gleich sind, wenn c und d aus a und b durch lineale Aenderung ableitbar sind; und zwar bestand die einfache lineale † Aenderung zweier Grössen (nach 71) 165 darin, dass zu einer derselben ein Vielfaches der andern addirt wurde, während diese andere unverändert blieb, das heisst also, dass a und b, wenn α und β beliebige Zahlen sind, entweder in a und $b + \alpha a$, oder in $a + \beta b$ und b übergingen.



Nun sei {vgl. Fig. 8} AB mit a, BC mit b gleich lang und gleichgerichtet, und ändere sich b in $b' = b + \alpha a$, ferner sei CD parallel mit AB gezogen und verhalte sich zu AB algebraisch wie $\alpha : 1$, so ist (nach 222, {Zusatz})

$$B - A = a, \quad C - B = b, \quad D - C = \alpha a.$$

Also

$$D - B = D - C + C - B = \alpha a + b = b',$$

das heisst, BD ist mit b' gleich lang und gleichgerichtet. Ferner, da AB und CD parallel sind, so sind (nach 243) die Parallelogramme ABC und ABD einander gleich (auch dem Zeichen nach), und liegen in einer Ebene. Also sind auch die Parallelogramme ab und ab' gleich und gleichbezeichnet und liegen in parallelen Ebenen. Dasselbe gilt, wenn sich a und b in $a + \beta b$ und b ändern. Also ergiebt sich, dass, wenn aus a und b durch einfache lineale Aenderung c und d hervorgehen, auch die Parallelogramme ab und cd gleich (auch dem Zeichen nach) sind und in parallelen Ebenen liegen. Dasselbe gilt also auch, wenn c und d aus a und b durch Anwendung mehrerer einfacher linealer Aenderungen, das heisst, durch eine beliebige lineale Aenderung hervorgehen. Somit ergiebt sich:

Erstens. Wenn $[ab] = [cd]$ ist, so müssen c und d aus a und b durch lineale Aenderung ableitbar sein (76); und wenn c und d aus

a und b durch lineale Aenderung ableitbar sind, so müssen die Parallelogramme ab und cd gleich (auch dem Zeichen nach) sein und in parallelen Ebenen liegen.

Zweitens. Wenn umgekehrt vorausgesetzt wird, dass ab und cd gleiche (auch gleichbezeichnete) Parallelogramme in parallelen Ebenen sind, so müssen, da a, b, c, d dann einer und derselben Ebene parallel sind, c und d (nach 230) aus a und b numerisch ableitbar sein, folglich stehen (nach 63) die kombinatorischen Produkte $[ab]$ und $[cd]$ in einer Zahlbeziehung zu einander.

Es sei $[cd] = \alpha[ab]$ der Ausdruck dieser Zahlbeziehung. Setzen 166 wir $\alpha b = b'$, so wird $[cd] = [a \,.\, \alpha b] = [ab']$. Also sind † (nach Beweis 1) die Parallelogramme cd und ab' gleich und gleichbezeichnet, also, da auch cd und ab nach der Voraussetzung gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme sind, so sind auch ab und ab' gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme.

Nun sei AB mit a, BC mit b, BD mit b' gleich lang und gleichgerichtet, so ist das Parallelogramm ABC eins der mit ab bezeichneten und ABD eins der mit ab' bezeichneten Parallelogramme. Also {ist} ABC mit ABD gleich und gleichbezeichnet, folglich, da ABC und ABD auch in Einer Ebene liegen, so liegen (nach 243) C und D in einer mit AB parallelen Linie. Nun sind BC und BD beide mit b parallel, also auch untereinander, also, da sie einen Punkt (B) gemein haben, so liegen sie in Einer geraden Linie, somit fallen C und D, da D auch in der durch C mit AB parallel gezogenen geraden Linie liegt, zusammen, also sind BC und BD identisch, also sind b und b', von denen das erste mit BC, das zweite mit BD gleich lang und gleichgerichtet ist, auch unter einander gleich lang und gleichgerichtet; folglich, da $\alpha b = b'$ gesetzt war, so ist $\alpha = 1$. Nun war

$$[cd] = \alpha[ab]$$

gesetzt, also, da $\alpha = 1$ ist,

$$[cd] = [ab].$$

255. *Zwei von Null verschiedene kombinatorische Produkte $[ABC]$ und $[DEF]$ je dreier einfacher Punkte A, B, C und D, E, F sind dann und nur dann einander gleich, wenn die Parallelogramme ABC und DEF gleich und gleichbezeichnet sind und in einer und derselben Ebene liegen.*

Beweis. 1. Es seien ABC und DEF gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme einer und derselben Ebene, so ist zu beweisen, dass $[ABC] = [DEF]$ sei.

Es seien AB mit a, BC mit b, DE mit c, EF mit d gleich lang und gleichgerichtet, das heisst,

(*) $B - A = a,\quad C - B = b,\quad E - D = c,\quad F - E = d,$

so ist (nach 254)

(**) $$[ab] = [cd].$$

Da ferner D in der Ebene ABC liegt, und ebenso $B - A = a$ und $C - B = b$ Strecken dieser Ebene sind, so muss (nach 230) $D - A$ aus a und b numerisch ableitbar sein. Es sei

(***) $$D - A = \alpha a + \beta b,$$ 167

so ist

$$\begin{aligned}[DEF] &= [DE(F-E)] = [D(E-D)(F-E)] && [67]\\ &= [Dcd] && [*]\\ &= [D(cd)] && [80]\\ &= [D(ab)] && [**]\\ &= [(\alpha a + \beta b + A)ab] && [***, 80]\\ &= [Aab] && [67]\\ &= [A(a+A)(b+A)] && [67]\\ &= [ABC] && [*].\end{aligned}$$

2. Es sei umgekehrt vorausgesetzt, dass

$$[ABC] = [DEF]$$

ist. Dann müssen (nach 76) D, E, F aus A, B, C durch lineale Aenderung, also auch numerisch ableitbar sein. Dann aber müssen (nach 236) D, E, F in der Ebene ABC liegen. Nun sei in der geraden Linie BC ein Punkt G von der Art angenommen, dass ABG und DEF gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme sind, so ist (nach Beweis 1), da ABG und DEF in ein und derselben Ebene (ABC) liegen,

$$[ABG] = [DEF].$$

Aber auch nach der Voraussetzung

$$[ABC] = [DEF].$$

Also $[ABG] = [ABC]$. Da nun G ein Punkt in BC ist, so ist $G - B$ aus $C - B$ numerisch ableitbar, es sei $G - B = \alpha(C - B)$, also $G = B + \alpha(C - B)$, so ist

$$\begin{aligned}[ABC] = [ABG] = [AB(B + \alpha(C-B))] &= [AB\alpha(C-B)]\\ &= \alpha[ABC] \qquad [40, 67].\end{aligned}$$

Also $\alpha = 1$. Somit, da $G - B = \alpha(C - B)$ war, $G - B = C - B$, das heisst, $G = C$, oder die Punkte G und C fallen zusammen; also fallen auch die Parallelogramme ABG und ABC zusammen. Folglich, da ABG und DEF gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme derselben Ebene sind, so gilt dies auch von ABC und DEF.

256. Zusatz. *Wenn A, B, C, D, E, F einfache Punkte sind, so folgt aus der Gleichung*

$$[ABC] = [DEF]$$

auch die Gleichung

$$[(B - A)(C - B)] = [(E - D)(F - E)];$$

168 *hingegen umgekehrt, aus letzterer die erstere nur dann, wenn † noch die Bedingung hinzutritt, dass die Ebenen ABC und DEF nicht bloss parallel, sondern auch identisch sind.*

257. Erklärung. Wir nennen das Produkt $[ABC]$ einen Flächentheil und den Flächeninhalt des Parallelogramms ABC seinen Inhalt, und sagen, der Flächentheil $[ABC]$ liege in der Ebene ABC.

Anm. Die genauere Benennung für das Produkt $[ABC]$ würde Ebenentheil statt Flächentheil sein. Allein der erstere Ausdruck ist wegen des Gleichklangs seines Plurals „die Ebenentheile" mit dem Ausdrucke „die ebenen Theile" zu verwerfen.

258. Zusatz. *Zwei Flächentheile sind dann und nur dann einander gleich, wenn sie in derselben Ebene liegen, und ihre Inhalte gleich und gleichbezeichnet sind.*

Anm. Man hätte als Inhalt des Flächentheiles $[ABC]$ auch den Flächeninhalt des Dreiecks ABC setzen können. Aber es wird sich in der Folge {vgl. Nr. 331} zeigen, dass dann der Inhalt des inneren Quadrates einer Strecke nur die Hälfte von dem Inhalte des Quadrates {der Länge} dieser Strecke sein würde, während beides bei unserer Benennung in Uebereinstimmung ist.

259. *Das kombinatorische Produkt zweier einfacher Punkte A, B und einer Strecke c ist ein Flächentheil, welcher in der durch AB mit c parallel gelegten Ebene liegt, und dessen Inhalt gleich dem eines Parallelogrammes ABC ist, in welchem BC mit c gleich lang und gleichgerichtet ist, das heisst,*

$$[ABc] = [ABC],$$

wenn $c = C - B$.

Beweis. $[ABc] = [AB(C - B)] = [ABC]$ [67].

260. *Das kombinatorische Produkt eines einfachen Punktes A mit zwei Strecken b und c ist ein Flächentheil, welcher in der durch A mit b und c parallel gelegten Ebene liegt, und zum Inhalt den Flächeninhalt*

eines Parallelogrammes (ABC) *hat, dessen erste Seite* (AB) *mit* b, *und dessen zweite Seite* (BC) *mit* c *gleich lang und gleichgerichtet ist, das heisst,*

$$[Abc] = [ABC],$$

wenn $b = B - A$, $c = C - B$ *ist.*

Beweis.

$$[Abc] = [A(B-A)(C-B)] = [AB(C-B)] \qquad [67]$$
$$= [ABC] \qquad [67].$$

261a. *Das Produkt* $\alpha[ABC]$ *eines Flächentheils* $[ABC]$ *mit einer Zahl* α *ist ein Flächentheil derselben Ebene, dessen Inhalt sich zu dem von* $[ABC]$ *wie* $\alpha : 1$ *verhält.*

Beweis. $\alpha[ABC] = \alpha[AB(C-B)]$ [67] 169

$$= [AB \,.\, \alpha(C-B)] \qquad [40]$$
$$= [AB(D-B)],$$

wenn BD mit BC parallel ist, und sich zu ihm wie $\alpha : 1$ verhält. Dies ist wieder (nach 67)

$$= [ABD],$$

das heisst, gleich einem Flächentheil derselben Ebene (ABC), dessen Inhalt dem Flächeninhalte des Parallelogramms ABD gleich ist. Da aber BD und BC parallel sind und sich algebraisch wie $\alpha : 1$ verhalten, so verhalten sich auch die Parallelogramme ABD und ABC wie $\alpha : 1$, das heisst, die Inhalte von $\alpha[ABC]$ und $[ABC]$ wie $\alpha : 1$.

261b. *Wenn* A, B, C *einfache Punkte, und* α, β, γ *Zahlen sind, so ist*

$$[\alpha A \,.\, \beta B \,.\, \gamma C]$$

ein Flächentheil der Ebene ABC, *dessen Inhalt zu dem des Parallelogramms* ABC *sich algebraisch wie* $\alpha\beta\gamma : 1$ *verhält.*

Beweis. $[\alpha A \,.\, \beta B \,.\, \gamma C] = \alpha\beta\gamma[ABC]$ (Nr. 46), also nach 261a bewiesen.

262. *Zwei von Null verschiedene kombinatorische Produkte* $[abc]$ *und* $[def]$ *je dreier Strecken* a, b, c *und* d, e, f *sind dann und nur dann einander gleich, wenn die Spate (Parallelepipeda)* abc *und* def *gleich und gleichbezeichnet sind.*

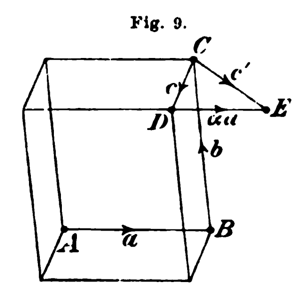
Beweis. 1. Es sei vorausgesetzt, dass

$$[abc] = [def]$$

sei, so ist zu zeigen, dass die Spate abc und def gleich und gleichbezeichnet sind.

Da $[abc] = [def]$ ist, so müssen (nach 76) d, e, f aus a, b, c durch lineale Aenderung hervorgehen. Nun können wir zeigen, dass durch einfache lineale Aenderung der drei Seiten a, b, c eines Spates abc stets ein gleicher und gleichbezeichneter Spat hervorgehe. Die einfache lineale Aenderung der drei Grössen a, b, c besteht (nach 71) darin, dass zu einer derselben ein Vielfaches von einer der beiden andern hinzuaddirt wird, während diese beiden andern ungeändert bleiben. Es möge zuerst zu der dritten c ein Vielfaches von irgend einer der beiden andern, zum Beispiel von a hinzutreten, also a, b, c

Fig. 9.



170 sich ändern in a, b, c', wo $c' = c + \alpha a$ † ist. Dann seien {vgl. Fig. 9} AB, BC, CD, DE beziehlich gleich lang und gleichgerichtet mit $a, b, c, \alpha a$, das heisst,

$$B - A = a, \quad C - B = b, \quad D - C = c, \quad E - D = \alpha a,$$

so ist

$$E - C = E - D + D - C = \alpha a + c = c',$$

also CE mit c' gleich lang und gleichgerichtet. Ferner, da DE mit a, also auch mit AB, und folglich auch mit der Ebene ABC parallel ist, so sind (nach 244) die Spate $ABCD$ und $ABCE$ oder, was dasselbe ist, die Spate abc und abc' gleich und gleichbezeichnet, das heisst, der Spat abc bleibt gleich und gleichbezeichnet, wenn zu der dritten Seite ein Vielfaches von einer der beiden andern hinzuaddirt wird. Nun ist ferner (nach 240, Zusatz) $abc = bca = cab$, und ebenso $abc' = bc'a = c'ab$. Also auch, da $abc = abc'$ war, $bca = bc'a$ und $cab = c'ab$, das heisst, ein Spat bleibt gleich und gleichbezeichnet, wenn die zweite Kante, und ebenso wenn die erste Kante sich dadurch ändert, dass zu ihr ein Vielfaches von einer der beiden andern Kanten hinzuaddirt wird.

Somit bleibt überhaupt ein Spat bei fortgesetzt wiederholter einfacher linealer Aenderung seiner Kanten, das heisst, bei beliebiger linealer Aenderung gleich und gleichbezeichnet. Da aber nach dem Obigen d, e, f aus a, b, c durch lineale Aenderung ableitbar sind, so muss nun auch der Spat def mit abc gleich und gleichbezeichnet sein.

2. Es sei jetzt umgekehrt vorausgesetzt, dass die Spate def und abc gleich und gleichbezeichnet seien, so ist zu beweisen, dass $[def] = [abc]$ ist.

Da angenommen ist, dass die kombinatorischen Produkte von Null verschieden sind, so sind namentlich a, b, c nicht Einer Ebene parallel, also (nach 229) d, e, f aus ihnen numerisch ableitbar, also auch

(nach 63) das Produkt $[def]$ aus $[abc]$ numerisch ableitbar. Es sei $[def] = \alpha[abc]$, also, wenn $\alpha c = c'$ gesetzt wird, $[def] = [abc']$, folglich (nach Beweis 1) die Spate def und abc' gleich. Nun waren die Spate def und abc nach der Voraussetzung gleich; also die Spate abc und abc' gleich. Es seien AB, BC, CD, CD' beziehlich gleich lang und gleichgerichtet mit a, b, c, c'. Dann sind die Spate

$$ABCD = abc, \quad ABCD' = abc',$$

und {es wird} somit

$$ABCD = ABCD'.$$

Folglich liegen (nach 244) D und D' in einer mit der Ebene ABC 171 parallelen Ebene, D und D' liegen aber auch in der geraden Linie CD, da CD mit c', das heisst mit αc, also auch mit c, das heisst, mit CD parallel ist. Folglich liegen D und D' in dem Durchschnittspunkte jener Ebene und dieser Geraden, das heisst, fallen zusammen. Also sind CD und CD' identisch, also $c = c'$, also, vermöge der Gleichung $c' = \alpha c$, $\alpha = 1$; somit verwandelt sich die Gleichung $[def] = \alpha[abc]$ in

$$[def] = [abc].$$

263. *Zwei von Null verschiedene kombinatorische Produkte $[ABCD]$ und $[EFGH]$ von je vier einfachen Punkten A, B, C, D und E, F, G, H sind dann und nur dann einander gleich, wenn die Spate (Parallelepipeda) $ABCD$ und $EFGH$ gleich und gleichbezeichnet sind.*

Beweis. 1. Es seien $ABCD$ und $EFGH$ gleiche und gleichbezeichnete Spate, und seien AB, BC, CD, EF, FG, GH beziehlich mit b, c, d, f, g, h gleich lang und gleichgerichtet, das heisst, $B - A = b, \ldots$, so ist (nach 262)

$$(*) \qquad [bcd] = [fgh].$$

Da ferner aus b, c, d (nach 229) alle Strecken des Raumes numerisch ableitbar sind, so muss auch die Strecke $E - A$ es sein; es sei

$$E - A = \beta b + \gamma c + \delta d,$$

das heisst,

$$E = A + \beta b + \gamma c + \delta d.$$

Dann erhält man

$$[EFGH] = [EFG(H-G)] = [EF(G-F)(H-G)] = \\ = [E(F-E)(G-F)(H-G)] \qquad [67].$$

Also, da $F - E = f$, $G - F = g$, $H - G = h$ ist, so erhält man den zuletzt gefundenen Ausdruck

$$= [Efgh] = [E(fgh)] \qquad [80]$$
$$= [E(bcd)] \qquad [*].$$

Ferner ist der gefundene Ausdruck

$$= [Ebcd] \qquad [79]$$
$$= [(A + \beta b + \gamma c + \delta d)bcd] = [Abcd] \qquad [67]$$
$$= [A(B - A)(C - B)(D - C)],$$

wenn wir statt b, c, d ihre Werthe setzen, und hieraus erhält man mit Anwendung von 67

$$= [AB(C-B)(D-C)] = [ABC(D-C)] = [ABCD].$$

172 Also

$$[EFGH] = [ABCD].$$

2. Es sei umgekehrt vorausgesetzt, dass

$$[ABCD] = [EFGH]$$

ist, und sei in der geraden Linie CD ein Punkt D' angenommen von der Art, dass der Spat $ABCD'$ mit $EFGH$ gleich (und gleichbezeichnet) sei, so ist (nach Beweis 1)

$$[ABCD'] = [EFGH].$$

Also auch, da $[EFGH] = [ABCD]$ vorausgesetzt ist,

$$[ABCD'] = [ABCD].$$

Da nun $D - C$ und $D' - C$ parallel sind, so ist $D' - C$ aus $D - C$ numerisch ableitbar. Es sei

$$D' - C = \alpha(D - C),$$

so ist

$$[ABCD] = [ABCD'] = [ABC(D' - C)] = [ABC \,.\, \alpha(D - C)]$$
$$= \alpha[ABC(D - C)] \qquad [40]$$
$$= \alpha[ABCD] \qquad [67].$$

Also, da $[ABCD]$ nicht null ist, $\alpha = 1$, also geht aus der Gleichung $(D' - C) = \alpha(D - C)$ die Gleichung

$$D' - C = D - C$$

hervor, also $D' = D$, das heisst, D und D' fallen zusammen, folglich auch die Spate $ABCD$ und $ABCD'$, und da der Spat $ABCD'$ gleich und gleichbezeichnet mit $EFGH$ war, so sind auch die Spate $ABCD$ und $EFGH$ gleich und gleichbezeichnet.

264. Zusatz. *Die Gleichungen*

$$[ABCD] = [EFGH]$$

und

$$[(B - A)(C - B)(D - C)] = [(F - E)(G - F)(H - G)],$$

oder auch

$$[(B - A)(C - A)(D - A)] = [(F - E)(G - E)(H - E)]$$

sind einander ersetzend, das heisst, aus jeder von ihnen folgen die beiden andern.

Beweis. Die Gleichung

$$[ABCD] = [EFGH]$$

gilt (nach 263) dann und nur dann, wenn die Spate $ABCD$ und $EFGH$ einander gleich und gleichbezeichnet sind. Ebenso gilt (nach 262) die Gleichung

$$[(B-A)(C-B)(D-C)] = [(F-E)(G-F)(H-G)]$$ 173

dann und nur dann, wenn der Spat, dessen drei Kanten mit AB, BC, CD gleich lang und gleichgerichtet sind, dem Spate, dessen Kanten mit EF, FG, GH gleich lang und gleichgerichtet sind, das heisst, der Spat $ABCD$ mit $EFGH$ inhaltsgleich und gleichbezeichnet ist. Folglich sind beide Gleichungen stets in denselben Fällen geltend.

Endlich, die dritte Gleichung ist nur eine Transformation der zweiten, denn

$$[(B-A)(C-B)(D-C)] =$$
$$= [(B-A)(C-B)(D-C+C-B+B-A)] \cdot \qquad [67]$$
$$= [(B-A)(C-B)(D-A)] = [(B-A)(C-B+B-A)(D-A)] \quad [67]$$
$$= [(B-A)(C-A)(D-A)],$$

und aus gleichem Grunde ist

$$[(F-E)(G-F)(H-G)] = [(F-E)(G-E)(H-E)].$$

Also sind die zweite und dritte Gleichung gleichbedeutend.

265. Erklärung. Wir nennen das Produkt $[ABCD]$ von vier einfachen Punkten einen Körpertheil und den Kubikinhalt des Spates $ABCD$ (mit Beobachtung des Vorzeichens ($\mp$)) seinen Inhalt.

266. *Das kombinatorische Produkt dreier einfacher Punkte A, B, C und einer Strecke d ist ein Körpertheil, dessen Inhalt gleich dem eines Spates $ABCD$ ist, in welchem CD mit d gleich lang und gleichgerichtet ist, das heisst,*

$$[ABCd] = [ABCD], \text{ wenn } d = D - C.$$

Beweis. $[ABCd] = [ABC(D-C)] = [ABCD]$ [67].

267. *Das kombinatorische Produkt zweier einfacher Punkte A, B und zweier Strecken c und d ist dem Spate (Parallelepipedum) $ABCD$, in welchem BC mit c, CD mit d gleich lang und gleichgerichtet sind, inhaltsgleich, das heisst*

$$[ABcd] = [ABCD],$$

wenn $c = C - B$, $d = D - C$.

Beweis. $[ABcd] = [AB(C-B)(D-C)]$
$= [ABC(D-C)] = [ABCD]$ [67].

268. *Das kombinatorische Produkt eines einfachen Punktes A und dreier Strecken b, c, d ist dem Spate bcd inhaltsgleich, oder*

174 $$[Abcd] = [ABCD],$$

wenn $b = B - A,\ c = C - B,\ d = D - C.$

Beweis. $[Abcd] = [A(B-A)(C-B)(D-C)]$
$= [AB(C-B)(D-C)]$ {67}
$= [ABC(D-C)] = [ABCD]$ [67].

269. *Das Produkt* $\alpha[ABCD]$ *eines Körpertheils* $[ABCD]$ *und einer Zahl* $\{\alpha\}$ *ist ein Körpertheil, dessen Inhalt sich zu dem von* $[ABCD]$ *wie* $\alpha:1$ *verhält.*

Beweis. $\alpha[ABCD] = \alpha[ABC(D-C]$ [67]
$= [ABC.\alpha(D-C)]$ [40]
$= [ABC(E-C)],$

wenn CE mit CD parallel ist und sich zu ihm wie $\alpha:1$ verhält. Dies ist wieder (nach 67)

$$= [ABCE].$$

Da aber CE und CD parallel sind und sich wie $\alpha:1$ verhalten, so verhalten sich auch die Spate $ABCE$ und $ABCD$ algebraisch wie $\alpha:1$, das heisst, die Inhalte von $\alpha[ABCD]$ und $[ABCD]$ wie $\alpha:1$.

270. *Wenn A, B, C, D einfache Punkte, und* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *Zahlen sind, so ist*

$$[\alpha A.\beta B.\gamma C.\delta D]$$

ein Körpertheil, der sich zu $[ABCD]$ *wie* $\alpha\beta\gamma\delta$ *zu* 1 *verhält.*

Beweis. $[\alpha A.\beta B.\gamma C.\delta D] = \alpha\beta\gamma\delta[ABCD]$ (nach 46), also (nach 269) bewiesen.

Anm. Blicken wir zurück auf die verschiedenen kombinatorischen Produkte, deren Begriff wir näher bestimmt haben, so ergab sich für zwei, drei, vier einfache Punkte das einfache, zweifache, sechsfache des dazwischen liegenden Linien-, Flächen-, Körpertheiles, und die zugehörigen Gebiete waren die unbegränzte gerade Linie, Ebene, der unbegränzte Raum. Ferner ebenso wie der unendlich entfernte Punkt als Strecke von bestimmter Länge und Richtung erschien, so der unendlich entfernte Linientheil als begränzte Ebene von bestimmtem Flächeninhalt und bestimmten Richtungen, so der unendlich entfernte Flächentheil als Körperraum von bestimmtem Inhalte.

Wenn zu einer Strecke oder zu einem Produkt zweier oder dreier Strecken ein Punkt als erster Faktor hinzutrat, so lieferte dies Produkt denselben Inhalt und dieselben Richtungen, als wenn der Punkt nicht hinzutrat. Durch das Hinzutreten des Punktes trat zu den bisherigen Bestimmungen (Inhalt und Rich-

tungen) noch im ersten Falle die durch den Punkt mit der Strecke parallel gelegte Linie, im zweiten die durch den Punkt mit den beiden Strecken parallel gelegte Ebene hinzu', welche † die Gebiete jener Grössen bilden, und so ver- 175 wandelte sich die Strecke in einen Linientheil, die Fläche von bestimmtem Inhalt und bestimmten Richtungen in das, was wir einen Flächentheil genannt haben. Das Produkt dreier Strecken wird durch das Hinzutreten des Punktes nur formell geändert.

271. *Wenn A, B, C, D, E, F Punkte, und a, b, c, d Strecken sind, so bedeutet*

1) $$A \equiv B,$$

dass A mit B zusammenfällt,

2) $$[AB] \equiv [CD],$$

dass die unbegränzten geraden Linien AB und CD,

3) $$[ABC] \equiv [DEF],$$

dass die unbegränzten Ebenen ABC und DEF zusammenfallen,

4) $$a \equiv b,$$

dass a mit b parallel,

5) $$[ab] \equiv [cd],$$

dass die Ebene, welche die Richtungen a und b enthält, der Ebene parallel ist, welche die Richtungen c und d enthält.

Beweis. Nach Nr. 2 bedeutet die Kongruenz zweier extensiver Grössen $p \equiv q$, dass p und q in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, und keine von beiden null ist. Wenn das nun 1) für A und B gilt, so müssen (nach 216) ihre Orte zusammenfallen, wenn es 2) für $[AB]$ und $[CD]$ gilt, so müssen (nach {252 und} 247) die unbegränzten geraden Linien AB und CD zusammenfallen, wenn es 3) für $[ABC]$ und $[DEF]$ gilt, so müssen (nach {261a und} 255) die Ebenen ABC und DEF zusammenfallen. Endlich 4) und 5) folgen aus 1) und 2), wenn man die Punkte in unendliche Entfernung rückt.

§ 4. Addition von Linien und Flächen.

272. *Zwei Linientheile derselben Ebene geben zur Summe wieder einen Linientheil derselben Ebene, und zwei Flächentheile {des Raumes} geben zur Summe wieder einen Flächentheil.*

Beweis. Da der Linientheil (nach 249) ein kombinatorisches Produkt zweier Punkte, und (nach 257) der Flächentheil ein kombinatorisches Produkt dreier Punkte, und die Punkte (nach 228) Grössen erster Stufe sind, so sind (nach 77b) † der Linientheil und der Flächen- 176 theil beziehlich einfache Grössen zweiter und dritter Stufe. Ferner ist

(nach 237) die Ebene ein Gebiet dritter und der Raum ein Gebiet vierter Stufe. Nach 88 geben {aber} die Grössen $(n-1)$-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe zur Summe eine einfache (das heisst, als kombinatorisches Produkt darstellbare) Grösse $(n-1)$-ter Stufe desselben Hauptgebietes, also die Linientheile einer und derselben Ebene einen Linientheil derselben Ebene, die Flächentheile {des Raumes} einen Flächentheil.

Zusatz. *Dasselbe gilt also auch für mehr als zwei Linientheile derselben Ebene, und für mehr als zwei Flächentheile {des Raumes}.*

273. *Zwei endlich entfernte Linientheile, deren Linien sich schneiden, geben zur Summe einen endlich entfernten Linientheil, dessen Linie durch denselben Durchschnittspunkt geht, und welcher der Diagonale eines Parallelogrammes gleich lang und gleichgerichtet ist, dessen von derselben Ecke ausgehende Seiten den summirten Linientheilen gleich lang und gleichgerichtet sind.*

Beweis. Es sei A der Durchschnittspunkt der beiden Linien, und seien $[AB]$ und $[AC]$ die beiden Linientheile, wo A, B, C einfache Punkte sind {vgl. Fig. 10}, so ist

Fig. 10.

$$[AB]+[AC]=[A(B+C)]=2[AE],$$

wenn E die Mitte zwischen B und C ist. Aber AE ist die halbe Diagonale des Parallelogramms CAB, also $2AE$ die ganze.

274. *Zwei endlich entfernte, gleichgerichtete Linientheile geben zur Summe wieder einen ebenso gerichteten Linientheil {ihrer Ebene}, dessen Länge die Summe ist aus den Längen der Summanden, und dessen gerade Linie zwischen den geraden Linien der Summanden liegt und von diesen Linien im umgekehrten Verhältnisse der Längen der Summanden absteht.*

Beweis. Es seien $[Ap]$ und $[Bq]$, wo A und B einfache Punkte, p und q gleichgerichtete Strecken sind, diese Linientheile, und sei $1:\alpha$ das Verhältniss ihrer Längen, das heisst (nach 251), das Verhältniss von p zu q, also $q=\alpha p$, {wo α positiv ist}, so ist

177 $$[Ap]+[Bq]=[Ap]+[B.\alpha p]=[Ap]+[\alpha B.p] \quad [40]$$
$$=[(A+\alpha B)p]=[(1+\alpha)S.p] \quad [\{39\}, 225],$$

wenn S der Summenpunkt von A und αB ist,

$$=[S.(1+\alpha)p] \quad [40]$$
$$=[S(p+\alpha p)]=[S(p+q)],$$

das heisst, die Summe ist ein mit den Summanden gleichgerichteter

Linientheil, dessen Länge gleich der der Strecke $(p + q)$, also gleich der Summe aus den Längen der Summanden ist, und dessen Linie durch S geht. S liegt aber (nach 225) in der geraden Linie AB, und steht von A und B in dem Verhältnisse von $\alpha : 1$, das heisst, im umgekehrten Verhältnisse der Summanden (p und q) ab, also steht auch die gerade Linie $[S(p+q)]$ von den geraden Linien $[Sp]$ und $[Sq]$ in diesem Verhältnisse ab.

275. *Zwei endlich entfernte, entgegengesetzt gerichtete, aber nicht gleich lange Linientheile geben zur Summe einen endlich entfernten Linientheil* {*ihrer Ebene*}, *welcher dem grösseren der Summanden gleichgerichtet ist, dessen Länge die Differenz der Längen der Summanden ist, und dessen Linie ausserhalb der Linien der Summanden* (*auf der Seite des grösseren Summanden*) *liegt, und von diesen Linien im umgekehrten Verhältnisse der Längen der Summanden absteht.*

Beweis wie in 274, nur dass man $-\alpha$ statt α setzt.

276. *Die Summe zweier entgegengesetzt gerichteter und gleich langer Linientheile* $[AB]$ *und* $[CD]$ *ist ein Streckenprodukt, dessen Inhalt gleich und gleichbezeichnet* {*mit*} *dem des Parallelogrammes* ABC {*oder* CDA} *ist, welches den einen Linientheil* (*gleich viel, welchen*) *zur Grundseite, und den andern zur Deckseite hat.*

Fig. 11.

Beweis. Wenn AB mit CD gleich lang und entgegengesetzt gerichtet ist {vgl. Fig. 11}, so ist (nach 222, Zusatz)

Also ist $$B - A = C - D.$$

$$\begin{aligned}[AB] + [CD] &= [A(B-A)] + [(C-D)D] && [67]\\ &= [A(B-A)] + [(B-A)D] && [\text{Hyp.}]\\ &= -[(B-A)A] + [(B-A)D] && [55]\\ &= [(B-A)(D-A)],\end{aligned}$$

das heisst, gleich einem Streckenprodukt, dessen Inhalt gleich dem eines Parallelogrammes ist, dessen erste Seite mit AB und dessen zweite Seite mit AD gleich lang und gleichgerichtet ist. Dies ist aber das Parallelogramm ABC, {und mit ihm ist das Parallelogramm CDA gleich und gleichbezeichnet}, also bewiesen. 178

277. *Die Summe eines endlich entfernten Linientheiles* $[AB]$ *und eines kombinatorischen Produktes* $[ab]$ *zweier Strecken* a *und* b, *welche einer durch den Linientheil* $[AB]$ *gelegten Ebene parallel sind, ist ein endlich entfernter Linientheil* $[DC]$ *derselben Ebene, welcher mit dem ersteren gleich lang und gleichgerichtet ist* {vgl. Fig. 10}, *und so liegt, dass das Parallelogramm* ABC, *welches den ersten Linientheil zur Grundseite,*

den zweiten zur Deckseite hat, dem kombinatorischen Produkte $[ab]$ *entgegengesetzt (das heisst inhaltsgleich, aber entgegengesetzt bezeichnet) ist.*

Beweis. Bezeichnen wir das mit {dem Parallelogramme} ABC gleiche Streckenprodukt mit P, so ist nach dem vorigen Satze

$$[AB] + [CD] = P,$$

also

$$[DC] = [AB] - P$$
$$= [AB] + [ab],$$

da nach Hypothesis

$$-P = [ab]$$

ist.

278. *Die Summe zweier kombinatorischer Produkte* $[ab]$ *und* $[cd]$ *von je zwei Strecken ist wieder ein kombinatorisches Produkt zweier Strecken, und zwar in der Art, dass, wenn jene in Form zweier Parallelogramme über derselben (oder gleich langer und gleichgerichteter) Grundseite dargestellt sind, die Summe sich als Parallelogramm über derselben (oder gleich langer und gleichgerichteter) Grundseite darstellen lässt, in welchem die zweite Seite die Streckensumme der zweiten Seiten jener Parallelogramme ist.*

Beweis. Man lege eine Ebene mit a und b parallel, eine andere mit c und d parallel; es sei e eine Strecke, welche mit der Durchschnittslinie beider Ebenen (und, wenn sie sich nicht schneiden, mit einer beliebigen Linie derselben) parallel ist. Dann kann man (nach 254) $[ab]$ auf die Form $[ef]$ und $[cd]$ auf die Form $[eg]$ bringen, und es ist dann

$$[ab] + [cd] = [ef] + [eg] = [e(f+g)],$$

und dies war die verlangte Form der Summe.

179 **279.** *Zwei endlich entfernte Flächentheile, deren* **Ebenen sich schneiden**, *geben zur Summe einen Flächentheil, dessen Ebene durch die Durchschnittskante jener Ebenen geht, und zwar, wenn die Summanden als Parallelogramme von gemeinschaftlicher Grundseite dargestellt sind, so lässt sich die Summe als Parallelogramm darstellen, welches dieselbe Grundseite hat, und in welchem die zweite Seite die Streckensumme aus den zweiten Seiten der Summanden ist, oder anders ausgedrückt: Die Summanden sind gleich den Projektionen der Summe auf die beiden Ebenen der Summanden, wenn auf jede Ebene parallel der andern projicirt wird.*

Beweis. Es seien A und B zwei einfache Punkte in der Durchschnittskante jener Ebenen, und c und d zwei Strecken von der Art, dass die beiden zu addirenden Flächentheile gleich $[ABc]$ und $[ABd]$ seien, so ist

$$[ABc] + [ABd] = [AB(c+d)],$$

das heisst, die Summe ist dargestellt durch ein Parallelogramm, in welchem AB Grundseite, und $c + d$ die zweite Seite ist.

280. *Die Summe zweier paralleler und gleichbezeichneter (endlich entfernter) Flächentheile (E_1 und E_2) ist ein ihnen paralleler und gleichbezeichneter Flächentheil, dessen Inhalt die Summe ist aus den Inhalten der Summanden, und dessen Ebene zwischen denen der Summanden so liegt, dass sie von ihnen im umgekehrten Verhältnisse der Inhalte der Summanden absteht.*

Beweis. Es sei $E_1 = [Abc]$, wo A ein {einfacher} Punkt, b und c Strecken sind, und sei von A auf die Ebene von E_2 ein Loth AD gefällt, so ist $[Dbc]$, da beide Ebenen parallel sind, ein Flächentheil der Ebene von E_2, steht also zu E_2 in einer Zahlbeziehung. Es sei $E_2 = \alpha[Dbc]$, so ist {α positiv, da E_1 und E_2 gleichbezeichnet sind, und es wird}

$$E_1 + E_2 = [Abc] + \alpha[Dbc] = [(A + \alpha D)bc] = [(1 + \alpha)Sbc],$$

wo S (nach 225) in AD liegt, und von A und D im Verhältnisse $\alpha : 1$ absteht. Folglich ist die Ebene der Summe eine durch S mit b und c, also auch mit den Ebenen von E_1 und E_2 parallel gelegte Ebene, welche zwischen beiden Ebenen liegt und von ihnen im Verhältnisse $\alpha : 1$ absteht, das heisst, im umgekehrten Verhältnisse † der Inhalte (bc und αbc). Der Inhalt der Summe ist (nach 260) gleich dem Inhalte von $(1 + \alpha)bc$, das heisst, $= bc + \alpha bc$, das heisst, gleich der Summe der Inhalte der Summanden. 180

281. *Die Summe zweier paralleler und entgegengesetzt bezeichneter aber nicht inhaltsgleicher (endlich entfernter) Flächentheile E_1 und E_2 ist ein ihnen paralleler, dem grösseren gleichbezeichneter Flächentheil, dessen Inhalt die Differenz der Inhalte der Summanden (E_1 und E_2) ist, und dessen Ebene ausserhalb des Raumes zwischen den beiden Ebenen der Summanden {auf der Seite des grösseren Summanden} so liegt, dass sie von diesen Ebenen im umgekehrten Verhältnisse der Summanden absteht.*

Beweis wie in 280, nur dass statt α gesetzt wird $-\alpha$.

282. *Die Summe zweier paralleler, entgegengesetzt bezeichneter aber inhaltsgleicher (endlich entfernter) Flächentheile E_1 und E_2 ist gleich einem kombinatorischen Produkte dreier Strecken, und zwar ist der Inhalt dieses Produktes gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet dem eines Spates, welcher E_1 als Grundfläche hat und dessen Deckfläche in der Ebene von E_2 liegt.*

Beweis. Es sei $E_1 = [Abc]$, $E_2 = -[Dbc]$, so ist

$$E_1 + E_2 = [Abc] - [Dbc] = [(A - D)bc]$$
$$= -[(D - A)bc].$$

Aber $[(D-A)bc]$ ist (nach 58) $= [bc(D-A)]$, und dies letztere ist (nach 262) dem Inhalte eines Spates gleich, dessen erste Seite mit b, dessen zweite Seite mit c und dessen dritte Seite mit $(D-A)$ gleich {lang} und gleichgerichtet ist, also dessen Grundfläche $[Abc]$ ist und dessen Deckfläche durch D geht; also bewiesen.

283. *Die Summe eines endlich entfernten Flächentheils E_1 und eines kombinatorischen Produktes P dreier Strecken ist ein dem ersten parallel gelegener, inhaltsgleicher und gleichbezeichneter Flächentheil E_2, welcher so liegt, dass der Spat (Parallelepipedum), welcher den ersteren Flächentheil zur Grundfläche {und die Ebene von E_2 zur Deckfläche} hat, dem gegebenen kombinatorischen Produkte P der drei Strecken inhaltsgleich und gleichbezeichnet ist.*

Beweis. Nach 282 ist

$$E_1 - E_2 = -P,$$

also

$$E_2 = E_1 + P.$$

181 **284.** *Die Summe dreier Flächentheile (E_1, E_2, E_3), deren Ebenen sich in einem Eckpunkte (D) schneiden, ist ein Flächentheil (E_4), dessen Ebene durch denselben Eckpunkt (D) geht, und so beschaffen ist, dass, wenn man diesen Flächentheil (E_4) nach und nach auf jede der drei Ebenen parallel der Durchschnittslinie der beiden andern projicirt, diese Projektionen den Summanden (E_1, E_2, E_3) gleich sind.*

Beweis. Es seien die Kanten, in welchen sich beziehlich die Ebenen E_2 und E_3, E_3 und E_1, E_1 und E_2 schneiden, den drei Richtungen a, b, c parallel, so ist zunächst zu beweisen, dass E_1, E_2, E_3 die Projektionen von E_4 auf die Ebenen E_1, E_2, E_3 nach den Richtungen a, b, c seien.

Um dies zuerst für E_1 zu beweisen, sei $E_2 + E_3 = E'$ gesetzt, so ist a (nach der Annahme) mit der Durchschnittskante der beiden Ebenen E_2 und E_3 parallel; also auch (nach 279) mit E'. Projicirt man nun E_4 auf die Ebene E_1 nach der Richtung a, so ist, da a mit E' parallel und $E_4 = E' + E_1$ ist, diese Projektion $= E_1$ (nach 279). Auf gleiche Weise folgt, dass die Projektion von E_4 auf die Ebene E_2 nach der Richtung b gleich E_2, und die auf die Ebene E_3 nach der Richtung c gleich E_3 ist.

Endlich muss auch E_4 durch D gehen; denn (nach 279) haben E', E_2 und E_3, vermöge der Gleichung $E' = E_2 + E_3$, dieselbe Kante gemein, also auch den Punkt D, der (nach der Hypothesis) in E_2 und E_3 liegt; ferner haben nach demselben Satze E_4, E', E_1, vermöge der Gleichung $E_4 = E' + E_1$, dieselbe Kante gemein, also auch den

Punkt D, der, wie wir bewiesen, in E' und nach der Voraussetzung auch in E_1 liegt, das heisst, E_4 geht auch durch D.

285. *Eine Summe S von Linientheilen lässt sich stets auf eine Summe zweier Linientheile zurückführen, und zwar kann man für den einen dieser beiden Linientheile einen Punkt (A), durch welchen die Linie desselben gehen soll, und für den andern eine Ebene BCD, in welcher die Linie desselben liegen soll, willkürlich annehmen, nur dass der Punkt A nicht innerhalb der Ebene BCD liegen darf.*

Beweis. Da A, B, C, D nicht in Einer Ebene liegen, so kann man aus ihnen (nach 232) alle Punkte des Raumes † numerisch ab- 182 leiten, und also auch die Punkte, durch deren Multiplikation zu je zweien die Linientheile entstanden sind, deren Summe S ist. Löst man, nachdem man diese Ableitungsausdrücke eingeführt hat, alle Klammern auf, und setzt (nach 55)

$$[BA] = -[AB],\ [CA] = -[AC],\ [DA] = -[AD],$$
$$[CB] = -[BC],\ [DB] = -[BD],\ [DC] = -[CD],$$

so erhält man einen Ausdruck der Form

$$S = \alpha[AB] + \beta[AC] + \gamma[AD] + \delta[BC] + \varepsilon[BD] + \zeta[CD],$$

wo α, β, γ, δ, ε, ζ Zahlen sind. Dies ist aber

$$= [A(\alpha B + \beta C + \gamma D)] + \delta[BC] + \varepsilon[BD] + \zeta[CD].$$

Hier giebt das erste Glied (nach 222, {251} und 253) einen Linientheil, und die Summe $\delta[BC] + \varepsilon[BD] + \zeta[CD]$ giebt (nach 272, Zusatz) einen (endlich oder unendlich entfernten) Linientheil der Ebene BCD, also bewiesen.

286. *Eine Summe S von Linientheilen ist dann und nur dann wieder ein Linientheil, wenn*

$$[SS] = 0$$

ist.

Beweis. 1. Wenn S ein Linientheil $= [AB]$ ist, so ist

$$\begin{aligned}[SS] &= [AB\,.\,AB] \\ &= [ABAB] && [80] \\ &= 0 && [60].\end{aligned}$$

2. Wenn $[SS] = 0$ ist, so sei S (nach 285) zurückgeführt auf zwei Linientheile, und $S = [AB] + [CD]$, so wird

$$0 = [SS] = [(AB + CD)(AB + CD)] = [AB\,.\,CD] + [CD\,.\,AB],$$

da $[AB\,.\,AB]$ und $[CD\,.\,CD]$ (nach {80 und} 60) null sind. Es ist aber (nach 58) $[CD\,.\,AB] = [AB\,.\,CD]$, also

$$0 = 2[AB\,.\,CD], \text{ oder } 0 = [ABCD] \qquad \{80\},$$

das heisst, A, B, C, D liegen in Einer Ebene (nach {66 und} 236), also ist (nach 272) $[AB] + [CD]$ ein Linientheil.

Anm. Man sieht, wie für die Statik der Schwerpunkt als Summe von Punkten, die statische Kraft als Linientheil, die Resultante der statischen Kräfte als Summe der Linientheile, das statische Moment als Flächentheil erscheint, und schon daraus wird man entnehmen können, welche fruchtreiche Anwendung die hier sich entwickelnde Analyse für die Statik und Mechanik gestatte, was ich in einem späteren Werke zu zeigen gedenke. {Vgl. auch noch Nr. 346 und 347.}

183 **§ 5. Planimetrische und stereometrische Multiplikation.**

288.*) Erklärung. Unter der planimetrischen Multiplikation verstehe ich die auf eine Ebene {als Gebiet dritter Stufe} bezügliche, 184 unter † der stereometrischen die auf den Raum (als Gebiet vierter Stufe) bezügliche Multiplikation.

289. *Das planimetrische Produkt zweier Linientheile $[AB]$ und $[AC]$, deren Linien sich in endlicher Entfernung schneiden, ist ein Punkt, dessen Ort der Durchschnittspunkt (A) jener Linien, und dessen Koefficient, wenn A, B, C einfache Punkte sind, gleich dem Inhalte des Parallelogramms ABC ist, das heisst,*

$$[AB \, . \, AC] = [ABC]A.$$

Beweis nach 103.

Anm. Da bei der planimetrischen Multiplikation (gemäss 94) ein Flächentheil als Einheit angenommen werden muss, so ist der Koefficient $[ABC]$ eine Zahl, also $[ABC]A$ in der That ein (einfacher oder vielfacher) Punkt.

290. *Das planimetrische Produkt zweier paralleler Linientheile $[AB]$ und $[CD]$ ist eine Strecke, welche den beiden Linien parallel ist, und welche sich zur Strecke AB algebraisch wie das Parallelogramm BCD zur Einheit verhält.*

Beweis. Da AB mit CD parallel ist, so stehen (nach 230a) die Strecken $A - B$ und $C - D$ in einer Zahlbeziehung. Es sei $C - D = \alpha(A - B)$, so wird

$$\begin{aligned}
[AB \, . \, CD] &= [(A - B)B \, . \, (C - D)D] && [67] \\
&= \alpha[(A - B)B \, . \, (A - B)D] && [\text{Annahme}] \\
&= \alpha[(A - B)BD](A - B) && [103] \\
&= [(C - D)BD](A - B) && [\text{Annahme}] \\
&= [CBD](A - B) && [67] \\
&= [BCD](B - A) && [55],
\end{aligned}$$

*) {Die Nr. 287 steht jetzt an ihrer richtigen Stelle als Nr. 119c. Grassmann selbst sagt in der Originalausgabe bei Nr. 287: „Dieser Satz hätte nach 119b folgen sollen, und ist dort nur durch ein Versehen ausgelassen."}

das heisst, $[AB . CD]$ ist gleich einer Strecke, die mit AB parallel ist, und sich zu AB algebraisch verhält wie $[BCD]$ zu 1.

291. *Das* *planimetrische* *Produkt eines Linientheiles* $[AB]$ *und eines Punktes* C *ist, wenn* A, B, C *einfache Punkte sind, gleich dem Inhalte des Parallelogramms* ABC, *also null* {*dann und*} *nur dann, wenn* A, B, C *in gerader Linie liegen.*

Beweis nach 257 {und 245}.

292. *Das* *planimetrische* *Produkt dreier Linientheile* $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$, *welche die Seiten eines Dreiecks bilden, ist, wenn* A, B, C *einfache Punkte sind, viermal so gross als* † *das Quadrat dieses Dreiecks, oder* 185 *gleich dem Quadrate des Parallelogramms* ABC, *das heisst,*

$$[AB . AC . BC] = [ABC]^2.$$

Beweis. Es sei $[ABC] = \alpha$. Dann setze man $A_1 = A : \alpha$, so ist $[A_1 BC] = 1$, also (nach 112)

$$[A_1 B . A_1 C . BC] = 1,$$

also

$$[AB . AC . BC] = \alpha^2 = [ABC]^2.$$

Anm. Wir hätten die Formel auch schreiben können:

$$[AB . BC . CA] = [ABC]^2.$$

293. *Das* *planimetrische* *Produkt zweier Grössen erster oder zweiter Stufe ist dann und nur dann null, wenn die Grössen incident sind, das heisst, zweier Punkte, wenn ihre Orte zusammenfallen, zweier Linientheile, wenn ihre Linien zusammenfallen, eines Linientheiles und eines Punktes, wenn der Ort des Punktes in die Linie (jenes Linientheiles) fällt.*

Beweis nach 119c.

294. *Das* *planimetrische* *Produkt zweier nicht incidenter Linientheile ist dem Durchschnittspunkte ihrer Linien kongruent, das heisst,*

$$[AB . AC] \equiv A.$$

Beweis. $[AB . AC] = [ABC]A$ (nach 289), also, da $[ABC]$ eine Zahl ist, $\equiv A$ (nach 2).

295. *Das* *planimetrische* *Produkt dreier Linientheile ist dann und nur dann null, wenn ihre Linien sich in einem (endlich oder unendlich entfernten) Punkte treffen.*

Beweis nach 119c.

296. *Das* *stereometrische* *Produkt zweier Flächentheile* $[ABC]$ *und* $[ABD]$, *deren Ebenen sich in endlicher Entfernung schneiden, ist ein Theil dieser Durchschnittslinie, und zwar verhält sich derselbe, wenn*

A, B, C, D einfache Punkte sind, zu $[AB]$ algebraisch wie der Spat (das Parallelepipedum) $ABCD$ zur Einheit.

Beweis. $[ABC \,.\, ABD] = [ABCD][AB]$ [103].

Anm. Da bei der stereometrischen Multiplikation (nach 94, 288) ein Körpertheil als Einheit genommen ist, so ist $[ABCD]$ eine Zahl, und also $[ABCD][AB]$ in der That ein Linientheil.

186 **297.** *Das stereometrische Produkt zweier Flächentheile $[ABC]$ und $[DEF]$, deren Ebenen parallel sind, ist ein Produkt zweier Strecken, welche diesen Ebenen parallel sind, und zwar verhält sich der Inhalt dieses Produktes, wenn A, B, C, D, E, F einfache Punkte sind, zu dem des Parallelogramms ABC algebraisch wie der Spat (das Parallelepipedum) $ADEF$ zur Einheit.*

Beweis.

$$[ABC \,.\, DEF] = [A(B-A)(C-A) \,.\, D(E-D)(F-D)] \quad [67].$$

Da nun nach der Annahme die Ebenen ABC und DEF parallel sind, so sind (nach 230) $E-D$ und $F-D$ aus $B-A$ und $C-A$ ableitbar, also auch das Produkt der ersteren aus dem der letzteren. Es sei $B-A$ mit p und $C-A$ mit q bezeichnet, so ist $[(E-D)(F-D)]$ aus $[pq]$ ableitbar und sei $= \alpha[pq]$, so ist

$$\begin{aligned} [ABC \,.\, DEF] &= [Apq \,.\, \alpha(Dpq)] = \alpha[Apq \,.\, Dpq] && [40] \\ &= \alpha[ADpq][pq] && [107] \\ &= [AD(E-D)(F-D)][pq] && [\{80\}, \text{Annahme}] \\ &= [ADEF][pq] && [67]. \end{aligned}$$

298. *Das stereometrische Produkt zweier Linientheile $[AB]$ und $[CD]$, und ebenso das eines Flächentheiles $[ABC]$ und eines Punktes $\{D\}$, ist, wenn A, B, C, D einfache Punkte sind, gleich dem Spate $ABCD$.*

Beweis. $[AB \,.\, CD] = [ABC \,.\, D] = [ABCD]$ [80].

299. *Das stereometrische Produkt dreier Flächentheile $[ABC]$, $[ABD]$, $[ACD]$, welche sich in einem endlich entfernten Punkte A schneiden, ist ein vielfacher Punkt, dessen Ort der Durchschnittspunkt A ist, und zwar, wenn A, B, C, D die einfachen Ecken eines Tetraeders sind, so ist der zu jenem Punkte gehörige Koefficient gleich dem Quadrate des Inhaltes des Spates (Parallelepipedums) $ABCD$.*

Beweis. Es sei $[ABCD] = \alpha$, und sei $B_1 = B : \alpha$, so ist $[AB_1CD] = 1$, also (nach 112)

$$[AB_1C \,.\, AB_1D \,.\, ACD] = A,$$

also

$$[ABC \,.\, ABD \,.\, ACD] = \alpha^2 A = [ABCD]^2 A.$$

300. *Das stereometrische Produkt von vier Flächentheilen* $[ABC]$, $[ABD]$, $[ACD]$, $[BCD]$ *ist, wenn* A, B, C, D † *die einfachen Ecken* 187 *eines Tetraeders sind, gleich der dritten Potenz des Spates (Parallelepipedums)* $ABCD$.

Beweis. Es sei $[ABCD] = \alpha$, und sei $A_1 = A : \alpha$, so ist $[A_1 BCD] = 1$, also (nach 112)

$$[A_1 BC \,.\, A_1 BD \,.\, A_1 CD \,.\, BCD] = 1,$$

also

$$[ABC \,.\, ABD \,.\, ACD \,.\, BCD] = \alpha^3 = [ABCD]^3.$$

301. *Das stereometrische Produkt zweier Linientheile ist dann und nur dann null, wenn ihre Linien in einer Ebene liegen; das stereometrische Produkt zweier Grössen, welche von erster, zweiter oder dritter Stufe, aber nicht beide zugleich von zweiter Stufe sind, ist dann und nur dann null, wenn die Grössen incident sind, also zweier Punkte, wenn ihre Orte zusammenfallen, zweier Flächentheile, wenn ihre Ebenen zusammenfallen, eines Punktes und eines Linien- oder Flächentheiles, wenn der Punkt in der Linie oder Ebene des letzteren liegt, eines Linientheiles und eines Flächentheiles, wenn die Linie des ersteren in der Ebene des letzteren liegt.*

Beweis nach 119c.

302. *Das stereometrische Produkt zweier nicht incidenter Flächentheile ist der Durchschnittslinie ihrer Ebenen kongruent.*

Beweis. Es seien a, b, c, d vielfache Punkte, so ist

$$[abc \,.\, abd] = [abcd][ab] \qquad \{103\}$$
$$\equiv [ab],$$

da $[abcd]$ eine Zahl ist.

303. *Das stereometrische Produkt eines Flächentheiles und eines Linientheiles, der nicht in der Ebene des ersteren liegt, ist dem Durchschnittspunkte der Ebene und der Linie kongruent.*

Beweis. $$[abc \,.\, ad] = [abcd]a \qquad \{103\}$$
$$\equiv a,$$

wo wieder a, b, c, d vielfache Punkte sind.

304. Erklärung. Ich bezeichne bei der planimetrischen Multiplikation das Produkt $[ab]$ zweier Strecken a und b, wenn das Parallelogramm ab gleich dem als Einheit angenommenen Flächeninhalte ist, mit U, und ebenso bezeichne ich bei der stereometrischen Multiplikation das Produkt $[abc]$ dreier Strecken † a, b und c, wenn der 188 Spat (Parallelepipedum) abc gleich dem als Einheit angenommenen Körperraume ist, mit U. Wenn beide unterschieden werden sollen, so werde ich jenes mit U_2, dieses mit U_3 bezeichnen.

305. *Wenn a ein vielfacher Punkt, $[AB]$ ein Linientheil, $[ABC]$ ein Flächentheil ist, und A, B, C einfache Punkte sind, so ist der Koefficient von a,*

$$[aU]$$

gleich der mit AB gleich langen und gleichgerichteten Strecke $= B - A$, und

$$[ABU]$$

und

$$[ABCU]$$

gleich dem mit dem Parallelogramm ABC gleichen und parallel gelegenen Streckenprodukte

$$= [(B-A)(C-A)].$$

Beweis. Es sei $a = \alpha A$ und $U = [bcd]$, wo b, c, d (nach 304) Strecken sind, und der Spat bcd gleich Eins ist, so ist

$$[aU] = [\alpha Abcd] = \alpha[Abcd] = \alpha,$$

da $[Abcd]$ (nach 268) mit $[bcd]$ inhaltsgleich und gleich bezeichnet, also gleich Eins ist.

Ferner

$$[ABU] = [AB\,.\,bcd] = [A(B-A)\,.\,bcd] \qquad [67].$$

Da hier $B - A$ als Strecke aus b, c, d numerisch ableitbar ist (nach 229), so ist {$B - A$ dem $[bcd]$ untergeordnet, also} (nach 108)

$$[A(B-A)\,.\,bcd] = [Abcd](B-A) = B - A,$$

da $[Abcd] = 1$ ist.

Ferner

$$[ABCU] = [ABC\,.\,bcd] = [A(B-A)(C-A)\,.\,bcd] \qquad [67].$$

Da hier $B - A$ und $C - A$ Strecken, also aus b, c, d numerisch ableitbar sind (nach 229), so ist $[(B-A)(C-A)]$ dem $[bcd]$ untergeordnet, also

$$[A(B-A)(C-A)\,.\,bcd] = [Abcd][(B-A)(C-A)] \qquad [108]$$
$$= [(B-A)(C-A)],$$

da $[Abcd] = 1$ ist.

Anm. Diese Grössen $[aU]$, $[ABU]$, $[ABCU]$ sind es, welche ich in der ersten Bearbeitung der Ausdehnungslehre von 1844 (S. 153 {diese Ausgabe I, 1, S. 179}) die Ausweichungen der Grössen a, $[AB]$, $[ABC]$ genannt, und dafür eine eigene Bezeichnung eingeführt habe, die nunmehr durch die Anwendung der unendlich entfernten Einheit (U) überflüssig gemacht worden ist.

189 § 6. Besondere Gesetze für ein gleich Null gesetztes planimetrisches {und stereometrisches} Produkt. Ebene {algebraische} Kurven. {Algebraische Flächen}.

306. *Die Gleichung eines Punktes x, der mit den Punkten a {und} b in Einer geraden Linie liegt, ist*

$$[xab] = 0.$$

Beweis. Denn (nach 245) ist $[xab]$ dann und nur dann null, wenn x mit a, b in einer geraden Linie liegt.

Anm. Da es bei den gleich Null gesetzten Produkten nie auf den metrischen Werth der Faktoren ankommt, so brauchen einfache und vielfache und unendlich entfernte Punkte nicht mehr unterschieden zu werden, und ich will deshalb für dieselben überall die gleiche Bezeichnung durch kleine lateinische Buchstaben wählen, während ich zur Bezeichnung der Linientheile, oder, da es hier auf ihre Grösse nicht ankommt, der geraden Linien, die grossen lateinischen Buchstaben wähle.

307. *Sind A und B gerade Linien einer Ebene, so lautet die Gleichung einer geraden Linie X, die mit den geraden Linien A und B durch denselben Punkt geht, und in derselben Ebene liegt,*

$$[XAB] = 0,$$

{*wo $[XAB]$ ein planimetrisches Produkt ist*}.

Beweis nach 295.

308. *Die Stufenzahl eines **planimetrischen** Produktes aus beliebig vielen Faktoren, mögen dieselben nun Grössen erster oder zweiter Stufe sein, ist der Summe der Stufenzahlen aller Faktoren kongruent in Bezug auf den Modul* 3.

Beweis nach 96.

309. *Wenn $\mathfrak{P}_{n,x}$ ein **planimetrisches** Produkt nullter Stufe ist, welches den Punkt x n-mal, und ausserdem nur konstante Punkte und Linien als Faktoren enthält, so ist* {*die Gleichung*}

$$\mathfrak{P}_{n,x} = 0,$$

wenn ihr nicht jeder Punkt x genügt, die Punkt-Gleichung einer algebraischen Kurve n-ter Ordnung, das heisst, es sagt die Gleichung aus, dass der Punkt x in einer algebraischen Kurve n-ter Ordnung liegt.

Beweis. Es seien a, b, c drei beliebige, nicht in gerader Linie liegende Punkte, zum Beispiel a ein einfacher Punkt, b und c zwei gegeneinander senkrechte und gleich lange Strecken (unendlich entfernte Punkte), so sind alle Punkte der Ebene † aus a, b, c numerisch ableitbar, also namentlich der Punkt x; es sei 190

$$x = x_1 a + x_2 b + x_3 c.$$

Führt man diesen Ausdruck statt x in die Gleichung

$$\mathfrak{P}_{n,x} = 0$$

ein, und löst die sämmtlichen Klammern, welche nun in dem Produkte $\mathfrak{P}_{n,x}$ den Ausdruck $(x_1 a + x_2 b + x_3 c)$ einschliessen, auf, so erhält man eine in Bezug auf x_1, x_2, x_3 homogene Gleichung n-ten Grades, deren Glieder alle die Form $\mathfrak{A} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} x_3^{\mathfrak{c}}$ haben, wo $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = n$ ist,

und wo $\mathfrak{A}$ ein Produkt konstanter Linien und Punkte, und zwar ein Produkt nullter Stufe ist, da die Stufenzahlen der Faktoren nicht geändert sind. Also ist $\mathfrak{A}$ als Grösse nullter Stufe eine Zahl, und die Gleichung also eine gewöhnliche Zahlgleichung geworden, welche in Bezug auf x_1, x_2, x_3 homogen vom n-ten Grade ist. Es sind aber, wenn a ein einfacher Punkt und b und c zu einander senkrechte gleich lange Linien sind, $\frac{x_2}{x_1}$ und $\frac{x_3}{x_1}$ die gewöhnlichen Koordinaten des Punktes x, also, wenn die Gleichung nicht identisch erfüllt ist, die durch sie dargestellte Kurve eine algebraische Kurve von n-ter Ordnung.

310. *Wenn $\mathfrak{P}(n, X)$ ein planimetrisches Produkt nullter Stufe ist, welches die gerade Linie X n-mal und ausserdem nur konstante Punkte und Linien als Faktoren enthält, so ist*

$$\mathfrak{P}(n, X) = 0$$

die Linien-Gleichung einer algebraischen Kurve n-ter Klasse, oder einfacher ausgedrückt, so ist der geometrische Ort für die Linie X, welche dieser Gleichung genügt, ein Ort n-ten Grades.

Beweis genau wie in 309.

311. *Wenn $\mathfrak{P}_{n,x}$ ein stereometrisches Produkt nullter Stufe ist, welches den Punkt x n-mal, und ausserdem nur konstante Punkte, Linien und Ebenen als Faktoren enthält, so ist*

$$\mathfrak{P}_{n,x} = 0$$

die Punktgleichung einer algebraischen Oberfläche n-ter Ordnung, oder 191 *einfacher ausgedrückt, so ist der geometrische Ort † des Punktes x, welcher der obigen Gleichung genügt, ein Ort n-ten Grades; vorausgesetzt jedoch, dass nicht jeder Punkt x der obigen Gleichung genügt.*

Beweis. Es seien a, b, c, d vier beliebige Punkte, die nicht in Einer Ebene liegen, zum Beispiel a ein einfacher Punkt, b, c, d drei gegeneinander senkrechte und gleich lange Strecken (unendlich entfernte Punkte), so lässt sich (nach 232) x aus a, b, c, d numerisch ableiten.

Es sei

$$x = x_1 a + x_2 b + x_3 c + x_4 d,$$

wo x_1, x_2, x_3, x_4 Zahlen sind. Führt man diesen Ausdruck statt x in dem Produkt $\mathfrak{P}_{n,x}$ überall ein, und löst die Klammern auf, so erhält man lauter Glieder der Form $\mathfrak{A} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} x_3^{\mathfrak{c}} x_4^{\mathfrak{d}}$, wo $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = n$, und $\mathfrak{A}$ ein Produkt nullter Stufe, also eine Zahl ist. Somit ist die entstehende Gleichung eine Zahlgleichung, welche in Bezug auf x_1, x_2, x_3, x_4 homogen vom n-ten Grade ist, falls nicht etwa die sämmtlichen Koefficienten $\mathfrak{A}, \ldots$ null sind, das heisst, der Gleichung durch

jeden Punkt x genügt wird, was oben ausgeschlossen war. Nun sind $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}$ die gewöhnlichen Koordinaten des Punktes x, weil nämlich

$$x = x_1\left(a + \frac{x_2}{x_1}b + \frac{x_3}{x_1}c + \frac{x_4}{x_1}d\right),$$

also

$$x \equiv a + \frac{x_2}{x_1}b + \frac{x_3}{x_1}c + \frac{x_4}{x_1}d$$

ist. Somit ist der geometrische Ort von x eine Oberfläche n-ter Ordnung.

312. *Wenn $\mathfrak{P}(n, \mathfrak{x})$ ein stereometrisches Produkt nullter Stufe ist, welches die Ebene $\mathfrak{x}$ n-mal als Faktor enthält, und ausserdem nur konstante Punkte, Linien und Ebenen, so ist*

$$\mathfrak{P}(n, \mathfrak{x}) = 0$$

die Ebenen-Gleichung einer algebraischen Oberfläche n-ter Klasse; vorausgesetzt, dass nicht jede Ebene $\mathfrak{x}$ der Gleichung genügt.

Beweis wie in 311, {denn jeder Flächentheil ist ja ein Produkt von drei Punkten und lässt sich daher (nach 232, 65) aus vier nicht durch einen Punkt gehenden Flächentheilen numerisch ableiten}.

313. *Ein planimetrisches, und ebenso ein stereometrisches Produkt bleibt sich selbst kongruent, wenn man statt eines beliebigen Faktors desselben einen ihm kongruenten setzt, oder, {was dasselbe ist,} † ihn mit einer* 192 *beliebigen von Null verschiedenen Zahl (einer Grösse nullter Stufe) multiplicirt oder dividirt.*

Beweis. Zwei Grössen A und B heissen (nach 2) kongruent, wenn zwischen ihnen eine Gleichung der Form $\mathsf{A} = n\mathsf{B}$ besteht, in welcher n eine beliebige von Null verschiedene Zahl (positive {oder negative}, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale) bedeutet. Setzt man nun in einem Produkte $P(\mathsf{A})$, welches den Faktor A enthält, statt A eine ihr kongruente Grösse $n\mathsf{A}$, so wird $P(n\mathsf{A})$ (nach 46) $= nP(\mathsf{A})$, also mit $P(\mathsf{A})$ kongruent.

Anm. Ein Produkt nullter Stufe ist nach dem angeführten Begriffe dann und nur dann einem anderen kongruent, wenn sie entweder beide zugleich null, oder beide zugleich von Null verschieden sind. Somit schliesst der Satz dies ein, dass, wenn man in einem Produkte nullter Stufe statt eines beliebigen Faktors einen ihm kongruenten setzt, das Produkt null bleibt, wenn es null war, und von Null verschieden bleibt, wenn es von Null verschieden war. Da es in der ganzen folgenden Behandlung nur auf die Kongruenz ankommt, so werde ich statt der Linientheile und der Flächentheile überall gerade Linie und Ebene setzen.

314. *Ein planimetrisches und ebenso ein stereometrisches Produkt bleibt sich selbst kongruent, wenn {man} die beiden Faktoren, aus denen*

es besteht, vertauscht, das heisst [AB] ≡ [BA], *was auch* A *und* B *für Grössen seien.*

Beweis nach {114 und} 120.

315. *Ein planimetrisches Produkt dreier Punkte oder dreier Linien, ebenso ein stereometrisches von vier Punkten oder Ebenen bleibt sich selbst kongruent, wenn man seine Faktoren beliebig ordnet und zusammenfasst.*

Beweis. Denn da das Produkt dann (nach 114) ein reines ist, so gelten für dasselbe die Sätze 120, 119.

316. *Ein planimetrisches und ebenso ein stereometrisches Produkt bleibt sich selbst gleich, wenn man zwei unmittelbar auf einander folgende, einander incidente Faktoren desselben (namentlich eine gerade Linie oder eine Ebene und einen in ihr liegenden Punkt) vertauscht.*

Beweis nach 123.

317. *Ein planimetrisches und ebenso ein stereometrisches Produkt* 193 *nullter Stufe bleibt sich selbst kongruent, wenn* † *man die Ordnung der Faktoren umkehrt, oder die Reihe beliebig vieler letzter Faktoren in eine Klammer schliesst und umkehrt.*

Beweis nach 126.

318. *Ein stereometrisches Produkt von drei oder vier Punkten, oder von drei oder vier Ebenen, oder von zwei Punkten und einer Geraden, oder von zwei Ebenen und einer Geraden bleibt sich selbst kongruent, wenn man seine Faktoren beliebig ordnet und zusammenfasst.*

Beweis. Denn da das Produkt dann (nach 114) jedesmal ein reines ist, so sind hier die Sätze 119 und 120 anwendbar.

319. *Ein stereometrisches Produkt* $[aBC]$ *von einem Punkte* a *und zwei geraden Linien* B *und* C, *welche sich schneiden, bleibt sich selbst kongruent, wenn man diese geraden Linien vertauscht, das heisst,*

$$[aBC] \equiv [aCB],$$

wenn B *und* C *sich schneiden.* {*Dasselbe gilt, wenn man den Punkt* a *durch eine Ebene* α *ersetzt.*}

Beweis nach 124e.

Anm. Hiermit sind alle Fälle der Vertauschbarkeit für planimetrische und stereometrische Produkte erschöpft. (Vgl. 124.)

320. *Wenn in einem planimetrischen Produkte der Form*

$$[xaBcD\ldots],$$

das heisst, in welchem auf den Punkt x *abwechselnd Punkte und gerade*

Linien folgen, oder in dem planimetrischen Produkte

$$[XBcD\ldots],$$

in welchem auf die Linie X abwechselnd Linien und Punkte folgen, kein Faktor dem nächstfolgenden incident ist, so ist dasselbe von Null verschieden.

Beweis. Angenommen sei, dass von den Grössen $x, a, B, c, D, \ldots$ keine zwei aufeinander folgende incident seien, dann sind x und a zwei nicht incidente Punkte, ihr Produkt also eine von Null verschiedene, gerade Linie. Diese gerade Linie ist nicht mit B incident, da a nicht in B liegt, also ist ihr Produkt $[xaB]$ ein von Null verschiedener Punkt der geraden Linie B. Dieser kann nicht mit c zusammenfallen, da c nicht in B liegt, also ist ihr Produkt $[xaBc]$ eine von Null verschiedene, durch c gehende gerade Linie. Diese kann nicht mit D zusammenfallen, da c nicht in D liegt, also ist ihr Produkt $[xaBcD]$ ein von Null verschiedener Punkt der geraden † Linie D, und so weiter. 194 Setzt man $xa = X$, so geht der zweite Theil des Satzes hervor.

321. *Wenn in einem stereometrischen Produkte der Form*

$$[x\alpha\beta c\delta\ldots],$$

das heisst, in welchem auf den Punkt x abwechselnd Punkte und Ebenen (die hier mit griechischen Buchstaben bezeichnet sind) folgen, oder in dem stereometrischen Produkte

$$[\xi\beta c\delta\ldots],$$

in welchem auf die Ebene ξ abwechselnd Ebenen und Punkte folgen, kein Faktor dem nächstfolgenden incident ist, so ist dasselbe von Null verschieden.

Beweis wie in 320.

322. *Wenn in einem stereometrischen Produkte der Form*

$$[xABC\ldots] \text{ oder } [\xi BC\ldots],$$

das heisst, in welchem auf den Punkt x oder die Ebene ξ lauter gerade Linien als Faktoren folgen, die beiden ersten Faktoren einander nicht incident sind, und keine der Linien die nächstfolgende schneidet, so ist dasselbe von Null verschieden.

Beweis. Da x nicht in der geraden Linie A liegt, so ist $[xA]$ von Null verschieden, und zwar der durch x und A gelegten Ebene kongruent. In dieser Ebene kann die gerade Linie B nicht liegen, da sie sonst die gerade Linie A derselben Ebene (wenn auch {vielleicht} in unendlicher Entfernung) schneiden müsste, gegen die Annahme; also ist das Produkt $[xAB]$ der Ebene $[xA]$ und der geraden Linie B von Null

verschieden, und zwar (nach 303) kongruent dem Durchschnittspunkte beider. Da dieser in B liegt, also nicht in C (da B und C sich nicht schneiden), so ist das Produkt $[xABC]$ eine von Null verschiedene durch C gehende Ebene, und so weiter. Der zweite Theil des Satzes folgt, wenn man $|xA] = \xi$ setzt.

Anm. Die angeführten Sätze reichen hin, um die vorher aufgestellten Formeln für Kurven und Oberflächen mit der grössten Leichtigkeit zu diskutiren, wozu ich die folgenden zwei Beispiele wähle.

323. *Die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch die fünf Punkte a, b, c, d, e geht, von denen keine drei in einer geraden Linie liegen, ist*

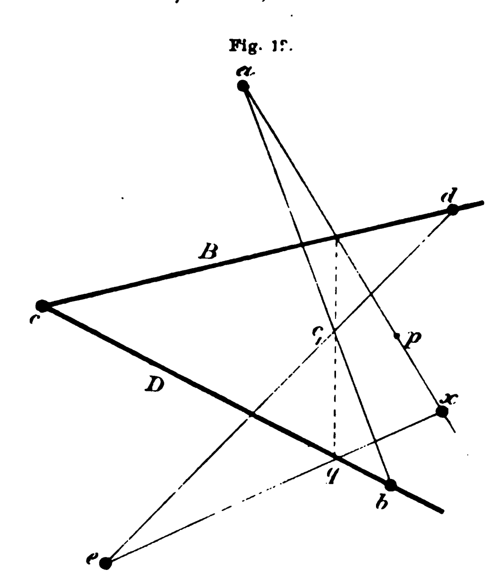
195
$$[xa(cd)(ab \,.\, de)(bc)ex] = 0,$$

oder

$$[xaBc_1Dex] = 0,$$

wo $B = [cd]$, $c_1 = [ab \,.\, de]$, $D = [bc]$ *ist.*

Beweis. Das Produkt der linken Seite ist, da die Summe der Stufenzahlen, zwölf, durch drei theilbar ist, von nullter Stufe. Dass nicht jeder Punkt x der Gleichung genügt, davon überzeugt man sich leicht.



Zieht man zum Beispiel eine Linie ap, die nicht durch e geht (vgl. Fig. 12), und nimmt an, x solle in dieser geraden Linie liegen, aber nicht in a, so ist $[xa] \equiv [pa]$, somit können wir (nach 313) statt xa in der obigen Gleichung pa einsetzen, und erhalten

$$[paBc_1Dex] = 0,$$

das heisst (nach 306), der Punkt x muss in der geraden Linie liegen, die durch den Punkt $[paBc_1D]$, welcher q heisse, und durch den Punkt e geht; zugleich soll er nach der Annahme in der geraden Linie ap liegen, also zugleich in qe und ap. Diese beiden geraden Linien sind (aber) nothwendig verschieden, da e nicht in ap liegt, also treffen sie sich nur in einem Punkte, das heisst, die gerade Linie ap enthält ausser dem Punkte a nur Einen Punkt, der der obigen Gleichung genügt. Also genügt ihr nicht jeder Punkt.

Somit ist der geometrische Ort für x (nach 309) eine Kurve zweiter Ordnung, also ein Kegelschnitt. Es ist nur noch zu zeigen, dass er durch die fünf Punkte $a, \ldots e$ geht, das heisst, dass, wenn x mit irgend einem der fünf Punkte $a, \ldots e$ zusammenfällt, die Gleichung erfüllt wird.

Fällt x mit a zusammen, so wird $[xa] = 0$, also auch das ganze Produkt; dasselbe gilt für $x \equiv e$, wenn man die Gleichung (nach 317) in der Form

$$[xeDc_1Bax] = 0$$

schreibt.

Wird $x \equiv c$, so wird $[ca(cd)] = [cad]c$ (nach 103), und dies ist wieder $\equiv c$, da $[cad]$ eine von Null verschiedene Zahl ist, also ist

$$\begin{aligned}
[ca(cd)(ab.de)(bc)ec] &\equiv [c(ab.de)(bc)ec] && \{313\} \\
&\equiv [(ab.de)c(bc)ec] && [314] \\
&\equiv [(ab.de)(bc)cec] && [316] \\
&\equiv [(ab.de)(bc)][cec] && \{40\},
\end{aligned}$$

da $[(ab.de)(bc)]$ von nullter Stufe, das heisst, eine Zahl ist. Hier ist $[cec]$ (nach 60) $= 0$, † also auch das ganze Produkt null. **196**

Wird $x \equiv d$, so wird

$$[da.cd] \equiv [da.dc] \text{ (Nr. 314) } = [dac]d \text{ (Nr. 103) } \equiv d.$$

Somit wird dann

$$\begin{aligned}
[da(cd)(ab.de)(bc)ed] &\equiv [d(ab.de)(bc)ed] && \{313\} \\
&\equiv [ab(de)d(bc)ed] && [314] \\
&\equiv [abd(de)(bc)ed] && [316] \\
&\equiv [abd][(de)(bc)(de)] && [40, \{317\}],
\end{aligned}$$

weil $[abd]$ eine Zahl ist. Aber $[de.bc.de]$ ist null (nach 295), also das ganze Produkt $= 0$. Wird $x \equiv b$, so ergiebt sich auf gleiche Weise aus der umgekehrten Gleichungsform, dass der Gleichung genügt wird. Somit sind alle fünf Punkte $a, \ldots e$ Punkte des Kegelschnittes.

324. *Wenn A, B, C drei gerade Linien im Raume sind, von denen keine zwei sich schneiden, so ist*

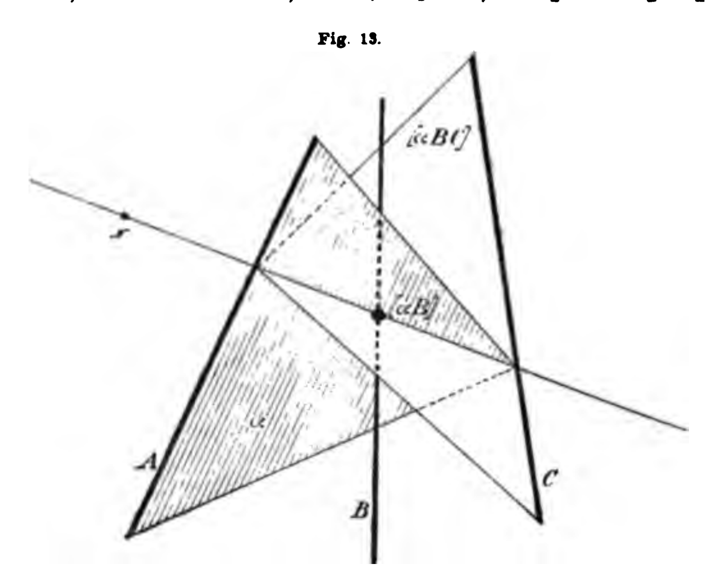
$$[xABCx] = 0$$

die Gleichung derjenigen Fläche zweiter Ordnung, auf welcher die drei geraden Linien A, B, C liegen.

Beweis. Die Summe der Stufenzahlen ist acht, also durch vier theilbar, also das Produkt als stereometrisches von nullter Stufe. Nicht jeder Punkt x genügt der Gleichung. Denn legt man durch die gerade

Linie A eine Ebene α {vgl. Fig. 13}, und nimmt an, der Punkt x liege in dieser Ebene, aber ausserhalb A, so ist $[xA] \equiv \alpha$, also $[xABC] \equiv [\alpha BC]$,

Fig. 13.



und zwar von Null verschieden (nach 322). Es ist aber $[\alpha B]$ ein Punkt und $[\alpha BC]$ die durch diesen Punkt und die gerade Linie C gelegte Ebene. Die Gleichung

$$[\alpha BCx] = 0$$

sagt {daher} aus, dass der Punkt x in dieser Ebene liegen muss, er liegt aber nach der Annahme auch in der Ebene α, also in beiden zugleich. Beide Ebenen fallen aber nicht zusammen, da sonst A und C in dieser Ebene liegen, also sich schneiden müssten, gegen die Annahme. Also muss x dann in der Durchschnittskante beider Ebenen liegen, um der Gleichung zu genügen. Somit genügt ihr nicht jeder Punkt.

Da nun das obige Produkt von nullter Stufe ist, x zweimal als Faktor enthält, und nicht durch jeden Punkt x erfüllt wird, so ist (nach 311) der Ort von x eine Oberfläche zweiter Ordnung. In ihr [197] liegen A und C, denn wenn x in A liegt, so wird † $[xA] = 0$, also das Produkt null, ebenso wenn x in C liegt {nach 317}. Liegt endlich x in B, so hat man

$$[xABCx] \equiv [AxBCx] \qquad [314]$$

$$\equiv [ABxCx] \qquad [316]$$

$$\equiv [AB][xCx] \qquad \{40\},$$

da $[AB]$ von nullter Stufe ist; endlich $[xCx]$ (nach 60) null, also das

Produkt gleich Null, das heisst, jeder Punkt x, der in B liegt, genügt der Gleichung.

Anm. Für den umgekehrten Satz, dass jede algebraische Kurve der Ebene sich in Form eines gleich Null gesetzten planimetrischen Produktes darstellen lässt, kommt es darauf an, jede algebraische Funktion der Koordinaten eines Punktes in Form eines planimetrischen Produktes darzustellen. Diese Aufgabe wird gelöst sein, wenn bei irgend einer Methode, die Zahlen räumlich darzustellen, sowohl das Produkt als auch die Summe zweier räumlich dargestellter Zahlen durch ein planimetrisches Produkt dargestellt werden kann. Das Entsprechende gilt für die algebraischen Oberflächen.

Für den ersten Fall wollen wir die Entwickelung so weit führen, dass aus jeder gegebenen algebraischen Gleichung sogleich die entsprechende planimetrische abgelesen werden kann.

325. *Es sei c ein einfacher Punkt, a und b seien zwei nicht parallele Strecken, und x ein beliebiger einfacher Punkt der Ebene cab* {vgl. Fig. 14}, *und zwar sei $x = x_1 a + x_2 b + c$. Es sei $d = a + b + c$ (das heisst, d sei in einem Parallelogramme, dessen eine Ecke c ist, und dessen von dieser Ecke ausgehende Seiten mit a und b gleich lang und gleichgerichtet sind, die der Ecke c gegenüberliegende Ecke). Wenn dann (x_1) und (x_2) diejenigen {einfachen} Punkte der Diagonale cd sind, für welche die Gleichungen*

$$[c(x_1)] : [cd] = x_1, \quad [c(x_2)] : [cd] = x_2$$

gelten, so ist

$$(x_1) \equiv [xbC], \quad (x_2) \equiv [xaC]$$

und

$$[(x_1)b] = [xb], \quad [(x_2)a] = [xa],$$

wo der Kürze wegen $[cd]$ mit C bezeichnet ist.

Fig. 14.

Beweis. Nach 221 ist, da die Punkte c, (x_1), d in gerader Linie liegen, und $c(x_1) : cd = x_1 : 1$ sich verhält,

$$(x_1) - c = x_1(d - c) = x_1(a + b),$$

da (nach Hypothesis) $d = a + b + c$ war; also

$$(x_1) = x_1 a + x_1 b + c,$$

folglich

$$[(x_1)b] = [(x_1 a + c)b] \qquad [67]$$

und

$$[xb] = [(x_1 a + x_2 b + c)b] \qquad \text{[Hypothesis]}$$
$$= [(x_1 a + c)b] \qquad [67].$$

Folglich

$$[(x_1)b] = [xb].$$

198 Hier ist $[xb]$ eine gerade Linie, welche durch x mit b parallel gezogen ist; in dieser Linie liegt nach der letzten Gleichung der Punkt (x_1); es liegt derselbe aber nach der Voraussetzung auch in der Geraden cd oder C, also im Durchschnitt beider, folglich ist

$$(x_1) \equiv [xbC].$$

Aus gleichem Grunde ist $[(x_2)a] = [xa]$ und $(x_2) \equiv [xaC]$.

326. *Wenn a, b, c, d dieselbe Bedeutung wie im vorigen Satze haben, und p, q zwei beliebige Zahlen sind und man ähnlich wie im vorigen Satze, unter (p), (q), (pq) diejenigen {einfachen} Punkte der geraden Linie cd versteht, für welche die Gleichungen*

(a) $\quad [c(p)] : [cd] = p, \quad [c(q)] : [cd] = q, \quad [c(pq)] : [cd] = pq$

gelten {vgl. Fig. 15}, *so ist, wenn der Kürze wegen*

(b) $\quad [da] = A, \quad [db] = B, \quad [dc] = C$

gesetzt sind,

$$(pq) \equiv [(p)aBc((q)b)aC] \equiv [(p)bAc((q)a)bC]$$
$$[(pq)a] = [(p)aBc((q)b)a]$$
$$[(pq)b] = [(p)bAc((q)a)b].$$

Beweis. Setzt man in die dritte der Gleichungen (a) für p und q ihre Werthe aus den beiden ersten, so erhält man die Proportion

$$[c(pq)] : [c(p)] = [c(q)] : [cd].$$

Aus dieser Proportion und daraus, dass die fünf Punkte c, d, (p), (q), (pq) in gerader Linie liegen, folgt sogleich, wenn wir den Punkt (pq) der Kürze wegen mit r bezeichnen, dass c der Aehnlichkeitspunkt der beiden Punktvereine r, (q) und (p), d ist. Zieht man daher über den Grundseiten $r(q)$ und $(p)d$ die parallelen Dreiecke $r(q)e$ und $(p)df$, so ist c auch Aehnlichkeitspunkt dieser Dreiecke, folglich liegen die entsprechenden Punkte e und f mit c in gerader Linie, wodurch r gefunden werden kann.

Nimmt man ins Besondere re und $(p)f$ parallel mit a, und $(q)e$ und df parallel mit b, so wird

$$f \equiv [(p)a \,.\, db] \equiv [(p)aB],$$

da $[db] = B$ gesetzt war; ferner

$$e \equiv [fc \,.\, (q)b], \quad r \equiv [ea \,.\, cd] \equiv [eaC],$$

da $[dc] = C$ gesetzt war, und endlich 199

$$[ra] \equiv [ea],$$

was sich alles unmittelbar ergiebt, wenn man die betreffende Figur zeichnet {s. Fig. 15}.

Fig. 15.

Setzt man in die letzten beiden Gleichungen die Werthe aus den beiden ersten ein, so erhält man

$$r \equiv [(p)aBc((q)b)aC]$$
$$[ra] \equiv [(p)aBc((q)b)a],$$

und setzt man in der obigen Beweisführung überall b statt a und umgekehrt, und A statt B, so erhält man

$$r \equiv [(p)bAc((q)a)bC]$$
$$[rb] \equiv [(p)bAc((q)a)b],$$

und dies sind, da $r = (pq)$ ist, die zu erweisenden Gleichungen.

327. *Wenn a, b, c, d, A, B, C die Bedeutung haben wie im vorigen Satze und $p, q, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ beliebige Zahlen sind, jedoch mit der Beschränkung, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ von Null verschieden sei, wenn ferner*

$$\text{(a)} \qquad r = \frac{\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}q}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$$

ist, und wie vorher (p), (q), (r) diejenigen {einfachen} Punkte der geraden Linie $[cd] \equiv C$ sind {vgl. Fig. 16}, *welche den Gleichungen*

$$\text{(b)} \qquad [c(p)] : [cd] = p, \quad [c(q)] : [cd] = q, \quad [c(r)] : [cd] = r$$

genügen, so ist

$$(r) \equiv [(p)a((q)b)(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)C].$$

Beweis. Substituirt man in der Gleichung $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})r = \mathfrak{a}p + \mathfrak{b}q$ statt p, q, r ihre Werthe aus (b), so erhält man

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})[c(r)] = \mathfrak{a}[c(p)] + \mathfrak{b}[c(q)],$$

oder, da alles in derselben geraden Linie liegt,

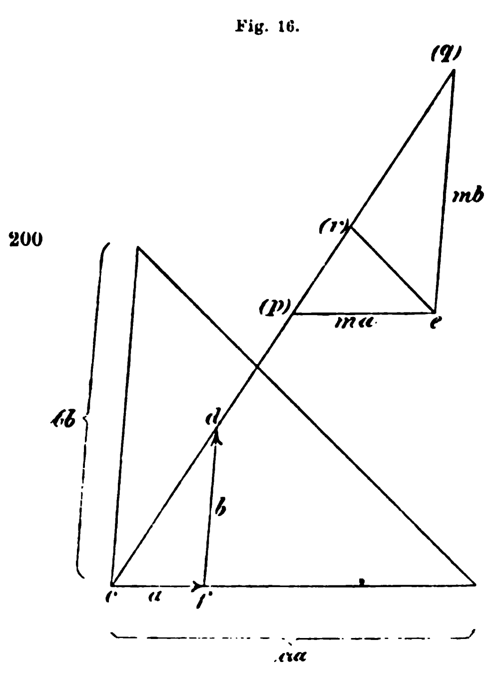
$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})((r) - c) = \mathfrak{a}((p) - c) + \mathfrak{b}((q) - c) \quad [222, \{\text{Zusatz}\}],$$

also

$$(*) \qquad (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(r) = \mathfrak{a}(p) + \mathfrak{b}(q),$$

das heisst {nach 223 Anm.}, (r) ist der Schwerpunkt zwischen den vielfachen Punkten $\mathfrak{a}(p)$ und $\mathfrak{b}(q)$. Zieht man nun von (q) die Parallele mit b, und von (p) die Parallele mit a, welche sich in e schneiden, und ebenso von d und c die Parallelen mit b und a, welche sich in f schneiden, so sind die Dreiecke dfc und $(q)e(p)$ parallel, und also ähnlich, und es ist ferner $d - f = b$ und † $f - c = a$. Wenn also $(q) - e = m(d - f)$ ist, wo m eine Zahl bedeutet, so ist {auch} $e - (p) = m(f - c)$, das heisst, es ist dann $(q) - e = mb$, $e - (p) = ma$. Ferner, wenn man zu der obigen Gleichung (*) auf beiden Seiten $-(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})e$ hinzufügt, so erhält man

Fig. 16.



$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})((r) - e) &= \\
&= \mathfrak{a}((p) - e) + \mathfrak{b}((q) - e) \\
&= -m\mathfrak{a}a + m\mathfrak{b}b \\
&= -m(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b).
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man beide Seiten planimetrisch mit e, so erhält man (nach 67)

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})[e(r)] = -m[e(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)],$$

also

$$[e(r)] = [e(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)] \qquad [2],$$

das heisst, (r) liegt in der geraden Linie $[e(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)]$, aber (nach der Annahme) auch in der geraden Linie C, also im Durchschnitt beider Linien, das heisst,

$$(r) = [e(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)C].$$

Nun ist aber nach der angegebenen Konstruktion e der Durchschnitt der geraden Linien $[(p)a]$ und $[(q)b]$, also $e = [(p)a \, . \, (q)b]$, folglich

$$(r) = [(p)a((q)b)(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)C].$$

Anm. Wenn auf die angegebene Weise die Zahlen durch Punkte der geraden Linie cd dargestellt sind, so lässt sich nach den beiden vorigen Sätzen sowohl die Summe als auch das Produkt zweier Zahlen, also auch jede beliebige ganze Funktion von Zahlen durch ein planimetrisches Produkt darstellen, welches aus den Punkten a, b, c, d und aus den die gegebenen Zahlen darstellenden Punkten zusammengesetzt ist. Hiermit wäre schon der Satz bewiesen, dass jede

algebraische Kurve in der Ebene sich durch ein gleich Null gesetztes planimetrisches Produkt darstellen lässt. Doch soll im Folgenden noch gezeigt werden, wie man unmittelbar aus der gegebenen algebraischen Gleichung der Kurve jenes planimetrische Produkt herleiten kann.

328. *Wenn a und b {zwei nicht parallele} Strecken sind, c ein einfacher Punkt und*

$d = a + b + c$, $A \equiv [da]$, $B \equiv [db]$, $C \equiv [dc]$, $x = x_1 a + x_2 b + c$

ist, so ist die Gleichung

$$f(x_1, x_2) = \mathfrak{a} x_1^m x_2^n + \mathfrak{b} x_1^p x_2^q + \mathfrak{c} x_1^r x_2^s + \cdots + \mathfrak{k} x_1^v x_2^w = 0,$$

in welcher die Summe der Koefficienten von Null verschieden ist, für alle endlich entfernten Punkte x, gleichbedeutend der Gleichung

$$[Pc] = 0,$$

wo, wenn die Glieder von $f(x_1, x_2)$ so geordnet sind, dass † die Summen 201 $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}, \ldots$ *alle von Null verschieden sind,*

(a) $$P \equiv [L L_1 a_1 C a L_2 a_2 C a L_3 a_3 C a \ldots L_k a_k]$$

(b) $$\begin{cases} a_1 = \mathfrak{a} a - \mathfrak{b} b, \; a_2 = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) a - \mathfrak{c} b, \; \ldots \\ a_k = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots + \mathfrak{i}) a - \mathfrak{k} b \end{cases}$$

(c) $$L \equiv [x b \mathfrak{R}^n C a \mathfrak{R}_1^{m-1}]$$

(d) $L_1 \equiv [x a \mathfrak{R}_1^p C b \mathfrak{R}^{q-1}]$, $L_2 \equiv [x a \mathfrak{R}_1^r C b \mathfrak{R}^{s-1}], \ldots,$ $L_k \equiv [x a \mathfrak{R}_1^v C b \mathfrak{R}^{w-1}]$

ist, und $\mathfrak{R}$ die Reihe der fortschreitenden Faktoren A, c, xa, b, und $\mathfrak{R}_1$ die Reihe der fortschreitenden Faktoren B, c, xb, a bezeichnet, so dass also für jede Linie X

(e) $$[X \mathfrak{R}] \equiv [X A c (xa) b], \quad [X \mathfrak{R}_1] \equiv [X B c (xb) a]$$

ist.

Beweis. Bezeichnen wir, wenn p eine beliebige Zahl ist, mit (p) denjenigen {einfachen} Punkt der Linie cd, für welchen

(*) $$[c(p)] : [cd] = p$$

ist, so erhalten wir (nach 325)

(**) $$[(x_1) b] = [xb], \quad [(x_2) a] = [xa],$$

und (nach 326), wenn p eine beliebige Zahl ist,

$$\begin{aligned} [(p x_2) b] &\equiv [(p) b A c ((x_2) a) b] \equiv [(p) b A c (xa) b] && [**] \\ &\equiv [(p) b \mathfrak{R}] && [e]. \end{aligned}$$

Tritt zu $p x_2$ noch ein Faktor x_2 hinzu, so tritt zu $(p) b \mathfrak{R}$ noch einmal die Faktorreihe $\mathfrak{R}$ hinzu, und so weiter, also ist

(***) $$[(px_2^n)b] \equiv [(p)b\mathfrak{R}^n];$$

und ebenso erhält man, indem man x_2 und b mit x_1 und a, also $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}_1$ vertauscht,

(****) $$[(px_1^n)a] \equiv [(p)a\mathfrak{R}_1^n].$$

Also, wenn $p = x_1$ ist, also $[(p)b] \equiv [(x_1)b] \equiv [xb]$ (nach **), so wird
$$[(x_1 x_2^n)b] \equiv [xb\mathfrak{R}^n].$$

Indem wir diesen Ausdruck mit C multipliciren, erhalten wir den Punkt $(x_1 x_2^n)$, das heisst,
$$(x_1 x_2^n) \equiv [xb\mathfrak{R}^n C].$$

Führt man daher $x_1 x_2^n$ statt p in die Formel (****) ein, nachdem man in dieser $m-1$ statt n gesetzt hat, so erhält man
$$[(x_1^m x_2^n)a] \equiv [xb\mathfrak{R}^n Ca\mathfrak{R}_1^{m-1}] \equiv L \qquad [c].$$

Ebenso findet man
$$[(x_1^p x_2^q)a] \equiv [xb\mathfrak{R}^q Ca\mathfrak{R}_1^{p-1}],$$

oder, indem man a mit b, also auch x_1 mit x_2, p mit q, $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}_1$ umwechselt,

202 $$[(x_1^p x_2^q)b] \equiv [xa\mathfrak{R}_1^p Cb\mathfrak{R}^{q-1}] \equiv L_1,$$

und ebenso
$$[(x_1^r x_2^s)b] \equiv L_2, \ldots, [(x_1^v x_2^w)b] \equiv L_k.$$

Um nun den Ausdruck für $((\mathfrak{a}x_1^m x_2^n + \mathfrak{b}x_1^p x_2^q) : (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}))$ zu finden, hat man nur in 327 $x_1^m x_2^n$ und $x_1^p x_2^q$ statt p und q und also L und L_1 statt $[(p)a]$ und $[(q)b]$ zu setzen, und erhält
$$\begin{aligned}((\mathfrak{a}x_1^m x_2^n + \mathfrak{b}x_1^p x_2^q) : (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})) &\equiv [LL_1(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)C] \\ &\equiv [LL_1 a_1 C] \qquad [b].\end{aligned}$$

Um ferner den Ausdruck für $((\mathfrak{a}x_1^m x_2^n + \mathfrak{b}x_1^p x_2^q + \mathfrak{c}x_1^r x_2^s) : (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}))$ zu finden, hat man nur in 327 den Ausdruck $(\mathfrak{a}_1 x_1^m x_2^n + \mathfrak{b}x_1^p x_2^q) : (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ statt p, und $x_1^r x_2^s$ statt q, und also L_2 statt $(q)b$ und zugleich $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ statt $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{c}$ statt $\mathfrak{b}$ zu setzen, und erhält
$$((\mathfrak{a}x_1^m x_2^n + \mathfrak{b}x_1^p x_2^q + \mathfrak{c}x_1^r x_2^s) : (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})) \equiv [LL_1 a_1 CaL_2 a_2 C],$$

da $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})a - \mathfrak{c}b = a_2$ gesetzt war, und so fort; endlich
$$\begin{aligned}((\mathfrak{a}x_1^m x_2^n + \mathfrak{b}x_1^p x_2^q + \mathfrak{c}x_1^r x_2^s + \cdots + \mathfrak{k}x_1^v x_2^w) : (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\cdots+\mathfrak{k})) &\equiv \\ \equiv [LL_1 a_1 CaL_2 a_2 Ca \ldots L_k a_k C]& \\ \equiv [PC]& \qquad [a].\end{aligned}$$

Also
$$(f(x_1, x_2) : (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\cdots+\mathfrak{k})) \equiv [PC].$$

Ist nun $f(x_1, x_2) = 0$, so hat man $(0) \equiv [PC]$. Aber nach (*) ist $[c(0)] : [cd] = 0$, also der Dividend $[c(0)]$ gleich Null, das heisst, der Punkt (0) fällt mit c zusammen, somit erhalten wir dann $c \equiv [PC]$, das heisst, c ist der Durchschnittspunkt der geraden Linien P und C; er liegt also auch in P, das heisst (nach 293),

$$[Pc] = 0.$$

Umgekehrt, wenn diese letzte Gleichung erfüllt wird, so liegt c in P, aber (nach Hypothesis) auch in C, also ist $c \equiv [PC]$, das heisst, der zu der Zahl $f(x_1, x_2) : (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots)$ gehörige Punkt liegt in c, das heisst, jene Zahl ist null, also ihr Zähler $f(x_1, x_2) = 0$.

329. *Wenn alle übrigen Voraussetzungen des vorigen Satzes bestehen bleiben, aber jetzt angenommen wird, dass die Summe der Koefficienten* $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots + \mathfrak{f})$ *null sei, so ist die Gleichung*

$$f(x_1, x_2) = 0$$

{für alle endlich entfernten Punkte} gleichbedeutend der Gleichung 203

$$[L L_1 a_1 C a L_2 a_2 C a \ldots L_{k-1} a_{k-1} L_k C] = 0,$$

wo die einzelnen Buchstaben dieselbe Bedeutung haben, wie im vorigen Satze, und die Glieder in $f(x_1, x_2)$ *auch hier so geordnet sind, dass die Summen* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, ... *alle, mit Ausnahme der letzten* $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots + \mathfrak{f})$, *von Null verschieden sind.*

Beweis. Man kann durch Division mit dem Koefficienten des letzten Gliedes die Gleichung $f(x_1, x_2) = 0$ auf die Form bringen, dass der Koefficient ($\mathfrak{f}$) des letzten Gliedes -1 wird; dann ist die Summe der übrigen Koefficienten $+1$. Es sei das {so hervorgehende} letzte Glied {gleich} $-h$ und die Summe der übrigen sei g, so ist die Gleichung $f(x_1, x_2) = 0$ gleichbedeutend der Gleichung $g - h = 0$, oder

$$g = h.$$

Dann ist nach der Entwickelung des vorigen Satzes

$$(g) \equiv [L L_1 a_1 C a L_2 a_2 C a \ldots L_{k-1} a_{k-1} C],$$
$$(h) \equiv [L_k C].$$

Da nun $g = h$ ist, so sind auch die Punkte (g) und (h) kongruent, also

$$[L L_1 a_1 C a L_2 a_2 C a \ldots L_{k-1} a_{k-1} C] \equiv [L_k C].$$

Diese Kongruenz sagt aus, dass der durch die linke Seite dargestellte Punkt in dem Durchschnitte der Linien L_k und C liege, also namentlich auch in L_k liege, das heisst (nach 293),

$$[L L_1 a_1 C a L_2 a_2 C a \ldots L_{k-1} a_{k-1} C L_k] = 0$$

sei. Hier kann man (nach 315) auch die beiden letzten Faktoren ver-

tauschen, wodurch die zu erweisende Gleichung hervorgeht; umgekehrt folgt aus dieser letzten Gleichung wieder $y = h$, also $f(x_1, x_2) = 0$.

Anm. Es ist leicht zu ersehen, dass man in den vorhergehenden Sätzen, statt a und b als Strecken und c als einfachen Punkt anzunehmen, auch allgemeiner a, b und c als drei beliebige, nicht in Einer geraden Linie liegende Punkte hätte annehmen können, wobei dann die Bedingung, dass x ein endlich entfernter Punkt sein sollte, ersetzt wird durch die andere, dass x nicht in der geraden Linie ab liege.

Der Grund für die Zulässigkeit dieser Verallgemeinerung liegt darin, dass (nach 110) die Gesetze der auf ein Hauptgebiet bezüglichen Multiplikation alle unverändert bestehen bleiben, wenn man statt der ursprünglichen Einheiten 204 a, b, c drei andere aus ihnen + numerisch ableitbare wählt, wobei die dort aufgeführte Bedingung, dass das kombinatorische Produkt jener sowohl als dieser Einheiten 1 sei, hier, wo es nur auf die Kongruenz ankommt, wegfällt.

Betrachtet man die Formen der Gleichungen in 328, so zeigt sich leicht, dass die planimetrische Gleichung $[Pc] = 0$ in Bezug auf x vom so vielten Grade ist, als die Summe aller Exponenten in der algebraischen Gleichung $f = 0$ beträgt; denn die Faktorenreihen $\mathfrak{R}$ enthielten den Punkt x nur je einmal, und die Grössen L waren daher mit den Gliedern der Funktion f nach der Reihe von gleichem Grade. Das Produkt $[Pc]$, welches jede dieser Grössen L einmal als Faktor enthält, und ausserdem nur konstante Faktoren, ist daher in Bezug auf x vom so vielten Grade, als die Summe der Gradzahlen aller Glieder von f beträgt, also, sobald f mehr als ein variables Glied enthält, von höherem Grade als f. Es sei n der Grad der Funktion f, und $n + p$ der Grad des Produktes $[Pc]$. Da nun die Gleichungen $[Pc] = 0$ und $f = 0$ (nach 328) für alle Punkte x, die nicht in der (unendlich entfernten) Geraden ab liegen, ganz gleichbedeutend sind, so kann die Differenz des Grades nur darin liegen, dass die Gleichung $[Pc] = 0$ noch p Linien darstellt, welche in ab fallen.

Um diese Verhältnisse genauer zu überschauen, führe ich statt x den Punkt y ein, und setze $y = ua + vb + wc$, wo u, v, w Zahlen sind, und setze die ursprünglichen Koordinaten von x beziehlich gleich $u : w$ und $v : w$. Dann wird $y = xw$, also $y \equiv x$, falls nicht w null ist. Dieser Fall, wo $w = 0$ ist, ist aber derselbe, wo $y = ua + vb$, das heisst, y ein Punkt der Linie ab ist, also derselbe, welcher in 328 ausgeschlossen war. In allen dort zugelassenen Fällen wird also das Produkt, welches aus $[Pc]$ hervorgeht, indem man hierin y statt x setzt, und welches ich mit Q bezeichnen will, mit $[Pc]$ kongruent (nach 313). Multiplicirt man die Funktion n-ten Grades f mit w^n, so geht aus f, da die darin enthaltenen Variabeln $u : w$ und $v : w$ waren, eine homogene Funktion n-ten Grades hervor, welche ich mit F bezeichnen will, und welche für dieselben Fälle null wird, für welche f null wurde. Also ist für den Fall, dass y nicht in ab liegt, das heisst, w nicht null ist, die Gleichung $Q = 0$ gleichbedeutend mit der Gleichung $F = 0$. Da aber die erstere vom $(n + p)$-ten, die letztere vom n-ten Grade ist, so muss die Gleichung $Q = 0$ in allen Fällen der Gleichung $w^p F = 0$ gleichbedeutend sein, also

$$Q \equiv w^p F \equiv [aby]^p F;$$

letzteres, weil aus $y = ua + vb + wc$ folgt $w \equiv [aby]$. Es muss also Q durch $[aby]^p$ theilbar sein.

Es käme daher darauf an, das planimetrische Produkt Q in ein kongruentes Produkt zu verwandeln, welches von diesen Faktoren $[aby]$ befreit sei. Allein, da diese Reduktion, wenn sie überhaupt ausführbar ist, in der Regel auf grosse 205 Schwierigkeiten stösst, so ist es zweckmässig, zuerst die algebraische Gleichung durch Veränderung des Koordinatensystemes so umzugestalten, dass sie möglichst wenig variable Glieder enthält, ehe man zur Ableitung der planimetrischen Formel schreitet. So zum Beispiel lässt sich die Gleichung dritten Grades auf die Form $pqr = ms^3$ bringen, wo p, q, r, s lineare Funktionen der Koordinaten sind, und m eine konstante Zahl bezeichnet. Verlegt man dann durch Projektion die gerade Linie, deren Gleichung $s = 0$ ist, ins Unendliche, so wird die Gleichung

$$pqr = m,$$

welche nach den obigen Regeln umgewandelt, eine geometrische Gleichung dritten Grades liefert, welche die Form

$$[xaBc(xb)aCdEfx] = 0$$

besitzt und bei jeder Projektion bestehen bleibt, also auch, wenn man der ins Unendliche verlegten Linie durch Projektion wieder die ursprüngliche Lage giebt.

Es hat keine Schwierigkeit, die hier entwickelten Principien auch auf die Oberflächen im Raume zu übertragen; doch muss ich, um hier nicht zu weitläuftig zu werden, auf meine Abhandlungen in Crelle's Journal, namentlich auf Band 49, S. 1 u. f. {Abhandlungen über die lineale Erzeugung von Oberflächen} verweisen.

§ 7. Innere Multiplikation in der Geometrie.

330. Erklärung. Für die innere Multiplikation nehme ich als ursprüngliche Einheiten im Raume stets drei zu einander senkrechte und gleich lange Strecken (e_1, e_2, e_3), in der Ebene deren zwei (e_1 und e_2) an, und zwar nehme ich die Längen dieser Strecken als Einheit der Längen an, und $[e_1 e_2 e_3]$ und in der Ebene $[e_1 e_2]$ als Einheit der Körper- oder Flächenräume.

Anm. Hierdurch sind also alle von dem Begriffe der inneren Multiplikation abhängigen Erklärungen und Sätze (Nr. 137—215) auch auf die Geometrie übertragen.

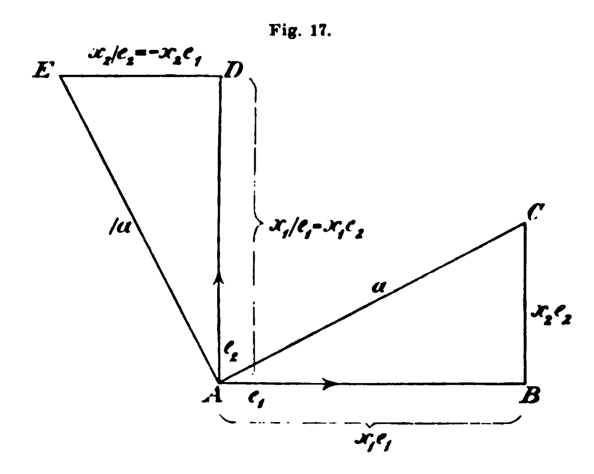
331. *Für die Ebene fällt der Begriff der Länge mit dem des numerischen Werthes, der Begriff des Senkrechten mit dem des Normalen, und der Begriff der Drehung um den Winkel α mit dem der circulären Aenderung um den Winkel α zusammen, wobei der Winkel als positiv anzunehmen ist, wenn sein zweiter Schenkel vom ersten aus nach derselben Seite liegt, wie die zweite Einheit (e_2) von der ersten (e_1) aus.*

Beweis. 1. Alle im Satze genannten analytischen Begriffe (normal, 206 numerischer Werth, circuläre Aenderung) sind (in 151—154) an den Begriff des inneren Produktes {geknüpft}, und dieser wiederum (nach 137) an den der Ergänzung (89 und 90). Die Ergänzung von a war mit $|a$ bezeichnet. Ich zeige daher zuerst, dass, wenn $a = x_1 e_1 + x_2 e_2$ eine beliebige Strecke der Ebene ist, dann $|a$ gegen a senkrecht und

mit a gleich lang ist, und von a aus nach derselben Seite liegt, wie e_2 von e_1.

Es sei AB mit $x_1 e_1$ gleich lang und gleichgerichtet, BC mit $x_2 e_2$, AD mit $x_1 |e_1$, und DE mit $x_2 |e_2$ {vgl. Fig. 17}. Nach 89 ist

Fig. 17.



$|e_1 = e_2$, und $|e_2 = - e_1$, also $AD = x_1 e_2$, $DE = - x_2 e_1$. Da nun (nach 330) e_1 und e_2 gleich lang sind, so ist auch $x_1 e_2$ mit $x_1 e_1$ gleich lang, das heisst, AD mit AB, und ebenso $-x_2 e_1$ mit $x_2 e_2$ gleich lang, das heisst, DE mit BC. Da ferner (nach 330) e_2 zu e_1 senkrecht ist, so ist auch $x_2 e_2$ zu $x_1 e_1$ senkrecht und $-x_2 e_1$ zu $x_1 e_2$, das heisst, BC zu AB und DE zu AD, folglich sind die Dreiecke ABC und ADE kongruent (durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel), also AC gleich lang mit AE. Ferner liegt aber auch e_2 von e_1 aus nach derselben Seite, wie $-e_1$ von e_2 aus, also auch BC von AB aus nach derselben Seite, wie DE von AD aus, das heisst, die Winkel BAC und DAE sind auch dem Zeichen nach gleich. Nun ist $\angle CAE = \angle CAD + \angle DAE = \angle CAD + \angle BAC$ (wie oben gezeigt) $= \angle BAD$, das heisst, AE steht senkrecht auf AC, und zwar nach derselben Seite hin, wie AD von AB aus, also auch wie e_2 von e_1 aus. Es ist aber (nach 220) AC mit $x_1 e_1 + x_2 e_2$, das heisst, mit a gleich lang und gleichgerichtet, und AE mit $x_1 |e_1 + x_2 |e_2$, das heisst, mit $|a$ (nach 90). Also ist $|a$ mit a gleich lang, und steht auf a senkrecht nach derselben Seite hin wie e_2 auf e_1.

2. Numerischer Werth von a ist (nach 151) die positive Quadratwurzel aus $[a|a]$, wobei (nach 89) das Produkt $[e_1 e_2]$ als Einheit gesetzt ist. Nun ist $[a|a]$ (nach 254) einem Parallelogramme gleich (auch dem Zeichen nach), dessen erste Seite mit a, und dessen zweite mit $|a$ gleich lang und gleichgerichtet ist. Dies Parallelogramm ist

(nach Beweis 1) ein Quadrat, welches dem (nach 330) als Einheit angenommenen Quadrate $[e_1 e_2]$ gleichbezeichnet ist. Ist nun die Länge von $\dagger\, a$ (e_1 als Längeneinheit genommen) gleich α, so ist der Inhalt des Quadrates über a gleich α^2, und die positive Quadratwurzel daraus α, das heisst, $\sqrt{[a|a]} = \alpha$, also wirklich der numerische Werth gleich der Länge. 207

3. Nach 152 heissen zwei Strecken a und b normal zu einander, wenn $[a|b] = 0$ ist, das heisst (nach 245), wenn a mit $|b$ parallel ist; nun ist (nach Beweis 1) $|b$ senkrecht auf b, also auch das mit $|b$ parallele a senkrecht auf b. Ebenso folgt umgekehrt, dass, wenn a auf b senkrecht ist, a mit $|b$ parallel ist; dann ist aber (nach 245) $[a|b]$ gleich Null, also a zu b normal. Der Begriff des Senkrechten fällt also (in der Ebene) mit dem des Normalen zusammen.

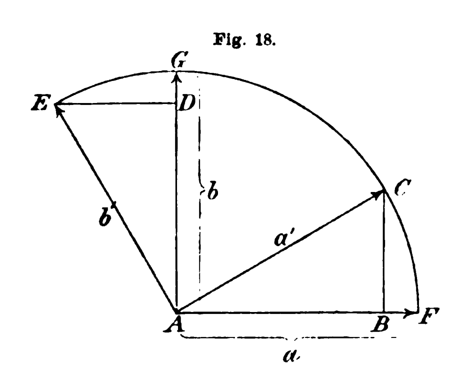
4. Wenn a und b einander numerisch gleich und zu einander normal sind {vgl. Fig. 18}, und sich

$$a \text{ in } a' = a \cos\alpha + b \sin\alpha,$$

und

$$b \text{ in } b' = b \cos\alpha - a \sin\alpha$$

Fig. 18.



verwandelt hat, so hiess das (nach 154), der Verein der Strecken a und b habe sich von a nach b hin circulär um den Winkel α geändert. Es sei AF mit a und AG mit b gleich lang und gleichgerichtet, also, da a und b einander numerisch gleich und zu einander normal sind, so ist (nach Beweis 2 und 3) AG mit AF gleich lang und auf AF senkrecht. Man trage an AF und an AG nach derselben Seite hin den Winkel α an, und mache die zweiten Schenkel AC und AE gleich lang mit AF, fälle von C das Loth CB auf AF und von E das Loth ED auf AG, so ist AB mit $a \cos\alpha$, BC mit $b \sin\alpha$, AD mit $b \cos\alpha$, DE mit $-a \sin\alpha$ gleich lang und gleichgerichtet, also (nach 220) AC mit $a \cos\alpha + b \sin\alpha$, das heisst mit a', und AE mit $b \cos\alpha - a \sin\alpha$, das heisst, mit b' gleich lang und gleichgerichtet; a' und b' gehen aber nach der Konstruktion aus a und b durch Drehung um den Winkel α hervor; folglich fällt der Begriff der Drehung um den Winkel α mit dem der circulären Aenderung um diesen Winkel zusammen.

Anm. Dieselbe Schlussreihe ist also für jede Ebene anwendbar, in welcher zwei Strecken a und b enthalten sind, für welche dieselben Voraussetzungen gemacht sind, wie für e_1 und e_2.

332. *Das Normalsystem im Raume ist identisch mit dem Verein* 208 *von drei gegeneinander senkrechten und gleich langen † Strecken, und zwar ist die Länge dieser Strecken gleich dem numerischen Werthe des Normalsystems.*

Beweis. 1. Das System der ursprünglichen Einheiten e_1, e_2, e_3 bildet (nach 162) ein einfaches Normalsystem, und e_1, e_2, e_3 sind (nach 330) auf einander senkrecht und von der Länge der Einheit. Jedes andere einfache Normalsystem von drei Strecken lässt sich (nach 161, {229}) aus jenem Normalsystem durch circuläre Aenderung ableiten. Hat man nun ein einfaches Normalsystem a, b, c, in welchem a, b, c auf einander senkrecht und von der Länge Eins sind, so besteht die circuläre Aenderung darin, dass irgend zwei derselben, zum Beispiel a und b sich um einen in der Ebene ab liegenden Winkel α ändern; nun haben wir in 331 (vgl. Anm.) gezeigt, dass die dadurch hervorgehenden Strecken a' und b' wieder auf einander senkrecht stehen, und die Länge Eins haben; aber auch c steht auf ihnen senkrecht, denn da nach der Annahme c auf a und b senkrecht steht, so steht c auch auf allen Linien der Ebene ab, also auch auf a' und b' senkrecht; das heisst, aus einem Normalsystem, dessen drei Strecken auf einander senkrecht stehen, und von der Länge der Einheit sind, geht durch einfache circuläre Aenderung wieder ein Normalsystem von derselben Art hervor, also auch durch wiederholte circuläre Aenderung. Also geht namentlich aus dem Normalsystem e_1, e_2, e_3 durch beliebige circuläre Aenderung stets ein Verein von drei Strecken hervor, welche auf einander senkrecht, und von der Länge der Einheit sind, das heisst, jedes einfache Normalsystem besteht aus solchen drei Strecken.

2. Umgekehrt ist zu zeigen, dass, wenn a, b, c irgend drei zu einander senkrechte Strecken von der Länge 1 sind, sie ein Normalsystem bilden.

Nach 160 kann man stets ein einfaches Normalsystem von drei Strecken finden, dessen eine die Richtung von c hat. Dann muss (nach Beweis 1) die Länge {gleich} Eins sein, und also die Strecke, welche die Richtung von c hat, auch mit c gleich lang, also überhaupt gleich sein. Die beiden andern mögen a' und b' sein, so ist (nach Beweis 1) c senkrecht auf a' und b', aber auch (nach Annahme) auf a und b, also liegen a', b', a, b in Einer Ebene. Also kann man wiederum 209 (nach 160) ein einfaches Normalsystem aus zwei Strecken dieser Ebene finden, von denen die eine Strecke gleich b ist, die andere sei a'', so ist a'', da es in der Ebene ab liegt, senkrecht auf c, aber (nach Beweis 1) auch senkrecht auf b und von der Länge 1, also ist a'' senkrecht auf der Ebene bc, aber auch a senkrecht darauf und von der

Länge 1, also ist a'' entweder $= a$, oder $= -a$; da nun a'', b, c ein einfaches Normalsystem bilden, so bilden in beiden Fällen auch a, b, c ein solches.

3. Hat man nun ein *beliebiges* Normalsystem a, b, c von dem numerischen Werth n, so bilden $a:n$, $b:n$, $c:n$ ein *einfaches* Normalsystem, sind also (nach Beweis 1) zu einander senkrecht und von der Länge 1, also sind a, b, c auch zu einander senkrecht und von der Länge n; und ebenso folgt umgekehrt, dass, wenn a, b, c zu einander senkrecht und von der Länge n sind, dann $a:n$, $b:n$, $c:n$ ein einfaches Normalsystem, und a, b, c ein Normalsystem von dem numerischen Werthe n bilden.

333. *Auch für den Raum fällt {bei Strecken} der Begriff der Länge mit dem des numerischen Werthes, und der des Senkrechten mit dem des Normalen zusammen.*

Beweis in 332.

334. *Der numerische Werth eines Produktes P zweier Strecken p und q ist gleich dem Flächeninhalte des Parallelogramms, in welchem zwei an einander stossende Seiten jenen Strecken parallel sind, vorausgesetzt, dass dieser Inhalt positiv, und das Quadrat der Längeneinheit als Flächeneinheit angenommen wird.*

Beweis. Es sei ein einfaches Normalsystem dreier Strecken a, b, c angenommen, von der Art, dass a und b derselben Ebene parallel sind, welcher p und q parallel sind, und dass $[abc] = +1$ ist, so sind (nach 230) p und q aus a und b numerisch ableitbar, also auch (nach 70) $P = [pq]$ aus $[ab]$, und sei $P = \alpha[ab]$. Nun ist der numerische Werth von P (nach 151) $= \sqrt{[P|P]} = \alpha\sqrt{[ab|ab]}$; aber (nach 167) ist $|[ab] = c$, † also 210

$$\sqrt{[P|P]} = \alpha\sqrt{[abc]} = \alpha.$$

Da ferner $P = \alpha[ab]$ ist, und $[ab]$ Quadrat der Längeneinheit, also als Flächeneinheit zu setzen ist, so ist der Inhalt von P, das heisst, der Inhalt des Parallelogramms, dessen erste Seite p, und dessen zweite q ist, gleich α, das heisst, gleich dem numerischen Werthe von P.

335. *Die Ergänzung einer Strecke {im Raume} ist diejenige Fläche, deren Ebene auf jener Strecke senkrecht, deren numerischer Werth gleich dem jener Strecke, und deren positiver Sinn so bestimmt ist, dass das äussere Produkt der Strecke und Fläche positiv ist.*

Beweis. Es sei αa die Strecke, und sei der numerische Werth von a gleich Eins, also der von αa gleich α, und sei ein Normalsystem a, b, c angenommen, und zwar von der Art, dass $[abc] = +1$

ist, so ist (nach 167) $|a = [bc]$, also (nach 90) $\alpha a = \alpha[bc]$, aber $\alpha[bc]$ ist {nach 332, 334} eine Fläche von der im Satze angegebenen Beschaffenheit.

336. *Wenn A die Ergänzung von einer Strecke a {des Raumes} ist, so ist auch a die Ergänzung von A, oder*

$$||a = a.$$

Beweis. Nach 92 ist $||a = (-1)^{pq} a$, wo p die Stufenzahl von a, und q die der Ergänzung ist. In unserm Falle sind diese Stufenzahlen 1 und 2, also

$$||a = (-1)^2 a = a.$$

Anm. Der Satz gilt nicht in entsprechender Weise für die Planimetrie, wo nicht mehr als zwei zu einander senkrechte Strecken angenommen werden können. Vielmehr ist in der Planimetrie $||a = -a$.

{**336a.** *Auch für eine Strecke und einen Flächenraum (das heisst, ein Produkt zweier Strecken) fällt der Begriff des Senkrechten mit dem des Normalen zusammen.*

Beweis. Es sei *zuerst* eine Strecke a und ein zu ihr *senkrechter* Flächenraum B angenommen, dann ist (nach 336 und 335) die Ergänzung von B eine zu B senkrechte, also zu a parallele Strecke, und somit (nach 230a) $|B = \alpha a$. Es wird daher

$$[a|B] = [a \, . \, \alpha a] = 0 \qquad [61],$$

das heisst (nach 152), die Strecke a und der Flächenraum B sind zu einander normal.

Ist *umgekehrt a zu B normal*, das heisst (nach 152),

$$[a|B] = 0,$$

so setze man $|B = b$; dann wird $[ab] = 0$, also (nach 66) $a = \beta b$. Diese Gleichung aber besagt (nach 221), dass die Strecke a mit b parallel ist. Die Strecke b aber steht (nach 336, 335) auf B senkrecht, folglich gilt dasselbe auch von der mit b parallelen Strecke a.}

337. *Wenn a und b Strecken sind, so ist $\angle ab$ gleich dem Winkel, dessen Schenkel mit a und b gleichgerichtet sind, und wenn A und B Flächen (Streckenprodukte) sind, so ist $\angle AB$ gleich dem Neigungswinkel, den zwei mit jenen Flächen parallele und gleichbezeichnete Ebenen mit einander bilden, vorausgesetzt, dass die Winkel stets positiv (zwischen 0 und π liegend) angenommen werden.*

Anm. Wenn man im zweiten Falle A und B in Form von Rechtecken darstellt, deren erste Seite dieselbe ist, so ist der Winkel, den die zweiten Seiten dieser Rechtecke einschliessen, der Neigungswinkel, den die mit A und B parallelen und gleichbezeichneten Ebenen mit einander bilden.

211 Beweis. 1. Der Winkel ist von den numerischen Werthen der

den Winkel bildenden Grössen unabhängig, wir können daher die numerischen Werthe von a, b, A, B gleich 1 setzen; in diesem Falle ist (nach 195)

$$\cos \angle ab = [a|b], \quad \cos \angle AB = [A|B].$$

Ferner geht dann, wenn der Winkel von a nach b hin gleich α ist, (nach 154, 331) b aus a durch circuläre Aenderung um den Winkel α hervor, das heisst, es ist, wenn a' in der Ebene ab gegen a senkrecht ist, und nach der Seite von b hin liegt,

$$b = a \cos \alpha + a' \sin \alpha,$$

also

$$[a|b] = [a|(a \cos \alpha + a' \sin \alpha)] = [a|a] \cos \alpha + [a|a'] \sin \alpha,$$

aber, da a' gegen a normal ist, so ist $[a|a'] = 0$, und da der numerische Werth von a gleich Eins ist, so wird der zuletzt gefundene Ausdruck

$$= \cos \alpha.$$

Also $\cos \angle ab = \cos \alpha$. Nun liegt (nach 195) $\angle ab$ zwischen 0 und π, aber nach Voraussetzung auch α, also $\angle ab = \alpha$.

2. Es seien A und B beziehlich die Ergänzungen von a und b, also $A = |a$, und $B = |b$, so sind (nach 335) a und b beziehlich auf A und B senkrecht und nach derselben Seite hin liegend, also ist der Neigungswinkel α zwischen A und B gleich dem Winkel zwischen a und b, das heisst (nach Beweis 1), $\cos \alpha = \cos \angle ab = [a|b] = |[a|b]$ (nach 89), da $[a|b]$ (nach 141) eine Zahl ist; aber $|[a|b] = [|a|b]$ (nach 97), und dies wieder (nach der Annahme) $= [A|B] = \cos \angle AB$; also $\cos \alpha = \cos \angle AB$.

{Zusatz. *Auch für zwei Flächenräume (das heisst Produkte je zweier Strecken) sind die Begriffe senkrecht und normal gleichbedeutend.*}

Anm. Der Begriff des Normalen lässt sich zwar auf Grössen jeder Art, also auch auf Punkte anwenden. Namentlich muss man, um alle Grössen im Raum ableiten zu können, ausser den drei zu einander senkrechten Strecken von der Länge Eins, die wir als ursprüngliche Einheiten setzten, noch einen endlich entfernten {einfachen} Punkt als vierte Einheit annehmen. So würde man zu vier ursprünglichen Einheiten a, b, c, d gelangen, von denen etwa die drei letzten drei zu einander senkrechte Strecken von der Länge Eins sind, und die erste ein einfacher Punkt ist. Auf diesen Verein würde man den Begriff des Normalen anwenden können.

Nimmt man statt dessen einen andern Verein a', b, c, d, worin a' einen von a verschiedenen einfachen Punkt bezeichnet, als das System der ursprünglichen Einheiten an, + so leuchtet ein, dass a und a' dieselbe Ergänzung $[bcd]$ 212 haben, da (nach 268) $[abcd] = [a'bcd]$ ist, und ebenso, dass $[a'b]$ und $[ab]$ dieselbe Ergänzung $[cd]$, und $[a'bc]$ und $[abc]$ dieselbe Ergänzung d haben, und überhaupt, dass *die Ergänzung von Punkten, Linientheilen, Flächentheilen unabhängig ist von der Lage des als ursprüngliche Einheit angenommenen Punktes.*

Hingegen ist dies *nicht mehr der Fall bei der Ergänzung von Strecken oder Streckenprodukten.*

So zum Beispiel würde die Ergänzung von $[bcd]$ bei der ersten Annahme gleich $-a$, bei der zweiten gleich $-a'$ sein. Und so würde also der Begriff der Ergänzung von Strecken und Streckenprodukten keinen von der Lage der ursprünglichen Einheiten unabhängigen Sinn mehr haben.

Da bei der normalen Zurückleitung (164) auf Punkte, Linien und Ebenen {nach 165} nur die erste Art der Ergänzung hervortritt, so können wir diese Zurückleitung unmittelbar auf die Geometrie übertragen. Sie liefert hier, {sofern es sich um die Zurückleitung auf *Linien* und *Ebenen* handelt}, die senkrechte Projektion, {während die normale Zurückleitung auf einen *Punkt* einer Parallelverschiebung unter Wahrung des numerischen Werthes gleichkommt,} was ich hier jedoch nicht weiter darlegen will.

Im Folgenden werde ich den Begriff der Ergänzung nur in dem im Texte gegebenen Sinne anwenden.

338. *Die Formel*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2[a|b] + b^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\angle ab + \beta^2 \quad \{193, 214\},$$

wo α und β die Längen von a und b sind, stellt die Erweiterung des pythagoräischen Satzes dar, nämlich: das Quadrat der Grundseite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der Schenkelseiten und des doppelten Produktes der Schenkelseiten in den Cosinus des Aussenwinkels an der Spitze {vgl. Fig. 19}.

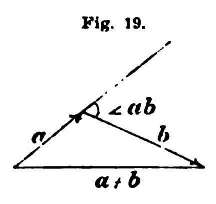


Fig. 19.

339. *Die Formel* {vgl. 194, 215}

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2[b|c] + 2[c|a] + 2[a|b]\\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 +\\ &\quad + 2\beta\gamma\cos\angle bc + 2\gamma\alpha\cos\angle ca + 2\alpha\beta\cos\angle ab,\end{aligned}$$

wo α, β, γ die Längen der Strecken a, b, c sind, stellt die Erweiterung jenes Satzes für den Raum dar.

340. *Die Formel*

$$\begin{aligned}(A+B+C)^2 &= A^2 + B^2 + C^2 + 2[B|C] + 2[C|A] + 2[A|B]\\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 +\\ &\quad + 2\beta\gamma\cos\angle BC + 2\gamma\alpha\cos\angle CA + 2\alpha\beta\cos\angle AB,\end{aligned}$$

wo α, β, γ die Flächeninhalte der Flächenräume A, B, C und $\angle BC, \ldots$ die Neigungswinkel ihrer Ebenen sind, stellt den Satz dar:

213 *Das Quadrat der Grundfläche eines Tetraeders ist gleich † der Summe der Quadrate der Seitenflächen, vermindert um die doppelten Produkte je zweier dieser Seitenflächen in den Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Neigungswinkels.*

Beweis. Sind a, b, c die von der Spitze nach den Ecken der Grundseite führenden Kanten ihrer Länge und Richtung nach, so sind

$a - b$, $b - c$, $c - a$ die Kanten der Grundfläche. Die Grundfläche ist also (nach 254) gleich

$$\frac{[(a-b)(b-c)]}{2},$$

während die Seitenflächen gleich

$$\frac{[bc]}{2}, \frac{[ca]}{2}, \frac{[ab]}{2}$$

sind. Bezeichnen wir die letzteren beziehlich mit A, B, C und die Grundfläche

$$\frac{[(a-b)(b-c)]}{2}$$

mit D, und bedenken, dass

$$[(a-b)(b-c)] = [ab] - [ac] - [bb] + [bc] = [ab] + [ca] + [bc]$$

ist, so haben wir

$$D = A + B + C,$$

also

$$\begin{aligned} D^2 &= (A + B + C)^2 \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2[B|C] + 2[C|A] + 2[A|B] \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos \angle BC + 2\gamma\alpha \cos \angle CA + 2\alpha\beta \cos \angle AB. \end{aligned}$$

Aber $\angle BC$ ist der Winkel zwischen den Ebenen $[ca]$ und $[ab]$, das heisst, zwischen $-[ac]$ und $[ab]$. Der Winkel zwischen $[ac]$ und $[ab]$ ist aber der von den entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders eingeschlossene, und also der Winkel zwischen $-[ac]$ und $[ab]$, das heisst $\angle BC$, dessen Nebenwinkel, und dasselbe gilt für die Winkel $\angle CA$ und $\angle AB$.

Anm. Man sieht aus dieser Darstellung, wie sich die Auflösung des Tetraeders vermöge der Beziehung, dass eine Seitenfläche desselben sich als geometrische Summe der übrigen darstellen lässt, auf eine einfache Weise aus unsrer Analyse ergeben muss. Und da wiederum das sphärische Dreieck oder die dreikantige Ecke sich auf ein Tetraeder zurückführen lässt, in welchem drei Kanten Radien der Kugel sind, so zeigt sich, wie auch die sphärische Trigonometrie sich eng daran anschliesst.

Ich bemerke hier noch, dass alle Formeln der sphärischen Trigonometrie symmetrischer werden, wenn man, wie schon oben geschehen ist, statt der Neigungswinkel der Flächen ihre Aussenwinkel setzt. Dies zeigt sich besonders darin, dass dann die Winkel der Polarecke gleich den Seiten der ursprünglichen Ecke werden, und umgekehrt, und daher dann alle Formeln der sphärischen Trigonometrie unmittelbar ihre Geltung behalten, wenn man Winkel und Seiten vertauscht. Es ergiebt sich unmittelbar, dass, wenn a, b, c Strecken sind, die den Kanten einer Ecke gleichgerichtet sind, dann die Ergänzungen jener Strecken, das heisst die Flächenräume $|a$, $|b$, $|c$, den Ebenen der Polarecke parallel sind. Die weitere Entwickelung dieser Ideen muss ich jedoch, um nicht zu weit von dem Ziele abzuschweifen, dem Leser überlassen. 214

341. Aufgabe. *Die Vielfachensumme der Quadrate der Abstände eines variablen Punktes x von mehreren festen Punkten a, b, ... in einfachster Form auszudrücken, wenn die Koefficienten α, β, ... jener Vielfachensumme gegeben sind.*

Auflösung. Es soll demnach ein Ausdruck

$$S = \alpha(x-a)^2 + \beta(x-b)^2 + \cdots$$

in einfachster Form dargestellt werden.

Da $x, a, b, \ldots$ Punkte sind, und für sie das innere Produkt keine einfache Bedeutung mehr hat, so nehmen wir einen beliebigen einfachen Punkt s zu Hülfe, und setzen

$$x - a = x - s + s - a, \quad x - b = x - s + s - b, \ldots,$$

wo $x - s,\ s - a,\ s - b, \ldots$ Strecken sind, so wird

$$S = \alpha(x - s + s - a)^2 + \beta(x - s + s - b)^2 + \cdots.$$

Da nun

$$(x - s + s - a)^2 = (x-s)^2 + 2[(x-s)|(s-a)] + (s-a)^2$$

ist (nach 193), so erhalten wir

$$\begin{aligned} S = {} & (\alpha + \beta + \cdots)(x-s)^2 + \\ & + 2[(x-s)|(\alpha(s-a) + \beta(s-b) + \cdots)] + \\ & + \alpha(s-a)^2 + \beta(s-b)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$\alpha + \beta + \cdots = \sigma$$

setzen,

$$(*) \quad \left\{ \begin{aligned} S = {} & \sigma(x-s)^2 + 2[(x-s)|(\sigma s - \alpha a - \beta b - \cdots)] + \\ & + \alpha(s-a)^2 + \beta(s-b)^2 + \cdots. \end{aligned} \right.$$

Nun können wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem σ null ist oder nicht.

Nehmen wir *zuerst* letzteres an, so können wir s so wählen, dass das zweite Glied null wird, was dadurch erreicht wird, dass wir

$$\sigma s = \alpha a + \beta b + \cdots,$$

das heisst,

$$s \equiv \alpha a + \beta b + \cdots$$

setzen, das heisst (nach 222, {223 Anm.}), s im Schwerpunkt des Punktsystems $\alpha a, \beta b, \ldots$ annehmen. Dann wird

$$S = \sigma(x-s)^2 + \mu,$$

215
wenn wir der Kürze wegen die konstante Grösse

$$\alpha(s-a)^2 + \beta(s-b)^2 + \cdots = \mu$$

setzen, das heisst:

Die Vielfachensumme S der Quadrate der Abstände eines variabeln Punktes x von mehreren festen Punkten $a, b, \dots$ erreicht, wenn $\alpha, \beta, \dots$ die Koefficienten jener Vielfachensumme sind, und die Summe σ dieser Koefficienten positiv ist, ihren kleinsten Werth, wenn x in dem Schwerpunkt s des Punkt-Vereines $\alpha a, \beta b, \dots$ liegt. Wenn sich dagegen x aus diesem Schwerpunkt s um den Abstand ϱ entfernt, so wächst jene Vielfachensumme um das σ-fache von dem Quadrat dieses Abstandes, und ist also für alle Punkte auf der Oberfläche einer Kugel, welche s zum Mittelpunkt hat, konstant. Wird σ negativ, so bleibt alles dasselbe, nur dass statt des Minimums ein Maximum eintritt.

342. Fortsetzung. Wenn *zweitens* $\alpha + \beta + \cdots = 0$ gesetzt wird, so verwandelt sich die Formel (*) der vorigen Nummer in

$$S = -2[(x - s)|(\alpha a + \beta b + \cdots)] + \\ + \alpha(s - a)^2 + \beta(s - b)^2 + \cdots.$$

Hier ist (nach 222) die Summe $\alpha a + \beta b + \cdots$ eine Strecke von bestimmter Länge und Richtung, welche wir mit r bezeichnen wollen; es wird daher

$$S = -2[(x - s)|r] + \alpha(s - a)^2 + \beta(s - b)^2 + \cdots.$$

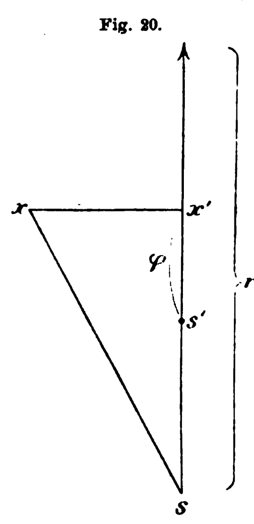


Fig. 20.

Es sei nun angenommen, *dass r nicht null ist* und seine Länge gleich ϱ sei. Um dann den Ausdruck noch weiter zu reduciren, nehmen wir einen Punkt s' in der von s mit r parallel gezogenen geraden Linie an (vgl. Fig. 20), und setzen $s' - s = zr$, wo z eine Zahl ist, da $s' - s$ nach der Konstruktion mit r parallel ist. Dann wird

$$[(x - s)|r] = [(x - s' + s' - s)|r] \\ = [(x - s')|r] + [(s' - s)|r].$$

Aber $[(s' - s)|r]$ ist gleich $[zr|r] = z[r|r]$, da z eine Zahl ist, also $= zr^2 = z\varrho^2$, da ϱ der numerische Werth von r ist. Also wird

$$[(x - s)|r] = [(x - s')|r] + z\varrho^2,$$

und

$$S = -2[(x - s')|r] - 2z\varrho^2 + \alpha(s - a)^2 + \beta(s - b)^2 + \cdots.$$

Da s' ein beliebiger Punkt in der geraden Linie $[sr]$ ist, so ist 216 z noch unbestimmt; es sei z so bestimmt, dass

$$z = \frac{\alpha(s - a)^2 + \beta(s - b)^2 + \cdots}{2\varrho^2}$$

ist, so wird

$$S = -2[(x - s')|r].$$

Fällt man nun von x das Loth xx' auf die gerade Linie $[sr]$ oder $[s'r]$, so ist $x - x'$ normal zu r, das heisst $[(x - x')|r] = 0$, also

$$[(x - s')|r] = [(x - x' + x' - s')|r] = [(x' - s')|r],$$

also

$$S = -2[(x' - s')|r] = \mp 2\varphi\varrho,$$

wenn φ die Länge von $x' - s'$ ist, und das untere oder obere Zeichen gewählt wird, je nachdem $x' - s'$ mit r gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist, das heisst:

Die Vielfachensumme S der Quadrate der Abstände eines variabeln Punktes x von mehreren festen Punkten a, b, ... wird, wenn α, β, ... die Koefficienten jener Vielfachensumme, und die Summe dieser Koefficienten null ist, null für alle Punkte einer gewissen Ebene, welche auf der Strecke $r = \alpha a + \beta b + \cdots$ senkrecht steht. Wenn sich der Punkt x dagegen um den Abstand φ von dieser Ebene entfernt, so wird jene Summe $= -2\varphi\varrho$ oder $+2\varphi\varrho$, je nachdem er sich in der Richtung der Strecke r oder in der ihr entgegengesetzten von jener Ebene entfernt hat, wobei ϱ die Länge von r ausdrückt.

343. Schluss. Ist *endlich auch r null*, so wird

$$S = \alpha(s - a)^2 + \beta(s - b)^2 + \cdots,$$

{also von x unabhängig,} das heisst konstant, das heisst:

Die Vielfachensumme S der Quadrate der Abstände eines variabeln Punktes x von mehreren festen Punkten a, b, ... ist konstant, wenn die entsprechende Vielfachensumme der Punkte a, b, ... null ist, das heisst,

$$\alpha(x - a)^2 + \beta(x - b)^2 + \cdots = \text{Const.},$$

wenn

$$\alpha a + \beta b + \cdots = 0$$

ist.

Nämlich die Gleichung $\alpha a + \beta b + \cdots = 0$ schliesst (nach 222) schon die Gleichung $\alpha + \beta + \cdots = 0$ ein.

344. Aufgabe. *Die Vielfachensumme S der Abstände eines variablen* 217 *Punktes x von mehreren festen Ebenen A, B, ...* † *in einfachster Form auszudrücken, wenn die Koefficienten α, β, ... jener Vielfachensumme gegeben sind, und für jede Ebene die Seite, nach welcher die positiven Abstände liegen sollen, bestimmt ist.*

Auflösung. Man nehme in jeder der Ebenen einen Flächentheil an, dessen Inhalt gleich der Flächeneinheit ist, und welcher (seiner Erzeugungsweise nach) so beschaffen ist, dass das äussere Produkt dieses Flächentheils mit einer Strecke, die nach der als positiv angenommenen Seite der Ebene gerichtet ist, ein positives Produkt bildet. Diese Flächentheile, aufgefasst als Grössen dritter Stufe (255)

seien beziehlich mit A', B', ... bezeichnet, so ist das Produkt $[A'x]$ (nach 263) gleich dem Inhalte eines Spates (Parallelepipedums), dessen Grundfläche A' ist, und dessen Deckfläche (der Grundfläche gegenüberliegende Fläche) durch den Punkt x geht, also gleich dem Inhalte von A' mal der Höhe, oder da der Inhalt von A' gleich Eins ist, gleich der Höhe, das heisst, gleich der Entfernung des Punktes x von der Ebene A, und zwar auch dem Zeichen nach, und ebenso für die andern Ebenen. Also ist

$$\begin{aligned} S &= \alpha[A'x] + \beta[B'x] + \cdots \\ &= [(\alpha A' + \beta B' + \cdots)x] \\ &= \varrho[Rx], \end{aligned}$$

wenn ϱR die entsprechende Vielfachensumme der Flächentheile A', B', ..., und der Inhalt von R gleich Eins, ϱ aber positiv ist.

Die Vielfachensumme S der Abstände eines variablen Punktes x von mehreren festen Ebenen A, B, ... mit den Koefficienten α, β, ... steht zu dem Abstande desselben Punktes von einer festen Ebene R in einem konstanten Verhältniss $\varrho : 1$. Und zwar findet man R und ϱ, wenn man auf den Ebenen A, B, ... Flächentheile A', B', ... vom Inhalte Eins annimmt, welche mit Punkten, die auf den als positiv angenommenen Seiten der betreffenden Ebenen liegen, äusserlich multiplicirt positive Produkte geben, dann ist R die Ebene des Flächentheiles $\alpha A' + \beta B' + \cdots$, und ϱ sein Inhalt.

Sollte jedoch diese Summe eine unendlich entfernte Ebene, das heisst einen Körperraum (262) † geben, also $[Rx]$ ein Körpertheil sein, so ist (nach 268) $\varrho[Rx]$ konstant, also auch die Vielfachensumme S konstant. 218

Sollte endlich $\alpha A' + \beta B' + \cdots$ selbst gleich Null sein, so wird auch S null für jeden Punkt x.

Anm. Die in den vorigen Aufgaben gefundenen Sätze lassen sich in einen Satz zusammenfassen, wenn man statt der Punkte und Ebenen Kugelflächen setzt, welche sich, wenn die Radien null werden, in Punkte, wenn sie unendlich werden, in Ebenen verwandeln, und zwar, wenn man statt des Quadrates des Abstandes von einem Punkte und statt des einfachen Abstandes von einer Ebene, das Produkt des kleinsten und grössten Abstandes von der Kugelfläche setzt, so geht dies Produkt, wenn sich die Kugelfläche in einen Punkt zusammenzieht, in das Quadrat des Abstandes über, und wenn sich die Kugelfläche zu einer Ebene entfaltet, so wird der eine Abstand unendlich, und kann für alle Ebenen als gleich angesehen und daher mit ihm dividirt werden, wodurch die einfachen Abstände hervorgehen. Diese Verallgemeinerung soll in dem folgenden Satze ausgeführt werden.

345. *Wenn man unter dem Doppelabstand eines Punktes von einer Kugelfläche das Produkt des kleinsten und grössten Abstandes des Punktes von der Kugelfläche versteht (das Produkt positiv genommen, wenn*

die Abstände gleichgerichtet, das heisst, der Punkt ausserhalb der Kugelfläche liegt, negativ im entgegengesetzten Falle), so ist die Vielfachensumme S der Doppelabstände α', β', ... von mehreren festen Kugelflächen, deren Mittelpunkte a, b, ..., und deren Radien a', b', ... sind, also die Vielfachensumme

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \cdots,$$

wenn α, β, ... ihre Koefficienten darstellen, ein Minimum oder Maximum, wenn x in dem Schwerpunkte s des Punktvereins αa, βb, ... liegt, und zwar, wenn sich der Punkt x von diesem Schwerpunkte s um den Abstand φ entfernt, so wächst S um das Produkt {aus dem Quadrat} dieses Abstandes in die Summe σ der Koefficienten α, β, ..., also um $\varphi^2\sigma$ oder um $(\alpha + \beta + \cdots)\varphi^2$.

Wenn aber der Punktverein αa, βb, ... keinen Schwerpunkt hat, das heisst, $\alpha + \beta + \cdots$ null ist, so giebt es eine auf der Strecke $r = \alpha a + \beta b + \cdots$ senkrecht stehende Ebene E, für deren Punkte S null ist; entfernt sich dann x von dieser Ebene um den Abstand φ, so wird $S = \pm 2\varphi\varrho$, wo ϱ der numerische Werth von r ist, und das untere 219 *oder obere Zeichen gewählt † wird, je nachdem x sich nach der Seite hin bewegt, nach welcher von E aus die Richtung von r liegt, oder nach der entgegengesetzten.*

Wird aber auch $\alpha a + \beta b + \cdots = 0$, so ist S konstant.

Beweis. Zieht man von x die Linie durch den Mittelpunkt a der ersten Kugel, welche die Oberfläche derselben in x_1 und x_2 schneide, so ist der Doppelabstand

$$\alpha' = (x - x_1)(x - x_2) = (x - a - a')(x - a + a'),$$

wenn $x - x_1$ die Linie von x_1 nach x bezeichnet, und so weiter, und a' der Radius ist. Also $\alpha' = (x - a)^2 - a'^2$, oder wenn wir jetzt unter $x - a$ eine Strecke von bestimmter Länge und Richtung verstehen,

$$\alpha' = (x - a)^{\underline{2}} - a'^2.$$

Also

$$S = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \cdots$$
$$= \alpha[(x - a)^{\underline{2}} - a'^2] + \beta[(x - b)^{\underline{2}} - b'^2] + \cdots.$$

Nehmen wir nun einen konstanten Punkt s zu Hülfe, der zur Vereinfachung des Ausdrucks dienen soll, so wird

$$(x - a)^{\underline{2}} = (x - s + s - a)^{\underline{2}}$$
$$= (x - s)^{\underline{2}} + 2[(x - s)|(s - a)] + (s - a)^{\underline{2}}$$

und entsprechend bei den übrigen Quadraten. Setzen wir noch $\alpha + \beta + \cdots = \sigma$, so wird

$$S = \sigma(x - s)^{\underline{2}} + 2[(x - s)|(\sigma s - \alpha a - \beta b - \cdots)] + \mu,$$

wenn wir die nur von der Wahl von s abhängige Grösse

$$\alpha(s-a)^2+\beta(s-b)^2+\cdots-\alpha a'^2-\beta b'^2-\cdots=\mu$$

setzen.

Ist nun σ von Null verschieden, so wird der Faktor

$$\sigma s-\alpha a-\beta b-\cdots$$

gleich Null, wenn s der Schwerpunkt des Punktvereins αa, βb, ... wird. Nehmen wir also s in diesem Schwerpunkte liegend an, so wird

$$S=\sigma(x-s)^2+\mu,$$

wodurch der erste Theil bewiesen ist.

Wenn aber $\sigma=0$ ist, so ist $\alpha a+\beta b+\cdots$ eine Strecke, diese sei r, und ϱ ihr numerischer Werth {vgl. Fig. 20 auf S. 217}, so wird

$$S=2[(s-x)|r]+\mu.$$

Leicht kann man, da S in Bezug auf x vom ersten Grade ist, solche Punkte x finden, für welche S null wird. Es sei s' ein solcher Punkt*), das heisst,

$$2[(s-s')|r]+\mu=0,$$ 220

so wird

$$S=2[(s-s'+s'-x)|r]+\mu=2[(s'-x)|r]$$

vermöge der vorigen Gleichung, und dies ist

$$=\pm 2\varphi\varrho,$$

wenn φ der numerische Werth der senkrechten Projektion von $s'-x$ auf r ist, und das untere oder obere Zeichen gewählt wird, je nachdem $x-s'$ und r nach derselben Seite der in s' auf r errichteten senkrechten Ebene gerichtet sind oder nicht, wodurch der zweite Theil des Satzes erwiesen ist.

Wenn endlich auch $\alpha a+\beta b+\cdots=0$ ist, so wird

$$S=\mu,$$

also {von x unabhängig, das heisst} konstant.

{Anm. Vgl. hierzu Nr. 392–409.}

346. Aufgabe. *Die Summe S mehrerer Linientheile im Raume auf die Summe eines Linientheiles und eines dagegen senkrechten Flächenraumes zurückzuführen.*

Auflösung. Man nehme ein System von vier Einheiten im Raume: a, a_1, a_2, a_3 an, von denen a ein einfacher Punkt und a_1, a_2, a_3 Strecken sind, so lässt sich (nach 232) jeder Punkt im Raume aus ihnen numerisch ableiten, also ist jeder Linientheil als Produkt zweier

*) Setzt man den Punkt $s+(\mu r:2\varrho^2)=p$, so ist s' ein beliebiger Punkt, welcher in der durch p senkrecht gegen r gelegten Ebene liegt.

Punkte (nach 65) aus den multiplikativen Kombinationen aa_1, aa_2, aa_3, a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3 numerisch ableitbar; also auch S, als Summe solcher Linientheile. Es sei

$$S = \alpha_1[aa_1] + \alpha_2[aa_2] + \alpha_3[aa_3] + \beta_1[a_1a_2] + \beta_2[a_1a_3] + \beta_3[a_2a_3]$$

oder

$$= [a(\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \alpha_3a_3)] + \beta_1[a_1a_2] + \beta_2[a_1a_3] + \beta_3[a_2a_3].$$

Es sei

$$\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \alpha_3a_3 = b,$$

also b eine Strecke, und $\beta_1[a_1a_2] + \beta_2[a_1a_3] + \beta_3[a_2a_3]$ ist als Summe von Produkten von je zwei Strecken wieder ein solches, also als Ergänzung einer Strecke aufzufassen, etwa der Strecke c, das heisst, es sei

$$\beta_1[a_1a_2] + \beta_2[a_1a_3] + \beta_3[a_2a_3] = |c,$$

so ist

$$S = [ab] + |c.$$

Es sei a' irgend ein anderer, noch näher zu bestimmender {ein-221 facher} Punkt und sei $a - a' = d$, wo d eine Strecke ist, so ist $a = a' + d$, also

$$S = [(a' + d)b] + |c = [a'b] + [db] + |c.$$

Es ist hier $[db] + |c$ ein Flächenraum; und es soll d so bestimmt werden, dass, wie die Aufgabe verlangt, dieser Flächenraum auf dem Linientheile $[a'b]$ senkrecht steht. Da aber a' ein Punkt und b eine Strecke ist, so hat dieser Linientheil die Richtung von b, also muss jener Flächenraum auch auf b senkrecht stehen, das heisst (nach 152, 336a), es muss $[(db + |c)|b] = 0$ sein, oder

$$[db|b] + |[cb] = 0 \qquad [99],$$

das heisst

$$|[cb] = [bd|b] \qquad [55].$$

Nehmen wir an, dass d senkrecht auf b stehe, das heisst, in der Ebene $|b$ liege, so ist (nach 108) der zuletzt gewonnene Ausdruck

$$= [b|b]d = \beta^2 d,$$

wenn β der numerische Werth von b ist, also d gefunden

$$d = |[cb] : \beta^2.$$

Umgekehrt, wenn d diesen Werth hat, so folgt durch die umgekehrten Umgestaltungen, dass der Flächenraum $[db] + |c$ auf b senkrecht stehe, also ist die Aufgabe gelöst.

347. *Wenn zwei Summen von Linientheilen beide auf die Form einer Summe gebracht sind, deren eines Stück ein Linientheil und deren anderes Stück ein gegen die Linie desselben senkrechter Flächenraum ist,*

so sind jene Summen nur dann gleich, wenn sowohl diese Linientheile als diese Flächenräume einander gleich sind; das heisst, wenn

$$[ab] + \gamma|b = [a_1 b_1] + \gamma_1|b_1$$

ist, wo a und a_1 einfache Punkte, b und b_1 {zwei von Null verschiedene} Strecken, γ und γ_1 Zahlen sind, so ist

$$[ab] = [a_1 b_1], \quad \gamma|b = \gamma_1|b_1.$$

Beweis. Man multiplicire zuerst die gegebene Gleichung mit einem Produkte U dreier Strecken, deren Spat dem als Einheit angenommenen Körperraume gleich ist, so wird (nach 301), da $|b$, $|b_1$ Produkte je zweier Strecken sind, $[|b\,.\,U] = 0 = [|b_1\,.\,U]$, dagegen wird (nach 305) $[abU] = b$ und $[a_1 b_1 U] = b_1$; also erhält man $b = b_1$. Somit verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$[ab] + \gamma|b = [a_1 b] + \gamma_1|b.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit b, so wird, da $[abb] = [a_1 bb] = 0$ ist (nach 60), $\gamma[b|b] = \gamma_1[b|b]$, also, da $[b|b] = b^2$ eine von Null ver- 222 schiedene Zahl ist, $\gamma = \gamma_1$. Somit verwandelt sich die ursprüngliche Gleichung in $[ab] = [a_1 b]$, das heisst, die Linientheile $[ab]$ und $[a_1 b_1]$ und die Flächenräume $\gamma|b$ und $\gamma_1|b_1$ sind einander gleich.

Anm. Es lässt sich also jede Summe von Linientheilen, das heisst, jede geometrische Grösse zweiter Stufe auf eine bestimmte, vollkommen unzweideutige Art in Form einer Summe eines Linientheiles und eines gegen seine Linie senkrechten Flächenraums darstellen. Es ist interessant, dass diese allgemeine Grösse zweiter Stufe vollkommen repräsentirt wird durch die Bewegung eines Körpers im Raume.

Wenn nämlich ein Körper aus einer Lage in eine beliebige andere versetzt wird, so ist bekanntlich diese Versetzung allemal dadurch möglich zu machen, dass man eine gewisse Linie des Körpers in ihrer eigenen Richtung um ein Gewisses fortschreiten lässt, während der Körper um diese Linie als um seine Axe eine gewisse Drehung vollendet, und zwar sind diese beiden Partialbewegungen durch die Anfangs- und End-Lage des Körpers vollkommen bestimmt. Die erstere Bewegung kann durch einen Linientheil vollkommen repräsentirt werden, die letztere durch einen dagegen senkrechten Flächenraum, beide zusammen also durch die allgemeine räumliche Grösse zweiter Stufe.

Natürlich wird man in der Statik auf gleiche Weise die Resultante mehrerer Kräfte im Raume darstellen können, während der blosse Linientheil die einzelne statische Kraft darstellt, und die Summe derselben die statische Resultante der entsprechenden Kräfte (s. Ausdehnungslehre {von 1844, diese Ausgabe I, 1}, § 121 ff.).

223

Zweiter Abschnitt.

Funktionenlehre.

Kapitel 1. Funktionen im Allgemeinen.

§ 1. Begriff der Funktion, und Reduktion mehrerer Funktionen mehrerer Variabeln auf Eine Funktion Einer Variabeln.

348. Erklärung. Wenn eine Grösse u von einer oder mehreren Grössen $x, y, \ldots$ in der Art abhängt, dass, so oft $x, y, \ldots$ bestimmte Werthe annehmen, auch u einen bestimmten (eindeutigen) Werth annimmt, so nennen wir u eine Funktion von $x, y, \ldots$.

Anm. Hier ist zu bemerken, dass die obige Definition auch gelten soll, wenn $u, x, y, \ldots$ beliebige extensive Grössen sind. Ferner ist zu bemerken, dass die mehrdeutigen Funktionen, das heisst solche, wo für bestimmte Werthe der unabhängigen Variabeln $x, y, \ldots$ die Grösse u mehrere verschiedene Werthe annehmen kann, ohne dass diese Verschiedenheit durch eine neue Variable bedingt ist, — hier gänzlich ausgeschlossen sind; wie denn überhaupt alle in diesem Sinne mehrdeutigen Grössen aus der Mathematik zu verbannen sind, weil sich auf sie keine mathematische Formel mit Sicherheit anwenden lässt.

Sobald die Beziehung zwischen den unabhängigen und der abhängigen Variabeln u vermittelst einer Gleichung gegeben ist, durch welche für bestimmte Werthe der ersteren die letztere u mehrere verschiedene Werthe annehmen kann, so kann man u ansehen als Funktion jener Variabeln und einer neuen {Variabeln} r, welche eine bestimmte Werthreihe, etwa die der ganzen Zahlen durchläuft, so dass dann, wenn ausser den ursprünglichen Variabeln auch noch der Werth von r bestimmt ist, auch u eindeutig bestimmt sei. Oder sollte Eine solche neue
224 Variable r nicht ausreichen, so kann man mehrere solche zu Hülfe † nehmen.

Hat man zum Beispiel die Gleichung $u^n = x$, so kann hier für jeden Werth von x die Grösse u noch n verschiedene Werthe annehmen. Einer derselben sei mit $x^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet, so ist bekanntlich

$$u = (-1)^{\frac{2r}{n}} x^{\frac{1}{n}} = \left(\cos\frac{2r\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2r\pi}{n}\right) x^{\frac{1}{n}},$$

wo r nach und nach jeden ganzen Zahlwerth annehmen kann. Es ist also u auf diese Weise als Funktion von x und einer neuen Variabeln r dargestellt, wodurch dann die Mehrdeutigkeit der Funktion verschwindet.

349. Erklärung. Zahlfunktion nenne ich eine Funktion, welche für beliebige Werthe der Variabeln, von denen sie abhängt, stets einen Zahlwerth (reellen oder imaginären, ganzen oder gebrochenen, rationalen oder irrationalen) annimmt. Extensive Funktion nenne ich eine Funktion, welche für alle (oder gewisse) Werthe der Variabeln einer extensiven Grösse gleich ist. Ich werde die Zahlfunktionen stets mit kleinen Buchstaben f, φ, ψ, ..., die extensiven Funktionen mit grossen Buchstaben F, Φ, Ψ, ... bezeichnen.

Anm. Die imaginäre Zahlgrösse $p + q\sqrt{-1}$ steht auf der Gränze der extensiven Grössen. Sie ist als extensive Grösse aufzufassen, sobald man für den Ausdruck der Zahlbeziehung zwischen mehreren Grössen nur reelle Zahlkoefficienten zulässt, indem dann 1 und $\sqrt{-1}$ als Einheiten erscheinen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Hingegen ist sie als Zahlgrösse aufzufassen, sobald auch imaginäre Zahlkoefficienten für den Ausdruck der Zahlbeziehung gestattet sind. Wenn daher die Funktion $y = f(x)$ für reelles x imaginäre Werthe, etwa $u + v\sqrt{-1}$ annimmt, so kann sie in dem ersten Sinne als extensive Funktion aufgefasst werden; doch wollen wir in der Funktionenlehre den letzteren Sinn stets festhalten, also auch im Falle y imaginär wird, dennoch y als Zahlfunktion auffassen, wie es in der Erklärung geschehen ist.

350. *Jede Zahlfunktion beliebig vieler Zahlgrössen lässt sich als Zahlfunktion einer einzigen extensiven Grösse darstellen, und zwar, wenn*

$$y_1 = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

ist, so ist dieser Ausdruck gleichbedeutend mit

$$y_1 = f([x|e_1], [x|e_2], \dots, [x|e_n]) = \varphi(x),$$

wo $e_1, \dots e_n$ *ein einfaches Normalsystem (siehe 153) bilden, und*

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

ist.

Beweis. Wenn $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$ ist und $e_1, \dots e_n$ ein einfaches Normalsystem bilden, so ist [225]

$$[x|e_1] = [(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n)|e_1] = x_1,$$

da $[e_1|e_2], \dots [e_1|e_n]$ (nach 188) null sind und $[e_1|e_1] = 1$ ist. Aus gleichem Grunde ist

$$[x|e_2] = x_2, \dots, [x|e_n] = x_n.$$

Also

$$y_1 = f(x_1, x_2, \dots x_n) = f([x|e_1], [x|e_2], \dots, [x|e_n]),$$

wo also y_1 eine Funktion der extensiven Grösse x ist. Es sei diese Funktion mit $\varphi(x)$ bezeichnet, so hat man

$$y_1 = \varphi(x).$$

351. *Jedes System von Zahlfunktionen beliebig vieler Zahlgrössen lässt sich als Eine extensive Funktion Einer extensiven Grösse darstellen,*

und zwar, wenn

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots x_n) \end{cases}$$

ist, so ist dies System von Gleichungen gleichbedeutend der Gleichung

$$y = F(x),$$

wo

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, \; y = y_1 e_1 + \cdots + y_m e_m$$
$$F(x) = e_1 \varphi_1(x) + e_2 \varphi_2(x) + \cdots + e_m \varphi_m(x)$$
$$\varphi_r(x) = f_r([x|e_1], [x|e_2], \ldots, [x|e_n])$$

ist und $e_1, \ldots e_n$ *und* $e_1, \ldots e_m$ *einfache Normalsysteme bilden.*

Beweis. Nach 350 ist, wenn $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$ gesetzt wird,

$$y_r = f_r(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

gleichbedeutend mit

$$y_r = f_r([x|e_1], [x|e_2], \ldots, [x|e_n]).$$

Diese Funktion von x sei mit $\varphi_r(x)$ bezeichnet, also

$$y_r = \varphi_r(x) = f_r([x|e_1], [x|e_2], \ldots, [x|e_n]).$$

Ferner ist (nach 29) das System der Gleichungen

$$y_1 = \varphi_1(x), \; y_2 = \varphi_2(x), \; \ldots, \; y_m = \varphi_m(x)$$

gleichbedeutend der Gleichung

226 $$y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_m e_m = e_1 \varphi_1(x) + e_2 \varphi_2(x) + \cdots + e_m \varphi_m(x),$$

das heisst, der Gleichung

$$y = e_1 \varphi_1(x) + e_2 \varphi_2(x) + \cdots + e_m \varphi_m(x).$$

Diese {extensive} Funktion von x sei mit $F(x)$ bezeichnet, also

$$F(x) = e_1 \varphi_1(x) + e_2 \varphi_2(x) + \cdots + e_m \varphi_m(x),$$

so sind die m gegebenen Gleichungen

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \; \ldots, \; y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

gleichbedeutend mit der Gleichung

$$y = F(x).$$

352. *Jedes System von Funktionen beliebig vieler Variabeln lässt sich ersetzen durch Eine Funktion Einer Variabeln, vorausgesetzt, dass sich die unabhängigen Variabeln sämmtlich aus* E i n e m *System von Einheiten numerisch ableiten lassen, und ebenso die abhängigen.*

Beweis. 1. Für ein beliebiges System von Zahlfunktionen beliebig vieler Zahlgrössen ist der Satz in 351 bewiesen.

2. Nach 157 lassen sich alle aus einem System von n Einheiten numerisch ableitbaren Grössen aus einem einfachen Normalsystem von n Grössen numerisch ableiten. Es bestehe das Normalsystem, aus welchem sich die unabhängigen Variabeln $x, y, \ldots$ ableiten lassen, aus den Grössen $e_1, e_2, \ldots e_n$, und dasjenige, aus welchem sich die abhängigen Variabeln $u, v, \ldots$ ableiten lassen, aus den Grössen $e^{(1)}$, $e^{(2)}, \ldots e^{(m)}$. Ferner sei

$$\begin{array}{ll} x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, & u = u_1 e^{(1)} + \cdots + u_m e^{(m)} \\ y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n, & v = v_1 e^{(1)} + \cdots + v_m e^{(m)} \\ \cdots & \cdots, \end{array}$$

wo alle Koefficienten Zahlgrössen sind, und seien

$$u = F(x, y, \ldots), \quad v = \Phi(x, y, \ldots), \ldots$$

die gegebenen Funktionen, so erhält man, indem man in der ersten Gleichung die obigen Werthe einsetzt,

$$u_1 e^{(1)} + \cdots + u_m e^{(m)} = F(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n, \ldots).$$

Hier ist die rechte Seite eine extensive Funktion der Zahlgrössen $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n, \ldots$. Diese Funktion soll einer Grösse gleich sein, welche aus den Einheiten $e^{(1)}, \ldots e^{(m)}$ numerisch † ableitbar ist, 227 also muss sie selbst aus ihnen numerisch ableitbar sein, das heisst, sie muss in der Form $e^{(1)}\varphi_1 + \cdots + e^{(m)}\varphi_m$ erscheinen, wo $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ Zahlfunktionen von $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n, \ldots$ sind. Also erhält man

$$u_1 e^{(1)} + \cdots + u_m e^{(m)} = e^{(1)}\varphi_1 + \cdots + e^{(m)}\varphi_m.$$

Diese Gleichung, welche mit $u = F(x, y, \ldots)$ gleichbedeutend ist, wird (nach 29) ersetzt durch das System der Zahlgleichungen

$$u_1 = \varphi_1, \; u_2 = \varphi_2, \; \ldots, \; u_m = \varphi_m.$$

Auf gleiche Weise wird die Gleichung

$$v = \Phi(x, y, \ldots)$$

ersetzt durch ein System von Zahlgleichungen von der Form

$$v_1 = \psi_1, \; v_2 = \psi_2, \; \ldots, \; v_m = \psi_m,$$

wo $\psi_1, \psi_2, \ldots$ gleichfalls Zahlfunktionen der Zahlgrössen $x_1, \ldots x_n$, $y_1, \ldots y_n, \ldots$ sind. Folglich werden die gegebenen Gleichungen

$$u = F(x, y, \ldots), \quad v = \Phi(x, y, \ldots), \ldots$$

ersetzt durch das System der Zahlgleichungen

$$u_1 = \varphi_1,\ u_2 = \varphi_2,\ \ldots,\ u_m = \varphi_m,$$
$$v_1 = \psi_1,\ v_2 = \psi_2,\ \ldots,\ v_m = \psi_m,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad,$$

wo $\varphi_1, \ldots \varphi_m, \psi_1, \ldots \psi_m, \ldots$ Zahlfunktionen der Zahlgrössen $x_1, \ldots x_n$, $y_1, \ldots y_n, \ldots$ sind. Aber nach 351 kann ein solches System ersetzt werden durch Eine Funktion Einer Grösse, folglich kann auch das gegebene System durch Eine solche Funktion Einer Grösse ersetzt werden.

Anm. Die Zurückführung auf Eine Funktion Einer Variabeln ist auch für die Behandlung der Zahlfunktionen von Bedeutung, da die Sätze der Zahlfunktionen, der Differenzialrechnung, der Reihen, und auch mit gewissen Beschränkungen die der Integralrechnung sich auf solche extensive Funktionen extensiver Grössen, wie unten gezeigt werden soll, anwenden lassen. Namentlich ergeben sich daraus die Jakobischen Sätze über Funktionaldeterminanten, so wie die von Jakobi in seiner berühmten Abhandlung {Crelle's Journal, Bd. 22, S. 319 ff., ges. Werke Bd. 3, S. 393 ff.} angedeutete oder geahnte Uebereinstimmung dieser Sätze mit den Sätzen der Differenziation Einer einfachen Funktion Einer Variabeln aufs leichteste und unmittelbarste. {Vgl. noch Nr. 441.}

228 § 2. Ganze Funktionen und Darstellung derselben vermittelst lückenhaltiger Produkte.

353. Erklärung. Wenn $P_{a_1, a_2, \ldots a_n}$ ein beliebiges Produkt ist, in welchem die Grössen erster Stufe $a_1, a_2, \ldots a_n$ als Faktoren vorkommen, so verstehe ich unter

$$P_{l, l, \ldots l}(x_1 x_2 \ldots x_n),$$

wo $x_1, x_2, \ldots x_n$ beliebige Grössen erster Stufe sind, das arithmetische Mittel zwischen den sämmtlichen Ausdrücken, welche aus

$$P_{x_1, x_2, \ldots x_n}$$

hervorgehen, wenn man den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ alle möglichen verschiedenen Folgen giebt. Ich nenne hier den Ausdruck $P_{l, l, \ldots l}$ ein Produkt mit n {vertauschbaren} Lücken.

So ist zum Beispiel

$$P_{l,l,l}(xyz) = \tfrac{1}{6}(P_{x,y,z} + P_{x,z,y} + P_{y,x,z} + P_{y,z,x} + P_{z,x,y} + P_{z,y,x}).$$

Anm. Unter dem arithmetischen Mittel mehrer Grössen ist hier, wie sonst, die durch die Anzahl der Grössen dividirte Summe derselben verstanden. Es versteht sich von selbst, dass, wenn ein solcher Lückenausdruck noch mit andern Ausdrücken durch Multiplikation verbunden werden soll, er dann in Klammern zu schliessen ist.

Noch ist zu bemerken, dass wir oben die in die Lücken eintretenden Grössen als Grössen erster Stufe gesetzt haben. Man sieht leicht, dass man diesen Begriff auch hätte erweitern und auch Lücken höherer Stufen hätte annehmen

können, das heisst solche Lücken, in welche Grössen höherer Stufen eintreten sollen. Doch kann man solche Fälle, in denen Lücken höherer Stufe vorkommen würden, fast überall vermeiden. Namentlich, was der häufigste Fall ist, wenn das Hauptgebiet von n-ter Stufe ist, und Grössen $(n-1)$-ter Stufe in die Lücken eintreten sollen, so kann man diese Grössen als Ergänzungen von Grössen erster Stufe also in der Form $|a, \ldots$ darstellen, und statt der Lücke $(n-1)$-ter Stufe schreiben $|l$, wodurch dann die Lücke auf die erste Stufe reducirt ist, und der Definition in 353 unterliegt.

{Da ferner, der Erklärung zufolge, die Faktoren $x_1, x_2, \ldots x_n$ in allen möglichen Anordnungen in die Lücken eingeführt werden und aus allen so entstehenden Ausdrücken das arithmetische Mittel genommen wird, so ist es gleichgültig, welche Reihenfolge man den ausserhalb des Produktes $P_{l,\,l,\,\ldots\,l}$ stehenden Füllgrössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ giebt {vgl. Nr. 362}. Auch ist es nicht erforderlich, die einzelnen Lücken des Produktes $P_{l,\,l,\,\ldots\,l}$ durch verschiedene Symbole $l_1, l_2, \ldots l_n$ zu unterscheiden, da die Vertauschung zweier Lückensymbole die Bedeutung des Lückenproduktes doch nicht verändern würde; aus diesem Grunde wurden in der Erklärung die Lücken vertauschbar genannt. Erst weiter unten (vgl. Nr. 485) werden auch Lückenprodukte auftreten, bei denen jeder Lücke eine bestimmte Füllgrösse zugewiesen wird, deren Lücken daher nicht vertauschbar sind.}

354. *Es ist*

$$P_{l,\,l,\,\ldots\,l}(x_1 x_2 \ldots x_n) = \Sigma P_{x_r,\,x_s,\,\ldots} : (1 \,.\, 2 \ldots n),$$

wo der Ausdruck $P_{l,\,l,\,\ldots\,l}$ ein Produkt mit n {vertauschbaren} Lücken ist, und $x_r, x_s, \ldots$ dieselben Grössen wie $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen, nur in beliebig geänderter Folge, und wo die Summe sich auf alle verschiedenen Folgen bezieht. Ins Besondere ist

$$P_{l,\,l,\,\ldots\,l}x^n = P_{x,\,x,\,\ldots}.$$

Beweis. Nach 353 ist $P_{l,\,l,\,\ldots\,l}(x_1 x_2 \ldots x_n)$ das arithmetische 229 Mittel der Ausdrücke $P_{x_r,\,x_s,\,\ldots}$, welche aus $P_{x_1,\,x_2,\,\ldots\,x_n}$ durch beliebige Anordnung der Grössen $x_1, \ldots x_n$ hervorgehen, das heisst, gleich der Summe jener Ausdrücke, dividirt durch ihre Anzahl, also durch $1 \,.\, 2 \ldots n$. Wenn ins Besondere $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ ist, so werden alle jene Ausdrücke gleich $P_{x,\,x,\,\ldots\,x}$, also ist ihr arithmetisches Mittel gleich einem derselben, also damit auch die Specialformel erwiesen.

355. Erklärung. Wenn P_m ein Produkt mit m {vertauschbaren} Lücken, und $m > n$ ist, so verstehe ich unter $P_m(x_1 x_2 \ldots x_n)$ den Ausdruck, welchen man erhält, wenn man den Ausdruck $P_m(x_1 x_2 \ldots x_m)$ (nach 353) entwickelt, und dann statt jeder der Grössen x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots x_m$ eine Lücke setzt; zum Beispiel ist

$$P_{l,\,l,\,l}x = \tfrac{1}{3}(P_{x,\,l,\,l} + P_{l,\,x,\,l} + P_{l,\,l,\,x});$$

$$P_{l,l,l}(xy) = \tfrac{1}{6}(P_{x,y,l} + P_{y,x,l} + P_{x,l,y} + P_{y,l,x} + P_{l,x,y} + P_{l,y,x}).$$

356. *Wenn $P_{l,l,\dots l}$ ein Produkt mit m {vertauschbaren} Lücken, und m grösser als n ist, so ist*

$$P_{l,l,\dots l}(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{S}{m(m-1)\dots(m-n+1)},$$

wo S die Summe aller Glieder ist, welche hervorgehen, wenn man x_1, x_2, … x_n auf alle möglichen verschiedenen Arten in die m Lücken von $P_{l,l,\dots l}$ vertheilt; ins Besondere ist

$$P_{l,l,\dots l}x = \frac{1}{m}(P_{x,l,\dots l} + P_{l,x,\dots l} + \cdots).$$

Beweis. Es ist (nach 355) unter $P_{l,l,\dots l}(x_1 x_2 \dots x_n)$ der Ausdruck verstanden, den man erhält, wenn man in $P_{l,l,\dots l}(x_1 x_2 \dots x_m)$ statt jeder der Grössen $x_{n+1}, \dots x_m$ eine Lücke setzt. Nun ist (nach 354)

$$P_{l,l,\dots l}(x_1 x_2 \dots x_m) = \Sigma P_{x_r, x_s, \dots} : (1.2 \dots m).$$

Setzt man hierin statt x_{n+1}, x_{n+2}, … x_m Lücken, so werden alle die Glieder gleich, welche sich nur durch die Reihenfolge der Grössen x_{n+1}, x_{n+2}, … x_m unterscheiden. Man kann also, statt diese gleichen Glieder so oft zu setzen, als ihre Anzahl beträgt, eins derselben mit dieser Anzahl, also mit $1.2 \dots (m-n)$ multipliciren; somit erhält man jedes der von einander verschiedenen Glieder mit $1.2 \dots (m-n) : (1.2 \dots m)$ 230 multiplicirt. Aber die Summe dieser von einander verschiedenen Glieder ist S, also

$$P_{l,l,\dots l}(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{S.1.2\dots(m-n)}{1.2\dots m} = \frac{S}{m(m-1)\dots(m-n+1)}.$$

Da die Anzahl der in S enthaltenen Glieder gleich $m(m-1)\dots(m-n+1)$ ist, so ist der Ausdruck rechts zugleich das arithmetische Mittel dieser Glieder.

357. Erklärung. Wenn A, B, … A', B', … Produkte mit je n Lücken, und α, β, …, α', β', … Zahlen sind, so setze ich dann und nur dann

$$\alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B} + \cdots = \alpha'\mathsf{A}' + \beta'\mathsf{B}' + \cdots,$$

wenn *für jede Reihe von n Grössen erster Stufe* x_1, x_2, … x_n

$$\alpha\mathsf{A}x_1 x_2 \dots x_n + \beta\mathsf{B}x_1 x_2 \dots x_n + \cdots = \alpha'\mathsf{A}'x_1 x_2 \dots x_n + \beta'\mathsf{B}'x_1 x_2 \dots x_n + \cdots$$

ist. Wir nennen eine solche Vielfachensumme von Lückenprodukten (mit je n Lücken) einen Lückenausdruck (mit n Lücken).

358. *Jede ganze Zahlfunktion n-ten Grades von beliebig vielen (veränderlichen) Zahlgrössen lässt sich in der Form*

$$\mathsf{A}x^n$$

darstellen, wo A *ein Ausdruck mit n {vertauschbaren} Lücken ist, und zwar ist*

$$\Sigma \alpha_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} \ldots [\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots \leqq n] = \mathsf{A} x^n,$$

wo

$$x = e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$$

und

$$\mathsf{A} = \Sigma \alpha_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots} [l|e_0]^{\mathfrak{r}} [l|e_1]^{\mathfrak{a}} [l|e_2]^{\mathfrak{b}} \ldots \quad [\mathfrak{r} + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots = n]$$

ist, wo ferner $e_0, e_1, e_2, \ldots$ *ein einfaches Normalsystem bilden, und die Summe sich auf alle möglichen Werthe* $\mathfrak{r}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ *bezieht, welche der in Klammern beigefügten Bedingung genügen, ohne negativ zu sein.*

Beweis. Nach der Annahme ist $x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$, wo $x_0 = 1$ ist. Ferner, da $x_0 = 1$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots \leqq n$ ist, so ist

$$\Sigma \alpha_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} \ldots = \Sigma \alpha_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots} x_0^{\mathfrak{r}} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} \ldots$$

mit der Bedingung, dass $\mathfrak{r} + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots = n$ sei. Der gewonnene Ausdruck ist aber (nach 350)

$$= \Sigma \alpha_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots} [x|e_0]^{\mathfrak{r}} [x|e_1]^{\mathfrak{a}} [x|e_2]^{\mathfrak{b}} \ldots$$

231

$$= \mathsf{A} x^n \qquad [354],$$

wo A den im Satze angegebenen Lückenausdruck darstellt.

359. *Jedes System von ganzen Funktionen n-ten Grades beliebig vieler Variabeln lässt sich in der Form*

$$\mathsf{A} x^n$$

darstellen, wo A *ein konstanter Lückenausdruck mit n {vertauschbaren} Lücken ist.*

Beweis folgt aus 358 vermittelst 352.

360. *Statt einen Lückenausdruck, {dessen Lücken vertauschbar sind,} mit einer Faktorenreihe (gemäss der Erklärung in* 353) *zu multipliciren, kann man ihn mit den Faktoren fortschreitend multipliciren, das heisst:*

$$\mathsf{A}(x_1 x_2 \ldots x_n) = \mathsf{A} x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Beweis. 1. Es bestehe A nur aus einem Produkt, und zwar enthalte dasselbe m {vertauschbare} Lücken, so ist (nach 356)

$$(*) \qquad \mathsf{A}(x_1 x_2 \ldots x_n) = \frac{S}{m(m-1)\ldots(m-n+1)},$$

wo S die Summe aller Glieder ist, welche hervorgehen, wenn man auf alle möglichen verschiedenen Arten $x_1, x_2, \ldots x_n$ in die m Lücken von A vertheilt. Ebenso sei S_1 die Summe aller Glieder, welche hervorgehen, wenn man x_1 nach und nach in jede einzelne Lücke des Produktes A einsetzt; ferner gehe S_2 aus S_1 hervor, indem in jedem

Gliede von S_1 die Grösse x_2 nach und nach in jede der $m - 1$ Lücken einzeln einsetzt, und die sämmtlichen so erhaltenen Glieder addirt, somit ist S_2 zugleich die Summe aller Glieder, welche hervorgehen, wenn man x_1, x_2 auf alle möglichen verschiedenen Arten in zwei der Lücken von A einfügt. Auf entsprechende Weise möge S_3 aus S_2 abgeleitet sein, und so weiter. Dann ist (nach 356)

$$\mathsf{A}x_1 = \frac{S_1}{m}, \quad \mathsf{A}x_1x_2 = \frac{S_2}{m(m-1)}, \cdots,$$

endlich

$$\mathsf{A}x_1x_2\ldots x_n = \frac{S}{m(m-1)\ldots(m-n+1)} = \mathsf{A}(x_1x_2\ldots x_n) \quad \text{[nach (*)]}.$$

2. Es sei A ein beliebiger Lückenausdruck $= \Sigma P_a$, wo jedes P_a ein Produkt mit m {vertauschbaren} Lücken ist, so ist

232

$$\begin{aligned} \mathsf{A}(x_1x_2\ldots x_n) &= \Sigma P_a.(x_1x_2\ldots x_n) \\ &= \Sigma P_a(x_1x_2\ldots x_n) && [357] \\ &= \Sigma P_a x_1x_2\ldots x_n && [\text{Beweis } 1] \\ &= \Sigma P_a . x_1x_2\ldots x_n && [357] \\ &= \mathsf{A}x_1x_2\ldots x_n. \end{aligned}$$

361. *In dem Ausdrucke* $\mathsf{A}x_1x_2\ldots x_n$, *in welchem* A *ein beliebiger Lückenausdruck mit n oder mehr {vertauschbaren} Lücken ist, kann man ohne Werthänderung eine beliebige Schaar der Grössen* $x_1x_2\ldots x_n$ *mit einer Klammer umschliessen.*

Beweis aus 360.

362. *Die Ordnung der Faktoren, welche in einen Lückenausdruck {mit lauter vertauschbaren Lücken} eintreten sollen, ist gleichgültig für das Resultat, das heisst:*

$$\mathsf{A}x_1x_2\ldots = \mathsf{A}x_rx_s\ldots,$$

wo $x_1x_2\ldots$ *und* $x_rx_s\ldots$ *dieselben Faktoren nur in verschiedener Ordnung enthalten sollen, und* A *einen Lückenausdruck {mit vertauschbaren Lücken} bezeichnet.*

Beweis. Es sei $\mathsf{A} = \Sigma P_a$, wo jedes P_a ein lückenhaltiges Produkt ist, so ist

$$\begin{aligned} \mathsf{A}x_1x_2\ldots &= \mathsf{A}(x_1x_2\ldots) && [360] \\ &= \Sigma P_a(x_1x_2\ldots) && [357]. \end{aligned}$$

Nun ist aber (nach 356) $P_a(x_1x_2\ldots)$ das arithmetische Mittel sämmtlicher Ausdrücke, welche hervorgehen, wenn man x_1, x_2, ... in allen möglichen Anordnungen in die Lücken von P_a hineinfügt, also ist es gleichgültig, in welcher Ordnung die Grössen x_1, x_2, ... in dem Ausdrucke $P_a(x_1x_2\ldots)$ vorkommen, das heisst, $P_a(x_1x_2\ldots) = P_a(x_rx_s\ldots)$,

wenn $x_1 x_2 \ldots$ und $x_r x_s \ldots$ dieselben Faktoren nur in verschiedener Folge enthalten sollen. Also ist

$$\mathsf{A}\, x_1 x_2 \cdots = \Sigma P_\alpha (x_r x_s \ldots) = \Sigma P_\alpha . (x_r x_s \ldots) \qquad [357]$$

$$= \mathsf{A}(x_r x_s \ldots) = \mathsf{A}\, x_r x_s \ldots \qquad [360].$$

363. *Wenn irgend einer der Faktoren, welche mit einem Lückenausdrucke multiplicirt sind, eine Summe ist, so kann man statt der Summe die einzelnen Summanden setzen, und die so erhaltenen Lückenausdrücke addiren, das heisst:*

$$\mathsf{A}p(x + y + \cdots)q = \mathsf{A}pxq + \mathsf{A}pyq + \cdots,$$

wo p und q Faktorenreihen bezeichnen, und A einen Lückenausdruck {mit vertauschbaren Lücken}. 233

Beweis. Nach 362 ist

$$\mathsf{A}p(x + y + \cdots)q = \mathsf{A}pq(x + y + \cdots).$$

Hier ist $\mathsf{A}pq$ wieder ein Lückenausdruck, und daher hat $\mathsf{A}pq(x+y+\cdots)$ die Form einer Summe von Produkten, deren jedes $(x + y + \cdots)$ als einen Faktor enthält, also die Form

$$P_{x+y+\cdots} + Q_{x+y+\cdots} + \cdots.$$

Dies ist aber (nach 39) gleich

$$P_x + P_y + \cdots + Q_x + Q_y + \cdots = P_x + Q_x + \cdots + P_y + Q_y + \cdots$$

$$= \mathsf{A}pqx + \mathsf{A}pqy + \cdots = \mathsf{A}pxq + + \mathsf{A}pyq + \cdots.$$

Anm. Es unterliegt hiernach das Produkt der Faktoren, welche in einen Lückenausdruck {mit vertauschbaren Lücken} hineintreten sollen, ganz den Gesetzen algebraischer Multiplikation, und es bietet sich uns hier also die allgemeinere Aufgabe dar, diejenigen Produkte extensiver Grössen, welche den Gesetzen algebraischer Multiplikation unterliegen, zu behandeln, was der Gegenstand des folgenden Paragraphen sein soll.

§ 3. **Algebraische Multiplikation.**

364. Erklärung. Unter algebraischer Multiplikation verstehe ich diejenige Multiplikation, deren Bestimmungsgleichungen sind:

$$e_r e_s = e_s e_r \text{ und } E(Fe_r) = EFe_r,$$

wo e_r, e_s ursprüngliche Einheiten und E, F algebraische Produkte ursprünglicher Einheiten sind. Ich bezeichne sie wie gewöhnliche Produkte der Algebra ohne umschliessende Klammer.

Anm. Name und Bezeichnung sind darin begründet, dass für diese Multiplikation, wie unten gezeigt wird, alle Gesetze der in der Algebra angewandten Multiplikation gelten und keine andern. In dem ersten Theile war diese Multiplikation nicht zu behandeln, da sie keine einfachen Grössen liefert, und mit der Funktionenlehre aufs Engste zusammenhängt. Sie kann als die charakteristische Multiplikation dieses zweiten Theiles aufgefasst werden, während die den ersten

Theil charakterisirende kombinatorische Multiplikation von jetzt an immer mehr zurücktritt. {Erst bei den Ausdrücken mit *nicht vertauschbaren Lücken* gewinnt die kombinatorische Multiplikation wieder eine grössere Bedeutung. Vgl. Nr. 504 ff.}

365. *In einem algebraischen Produkte zweier einfacher Faktoren kann man die Faktoren vertauschen, das heisst, es ist*

$$ab = ba.$$

Beweis. Es sei $a = \Sigma\alpha_a e_a$, $b = \Sigma\beta_b e_b$,

so ist

234

$$ab = \Sigma\alpha_a e_a . \Sigma\beta_b e_b = \Sigma\alpha_a\beta_b(e_a e_b) \quad [42]$$
$$= \Sigma\beta_b\alpha_a(e_b e_a) \quad [364]$$
$$= \Sigma\beta_b e_b . \Sigma\alpha_a e_a \quad [42]$$
$$= ba.$$

366. *Statt einen einfachen Faktor c dem zweiten Faktor eines algebraischen Produktes hinzuzufügen, kann man ihn dem ganzen Produkte hinzufügen, das heisst:*

$$A(Bc) = ABc.$$

Beweis. A und B sind hier algebraische Produkte der aus den Einheiten $e_1, e_2, \ldots$ numerisch abgeleiteten Grössen, also (nach 45) darstellbar in den Formen

$$A = \Sigma\alpha_a E_a, \quad B = \Sigma\beta_b F_b,$$

wo E_a, F_b algebraische Produkte der Einheiten sind. Endlich sei $c = \Sigma\gamma_c e_c$, so hat man

$$A(Bc) = \Sigma\alpha_a E_a . (\Sigma\beta_b F_b . \Sigma\gamma_c e_c) = \Sigma\alpha_a\beta_b\gamma_c E_a(F_b e_c) \quad [45]$$
$$= \Sigma\alpha_a\beta_b\gamma_c E_a F_b e_c \quad [364]$$
$$= \Sigma\alpha_a E_a . \Sigma\beta_b F_b . \Sigma\gamma_c e_c \quad [45]$$
$$= ABc.$$

Anm. Hierdurch ist die algebraische Multiplikation als *lineale Multiplikation*, das heisst, als solche, deren Bedingungsgleichungen noch gelten, wenn man statt der Einheiten beliebige aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen setzt, nachgewiesen.

367. *Die Ordnung, in welcher man {in einem algebraischen Produkte} mit einfachen Faktoren fortschreitend multiplicirt, ist gleichgültig für das Resultat, das heisst:*

$$Abcd \ldots = Acbd \ldots = \cdots.$$

Beweis. Es ist

$$Abc = A(bc) \quad [366]$$
$$= A(cb) \quad [365]$$
$$= Acb \quad [366].$$

Also kann man in einem klammerlosen Produkt zwei auf einander folgende {einfache} Faktoren vertauschen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man jeden einfachen Faktor auf jede Stelle des Produktes bringen, also den fortschreitenden einfachen Faktoren beliebige Ordnung geben.

368. *Statt mit mehreren einfachen Faktoren fortschreitend {algebraisch} zu multipliciren, kann man mit ihrem Produkt multipliciren, das heisst:* 235

$$Abc\ldots = A(bc\ldots).$$

Beweis. Nach 366 ist

$$A(bc\ldots pq) = A(bc\ldots p)q = A(bc\ldots)pq = \cdots$$
$$= Abc\ldots pq.$$

369. *Bei einem algebraischen Produkt von zwei beliebigen Faktoren kann man die Faktoren vertauschen, das heisst:*

$$AB = BA.$$

Beweis. Es sei $A = a_1\ldots a_m$, $B = b_1\ldots b_n$, so ist

$$AB = A(b_1\ldots b_n) = Ab_1\ldots b_n \quad [368]$$
$$= b_1\ldots b_n a_1\ldots a_m \quad [367]$$
$$= b_1\ldots b_n(a_1\ldots a_m) \quad [368].$$

370. *Bei einem algebraischen Produkt von drei beliebigen fortschreitenden Faktoren kann man den zweiten und dritten Faktor in eine Klammer schliessen, das heisst:*

$$ABC = A(BC).$$

Beweis. Es sei $B = b_1\ldots b_m$, $C = c_1\ldots c_n$, so ist (nach 368)

$$A(BC) = A(B(c_1\ldots c_n)) = A(Bc_1\ldots c_n)$$
$$= Ab_1\ldots b_m c_1\ldots c_n$$
$$= A(b_1\ldots b_m)c_1\ldots c_n$$
$$= A(b_1\ldots b_m)(c_1\ldots c_n)$$
$$= ABC.$$

371. *Wenn man aus den ursprünglichen Einheiten $e_1,\ldots e_n$ die Kombinationen mit Wiederholung zur m-ten Klasse bildet und jede dieser Kombinationen als algebraisches Produkt der darin enthaltenen Elemente setzt, so stehen diese Produkte in keiner Zahlbeziehung zu einander, und jedes algebraische Produkt von m Grössen, die aus den Einheiten $e_1,\ldots e_n$ numerisch abgeleitet sind, lässt sich aus jenen Produkten numerisch ableiten.*

Beweis. Nach der Definition in 364 sollen die Gleichungen

$$e_r e_s = e_s e_r$$

und

$$E(Fe_r) = EFe_r$$

236 die vollständigen Bestimmungsgleichungen der algebraischen Multiplikation sein, das heisst, es soll keine Beziehung zwischen den Einheitsprodukten stattfinden, als solche, welche sich aus jenen Bestimmungsgleichungen ableiten lassen. Jede zwischen ihnen bestehende Gleichung muss also durch Anwendung jener Gleichungen identisch gleich Null gemacht werden können. Da aber jene Fundamental-Gleichungen auf beiden Seiten stets dieselben Einheiten enthalten, nur in anderer Folge oder Zusammenfassung, so können durch Anwendung derselben in ein Produkt keine neuen Einheiten als Faktoren hineingebracht werden. Dagegen kann man alle Glieder einer etwa bestehenden Gleichung (nach 367, 368) auf die Form bringen, dass sie wohlgeordnete Kombinationen (mit gestatteter Wiederholung) aus den Einheiten $e_1, \dots e_n$ werden. Nachdem dies geschehen ist, muss also die Gleichung identisch gleich Null sein, das heisst, alle Koefficienten {jener Kombinationen} müssen null sein, das heisst, es findet keine Zahlbeziehung zwischen ihnen statt.

Der zweite Theil des Satzes folgt unmittelbar aus 49.

Anm. Es bilden somit die Kombinationen *mit Wiederholung* aus den ursprünglichen Einheiten zu irgend einer (m-ten) Klasse, die Kombinationen als *algebraische* Produkte betrachtet, ein System von Einheiten höherer Ordnung, aus welchem sich alle algebraischen Produkte zu m Faktoren, welche aus den ursprünglichen Einheiten numerisch abgeleitet sind, wiederum numerisch ableiten lassen. Es lässt sich sehr leicht zeigen, dass dasselbe auch noch gilt, wenn man statt der n ursprünglichen Einheiten n beliebige, aus ihnen numerisch abgeleitete, aber in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen setzt. Indem ich jedoch diesen Beweis dem Leser überlasse, schreite ich sogleich zu dem für die weitere Entwickelung unentbehrlichen Satze.

372. *Wenn ein algebraisches Produkt null ist, so muss nothwendig einer seiner Faktoren null sein, das heisst, wenn*

$$AB = 0, \quad A \gtrless 0$$

ist, so muss

$$B = 0$$

sein.

Beweis. Im allgemeinsten Falle werden A und B Vielfachensummen von algebraischen Produkten sein, deren Faktoren aus den 237 ursprünglichen Einheiten $a, b, c, \dots$ numerisch † abgeleitet sind. Dann bilden (nach 371) die Kombinationen mit Wiederholungen aus $a, b, c, \dots$, wenn jede dieser Kombinationen als algebraisches Produkt der darin enthaltenen Einheiten gesetzt wird, die Einheiten, aus denen A und B numerisch ableitbar sind. Man stelle sich vor, dass die Elemente jeder

Kombination nach dem Alphabete geordnet sind, und die Kombinationen selbst zunächst nach Klassen aufgestellt sind, so dass jede niedere Klasse der höheren voran steht, und dass ferner innerhalb jeder Klasse die Kombinationen lexikographisch geordnet seien. Wir wollen diese Aufstellung die *wohlgeordnete Aufstellung der Kombinationen* nennen.

Da A nach Hypothesis von Null verschieden ist, so muss unter den Koefficienten, durch welche A aus jenen Kombinationen abgeleitet ist, nothwendig mindestens einer von Null verschieden sein. Es sei E_1 unter allen Kombinationen, welche in dem Ableitungsausdrucke von A einen von Null verschiedenen Koefficienten haben, diejenige, welche in der wohlgeordneten Aufstellung die früheste Stelle einnimmt, so erscheint A in der Form

$$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots = \Sigma \alpha_{\mathfrak{a}} E_{\mathfrak{a}},$$

wo α_1 von Null verschieden ist. Ferner seien F_1, $F_2, \ldots$ nach der Reihe die Kombinationen der obigen Aufstellung, {aus denen B abgeleitet ist}, und

$$B = \Sigma \beta_{\mathfrak{b}} F_{\mathfrak{b}} = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots,$$

so ist

$$AB = \Sigma \alpha_{\mathfrak{a}} \beta_{\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a}} F_{\mathfrak{b}} \qquad [42].$$

Jedes Produkt $E_{\mathfrak{a}} F_{\mathfrak{b}}$ liefert wieder ein algebraisches Produkt der ursprünglichen Einheiten, und wenn wir diese Produkte mit G_1, $G_2, \ldots$ bezeichnen, so wird AB eine Vielfachensumme dieser Einheitsprodukte; also, da AB nach Hypothesis null ist, so müssen alle Koefficienten dieser Vielfachensumme null sein, das heisst

$$\Sigma \alpha_{\mathfrak{a}} \beta_{\mathfrak{b}} [E_{\mathfrak{a}} F_{\mathfrak{b}} = G_m] = 0,$$

wo die in Klammer geschlossene Bedingung aussagt, dass man die Summe aller der Produkte $\alpha_{\mathfrak{a}} \beta_{\mathfrak{b}}$ zu nehmen hat, deren zugehörige Einheitsprodukte $E_{\mathfrak{a}} F_{\mathfrak{b}}$ einen konstanten Werth G_m haben.

Wir haben hier nur diejenigen Gleichungen dieser Art zu betrachten, welche in irgend einem Gliede den Faktor † α_1 enthalten; diese Gleichungen können wir in der Form schreiben 238

$$0 = \alpha_1 \beta_k + \Sigma \alpha_{\mathfrak{a}} \beta_{\mathfrak{b}} [E_{\mathfrak{a}} F_{\mathfrak{b}} = E_1 F_k],$$

wobei noch die Bedingung hinzuzufügen ist, dass unter den unter dem Summenzeichen stehenden Produkten keins mit $\alpha_1 \beta_k$ identisch ist. Ich zeige nun, dass man diese Bedingung auch so ausdrücken könne: $\mathfrak{b}$ müsse kleiner als k sein.

In der That ergiebt sich zuerst, dass $\mathfrak{a}$ nicht 1 sein kann; denn dann müsste das Produkt der beiden Kombinationen E_1 und $F_{\mathfrak{b}}$ dieselbe Kombination liefern, wie das Produkt der beiden Kombinationen E_1 und F_k, das heisst, $F_{\mathfrak{b}}$ müsste mit F_k identisch sein, also $\mathfrak{b} = k$,

dann wäre also $\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}$ mit $\alpha_1\beta_k$ identisch, was der vorausgesetzten Bedingung widerspricht. Also muss $\mathfrak{a} > 1$ sein, das heisst, $E_{\mathfrak{a}}$ muss in der wohlgeordneten Aufstellung der Kombinationen später vorkommen als E_1.

Dies ist auf zwei Arten möglich. *Erstens* auf die Art, dass E_1 weniger Elemente enthält als $E_{\mathfrak{a}}$, dann muss, da E_1F_k mit $E_{\mathfrak{a}}F_{\mathfrak{b}}$ gleiche Kombination liefern soll, F_k mehr Elemente enthalten, als $F_{\mathfrak{b}}$, das heisst, F_k muss in jener wohlgeordneten Aufstellung später folgen als $F_{\mathfrak{b}}$, das heisst, $\mathfrak{b} < k$ sein. Oder *zweitens*, wenn E_1 und $E_{\mathfrak{a}}$ gleich viel Elemente enthalten, so muss $E_{\mathfrak{a}}$ in der lexikographischen Aufstellung später folgen als E_1.

In dem Princip der lexikographischen Aufstellung von Kombinationen liegt es aber, dass das erste der Elemente $a, b, \ldots$, welches in zwei Kombinationen einen ungleichen Exponenten hat, in der später folgenden Kombination den kleineren Exponenten habe, so dass also, wenn dies Element in E_1 den Exponenten α, in $E_{\mathfrak{a}}$ den Exponenten γ hat, $\gamma < \alpha$ sein muss. Ferner, aus der Bedingungsgleichung $E_{\mathfrak{a}}F_{\mathfrak{b}} = E_1F_k$ folgt, dass, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Exponenten sind, welche irgend ein Element beziehlich in den Kombinationen $E_1, F_k, E_{\mathfrak{a}}, F_{\mathfrak{b}}$ hat, $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ sein muss. Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass, wenn ein Element in E_1 denselben Exponenten hat wie in $E_{\mathfrak{a}}$, es auch in F_k denselben Exponenten haben muss, wie in $F_{\mathfrak{b}}$, und dass also das erste der Elemente $a, b, \ldots$, welches in $E_{\mathfrak{a}}$ einen andern Exponenten hat als in E_1, auch das erste ist, welches in $F_{\mathfrak{b}}$ einen andern
239 Exponenten hat als in F_k; es mögen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ins † Besondere die Exponenten dieses Elementes in $E_1, F_k, E_{\mathfrak{a}}, F_{\mathfrak{b}}$ sein, so sahen wir, dass $\gamma < \alpha$ sein muss; dann folgt aber aus der Gleichung $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, dass $\delta > \beta$ sein muss, und dass also nach dem Princip der lexikographischen Aufstellung die Kombination $F_{\mathfrak{b}}$ früher stehen muss, als F_k, das heisst, $\mathfrak{b} < k$ sein muss, da ja die Kombinationen $F_1, F_2, \ldots$ in jeder Klasse lexikographisch geordnet sein sollen.

Somit haben wir gefunden, dass in den beiden möglichen Fällen $\mathfrak{b} < k$ sein muss. Wir haben also die Gleichung

$$(*) \qquad 0 = \alpha_1\beta_k + \Sigma\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}[E_{\mathfrak{a}}F_{\mathfrak{b}} = E_1F_k,\ \mathfrak{b} < k].$$

Es sei nun zuerst $k = 1$, so fällt die Summe $\Sigma\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}$ ganz fort, da ihre Bedingung, $\mathfrak{b} < 1$ nicht erfüllt werden kann, also hat man $\alpha_1\beta_1 = 0$, und da α_1 nach der Voraussetzung $\gtrless 0$, und α_1 und β_1 Zahlen sind, so muss also

$$\beta_1 = 0$$

sein. Setzt man $k = 2$, so fällt, da $\mathfrak{b} < 2$ und $\beta_1 = 0$ ist, die Summe $\Sigma\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}$ gleichfalls weg, und man erhält $\alpha_1\beta_2 = 0$, also

$$\beta_2 = 0.$$

Und aus gleichem Grunde ergiebt sich, dass $\beta_3 = 0$ ist, und so weiter. Also ist auch B, was $= \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots$ war, $= 0$.

373. *Wenn zwei algebraische Produkte aus je zwei Faktoren gleich sind, und einen gleichen, von Null verschiedenen Faktor haben, so muss auch der andere Faktor in beiden gleich sein, das heisst, wenn*

$$AB = CB,$$

und $B \gtrless 0$ *ist, so muss*

$$A = C$$

sein.

Beweis. Aus $AB = CB$ folgt

$$0 = AB - CB = (A - C)B.$$

Also, da $B \gtrless 0$ ist, so muss (nach 372) $A - C$ null sein, das heisst, $A = C$.

374. Erklärung. Wenn B von Null verschieden ist, so verstehe ich unter dem algebraischen Quotienten $A : B$ denjenigen Ausdruck, welcher mit B algebraisch multiplicirt A giebt, welcher also der Gleichung genügt

$$(A : B)\, B = A.$$

375. *Es ist,* {*wenn* B *von Null verschieden ist*}, 240

$$AB : B = A.$$

Beweis. Nach 374 ist, wenn man darin AB statt A setzt,

$$(AB : B)B = AB.$$

Also wird, {da $B \gtrless 0$ ist}, (nach 373)

$$AB : B = A.$$

376. *Alle algebraischen Gesetze der Multiplikation und Division gelten für die algebraische Multiplikation und Division extensiver Grössen.*

Beweis. Denn alle diese Gesetze gründen sich auf die Formeln

$$AB = BA$$
$$ABC = A(BC)$$
$$(A : B)B = A$$
$$AB : B = A$$

und auf die für alle Multiplikationsarten (nach 42, 45) geltenden Beziehungen zur Addition und Subtraktion.

Anm. Durch die Identität der Rechnungsgesetze der soeben behandelten Multiplikation mit der gewöhnlichen Multiplikation der Algebra ist die Identität der Bezeichnung und Benennung gerechtfertigt. Der einzige Unterschied liegt in den verknüpften Grössen, welche dort Zahlen, hier beliebige extensive Grössen, wie zum Beispiel Punkte, Linien, und so weiter, sind.

Es wäre verkehrt, wenn man diese Differenz der verknüpften Grössen auf die Bezeichnung oder Benennung der Verknüpfung selbst übertragen wollte, wodurch die Terminologie nutzlos anwachsen, und der Zusammenhang verdunkelt werden würde. Auch diejenigen Eigenschaften dieser Produkte, welche auf der besonderen Eigenthümlichkeit extensiver Grössen beruhen, finden sich in der Algebra, und zwar in der Lehre von den ganzen Funktionen, wieder. So zum Beispiel liefert der Satz, dass sich jede ganze Funktion Einer Variabeln vom n-ten Grade in n lineare Faktoren zerlegen lässt, hier auf Strecken der Ebene angewandt, den Satz:

Jede Summe von algebraischen Produkten von je n Strecken Einer Ebene lässt sich auf Ein solches Produkt reduciren.

Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, dass auch die Annahme imaginärer Strecken verstattet sei.

241

§ 4. Ganze Funktionen ersten Grades. Quotient.

377. Erklärung. Wenn $a_1, a_2, \ldots a_n$ Grössen erster (oder $(n-1)$-ter) Stufe in einem Hauptgebiet n-ter Stufe sind, und *in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen*, so verstehe ich unter dem Bruche (Quotienten)

$$Q = \frac{b_1, b_2, \ldots, b_n}{a_1, a_2, \ldots, a_n}$$

den Ausdruck, welcher mit $a_1, a_2, \ldots a_n$ multiplicirt, beziehlich die Werthe $b_1, b_2, \ldots b_n$ liefert, so dass also

$$\frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} a_r = b_r.$$

Ich nenne $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Nenner des Bruches, $b_1, b_2, \ldots b_n$ seine entsprechenden Zähler, und setze zwei Brüche, oder zwei Ausdrücke welche aus Brüchen numerisch abgeleitet sind, dann und nur dann einander gleich, wenn sie mit jeder Grösse erster {oder $(n-1)$-ter} Stufe multiplicirt Gleiches liefern. Wenn auch die Zähler Grössen erster (oder $(n-1)$-ter Stufe) sind, und *in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen*, so nenne ich den Bruch einen umkehrbaren, und bezeichne in diesem Falle, wenn

$$Q = \frac{b_1, b_2, \ldots, b_n}{a_1, a_2, \ldots, a_n}$$

ist, mit $\frac{1}{Q}$ den umgekehrten Bruch, das heisst, ich setze

$$\frac{1}{Q} = \frac{a_1, a_2, \ldots, a_n}{b_1, b_2, \ldots, b_n}.$$

Anm. Der Gedanke, welcher dieser Erklärung zu Grunde liegt, ist leicht hindurchzusehen. In der *Algebra* ist nämlich unter dem Quotienten $a : b$ der Ausdruck verstanden, welcher mit b multiplicirt a giebt, und dies genügt (wenn b nicht null ist) zur Definition des Zahlquotienten. Für die *extensiven Grössen* genügt

es {aber} nicht, zu wissen, welches Resultat die Multiplikation des Quotienten mit irgend einer (von Null verschiedenen) Grösse liefert, indem daraus nur die Multiplikation desselben mit solchen Grössen sich bestimmt, welche aus jener Grösse numerisch ableitbar sind. Man sieht also, dass in einem Gebiete n-ter Stufe die Resultate der Multiplikation eines Quotienten mit n in keiner Zahlbeziehung stehenden Grössen bestimmt sein müssen, damit der Quotient vollständig bestimmt sei. Der Quotient, in † diesem Sinne aufgefasst, ist für die Differenzial- 242 und Integral-Rechnung extensiver Grössen, so wie für die Behandlung der geometrischen Verwandtschaften unentbehrlich.

Ich bemerke noch, dass man als Nenner des Quotienten auch beliebige Grössen höherer Stufen hätte gestatten können; doch würde man dann den wesentlichen Vortheil grösserer Einfachheit gegen den zweifelhaften Vortheil unfruchtbarer Allgemeinheit austauschen. Aus demselben Grunde werde ich auch die Zähler, wenn nicht ausdrücklich anderes festgesetzt wird, stets als Grössen erster {oder $(n-1)$-ter} Stufe betrachten.

378. *Zwei Brüche oder Vielfachensummen von Brüchen, welche mit n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen erster Stufe multiplicirt, Gleiches liefern, sind einander gleich, vorausgesetzt, dass n die Stufe des Hauptgebietes ist.*

Beweis. Es seien Q und Q_1 die beiden Brüche oder Vielfachensummen von Brüchen, welche mit n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen erster Stufe $a_1, \ldots a_n$ multiplicirt, Gleiches liefern, also es sei

$$(*) \qquad Q a_r = Q_1 a_r$$

für jeden Werth r zwischen 1 und n, so ist zu zeigen, dass $Q = Q_1$, das heisst (nach 377), dass Q und Q_1 mit *jeder* Grösse erster Stufe x multiplicirt Gleiches liefern.

Nun lässt sich (nach 24) jede solche Grösse in einem Hauptgebiete n-ter Stufe aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen, also aus $a_1, \ldots a_n$ numerisch ableiten. Es sei

$$x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n,$$

dann ist

$$\begin{aligned} Qx = Q(x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n) &= x_1 Q a_1 + \cdots + x_n Q a_n && [44] \\ &= x_1 Q_1 a_1 + \cdots + x_n Q_1 a_n && [(*)] \\ &= Q_1(x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n) && [44] \\ &= Q_1 x. \end{aligned}$$

379. *Einen Bruch multiplicirt man mit einer Zahl, indem man jeden Zähler mit dieser Zahl multiplicirt, und Brüche von gleichen Nennern addirt man, indem man die entsprechenden Zähler addirt, wobei die Nenner in beiden Fällen ungeändert bleiben, das heisst, beides zusammengefasst,*

$$\beta \frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} + \gamma \frac{c_1, c_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} + \cdots = \frac{(\beta b_1 + \gamma c_1 + \cdots), \; (\beta b_2 + \gamma c_2 + \cdots), \; \ldots}{a_1 \qquad , \qquad a_2 \qquad , \; \ldots}.$$

243 Beweis. Zu zeigen ist (nach 378), dass beide Seiten der zu erweisenden Gleichung mit jeder der Grössen $a_1, \ldots a_n$ multiplicirt, gleiches Resultat liefern. Nun ist (nach 44)

$$\left(\beta \frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} + \gamma \frac{c_1, c_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} + \cdots\right) a_r = \beta \frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} a_r + \gamma \frac{c_1, c_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} a_r + \cdots$$
$$= \beta b_r + \gamma c_r + \cdots \qquad [377].$$

Ferner ist

$$\frac{(\beta b_1 + \gamma c_1 + \cdots), (\beta b_2 + \gamma c_2 + \cdots), \ldots}{a_1 \quad , \quad a_2 \quad , \ldots} a_r = \beta b_r + \gamma c_r + \cdots \qquad [377].$$

Bezeichnen wir also der Kürze wegen die linke Seite der zu erweisenden Gleichung mit L, die rechte mit R, so wird für jeden Index r

(*) $$La_r = Ra_r.$$

Folglich $L = R$ (nach 378).

380. *Jeden Bruch kann man auf die Form bringen, dass seine Nenner beliebige n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster {oder $(n-1)$-ter} Stufe sind, (wo n die Stufenzahl des Hauptgebietes ist), und zwar ist*

$$\frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} = \frac{\Sigma\alpha_{1,a} b_a, \Sigma\alpha_{2,a} b_a, \ldots}{\Sigma\alpha_{1,a} a_a, \Sigma\alpha_{2,a} a_a, \ldots},$$

wenn

$$\Sigma\alpha_{1,a} a_a, \quad \Sigma\alpha_{2,a} a_a, \ \ldots$$

n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen, und $\alpha_{r,s}$ Zahlen sind.

Beweis. Es ist

$$\frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} \Sigma\alpha_{r,a} a_a = \sum \alpha_{r,a} \frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} a_a \qquad [44]$$
$$= \Sigma\alpha_{r,a} b_a \qquad [377].$$

Aber auch

$$\frac{\Sigma\alpha_{1,a} b_a, \Sigma\alpha_{2,a} b_a, \ldots}{\Sigma\alpha_{1,a} a_a, \Sigma\alpha_{2,a} a_a, \ldots} \Sigma\alpha_{r,a} a_a = \Sigma\alpha_{r,a} b_a \qquad [377].$$

Also liefern beide Ausdrücke mit $\Sigma\alpha_{r,a} a_a$ multiplicirt, für jeden Werth r von $1, \ldots n$ gleiches Resultat, sind also, da $\Sigma\alpha_{1,a} a_a$, $\Sigma\alpha_{2,a} a_a, \ldots$ nach der Hypothesis in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, (nach 378) einander gleich.

244 **381.** *Wenn $e_1, e_2, \ldots e_n$ die ursprünglichen Einheiten sind, und mit $E_{r,s}$ der Kürze wegen der Bruch bezeichnet wird, dessen Nenner die ursprünglichen Einheiten sind, und von dessen Zählern derjenige, welcher dem Nenner e_r entspricht, gleich e_s ist, während alle übrigen Zähler desselben null sind, das heisst, wenn*

(*) $$E_{r,s}e_r = e_s \text{ und } E_{r,s}e_t = 0 \; [t \gtrless r]$$

ist, so lassen sich die n^2 Ausdrücke, welche aus $E_{r,s}$ hervorgehen, indem man statt r und s nach und nach beliebige der Zahlen $1, \ldots n$ setzt, als Brucheinheiten setzen, das heisst, es lassen sich alle Brüche, {deren Zähler und Nenner Grössen erster Stufe des Hauptgebietes sind,} aus ihnen numerisch ableiten, während sie selbst in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und zwar ist

$$\frac{\Sigma\alpha_{1,\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}},\; \Sigma\alpha_{2,\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}}, \ldots}{e_1\;\;,\;\; e_2\;\;, \ldots} = \Sigma\alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

Beweis. 1. Es ist

$$\frac{\Sigma\alpha_{1,\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}},\; \Sigma\alpha_{2,\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}}, \ldots}{e_1\;\;,\;\; e_2\;\;, \ldots}\, e_r = \Sigma\alpha_{r,\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}} \qquad [377].$$

Ferner ist

$$\Sigma\alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, e_r = \Sigma\alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}e_r \qquad [44]$$
$$= \Sigma\alpha_{r,\mathfrak{b}}E_{r,\mathfrak{b}}e_r = \Sigma\alpha_{r,\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}} \qquad [*],$$

indem nämlich $E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}e_r = 0$ ist für $\mathfrak{a} \gtrless r$, und $E_{r,\mathfrak{b}}e_r = e_{\mathfrak{b}}$ ist. Also {sind} beide Ausdrücke, da sie mit jeder der Grössen $e_1, \ldots e_n$ multiplicirt Gleiches liefern, (nach 378) einander gleich.

2. Angenommen zweitens, es bestände zwischen den Grössen $E_{r,s}$ eine Gleichung der Form

$$\Sigma\alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = 0,$$

so hätte man für jeden Index r

$$0 = \Sigma\alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, e_r = \Sigma\alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}e_r \qquad [44].$$

Also, da $E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}e_r = 0$ ist, wenn r von $\mathfrak{a}$ verschieden ist,

$$0 = \Sigma\alpha_{r,\mathfrak{b}}E_{r,\mathfrak{b}}e_r = \Sigma\alpha_{r,\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}} \qquad [*].$$

Wenn aber

$$0 = \Sigma\alpha_{r,\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{b}} = \alpha_{r,1}e_1 + \alpha_{r,2}e_2 + \cdots,$$

so muss, da $e_1, e_2, \ldots$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, (nach 28) jeder der Koefficienten von $e_1, e_2, \ldots$ null sein, das heisst

$$\alpha_{r,s} = 0$$

245

für jedes r und s, also ist die angenommene Gleichung identisch null, das heisst (nach 2), die Grössen $E_{r,s}$ stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander.

382. *Jeder Bruch lässt sich als Lückenausdruck mit Einer Lücke darstellen, und zwar ist, wenn die Nenner $a_1, \ldots a_n$ ein einfaches Normalsystem bilden,*

$$\frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} = [l|a_1]b_1 + [l|a_2]b_2 + \cdots.$$

Beweis. Zu zeigen ist, dass beide Ausdrücke, mit jeder Grösse erster Stufe x multiplicirt, Gleiches liefern.

Nun ist, wenn $x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots$ ist,

$$([l|a_1]b_1 + [l|a_2]b_2 + \cdots)x = [x|a_1]b_1 + [x|a_2]b_2 + \cdots \quad [\{357\}, 353]$$
$$= x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots \quad [350].$$

Aber auch

$$\frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} x = \frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots}(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots)$$
$$= x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots \quad [377].$$

Somit liefern beide Seiten der zu erweisenden Gleichung, mit jeder Grösse erster Stufe multiplicirt, Gleiches, sind also selbst gleich (nach 377).

Anm. Es ist also der Bruch nur eine einfachere Form des Lückenausdruckes mit *einer* Lücke, und {es} kann also auch jedes System beliebig vieler *linearer* Zahlfunktionen von beliebig vielen Zahlgrössen als Produkt eines Quotienten in eine extensive Variable dargestellt werden.

383. Erklärung. Das bezügliche Produkt der Zähler eines Bruches, dessen Nenner das System der ursprünglichen Einheiten bilden, nenne ich den Potenzwerth des Bruches, und bezeichne den Potenzwerth des Bruches Q, wenn n die Anzahl der Nenner ist, mit $[Q^n]$, das heisst, ich setze, wenn

$$Q = \frac{a_1, a_2, \ldots a_n}{e_1, e_2, \ldots e_n}$$

ist, und $e_1, e_2, \ldots e_n$ das System der ursprünglichen Einheiten bilden,

$$[Q^n] = [a_1 a_2 \ldots a_n].$$

246 Anm. Wenn jeder Zähler das p-fache des entsprechenden Nenners ist, so ist der Bruch vermöge der Definition gleich der Zahl p; das bezügliche Produkt der Zähler ist dann

$$[pe_1 . pe_2 \ldots pe_n] = p^n [e_1 e_2 \ldots e_n],$$

also, da das bezügliche Produkt der ursprünglichen Einheiten Eins ist, $= p^n$, das heisst, in einem Hauptgebiete n-ter Stufe ist der Potenzwerth einer Zahl p gleich p^n. Der tiefere Grund der gewählten Benennung und Bezeichnung liegt in einer eigenthümlichen Verknüpfung der extensiven Brüche, welche ganz der bezüglichen Multiplikation entspricht, und deren Wesen ich hier in mehr anschaulicher Form zu entfalten versuchen werde. Ich gründe den Begriff dieser Verknüpfung auf den des Lückenproduktes.

Wenn nämlich $A, B, \ldots, A_1, B_1, \ldots$ Brüche sind, deren Nenner etwa die ursprünglichen Einheiten sein mögen, und $a, b, \ldots$ beliebige Grössen erster Stufe, l aber eine Lücke ist, in welche Brüche der genannten Art (also Grössen nullter Stufe) eintreten sollen, so setze ich $[AB \ldots] = [A_1 B_1 \ldots]$ dann und nur dann, wenn in Bezug auf eine beliebige Reihe von Grössen erster Stufe $a, b, \ldots$, deren Anzahl gleich der Anzahl der Faktoren jener Produkte ist,

$$[la . lb \ldots]AB \ldots = [la . lb \ldots]A_1 B_1 \ldots$$

ist. Ich nenne das Produkt $[AB\ldots]$ ein (auf das Hauptgebiet) bezügliches Produkt der Brüche A, B, ...

Aus diesem Begriffe folgt (nach 362) sogleich, dass *die Ordnung der Faktoren in diesem Produkte für den Werth desselben gleichgültig ist*, ein Gesetz, welches mit dem in 58 ausgesprochenen in Uebereinstimmung ist, da die Brüche der genannten Art als Grössen nullter Stufe zu betrachten sind.

Ferner ergiebt sich leicht, dass, wenn in dem Produkte $[la\,.\,lb\ldots]$ zwei der Faktoren, zum Beispiel die beiden ersten, einander gleich sind, allemal

$$[la\,.\,lb\ldots]AB\ldots = 0$$

ist. Denn es ist (nach 353) $[la\,.\,la\,.\,lc\ldots]ABC\ldots$ gleich einem Bruche, dessen Zähler die Summe aller der Ausdrücke ist, die man dadurch erhält, dass man A, B, C, ... in allen möglichen Anordnungen in die Lücken eintreten lässt, und dessen Nenner die Anzahl dieser Ausdrücke ist. Nun zeigt sich, dass sich die Glieder des Zählers paarweise aufheben. Denn, wenn $PQR\ldots$ eine andere Ordnung der Faktoren $ABC\ldots$ darstellt, und zwar so, dass P in die erste Lücke eintreten soll, Q in die zweite, und so weiter, so wird das daraus entspringende Glied gleich $[Pa\,.\,Qa\,.\,Rc\ldots]$. Vertauscht man P und Q, so geht aus dieser Ordnung das Glied $[Qa\,.\,Pa\,.\,Rc\ldots]$ hervor, die Summe beider giebt aber Null, da Pa und Qa Grössen erster Stufe sind, und deren Vertauschung (nach 55) entgegengesetzten Werth bedingt. Also heben sich die Glieder im Zähler paarweise auf, das heisst, der Zähler wird null, also der Bruch null. Dasselbe gilt, wenn in dem Produkte $[la\,.\,lb\ldots]$ beliebige zwei Faktoren gleich werden, so dass also in diesem Falle stets $[la\,.\,lb\ldots]AB\ldots = 0$ ist.

Daraus folgt aber wiederum sogleich, dass, wenn sich die Grössenreihe a, b, ... lineal ändert, zum Beispiel b in $b' = b + \alpha a$ sich verwandelt, das Produkt $[la\,.\,lb\ldots]AB\ldots$ denselben Werth behält, und hieraus (nach 76), dass, *wenn* 247 *sich a, b, ... beliebig, jedoch so ändern, dass ihr Produkt $[ab\ldots]$ konstant bleibt, auch $[la\,.\,lb\ldots]AB\ldots$ konstant bleibt.* Wir können daher diesen Ausdruck als Verknüpfung, und zwar als multiplikative Verknüpfung von $[ab\ldots]$ und $[AB\ldots]$ ansehen, und schreiben daher*)

$$[la\,.\,lb\ldots]AB\cdots = [AB\ldots][ab\ldots].$$

Hier hat $[AB\ldots]$, da es, mit dem Produkte $[ab\ldots]$ verknüpft, wieder eine Summe von solchen Produkten derselben Faktorenzahl, also eine Grösse derselben Stufe liefert, ganz die Bedeutung eines extensiven Bruches, aber eines solchen, der, wenn die Anzahl der Faktoren m ist, nur mit Grössen m-ter Stufe zusammentritt.

Es seien E_1, E_2, ... die Einheiten m-ter Stufe, und sei

$$[AB\ldots]E_1 = A_1,\ [AB\ldots]E_2 = A_2,\ \ldots,$$

so ist klar, dass $[AB\ldots]$ einem Bruche Q gleich ist, dessen Nenner E_1, E_2, ..., und dessen entsprechende Zähler A_1, A_2, ... sind. Denn es giebt jenes Produkt $[AB\ldots]$ mit den Einheiten m-ter Stufe, also auch mit jeder aus ihnen ableitbaren Grösse, das heisst, mit jeder Grösse m-ter Stufe multiplicirt, dasselbe Resultat, wie dieser Bruch Q auf gleiche Weise verknüpft liefert, das heisst, es ist vermöge der Definitionen jenes Produktes und dieses Quotienten $[AB\ldots] = Q$, das heisst, das bezügliche Produkt von m Brüchen, deren Nenner und Zähler

*) {In Nr. 504 wird für das Produkt auf der rechten Seite die Bezeichnung eingeführt

$$[AB\ldots ab\ldots].\}$$

von erster Stufe sind, giebt einen Bruch, dessen Nenner und Zähler von m-ter Stufe sind.

Durch die Reciprocität zwischen Grössen erster und $(n-1)$-ter Stufe (im Hauptgebiete n-ter Stufe) ergiebt sich auch, dass das bezügliche Produkt von m Brüchen, deren Nenner und Zähler von $(n-1)$-ter Stufe sind, einen Bruch liefert, dessen Nenner und Zähler von $(n-m)$-ter Stufe sind. Dies letztere Produkt würde daher als *regressives*, das erstere als *progressives Produkt von Brüchen* zu betrachten sein.

Wir bleiben hier bei dem ersteren, also dem progressiven Produkte der Brüche stehen, um namentlich noch die progressiven Potenzen der Brüche zu betrachten.

Da das Produkt gleicher Faktoren eben nur Eine Anordnung dieser Faktoren gestattet, so geht sogleich aus dem Begriffe hervor, dass

$$[A^m][ab\ldots] = [Aa . Ab\ldots]$$

sei, vorausgesetzt natürlich, dass die Anzahl der Faktoren $a, b, \ldots$ auch m betrage. Setzen wir die ursprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \ldots$ als Nenner, und $a_1, a_2, \ldots$ als entsprechende Zähler, das heisst, $Ae_1 = a_1, \ldots$, so ergiebt sich unmittelbar, dass $[A^m]$ mit dem Produkte von m ursprünglichen Einheiten multiplicirt, das Produkt der m entsprechenden Zähler gebe, und dass also die Potenzen von A jede Grösse, welche aus den ursprünglichen Einheiten hervorgegangen ist, und welche den Exponenten jener Potenz als Stufenzahl hat, in diejenige Grösse verwandelt, welche aus den entsprechenden Zählern genau auf dieselbe Weise hervorgeht. Betrachten wir ins Besondere diejenige Potenz von A, deren Exponent mit der Stufenzahl n des Hauptgebietes gleich ist, also $[A^n]$, so ergiebt sich

$$[A^n][e_1 e_2 \ldots e_n] = [a_1 a_2 \ldots a_n],$$

das heisst, gleich dem bezüglichen Produkte der Zähler, also (nach 383) gleich 248 dem † Potenzwerthe von A. Aber, da das bezügliche Produkt der n ursprünglichen Einheiten (nach 94) gleich Eins ist, so ist $[A^n]$ selbst diesem Potenzwerthe gleich, worin also die vollständige Begründung der oben gewählten Bezeichnung liegt. {Vgl. die weitere Ausgestaltung der betrachteten Produktbildung in Nr. 504—510.}

384. *Der Potenzwerth eines Bruches ist gleich dem bezüglichen Produkte der Zähler, dividirt durch das der Nenner, das heisst, wenn*

$$Q = \frac{a_1, a_2, \ldots, a_n}{b_1, b_2, \ldots, b_n}$$

ist, so ist

$$[Q^n] = \frac{[a_1 a_2 \ldots, a_n]}{[b_1 b_2 \ldots, b_n]}.$$

Beweis. Es sei $Qe_r = c_r$ für jeden Index r von 1 bis n; so ist

$$Q = \frac{c_1, c_2, \ldots}{e_1, e_2, \ldots}$$

(nach 378). Ferner seien $b_1, b_2, \ldots$ als Vielfachensummen der ursprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \ldots$ ausgedrückt, und sei für jeden Index r von 1 bis n: $b_r = \Sigma\beta_{r,a} e_a$, so ist

$$a_r = Qb_r = \Sigma\beta_{r,a}\, Qe_a = \Sigma\beta_{r,a}\, c_a.$$

Somit ist

$$\frac{[a_1 a_2 \ldots]}{[b_1 b_2 \ldots]} = \frac{[\Sigma\beta_{1,\mathfrak{a}} c_{\mathfrak{a}} \cdot \Sigma\beta_{2,\mathfrak{a}} c_{\mathfrak{a}} \cdots]}{[\Sigma\beta_{1,\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}} \cdot \Sigma\beta_{2,\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}} \cdots]}$$

$$= \frac{\Sigma\beta_{1,\mathfrak{a}}\beta_{2,\mathfrak{a}} \ldots [c_{\mathfrak{a}} c_{\mathfrak{b}} \cdots]}{\Sigma\beta_{1,\mathfrak{a}}\beta_{2,\mathfrak{b}} \cdots [e_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{b}} \cdots]} \qquad [45]$$

$$= \frac{(\Sigma(-1)^r \beta_{1,\mathfrak{a}}\beta_{2,\mathfrak{b}} \cdots)[c_1 c_2 \cdots]}{(\Sigma(-1)^r \beta_{1,\mathfrak{a}}\beta_{2,\mathfrak{b}} \cdots)[e_1 e_2 \cdots]} \qquad [57],$$

wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ alle möglichen verschiedenen Anordnungen der Zahlen $1, 2, \ldots$ darstellen und r die Anzahl der Zahlenpaare ist, die in den beiden Zahlreihen

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$$
$$1, 2, \ldots$$

entgegengesetzt geordnet sind. Hier heben sich nun die beiden Summen, und da $[e_1 e_2 \ldots] = 1$ ist, so erhält man

$$\frac{[a_1 a_2 \ldots]}{[b_1 b_2 \ldots]} = [c_1 c_2 \ldots] = [Q^n] \qquad \text{[nach 383]}.$$

385. *Wenn Q und Q_1 Brüche mit n Nennern sind, und zu einander in der Zahlbeziehung*

$$Q = \alpha Q_1$$

stehen, so stehen ihre Potenzwerthe in der Zahlbeziehung

$$[Q^n] = \alpha^n [Q_1^n].$$

Beweis. Es sei

$$Q_1 = \frac{a_1, \ldots, a_n}{e_1, \ldots, e_n},$$

also

$$Q = \frac{\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n}{e_1, \ldots, e_n},$$

so ist (nach 383) 249

$$[Q^n] = [\alpha a_1 . \alpha a_2 \ldots \alpha a_n] = \alpha^n [a_1 a_2 \ldots a_n] \qquad [46]$$
$$= \alpha^n [Q_1^n] \qquad [383].$$

386. *Wenn zwischen den Zählern eines Bruches eine Zahlbeziehung herrscht, so lässt sich der Bruch stets auf die Form bringen, dass einer oder mehrere seiner Zähler null werden, und zwischen den übrigen Zählern keine Zahlbeziehung stattfinde; und zwar, wenn $e_1, \ldots e_n$ die Nenner, $a_1, \ldots a_n$ die Zähler des Bruches Q sind, und zwischen $a_1, \ldots a_m$ keine Zahlbeziehung stattfindet, aber die übrigen $n - m$ Zähler aus ihnen numerisch ableitbar sind, so dass*

$$(*) \qquad a_{m+r} = \alpha_{r,1} a_1 + \alpha_{r,2} a_2 + \cdots + \alpha_{r,m} a_m$$

ist, so ist

$$Q = \frac{a_1, \ldots a_m, \quad 0, \quad 0, \ldots 0}{e_1, \ldots e_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots c_n},$$

wo

$$c_{m+r} = \alpha_{r,1}e_1 + \alpha_{r,2}e_2 + \cdots + \alpha_{r,m}e_m - e_{m+r},$$

das heisst,

$$= \frac{e_1, \ldots, e_m}{a_1, \ldots, a_m} a_{m+r} - e_{m+r}$$

ist. Und alle aus $c_{m+1}, \ldots c_n$ numerisch ableitbaren Grössen, aber auch keine andern geben mit Q multiplicirt, Null.

Beweis. {Es ist}

$$Qc_{m+r} = \alpha_{r,1}Qe_1 + \cdots + \alpha_{r,m}Qe_m - Qe_{m+r}$$
$$= \alpha_{r,1}a_1 + \cdots + \alpha_{r,m}a_m - a_{m+r},$$

da nach Hypothesis $a_1, \ldots a_n$ die zu den Nennern $e_1, \ldots e_n$ gehörigen Zähler des Bruches Q sind, {das heisst}

$$= 0 \qquad [(*)].$$

Also sind die zu den Nennern $c_{m+1}, \ldots c_n$ gehörigen Zähler null.

Zweitens ist zu zeigen, dass zwischen den n Grössen $e_1, \ldots e_m$, $c_{m+1}, \ldots c_n$ keine Zahlbeziehung herrscht.

Der Kürze wegen setze ich

$$\alpha_{r,1}e_1 + \cdots + \alpha_{r,m}e_m = q_r,$$

so dass also $c_{m+r} = q_r - e_{m+r}$ ist, so ist

$$[e_1e_2 \ldots e_mc_{m+1} \ldots c_n] = [e_1e_2 \ldots e_m(q_1 - e_{m+1}) \ldots (q_{n-m} - e_n)].$$

Da hier $q_1, q_2, \ldots$ aus $e_1, e_2, \ldots e_m$ numerisch abgeleitet sind, so können wir sie (nach 67) weglassen und erhalten das Produkt

$$= \mp [e_1e_2 \ldots e_n],$$

250 also von Null verschieden; folglich stehen $e_1, e_2, \ldots e_m, c_{m+1}, \ldots c_n$ (nach 61) in keiner Zahlbeziehung; also lässt sich (nach 378) Q in der im Satze angegebenen Weise als Bruch darstellen.

Daraus nun, dass $c_{m+1}, \ldots c_n$ mit Q multiplicirt Null geben, folgt sogleich, dass dies auch für jede Vielfachensumme dieser Grössen gilt. Aber auch umgekehrt muss jede Grösse p, welche mit Q multiplicirt Null giebt, eine Vielfachensumme von $c_{m+1}, \ldots c_n$ sein. Denn wie auch p beschaffen sei, immer muss es sich (nach 24) aus $e_1, e_2, \ldots e_m, c_{m+1}, \ldots c_n$ ableiten, also sich in der Form

$$p = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m + q$$

darstellen lassen, wo q eine Vielfachensumme von $c_{m+1}, \ldots c_n$ ist. Soll dann $Qp = 0$ sein, so hat man, da $Qe_1 = a_1, \ldots, Qc_{m+1} = 0, \ldots$ ist,

$$0 = Qp = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m,$$

also (nach 28) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m = 0$, also {ist} $p = q$, das heisst, eine Vielfachensumme von $c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots c_n$.

387. Erklärung. Wenn ein Bruch Q mit einer von Null verschiedenen Grösse erster Stufe multiplicirt ein Vielfaches dieser Grösse, etwa das ϱ-fache derselben liefert, so dass also

$$Qx = \varrho x$$

ist, so nenne ich den Koefficienten ϱ (mag ϱ nun reell oder imaginär sein) eine Hauptzahl des Bruches Q, und das Gebiet, welchem alle Grössen x angehören, welche jener Gleichung genügen, das zu der Hauptzahl ϱ gehörige Hauptgebiet.

388. Aufgabe. *Die Hauptzahlen und die zugehörigen Hauptgebiete eines Bruches zu finden.*

Auflösung. Es sei ϱ eine Hauptzahl eines Bruches Q mit n Nennern $e_1, e_2, \ldots e_n$, und sei $x = \Sigma x_a e_a$ eine von Null verschiedene Grösse, welche mit Q multiplicirt ihr ϱ-faches liefert, so hat man

$$Qx = \varrho x,$$

das heisst:

$$0 = (\varrho - Q)x.$$

Setzt man hierin statt x seinen Werth, und setzt

(a) $$(\varrho - Q)e_a = c_a,$$

so erhält man

(b) $$0 = \Sigma x_a c_a.$$

Da nun x von Null verschieden ist, so muss auch mindestens eine der 251 Zahlen $x_1, \ldots x_n$ von Null verschieden sein, also (nach 16) zwischen $c_1, \ldots c_n$ eine Zahlbeziehung stattfinden, folglich (nach 61) ihr kombinatorisches Produkt null sein, also

(c) $$0 = [c_1 c_2 \ldots c_n],$$

das heisst (nach 384), der Potenzwerth des Bruches $\varrho - Q$ muss null sein.

Umgekehrt, wenn diese Gleichung (c) erfüllt wird, so gilt (nach 66) auch eine Gleichung der Form (b), also giebt es dann eine Grösse $x \gtrless 0$, welche der Gleichung $Qx = \varrho x$ genügt, das heisst, ϱ ist dann eine Hauptzahl.

Setzt man in der letzten Gleichung statt $c_1, c_2, \ldots$ ihre Werthe aus (a), so erhält man

$$0 = [(\varrho e_1 - Qe_1)(\varrho e_2 - Qe_2) \ldots (\varrho e_n - Qe_n)],$$

oder, indem man die Klammern löst,

(d) $$\alpha_0 \varrho^n - \alpha_1 \varrho^{n-1} + \alpha_2 \varrho^{n-2} - \cdots + (-1)^n \alpha_n = 0,$$

wo α_r aus dem Produkte $[c_1 c_2 \ldots c_n]$ dadurch hervorgeht, dass man auf alle möglichen verschiedenen Arten r der Grössen $e_1, e_2, \ldots e_n$ in die entsprechenden Grössen $Qe_1, Qe_2, \ldots Qe_n$ umwandelt, während man die jedesmal übrigen unverändert lässt {und endlich die so erhaltenen Produkte addirt}. Die n Wurzeln $\varrho_1, \ldots \varrho_n$ dieser Gleichung (d) sind also die gesuchten Hauptzahlen; ihr Produkt ist nach dem Neutonschen Satze gleich $\alpha_n : \alpha_0$, das heisst, gleich dem Potenzwerthe von Q (nach 384).

Die Grössen x sind dann durch die Gleichung (b) bestimmt. Nach dieser Gleichung stehen $c_1, c_2, \ldots c_n$ in einer Zahlbeziehung zu einander. Folglich lässt sich (nach 17) aus den Grössen $c_1, \ldots c_n$ ein Verein von weniger als n Grössen, etwa $c_1, c_2, \ldots c_m$, aussondern, welcher keiner Zahlbeziehung unterliegt, und aus welchem die übrigen Grössen $(c_{m+1}, \ldots c_n)$ numerisch ableitbar sind. Dann aber lässt sich der Bruch $\varrho - Q$, bei dem (nach (a)) zu den Nennern $e_1, \ldots e_n$ die Zähler $c_1, \ldots c_n$ gehören, (nach 386) auf die Form bringen, dass unter den Zählern $n - m$ derselben null werden; die zugehörigen Nenner seien $a_{m+1}, \ldots a_n$; so haben (nach 386) alle aus $a_{m+1}, \ldots a_n$ ableitbaren Grössen x, aber auch keine andern, die Eigenschaft, dass $(\varrho - Q)x = 0$ ist, das heisst, dass $Qx = \varrho x$ wird, das heisst also, das Gebiet $a_{m+1}, \ldots a_n$ ist das zu der Hauptzahl ϱ gehörige Hauptgebiet. Also:

252 *Jeder Bruch Q mit n Nennern hat n Hauptzahlen und zwar sind diese die Wurzeln ϱ der gleichbedeutenden Gleichungen* (c) *oder* (d). *Das Produkt dieser n Wurzeln ist gleich dem Potenzwerthe von Q, und das zu der Hauptzahl ϱ gehörige Hauptgebiet erhält man, indem man (nach* 386) *$\varrho - Q$ als einen Bruch darstellt, von dessen Zählern einer oder mehrere null sind, während die übrigen Zähler in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen; dann ist das Gebiet derjenigen Nenner dieses Bruches $\varrho - Q$, deren entsprechende Zähler null sind, das verlangte Hauptgebiet.*

389. *Wenn die n Hauptzahlen $\varrho_1, \ldots \varrho_n$ eines Bruches Q alle von einander verschieden sind, so sind die n zugehörigen Hauptgebiete alle von erster Stufe und stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander.*

Beweis. Nach 388 lässt sich zu jeder der Grössen $\varrho_1, \ldots \varrho_n$, zum Beispiel zu ϱ_r, eine von Null verschiedene Grösse erster Stufe finden, welche mit Q multiplicirt ihr ϱ_r-faches liefert. Es seien $a_1, \ldots a_n$ solche Grössen, so dass $Qa_r = \varrho_r a_r$ ist.

Angenommen nun, $a_1, \ldots a_n$ ständen in einer Zahlbeziehung, so müssten sich aus ihnen (nach 17) m Grössen, etwa $a_1, \ldots a_m$, aussondern lassen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander ständen, und

aus denen jede der übrigen, zum Beispiel a_r, numerisch ableitbar wäre. Es sei $a_r = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m$, so muss, da a_r von Null verschieden ist, auch mindestens einer der Koefficienten $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ von Null verschieden sein. Es sei dies zum Beispiel α_1. Nun hat man

$$Qa_r = Q\,\Sigma\alpha_a a_a = \Sigma\alpha_a Q a_a = \Sigma\alpha_a \varrho_a a_a,$$

da nach der Voraussetzung $Qa_r = \varrho_r a_r$ ist, also wird

$$\alpha_1\varrho_1 a_1 + \cdots + \alpha_m \varrho_m a_m = Qa_r = \varrho_r a_r$$
$$= \varrho_r \alpha_1 a_1 + \cdots + \varrho_r \alpha_m a_m,$$

folglich sind (nach 29) die entsprechenden Koefficienten gleich, namentlich $\alpha_1\varrho_1 = \alpha_1\varrho_r$, das heisst, da $\alpha_1 \gtrless 0$, ist $\varrho_r = \varrho_1$, was gegen die Voraussetzung ist.

Also können $a_1, \ldots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Folglich kann auch keins der Hauptgebiete von höherer als erster Stufe sein. Denn wäre zum Beispiel das zu ϱ_1 gehörige Hauptgebiet von höherer Stufe, so müsste dies Gebiet mit dem Gebiete $(n-1)$-ter Stufe der † Grössen $a_2, \ldots a_n$ (nach 26) mindestens ein Gebiet erster Stufe 253 gemein haben. Es sei c eine (von Null verschiedene) Grösse dieses gemeinschaftlichen Gebietes, so wäre c aus $a_2, \ldots a_n$ numerisch ableitbar, und würde sich doch, da es in dem zu ϱ_1 gehörigen Hauptgebiete liegt, in sein ϱ_1-faches verwandeln, was als unmöglich nachgewiesen ist.

390. Aufgabe. *Den Fall gleicher Hauptzahlen zu untersuchen.*

Auflösung. Wenn man die Bezeichnungen der vorhergehenden Sätze festhält, so hat man (nach 388)

(a) $$[c_1 c_2 \ldots c_n] = 0,$$

wo

(b) $$c_r = (\varrho - Q)e_r.$$

Es sind also $c_1, c_2, \ldots c_n$ die zu den Nennern $e_1, e_2, \ldots e_n$ gehörigen Zähler des Bruches $\varrho - Q$, und die Gleichung (a) sagt aus, dass das kombinatorische Produkt der n Zähler null sei, das heisst, dass der Potenzwerth von $\varrho - Q$ null sei.

Es behalten nach dem Obigen die Gleichungen (a) und (b) ihre Bedeutung, wenn man statt der Nenner $e_1, \ldots e_n$ beliebige n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe setzt. Die n Werthe von ϱ, welche der Gleichung (a) genügen, sind (nach 388) die n Hauptzahlen von Q. Wenn nun mehrere, etwa $\mathfrak{a}$, derselben gleich α sind, so heisst das also, dass die Gleichung (a) für ϱ im Ganzen $\mathfrak{a}$ Werthe darbiete, welche gleich α sind. Wenn aber ein Werth von ϱ gleich α ist, so lässt sich (nach 388) eine von Null verschiedene Grösse erster Stufe a_1 finden, welche mit Q multiplicirt ihr α-faches liefert.

Es sei diese Grösse $a_1 = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, so muss von den Koefficienten $x_1, \ldots x_n$ mindestens Einer von Null verschieden sein, weil sonst, gegen die Annahme, a_1 selbst null wäre. Es sei x_1 von Null verschieden, so stehen (nach 19) $a_1, e_2, \ldots e_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander, können also nach dem Obigen statt $e_1, e_2, \ldots e_n$ in die Gleichungen (a) und (b) eingeführt werden; dann erhält der neue, zu a_1 gehörende Zähler des Bruches $\varrho - Q$ den Werth

$$c_1' = (\varrho - Q)a_1 = \varrho a_1 - Q a_1 = \varrho a_1 - \alpha a_1 \text{ [nach Annahme]}$$
$$= (\varrho - \alpha) a_1$$

und die Gleichung (a) wird ersetzt durch die Gleichung

$$(\varrho - \alpha)[a_1 c_2 \ldots c_n] = 0.$$

254 Wir wollen annehmen, man habe, wenn die Gleichung † (a) im Ganzen $\mathfrak{a}$ Wurzeln $\varrho = \alpha$ hat, nach und nach die Gleichung (a) noch in die Formen

$$(\varrho - \alpha)^2 [a_1 a_2 c_3 \ldots c_n] = 0$$

und so weiter, endlich in die Form

$$\text{(c)} \qquad (\varrho - \alpha)^r [a_1 a_2 \ldots a_r c_{r+1} \ldots c_n] = 0$$

umgewandelt, wo $r < \mathfrak{a}$ ist, und zwar so, dass

$$Q a_1 = \alpha a_1, \; [a_1 . Q a_2] = \alpha [a_1 a_2], \; \ldots,$$

endlich

$$\text{(d)} \qquad [a_1 a_2 \ldots a_{r-1} . Q a_r] = \alpha [a_1 a_2 \ldots a_r]$$

sei, und die n Grössen $a_1, \ldots a_r, e_{r+1}, \ldots e_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so lässt sich zeigen, dass man diese Umwandlungen auch so weit fortsetzen könne, bis endlich $r = \mathfrak{a}$ werde.

In der That, so lange noch r kleiner ist als $\mathfrak{a}$, das heisst, es noch mehr als r Wurzeln $\varrho = \alpha$ giebt, welche der Gleichung (c) genügen, so muss, wie aus der Theorie der Gleichungen bekannt ist, wenn man jene Gleichung durch $(\varrho - \alpha)^r$ dividirt, der Quotient noch eine Wurzel $\varrho = \alpha$ darbieten, das heisst, es muss noch

$$\text{(e)} \qquad [a_1 \ldots a_r c_{r+1} \ldots c_n] = 0$$

sein, für $\varrho = \alpha$. Es seien $d_{r+1}, \ldots d_n$ die Werthe, in welche $c_{r+1}, \ldots c_n$ übergehen, wenn man in den letztern α statt ϱ setzt, so erhält man

$$\text{(f)} \qquad [a_1 \ldots a_r d_{r+1} \ldots d_n] = 0,$$

wo

$$\text{(g)} \qquad d_{r+1} = (\alpha - Q) e_{r+1}, \; \ldots, \; d_n = (\alpha - Q) e_n$$

ist. Hier sagt die Gleichung (f) aus, dass zwischen den Grössen $a_1, \ldots a_r, d_{r+1}, \ldots d_n$ eine Zahlbeziehung herrscht (nach 66). Es sei

$$\text{(h)} \qquad \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + \alpha_{r+1} d_{r+1} + \cdots + \alpha_n d_n = 0$$

der Ausdruck dieser Zahlbeziehung, so muss Einer der Koefficienten $\alpha_{r+1}, \ldots \alpha_n$ von Null verschieden sein; denn, wenn sie alle null wären, so würde zwischen $a_1, \ldots a_r$ eine Zahlbeziehung herrschen, was gegen die Voraussetzung streitet. Es sei etwa α_{r+1} von Null verschieden, und sei

$$\alpha_{r+1}e_{r+1} + \cdots + \alpha_n e_n = a_{r+1}$$

gesetzt, so stehen (nach 19) $a_1, \ldots a_{r+1}, e_{r+2}, \ldots e_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander, können also statt $e_1, \ldots e_n$ in die Gleichungen (a) und (b), oder statt $a_1, \ldots a_r, e_{r+1}, \ldots e_n$ in die Gleichung (c) eingesetzt werden, wenn man nur zugleich die Grössen $c_1, \ldots c_{r+1}$ durch die in dem Bruche $\varrho - Q$ den Nennern $a_1, \ldots a_{r+1}$ entsprechenden Zähler $c'_1, \ldots c'_{r+1}$ ersetzt. Hierdurch geht die Gleichung (c) über in

(c′) $$(\varrho - \alpha)^r[a_1 a_2 \ldots a_r c'_{r+1} c_{r+2} \ldots c_n] = 0,$$

wo

$$c'_{r+1} = (\varrho - Q)a_{r+1}$$

ist.

Ferner ist dann

$$\begin{aligned}(\alpha - Q)a_{r+1} &= \alpha_{r+1}(\alpha - Q)e_{r+1} + \cdots + \alpha_n(\alpha - Q)e_n \\ &= \alpha_{r+1}d_{r+1} + \cdots + \alpha_n d_n \qquad \text{[nach (g)]} \\ &= -\alpha_1 a_1 - \cdots - \alpha_r a_r \qquad \text{[nach (h)]}.\end{aligned}$$

255

Also ist

$$Qa_{r+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + \alpha a_{r+1}.$$

Folglich

(i) $$\begin{cases}[a_1 \ldots a_r . Qa_{r+1}] = [a_1 \ldots a_r(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + \alpha a_{r+1})] \\ \qquad = \alpha[a_1 \ldots a_r a_{r+1}] \qquad [67].\end{cases}$$

Nun sollte, wie oben gezeigt,

$$c'_{r+1} = (\varrho - Q)a_{r+1} = \varrho a_{r+1} - Qa_{r+1}$$

sein, also wird

$$\begin{aligned}[a_1 \ldots a_r c'_{r+1}] &= \varrho[a_1 \ldots a_r a_{r+1}] - [a_1 \ldots a_r . Qa_{r+1}] \\ &= \varrho[a_1 \ldots a_{r+1}] - \alpha[a_1 \ldots a_{r+1}] \qquad \text{[nach (i)]} \\ &= (\varrho - \alpha)[a_1 \ldots a_{r+1}].\end{aligned}$$

Setzt man dies in die Gleichung (c′) ein, so erhält man

(k) $$(\varrho - \alpha)^{r+1}[a_1 a_2 \ldots a_{r+1} c_{r+2} \ldots c_n] = 0,$$

das heisst, die Gleichungen (c) und (d) bestehen noch fort, wenn man, so lange noch $r < \mathfrak{a}$ bleibt, in ihnen $r + 1$ statt r setzt, folglich bleiben sie noch bestehen, wenn $r = \mathfrak{a}$ wird, das heisst:

Wenn unter den Hauptzahlen des Quotienten Q mehrere, etwa $\mathfrak{a}$ einander gleich und zwar $= \alpha$ sind, so lassen sich $\mathfrak{a}$ Grössen erster Stufe $a_1, \ldots a_{\mathfrak{a}}$ von der Art finden, dass diese mit $n - \mathfrak{a}$ der Grössen $e_1, \ldots e_n$, etwa mit $e_{\mathfrak{a}+1}, \ldots e_n$, in keiner Zahlbeziehung stehen, und

$$(*)\quad\begin{cases} Qa_1 = \alpha a_1, \\ [a_1 . Qa_2] = \alpha[a_1 a_2], \ldots \\ [a_1 a_2 \ldots a_{\mathfrak{a}-1} . Qa_{\mathfrak{a}}] = \alpha[a_1 a_2 \ldots a_{\mathfrak{a}}] \end{cases}$$

sei, dann wird die Gleichung für die Hauptzahlen ϱ folgende:

$$(**)\qquad (\varrho - \alpha)^{\mathfrak{a}}[a_1 a_2 \ldots a_{\mathfrak{a}} c_{\mathfrak{a}+1} \ldots c_n] = 0,$$

wo

$$(***)\qquad c_r = (\varrho - Q)e_r$$

für jeden Index r von $\mathfrak{a} + 1$ an bis n ist.

Es kommt nun darauf an, die zu den Nennern $a_1, \ldots a_{\mathfrak{a}}$ gehörigen Zähler des Bruches Q zu finden.

Zunächst ist der zu dem Nenner a_1 gehörige Zähler nach dem Obigen gleich αa_1. Es sei der zu dem Nenner a_r gehörige Zähler x, das heisst, $Qa_r = x$, so hat man (aus (*))

$$[a_1 a_2 \ldots a_{r-1} x] = \alpha[a_1 a_2 \ldots a_r],$$

256 das heisst,

$$[a_1 a_2 \ldots a_{r-1}(x - \alpha a_r)] = 0,$$

also besteht (nach 66) zwischen den Grössen $a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$, $x - \alpha a_r$ eine Zahlbeziehung, das heisst, es ist

$$x - \alpha a_r = a'_r,$$

wo a'_r irgend eine aus $a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$ numerisch ableitbare Grösse ist, und man erhält $x = \alpha a_r + a'_r$, das heisst,

$$(1)\qquad Qa_r = \alpha a_r + a'_r,$$

wo a'_r eine Vielfachensumme von $a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$ ist.

Es werde nun das Produkt von Q mit irgend einer aus $a_1, \ldots a_{\mathfrak{a}}$ numerisch ableitbaren Grösse p untersucht, und zwar sei

$$p = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r,$$

wo $r \overline{\lt} \mathfrak{a}$, und $\alpha_r \gtrless 0$ ist, so hat man

$$\begin{aligned} Qp &= Q(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r) \\ &= \alpha_1 Qa_1 + \cdots + \alpha_r Qa_r \\ &= \alpha_1 \alpha a_1 + \cdots + \alpha_r \alpha a_r + p' \qquad \text{[nach (1)]}, \end{aligned}$$

indem p' eine Vielfachensumme von $a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$ darstellt,

$$= \alpha p + p',$$

das heisst:

Die durch die obigen Gleichungen (*) bestimmten Grössen $a_1, a_2, \ldots a_{\mathfrak{a}}$ haben die Eigenschaft, dass jede Vielfachensumme derselben der Gleichung

$$(****)\qquad Qp = \alpha p + p'$$

unterliegt, wo, wenn p aus den r ersten jener Grössen ableitbar ist, p' aus den $(r - 1)$ ersten derselben ableitbar ist.

Es leuchtet unmittelbar ein, dass, wenn von den Grössen $a'_2, a'_3, \dots a'_{\mathfrak{a}}$ der Gleichung (1) mehrere, etwa die Grössen $a'_2, \dots a'_r$, null sind, dann jede Vielfachensumme von $a_1, \dots a_r$ sich durch die Multiplikation mit Q in ihr α-faches verwandelt, und also das zu α gehörige Hauptgebiet von Q (siehe 387 {und 388}) von r-ter Stufe ist.

Wenn unter den Hauptzahlen von Q nicht nur $\mathfrak{a}$ derselben vorkommen, welche gleich α, sondern auch $\mathfrak{b}$, welche gleich β, $\mathfrak{c}$, welche gleich γ sind, ..., wo $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ alle von einander verschieden sind, so lassen sich nach dem Obigen $\mathfrak{b}$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen $b_1, \dots b_{\mathfrak{b}}$ von der Art angeben, dass jede Vielfachensumme q von $b_1, \dots b_{\mathfrak{b}}$ der Gleichung $Qq = \beta q + q'$ genügt, wo, wenn q aus den m ersten jener Grössen ableitbar ist, q' aus den $(m-1)$ ersten derselben ableitbar ist, und ebenso lassen sich $\mathfrak{c}$ in [257] keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen $c_1, \dots c_{\mathfrak{c}}$ von der Art angeben, dass jede Vielfachensumme r von $c_1, \dots c_{\mathfrak{c}}$ der Gleichung $Qr = \gamma r + r'$ genüge, wo, wenn r aus den m ersten der Grössen $c_1, \dots c_{\mathfrak{c}}$ ableitbar ist, r' aus den $m-1$ ersten derselben ableitbar ist, und so weiter.

Es lässt sich zeigen, dass dann die Grössen $a_1, \dots a_{\mathfrak{a}}, b_1, \dots b_{\mathfrak{b}}, c_1, \dots c_{\mathfrak{c}}, \dots$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und also als Nenner des Bruches Q gesetzt werden können.

In der That, nehmen wir zum Beispiel an, dass zwischen den Grössen $a_1, \dots a_{\mathfrak{a}}, b_1, \dots b_{\mathfrak{b}}, c_1, \dots c_{m-1}$ noch keine Zahlbeziehung bestehe, aber nun zwischen diesen Grössen und der Grösse c_m eine Zahlbeziehung hervortrete, so wird diese die Form haben

$$p + q + r = 0, \tag{m}$$

wo p eine Vielfachensumme von $a_1, \dots a_{\mathfrak{a}}$, q eine Vielfachensumme von $b_1, \dots b_{\mathfrak{b}}$, r eine Vielfachensumme von $c_1, \dots c_m$ ist, also wird auch

$$0 = Q(p + q + r)$$

sein. Dies ist aber, wie oben gezeigt,

$$= \alpha p + p' + \beta q + q' + \gamma r + r',$$

oder, indem wir statt r seinen Werth $= -p - q$ aus der Gleichung (m) setzen,

$$0 = (\alpha - \gamma)p + (\beta - \gamma)q + p' + q' + r'.$$

Da nach dem Obigen r' aus $c_1, \dots c_{m-1}$ numerisch ableitbar ist, so sind alle in dieser letzteren Gleichung vorkommenden Grössen aus den nach der Annahme in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen $a_1, \dots a_{\mathfrak{a}}, b_1, \dots b_{\mathfrak{b}}, c_1, \dots c_{m-1}$ numerisch ableitbar. Die rechte Seite der letzten Gleichung wird sich also als Vielfachensumme

der letztgenannten Grössen darstellen lassen, und da die linke Seite null ist, so werden (nach 28) alle einzelnen Koefficienten dieser Vielfachensumme null sein.

Wenn nun p von Null verschieden, etwa $= x_1 a_1 + \cdots + x_s a_s$ wäre, wo $x_s \gtrless 0$ ist, so würde p' nach dem Obigen aus $a_1, \ldots a_{s-1}$ numerisch ableitbar sein, folglich würde a_s, da es auch in q, q', r' nicht enthalten ist, in jener gleich Null gesetzten Vielfachensumme nur einmal vorkommen, nämlich mit dem Koefficienten $(\alpha - \gamma) x_s$ ver-
258 bunden; dieser müsste also null sein, was unmöglich ist, da x_s nach der Annahme ungleich Null, und α ungleich γ ist. Folglich ist die Annahme, dass p von Null verschieden sei, unmöglich, das heisst p ist gleich Null. Aus gleichem Grunde ist $q = 0$. Dann aber folgt aus der Gleichung (m), dass $r = 0$ ist. Da nun aber die Grössen $a_1, \ldots a_\mathfrak{a}$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so folgt aus $p = 0$, dass alle Koefficienten des Ausdruckes, durch welchen p aus $a_1, \ldots a_\mathfrak{a}$ abgeleitet ist, null sind, und dasselbe folgt für q und r. Also enthält die Gleichung (m) gar keinen Ausdruck der Zahlbeziehung; es findet also eine solche zwischen den Grössen $a_1, \ldots a_\mathfrak{a}$, $b_1, \ldots b_\mathfrak{b}$, $c_1, \ldots c_\mathfrak{c}, \ldots$ gar nicht statt, was zu zeigen war. Also

Wenn die Gleichung

$$[(\varrho e_1 - Q e_1)(\varrho e_2 - Q e_2) \ldots (\varrho e_n - Q e_n)] = 0,$$

welche in Bezug auf ϱ vom n-ten Grade ist, $\mathfrak{a}$ Wurzeln $= \alpha$, $\mathfrak{b}$ Wurzeln $= \beta, \ldots$ darbietet, wo $\alpha, \beta, \ldots$ von einander verschieden sind, so kann man n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen $a_1, \ldots a_\mathfrak{a}$, $b_1, \ldots b_\mathfrak{b}, \ldots$ von der Art angeben, dass, wenn p eine Vielfachensumme der m ersten unter den Grössen $a_1, \ldots a_\mathfrak{a}$, oder unter den Grössen $b_1, \ldots b_\mathfrak{b}$, oder unter den Grössen irgend einer folgenden Gruppe ist, dann Qp im ersten Falle $= \alpha p + p'$, im zweiten $= \beta p + p', \ldots$ sei, wo p' aus den $m-1$ ersten Grössen derselben Gruppe numerisch ableitbar ist.

Anm. 1. Wenn unter den Wurzeln ϱ ein Paar oder mehrere Paare imaginärer Wurzeln vorkommen, so ändert das in den gewonnenen Resultaten nichts, da die Beweisführung ebensowohl für imaginäre wie für reelle Wurzeln gilt. Es hat überdies nicht die geringste Schwierigkeit, die aus imaginären Wurzelpaaren fliessenden Bestimmungen in reelle Form umzusetzen, was ich daher dem Leser überlasse.

Anm. 2. Die im Obigen entwickelten Gesetze sind für die Theorie der geometrischen Verwandtschaften von Wichtigkeit. In der That stellt jeder Quotient, wenn er nicht mehr als vier Nenner enthält, geometrisch gedeutet eine bestimmte kollineare Verwandtschaft dar, in der Art, dass jedes Punktsystem mit dem Quotienten multiplicirt ein dem ersteren kollineares Punktsystem liefert, und umgekehrt lässt sich jedes einem ursprünglichen Punktsystem kollinear verwandte Punktsystem aus jenem durch Multiplikation mit einem Quotienten ableiten.

Der Quotient gewährt nun vor jeder andern analytischen † Einkleidung jener 259 Verwandtschaft den Vortheil, dass sich die wesentlichen Eigenthümlichkeiten der Verwandtschaft an ihm auf die einfachste Weise symbolisch darstellen. Sind zum Beispiel die vier Hauptzahlen eines Quotienten mit vier Nennern alle reell und von einander verschieden, so bieten je zwei kollinear verwandte Punktsysteme im Raume, welche durch jenen Quotienten dargestellt werden können, vier nicht in einer Ebene liegende Punkte dar, welche mit den ihnen entsprechenden zusammenfallen, und ausser diesen giebt es keinen fünften Punkt, welcher mit dem ihm entsprechenden Punkte des andern Systems zusammenfällt. Ebenso enthalten die vorhergehenden Sätze die besonderen Beziehungen kollinearer Verwandtschaft für die Fälle, wo mehrere der Hauptzahlen des zugehörigen Quotienten einander gleich werden.

Die speciellen geometrischen Verwandtschaften, welche der Kollineation untergeordnet sind, gehen durch specielle Annahmen hervor. So zum Beispiel die Affinität durch die Annahme, dass den unendlich entfernten Punkten jedes Systems auch unendlich entfernte Punkte des andern entsprechen. Ferner die besondere Art der Affinität, bei der entsprechende Körperräume gleichen und gleichbezeichneten Rauminhalt haben, durch die Annahme, dass ausserdem {einfachen Punkten wieder einfache Punkte zugewiesen werden, und dass} das Produkt der Hauptzahlen, das heisst, der Potenzwerth des Quotienten gleich Eins sei. Die Kongruenz durch die {weitere} Annahme, dass die entsprechenden Strecken gleich lang sein sollen (wozu jedenfalls erforderlich ist, dass zwei von den Hauptzahlen des Quotienten $=1$ und die andern beiden entweder $=1$, oder $=-1$, oder $=\cos\alpha \mp i \sin\alpha$ seien). Die Kongruenz verwandelt sich in die Symmetrie, wenn das Produkt der Hauptzahlen $=-1$ statt $+1$ wird. Endlich die Aehnlichkeit geht aus der Affinität hervor durch die Annahme, dass die entsprechenden Strecken numerisch in gleichem Verhältnisse stehen.

Wir betrachten nun im Folgenden noch eine specielle Form des Quotienten, welche mit der Verwandtschaft der Reciprocität in engster Beziehung steht.

391. *Wenn ein Bruch Q die Eigenschaft hat, dass für beliebige von Null verschiedene Grössen erster Stufe a und b*

(a) $$[Qa|b]=[Qb|a] \text{ und } [Qa|a] \gtrless 0$$

ist, so lassen sich stets n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe $c_1, \ldots c_n$ von der Art finden, dass

(b) $$[Qc_r|c_s]=0$$

ist, sobald r von s verschieden ist. Ferner sind dann die n Hauptzahlen des Bruches Q alle reell, und unter ihnen so viel positive, als es unter den Produkten

(c) $$[Qc_1|c_1], \ldots, [Qc_n|c_n]$$

positive giebt. Endlich lassen sich stets n zu einander normale Grössen $e_1, \ldots e_n$ von der Art finden, dass jede derselben, mit Q multiplicirt ein Vielfaches derselben liefert, also

(d) $$Qe_r=\varrho_r e_r,$$ 260

wo

(e) $$[e_r|e_s] = 0$$

für jedes von r verschiedene s.

Beweis. Ich zeige zuerst, dass sich n Grössen $c_1, \ldots c_n$ der verlangten Art finden lassen. Es genügt zu zeigen, dass sie der Gleichung (b) für den Fall genügen, dass $r < s$ ist, denn da nach der Voraussetzung (a) $[Qc_r\, c_s] = [Qc_s\, c_r]$ ist, so folgt dann, dass die Bedingung auch bestehen bleibt, wenn umgekehrt der erste Index grösser ist als der zweite.

Ich setze der Kürze wegen $Qc_r = k_r$ und zeige zunächst, dass man n von Null verschiedene Grössen erster Stufe $c_1, \ldots c_n$ finden kann, welche den Gleichungen $[k_r\, c_s] = 0$, für jedes $r < s$ genügen.

Nach 189 können wir diese Gleichungen auch schreiben $[c_s|k_r] = 0$. Zunächst wählen wir für c_1 eine beliebige (von Null verschiedene) Grösse (erster Stufe). Dann muss c_2 der Gleichung $[c_2\, k_1] = 0$ genügen, dass heisst, c_2 muss zu k_1 normal sein (nach 152), oder anders ausgedrückt, c_2 muss dem Gebiete $|k_1$, welches von $(n-1)$-ter Stufe ist, angehören. Im Uebrigen sei c_2 willkürlich. Ferner muss c_3 den Gleichungen $[c_3\, k_1] = [c_3|k_2] = 0$ genügen, das heisst, c_3 muss den Gebieten k_1 und $|k_2$ angehören, also dem ihnen gemeinschaftlichen Gebiete, dieses ist (nach 26) mindestens von $(n-2)$-ter Stufe, in ihm sei c_3 willkürlich. Aus gleichem Grunde muss c_4 den Gleichungen $[c_4\, k_1] = [c_4\, k_2] = [c_4\, k_3] = 0$ genügen, also demjenigen Gebiete angehören, was den drei Gebieten $(n-1)$-ter Stufe $|k_1, k_2, k_3$ gemeinschaftlich ist, dies Gebiet ist mindestens von $(n-3)$-ter Stufe, in ihm sei c_4 willkürlich, und so fahre man fort. Endlich c_n muss den Gleichungen

$$[c_n\, k_1] = [c_n|k_2] = \cdots = [c_n\, k_{n-1}] = 0$$

genügen, das heisst, c_n muss den $(n-1)$ Gebieten $(n-1)$-ter Stufe $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ angehören, diese haben mindestens ein Gebiet erster Stufe gemeinschaftlich, in diesem sei c_n beliebig (aber von Null verschieden) angenommen

Somit haben wir jetzt n von Null verschiedene Grössen, welche den Gleichungen $[c_s|k_r] = 0$, das heisst, $0 = [k_r\, c_s] = [Qc_r\, c_s]$ zunächst für jedes $r < s$ genügen, also auch nach Gleichung (a) für *jedes* von 261 r verschiedene s. Es ist noch zu zeigen, dass $c_1, \ldots c_n$ in † keiner Zahlbeziehung zu einander stehen.

Angenommen, es herrschte zwischen ihnen die Zahlbeziehung

$$x_1 c_1 + \cdots + x_n c_n = 0,$$

wo mindestens einer der Koefficienten, zum Beispiel x_r von Null ver-

schieden ist, so hätte man

$$0 = [Qc_r|(x_1c_1 + \cdots + x_nc_n)] = x_r[Qc_r|c_r],$$

weil alle übrigen Produkte null sind, also hätte man, da $x_r \gtrless 0$ ist, $[Qc_r|c_r] = 0$, was gegen die Voraussetzung (in (a)) streitet, also ist es unmöglich, dass $c_1, \ldots c_n$ in einer Zahlbeziehung zu einander stehen.

Nun sei $[Qc_r|c_r] = \alpha_r$, und $a_r = c_r : \sqrt{\alpha_r}$ gesetzt. Dann bilden die Grössen $a_1, \ldots a_n$ einen Verein, welcher den Bedingungen

(f) $$[Qa_r|a_s] = 0,$$

wenn $r \gtrless s$, und

(g) $$[Qa_r|a_r] = 1$$

unterliegt, und zwar ist a_r reell, wenn $[Qc_r|c_r]$ positiv ist; hingegen ist a_r einfach imaginär, das heisst, als Produkt einer reellen Grösse und der Quadratwurzel aus -1 darstellbar, wenn $[Qc_r|c_r]$ negativ ist. Es sind also unter den Grössen $a_1, \ldots a_n$ so viele reelle, als unter den Produkten $[Qc_1|c_1], \ldots [Qc_n|c_n]$ positive sind.

Ich will jeden solchen Verein $a_1, \ldots a_n$, welcher den Gleichungen (f) und (g) unterliegt, und in welchem jede der Grössen $a_1, \ldots a_n$ entweder reell oder einfach imaginär ist, der Kürze wegen einen *konjugirten Verein* nennen.

Es zeigt sich nun, dass ein solcher Verein bei einer gewissen speciellen Art der circulären Aenderung der darin vorkommenden Grössen wiederum ein solcher Verein bleibt, und zwar so, dass die Anzahl der reellen unter den n Grössen in dem einen Verein eben so gross ist wie in dem andern. Diese besondere Art der circulären Aenderung soll zwei Grössen a_1 und a_2, die beide reell, oder beide einfach imaginär sind, in zwei andere Grössen b_1 und b_2 überführen, wo

(h) $$b_1 = xa_1 + ya_2, \quad b_2 = xa_2 - ya_1$$

ist, sobald x und y beide reell sind, und die Summe ihrer Quadrate Eins ist, also

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Wenn hingegen von den beiden Grössen a_1 und a_2 die eine reell, die andere imaginär ist, so soll sie die beiden Grössen a_1 und a_2 in die Grössen

$$b_1 = xa_1 + yia_2, \quad b_2 = xa_2 - yia_1$$ 262

umwandeln, wo $i = \sqrt{-1}$, x und y beide reell sind, und $x^2 - y^2$, das heisst, $x^2 + (yi)^2 = 1$ ist. Man kann daher auch sagen: Die Gleichungen (h) stellen jede derartige circuläre Aenderung von zwei Grössen a_1 und a_2 dar, wenn x immer reell, y aber nur dann imaginär und zwar einfach imaginär ist, wenn von den Grössen a_1 und a_2 die eine reell und die andere einfach imaginär ist.

Es leuchtet unmittelbar ein, dass auch b_1 und b_2 beide reell, oder beide einfach imaginär sind, oder eine derselben reell, die andere einfach imaginär ist, je nachdem dies für a_1 und a_2 der Fall war, und dass also die Anzahl der reellen Grössen des Vereins bei der {beschriebenen Art der} circulären Aenderung dieselbe bleibt. Ferner wird für jedes $r > 2$ vermöge der Gleichungen (h)

$$[Qb_1|a_r] = x[Qa_1|a_r] + y[Qa_2|a_r] = 0,$$

da $[Qa_1|a_r]$ und $[Qa_2|a_r]$ (nach (f)) null sind; aus gleichem Grunde ist dann

$$[Qb_2|a_r] = 0.$$

Ferner ist

$$[Qb_1|b_2] = x^2[Qa_1|a_2] - y^2[Qa_2|a_1] + xy([Qa_2|a_2] - [Qa_1|a_1]),$$

oder, da $[Qa_1|a_2] = [Qa_2|a_1] = 0$, und $[Qa_1|a_1] = [Qa_2|a_2] = 1$ ist,

$$[Qb_1|b_2] = 0.$$

Ferner ist

$$[Qb_1|b_1] = x^2[Qa_1|a_1] + y^2[Qa_2|a_2] + 2xy[Qa_1|a_2],$$

oder, da $[Qa_1|a_2]$ null, $[Qa_1|a_1] = [Qa_2|a_2] = 1$, und $x^2 + y^2 = 1$ ist, so wird

$$[Qb_1|b_1] = 1,$$

und aus gleichem Grunde $[Qb_2|b_2] = 1$. Also genügt der Verein, welcher aus $a_1, a_2, \dots a_n$ durch circuläre Aenderung zweier Grössen hervorgeht, noch immer den Gleichungen (f) und (g), also auch jeder Verein, welcher aus $a_1, a_2, \dots a_n$ durch wiederholte circuläre Aenderung hervorgeht.

Ich zeige nun, dass, wenn irgend zwei der Grössen $a_1, \dots a_n$, etwa a_1 und a_2 noch nicht zu einander normal sind, man sie durch {eine} circuläre Aenderung {der beschriebenen Art} normal zu einander machen 263 kann, und dass dabei das Produkt der numerischen Werthe † dieser Grössen jedesmal abnimmt.

In der That, sollen b_1 und b_2 zu einander normal sein, das heisst, (nach 152) $[b_1|b_2] = 0$ sein, so hat man (nach (h))

$$\begin{aligned} 0 &= [(xa_1 + ya_2)|(xa_2 - ya_1)] \\ &= x^2[a_1|a_2] - y^2[a_1|a_2] + xy(a_2{}^2 - a_1{}^2) \end{aligned}$$

oder

$$0 = x^2 - y^2 - 2\gamma xy,$$

wo $\gamma = (a_1{}^2 - a_2{}^2) : 2[a_1|a_2]$ ist, hieraus folgt

$$\frac{x}{y} = \gamma + \sqrt{1 + \gamma^2}.$$

Sind nun a_1 und a_2 beide reell oder beide einfach imaginär, so ist γ reell, also auch $x:y$ reell, also können wir dann x und y beide reell

annehmen, und die Aenderung ist eine circuläre {der verlangten Art}. Ist hingegen von den Grössen a_1 und a_2 die eine, {gleichviel welche,} reell $= r$, die andere einfach imaginär $= r'i$ (wo $i = \sqrt{-1}$), so wird

$$\gamma = \mp (r^2 + r'^2) : 2i[r|r'],$$

also

$$1 + \gamma^2 = 1 - \left(\frac{r^2 + r'^2}{2[r|r']}\right)^2 = \left(1 + \frac{r^2 + r'^2}{2[r|r']}\right)\left(1 - \frac{r^2 + r'^2}{2[r|r']}\right)$$

$$= \frac{r^2 + 2[r|r'] + r'^2}{2[r|r']} \cdot \frac{2[r|r'] - r^2 - r'^2}{2[r|r']}$$

$$= -\frac{(r + r')^2 (r - r')^2}{4[r|r']^2},$$

also ist $\sqrt{1 + \gamma^2}$ einfach imaginär, aber auch γ, also auch ihre Summe, das heisst, $x : y$. Nehmen wir also x reell an, so wird y einfach imaginär, aber dies war gerade die Bedingung der {speciellen} circulären Aenderung für diesen Fall. Also lassen sich in allen Fällen je zwei der Grössen des Vereins, die noch nicht normal zu einander sind, durch {eine solche} circuläre Aenderung normal zu einander machen.

Es ist noch zu zeigen, dass bei dieser Aenderung das Produkt der numerischen Werthe der Grössen kleiner wird. Hierbei soll unter dem numerischen Werthe einer Grösse ri, wo r reell, und $i = \sqrt{-1}$ ist, der numerische Werth von r verstanden sein*).

In diesem Sinne seien α_1 und α_2 die numerischen Werthe von a_1 und a_2, und β_1 und β_2 die von b_1 und b_2, so ist (nach 156) $[a_1 a_2]^2 = [b_1 b_2]^2$, aber (nach 198) ist $[a_1 a_2]^2 = (\alpha_1 \alpha_2 \sin \angle a_1 a_2)^2$, wenn α_1 und α_2 † reell sind; dasselbe wird nun auch der Fall sein, wenn 264 a_1 und a_2 einfach imaginär, und unter $\angle a_1 a_2$ stets der Winkel zwischen den entsprechenden reellen Grössen verstanden ist; wenn hingegen eine der Grössen a_1 und a_2 reell, die andere einfach imaginär ist, so wird

$$[a_1 a_2]^2 = -(\alpha_1 \alpha_2 \sin \angle a_1 a_2)^2,$$

aber dann auch

$$[b_1 b_2]^2 = -(\beta_1 \beta_2 \sin \angle b_1 b_2)^2,$$

also, da $[a_1 a_2]^2 = [b_1 b_2]^2$ ist, so ist in allen Fällen

$$(\alpha_1 \alpha_2 \sin \angle a_1 a_2)^2 = (\beta_1 \beta_2 \sin \angle b_1 b_2)^2.$$

Wenn nun a_1 und a_2 nicht zu einander normal, hingegen b_1 und b_2 zu einander normal sind, so ist $(\sin \angle a_1 a_2)^2 < 1$, $(\sin \angle b_1 b_2)^2 = 1$, also $(\beta_1 \beta_2)^2 < (\alpha_1 \alpha_2)^2$, das heisst, da α_1, α_2, β_1, β_2 positiv sind, $\beta_1 \beta_2 < \alpha_1 \alpha_2$.

Also, wenn von den Grössen eines konjugirten Vereins irgend zwei noch nicht zu einander normal sind, so lässt sich der Verein

---

*) {Diese Festsetzung steht in Einklang mit der später (vgl. Nr. 413 und 414) gegebenen Erklärung des numerischen Werthes einer imaginären extensiven Grösse.}

circulär so umwandeln, dass das Produkt der numerischen Werthe aller Grössen des Vereins kleiner wird. Da es nun ein Minimum für dies Produkt geben muss, und dies Minimum nur eintreten kann, wenn alle Grössen des Vereins zu einander normal sind, so muss sich also durch (wiederholte) circuläre Aenderung {der beschriebenen Art} aus dem Verein $a_1, a_2, \ldots a_n$ ein Verein ableiten lassen, von dessen n Grössen je zwei zu einander normal sind.

Es sei $r_1, r_2, \ldots r_n$ dieser Verein, so genügt derselbe, da er aus dem Verein $a_1, a_2, \ldots a_n$ abgeleitet ist, wie oben bewiesen, noch den Gleichungen (f) und (g), und enthält eben so viele reelle Grössen, wie der letztere Verein, also eben so viele reelle Grössen, als unter den Produkten $[Qc_1|c_1], \ldots, [Qc_n|c_n]$ positive Produkte vorkommen. Nun sei $Qr_1 = x_1 r_1 + \cdots + x_n r_n$, so verwandelt sich die in der Gruppe (f) enthaltene Gleichung $0 = [Qr_1|r_2]$ in

$$0 = [(x_1 r_1 + x_2 r_2 + \cdots + x_n r_n)|r_2] = x_2[r_2|r_2],$$

da alle übrigen Produkte $[r_1|r_2], [r_3|r_2], \ldots$ wegen der normalen Beziehung (nach 152) null sind. Da nun ferner r_2, also auch $[r_2|r_2]$ von Null verschieden ist, so folgt aus der Gleichung $0 = x_2[r_2|r_2]$, dass $x_2 = 0$ sei; auf gleiche Weise folgt $x_3 = 0, \ldots, x_n = 0$, also $Qr_1 = x_1 r_1$. Dann verwandelt sich die in der Gruppe (g) enthaltene Gleichung $1 = [Qr_1|r_1]$ in $1 = x_1[r_1|r_1] = x_1 r_1^2$, das heisst, x_1 ist $= 1 : r_1^2$, also

$$Qr_1 = \frac{1}{r_1^2} r_1,$$

265 und aus gleichem Grunde ist

$$Qr_2 = \frac{1}{r_2^2} r_2, \ldots, Qr_n = \frac{1}{r_n^2} r_n.$$

Setzt man daher noch

$$\text{(i)} \qquad \frac{1}{r_1^2} = \varrho_1, \quad \frac{1}{r_2^2} = \varrho_2, \ldots, \frac{1}{r_n^2} = \varrho_n,$$

und setzt $r_1, r_2, \ldots r_n$ als die Nenner des Bruches Q, so werden die zugehörigen Zähler $\varrho_1 r_1, \varrho_2 r_2, \ldots \varrho_n r_n$. Die {zu denselben Nennern gehörigen} Zähler des Bruches $\varrho - Q$ werden also $(\varrho - \varrho_1)r_1, (\varrho - \varrho_2)r_2, \ldots, (\varrho - \varrho_n)r_n$; der Potenzwerth des Bruches $\varrho - Q$, welcher (nach 384) gleich dem kombinatorischen Produkte seiner Zähler dividirt durch das seiner Nenner ist, wird also gleich $(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2) \ldots (\varrho - \varrho_n)$.

Die Gleichung aber, durch welche die Hauptzahlen ϱ eines Quotienten {Q} bedingt sind, drückt aus, dass der Potenzwerth von $\varrho - Q$ null sei {vgl. Nr. 388}, also hat man

$$(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2) \ldots (\varrho - \varrho_n) = 0,$$

das heisst, $\varrho_1, \ldots \varrho_n$ sind die Hauptzahlen von Q, es waren dieselben (nach (i)) gleich

$$\frac{1}{r_1^{\,2}}, \frac{1}{r_2^{\,2}}, \ldots \frac{1}{r_n^{\,2}}.$$

Je nachdem nun r reell oder einfach imaginär ist, ist $1:r^2$ positiv oder negativ, also kommen unter den Hauptzahlen von Q so viele positive vor, als unter den Grössen $r_1, r_2, \ldots r_n$ reelle vorkommen, das heisst, wie oben gezeigt, als unter den Produkten $[Qc_1 | c_1], \ldots [Qc_n | c_n]$ positive vorkommen. Also ist der Satz vollständig erwiesen.

Anm. Die Hauptzahlen des Quotienten Q und die zugehörigen Grössen $r_1, r_2, \ldots r_n$ lassen sich durch das Verfahren in 388 unmittelbar finden; es kam hier nur darauf an, die besonders einfachen Beziehungen, welche unter der speciellen Voraussetzung, die wir für Q gemacht hatten, zwischen jenen Grössen hervortreten, abzuleiten. Gelegentlich kommt in dem oben gegebenen Beweise der Beweis des sogenannten Trägheitsgesetzes quadratischer Formen vor; auch lässt sich aus ihm der Sturm'sche Satz über die Wurzeln algebraischer Gleichungen leicht ableiten. Auf die Geometrie angewandt, schliesst unser Satz den Satz ein, dass jede algebraische Oberfläche zweiter Ordnung drei reelle Hauptaxen enthält, und der Satz 388 lehrt dieselben unmittelbar finden.

§ 5. Die Funktionen als extensive Grössen. 266

392. Erklärung. Ich sage, eine Funktion f sei aus einer oder mehreren Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ numerisch ableitbar, wenn sich f in der Form

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots$$

darstellen lässt, wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Zahlgrössen ausdrücken, die entweder konstant oder doch von den Variabeln der Funktionen unabhängig sind, und wo das Gleichheitszeichen die Gleichheit für beliebige Werthe dieser letzteren Variabeln aussagt.

Anm. Nachdem diese Definition festgestellt ist, beziehen sich alle bisher aufgestellten Erklärungen und Sätze unmittelbar auch auf Funktionen, welche hiernach als extensive Grössen erscheinen. Es ist diese Betrachtungsweise für die Funktionenlehre und daher auch für die Theorie der Kurven und Oberflächen von grosser Bedeutung, wie sich unten zeigen wird. Auch kann sie dazu dienen, um unabhängig von den früheren geometrischen Entwickelungen, den Begriff der Addition von Punkten, Linien, Flächen, und so weiter, festzustellen.

Für die Schärfe der Auffassung ist noch zu bemerken, dass stets festgestellt sein muss, welches die Variabeln sind, von denen die Funktionen abhängig gedacht werden sollen, und auf die sich somit auch die obige Definitionsgleichung bezieht.

Um ein Beispiel für die besondere Gestaltung der allgemeinen Begriffe zu geben, wenn Funktionen als Einheiten gesetzt werden, betrachte ich die sechs Funktionen x^2, y^2, xy, x, y, 1, in denen x und y die Variabeln sind. Diese stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander, da, wenn

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

sein soll, für jeden Werth von x und y, alle Koefficienten a, b, c, d, e, f null sein müssen. Wir können also jene sechs Funktionen als ein System von Einheiten setzen. Die aus ihnen numerisch ableitbaren Funktionen sind die Funktionen zweiten Grades mit zwei Variabeln. Diese bilden also ein Funktionsgebiet sechster Stufe. Aus sechs in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Funktionen zweiten Grades mit zwei Variabeln lassen sich also alle Funktionen zweiten Grades mit zwei Variabeln numerisch ableiten.

393. Erklärung. Es seien x und y die Koordinaten eines Punktes in der Ebene (oder x, y, z die Koordinaten eines Punktes im Raume), ferner seien $f_1, f_2, \ldots f_n$ n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Funktionen dieser Koordinaten und sei

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n,$$

267 das heisst, $x_1, \ldots x_n$ die Ableitzahlen, durch welche f aus $f_1, \ldots f_n$ ableitbar ist. Endlich herrsche zwischen diesen Ableitzahlen die {homogene} Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

so nenne ich die Gesammtheit der Kurven (Oberflächen) $f = 0$, für welche die Ableitzahlen von f der Gleichung (a) genügen, ein zu dieser Gleichung gehöriges Kurvengebilde (Flächengebilde), und zwar ein Kurvengebilde (Flächengebilde) m-ten Grades, wenn die Gleichung (a) vom m-ten Grade ist.

Sind ins Besondere f_1, f_2, f_3 *Funktionen ersten Grades* von x und y, und

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3,$$

so bedingt die homogene Gleichung {m-ten Grades}

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ein Liniengebilde {m-ten Grades} in der Ebene.

Sind f_1, f_2, f_3, f_4 *Funktionen ersten Grades* von x, y, z, und

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4,$$

so bedingt die homogene Gleichung {m-ten Grades}

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

ein Ebenengebilde {m-ten Grades} im Raume.

Anm. Die ganze hier eingeleitete Idee ist nichts anderes, als die naturgemässe Erweiterung des Begriffs der Koordinaten, welche aus dem Wesen dieses Begriffs von selbst hervorgeht.

Die Koordinaten sind, auf ihre ursprüngliche Idee zurückgeführt, die Ableitzahlen einer Grösse, durch welche diese Grösse aus mehreren in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Einheiten hervorgeht. Substituiren wir nun diesen Einheiten Funktionen der ursprünglichen Koordinaten, so geht der obige allgemeinere Begriff hervor. Diese Funktionen, welche als Einheiten gesetzt sind, werden dann in der Ebene jede durch eine Kurve und einen Koefficienten dargestellt, nämlich durch die Kurve, welche alle Punkte umfasst, deren ursprüng-

liche Koordinaten jene Funktion null machen, und durch den Koefficienten irgend eines von Null verschiedenen Gliedes der Funktion; wobei dann einerseits durch diese Funktion sowohl jene Kurve als jener Koefficient, andererseits durch die letzteren die erstere bestimmt ist. Diese Kurven selbst repräsentiren die räumliche Lage der Einheiten und diese Koefficienten ihre metrischen Werthe.

Ausser dem in dem Lehrsatze angedeuteten Falle, wo $f_1, f_2, \ldots$ Funktionen ersten Grades sind, werde ich hier noch den Fall betrachten, wo $f_1, f_2, \ldots$ Kreisfunktionen sind.

394. Erklärung. Die Funktion 268

$$x^2 + y^2 + \beta x + \gamma y + \delta$$

nenne ich eine **einfache Kreisfunktion**, die Funktion

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta$$

eine **α-fache Kreisfunktion**. Und wenn $f(x, y)$ eine Kreisfunktion ist, so nenne ich den Kreis, dessen Gleichung, bei rechtwinkligen Koordinaten,

$$f(x, y) = 0$$

ist, den zu dieser Funktion gehörigen Kreis. {Von einem Kreise soll gesagt werden, er sei aus einer Anzahl von Kreisen numerisch ableitbar, oder er stehe mit andern Kreisen in einer Zahlbeziehung, wenn das Entsprechende für die zugehörigen Kreisfunktionen gilt.}

395. *Alle Kreisfunktionen sind aus vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Kreisfunktionen numerisch ableitbar.*

Beweis. Jede Kreisfunktion ist aus den vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Funktionen $x^2 + y^2$, x, y, 1 numerisch ableitbar. Folglich auch (nach 24) aus beliebigen vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden, aus $x^2 + y^2$, x, y, 1 ableitbaren Funktionen, das heisst, aus vier solchen Kreisfunktionen.

396. *Der Doppelabstand* (*siehe* 345) *eines Punktes* (x', y') *von einem Kreise, dessen Gleichung*

$$f(x, y) = 0$$

ist, wo $f(x, y)$ *eine einfache Kreisfunktion bezeichnet, ist gleich*

$$f(x', y').$$

Anm. Der Beweis durch Koordinaten ist bekannt. Viel einfacher ist jedoch der auf dem Begriff extensiver Grössen beruhende Beweis. Es gründet sich dieser darauf, dass, wenn p ein variabler Punkt, a der Mittelpunkt des Kreises und a' sein Radius ist,

$$(p - a)^2 - a'^2 = 0$$

die Gleichung des Kreises ist, und die linke Seite derselben zugleich den Doppelabstand des Punktes p von dem Kreise darstellt, was beides unmittelbar im Begriffe liegt.

397. *Drei Kreise stehen dann und nur dann in einer Zahlbeziehung*

zu einander, wenn sie alle drei durch dieselben zwei (reellen oder imaginären) Punkte gehen.

Beweis. Es seien f_1, f_2, f_3 drei Kreisfunktionen von x und y, k_1, k_2, k_3 die drei Kreise, deren Gleichungen beziehlich

269 $$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0$$

sind. Es sei zuerst eine Zahlbeziehung zwischen ihnen angenommen, etwa

(a) $$f_3 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2.$$

Die Durchschnittspunkte der Kreise k_1 und k_2 sind nun diejenigen Punkte, für welche gleichzeitig f_1 und f_2 null sind; dann ist aber vermöge der Gleichung (a) auch f_3 null, das heisst, diese Durchschnittspunkte liegen auch in dem Kreise k_3.

Nun sei umgekehrt angenommen, dass die Durchschnittspunkte von k_1 und k_2 auch in k_3 liegen. Für irgend einen dritten Punkt (x', y') in k_3 mögen, wenn man seine Koordinaten statt x und y in die Funktionen f_1 und f_2 einführt, diese beziehlich die Werthe α_1 und α_2 annehmen, so hat der Kreis, dessen Gleichung

$$\alpha_2 f_1 - \alpha_1 f_2 = 0$$

ist, mit k_3 ausser den obigen Durchschnittspunkten noch den Punkt (x', y') gemein, also drei Punkte, ist ihm also identisch, das heisst, der Kreis k_3 ist aus k_1 und k_2 numerisch ableitbar.

Anm. Wenn die Durchschnittspunkte der Kreise k_1 und k_2 imaginär werden, so hat jeder Kreis, der dieselben beiden imaginären Punkte enthält, (immer noch) die Eigenschaft, dass sein Mittelpunkt mit den Mittelpunkten jener Kreise in gerader Linie liegt, und die drei Kreise dieselbe Linie gleichen Doppelabstandes (gleicher Potenz nach Steiner) haben.

398. *Zwei Kreise haben stets eine gerade Linie des gleichen Doppelabstandes und drei Kreise stets einen Punkt des gleichen Doppelabstandes, und zwar, wenn f_1, f_2, f_3 drei einfache Kreisfunktionen sind, so ist*

$$f_1 - f_2 = 0$$

die Gleichung für die gerade Linie des gleichen Doppelabstandes von den zu f_1 und f_2 gehörigen Kreisen, und der Punkt, welcher durch die Gleichungen

$$f_1 - f_2 = 0,\ f_1 - f_3 = 0$$

bestimmt ist, ist der Punkt des gleichen Doppelabstandes von den drei zu f_1, f_2, f_3 gehörigen Kreisen.

Beweis. Für die Punkte des gleichen Doppelabstandes der zu den einfachen Funktionen f_1, f_2 gehörigen Kreise hat man (nach 396)

$$f_1 = f_2, \text{ das heisst, } f_1 - f_2 = 0.$$

270 Da aber f_1 und f_2 einfache Kreisfunktionen sind, so heben sich

in der Differenz $f_1 - f_2$ die quadratischen Glieder auf und $f_1 - f_2$ wird eine lineare Funktion, also $f_1 - f_2 = 0$ die Gleichung einer geraden Linie. Für den Punkt P des gleichen Doppelabstandes von den drei zu f_1, f_2, f_3 gehörigen Kreisen hat man aus gleichem Grunde $f_1 = f_2 = f_3$, das heisst, $f_1 - f_2 = 0$ und $f_1 - f_3 = 0$; also ist P der Durchschnittspunkt der durch die letzten zwei Gleichungen dargestellten geraden Linien.

Anm. {Die Linie gleichen Doppelabstandes von zwei Kreisen ist senkrecht zu der Centrale dieser Kreise.} Für zwei concentrische Kreise wird jene Linie unendlich entfernt, für identische unbestimmt. Für drei Kreise, deren Mittelpunkte in gerader Linie liegen, wird der Punkt des gleichen Doppelabstandes entweder unendlich entfernt, oder unbestimmt innerhalb einer geraden Linie oder ganz unbestimmt, je nachdem zwischen den drei Kreisen keine, eine, oder zwei Zahlbeziehungen herrschen, in welchem letztern Falle die drei Kreise identisch sind.

399. *Vier Kreise stehen dann und nur dann in einer Zahlbeziehung zu einander, wenn sie alle vier einen Punkt a des gleichen Doppelabstandes haben, und zwar stehen sie, wenn a endlich entfernt ist, in derselben Zahlbeziehung zu einander wie ihre Mittelpunkte.*

Beweis. 1. Es seien f_1, f_2, f_3, f_4 vier einfache Kreisfunktionen, k_1, k_2, k_3, k_4 die zugehörigen Kreise. Es sei *zuerst* angenommen, dass jene vier Funktionen in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so dass etwa

$$f_4 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$$

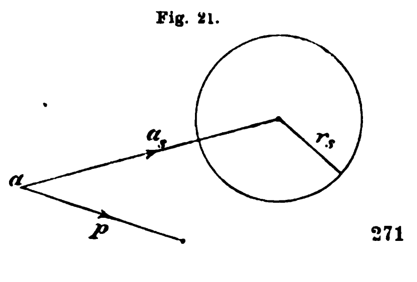
sei, so muss, da alle vier Funktionen einfache Kreisfunktionen sind, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ sein. Für den Punkt a des gleichen Doppelabstandes von {den} drei Kreisen k_1, k_2, k_3 hat man (nach 398) $f_1 = f_2 = f_3$, also wird für diesen Punkt

$$f_4 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) f_1 = f_1,$$

da $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ ist, das heisst, der Punkt a ist Punkt des gleichen Doppelabstandes von den vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4.

2. Es sei *umgekehrt* angenommen, dass a ein endlich entfernter Punkt sei, welcher gleichen Doppelabstand von den vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 habe; es seien a_1, a_2, a_3, a_4 die von dem Punkte a nach den Mittelpunkten jener Kreise gezogenen Strecken, und r_1, r_2, r_3, r_4 die vier Radien, und p die variable, von a nach einem beliebigen Punkte der † Ebene gezogene Strecke {vgl. Fig. 21}, so nehmen f_1, f_2, f_3, f_4 die Form an

Fig. 21.



271

$$f_s = (p - a_s)^2 - r_s^2 = p^2 - 2[a_s p] + \delta \qquad \{144\},$$

wo $\delta = a_s^2 - r_s^2$ ist. Nach 396 stellt zugleich δ den Doppelabstand des Punktes, für welchen $p = 0$ ist, das heisst, des Punktes a, von dem Kreise k_s dar. Dieser Doppelabstand ist nach der Voraussetzung für die vier Kreise $k_1, \ldots k_4$ derselbe. Ferner besteht (nach 233) zwischen den einfachen Mittelpunkten der Kreise $k_1, \ldots k_4$ eine Zahlbeziehung; dieselbe Zahlbeziehung findet (nach 222) auch zwischen den Strecken statt, welche von einem beliebigen Punkte nach jenen Mittelpunkten gezogen sind, also auch zwischen $a_1, \ldots a_4$. Es sei

$$a_4 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$

diese Zahlbeziehung, so muss, da die Mittelpunkte einfache Punkte sind, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ sein; dann hat man

$$\begin{aligned} f_4 &= p^2 - 2[a_4 p] + \delta \\ &= p^2 - 2[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3)|p] + \delta \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(p^2 + \delta) - 2[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3)|p] \\ &= \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3. \end{aligned}$$

3. Ist der Punkt a des gleichen Doppelabstandes unendlich entfernt, so liegen (nach 398 {Anm.}) die Mittelpunkte der vier Kreise in einer geraden Linie. Vier solche Kreise stehen aber stets in einer Zahlbeziehung zu einander; denn macht man diese gerade Linie zur Abscissenaxe (der x), so werden die vier Funktionen $f_1, \ldots f_4$ von der Form

$$f_s = x^2 + y^2 - 2\beta_s x + \delta_s,$$

indem das Glied mit y wegfällt. Es sind also dann die Funktionen $f_1, \ldots f_4$ aus den drei Funktionen $x^2 + y^2$, x und 1 numerisch ableitbar {nach 392}, stehen also (nach 22) in einer Zahlbeziehung zu einander.

Anm. Wenn der Punkt a des gleichen Doppelabstandes von vier Kreisen ausserhalb eines der Kreise liegt, so ist der Doppelabstand von diesem Kreise, gemäss der Erklärung, positiv, also auch der Doppelabstand von den übrigen Kreisen positiv, a liegt dann zugleich ausserhalb der übrigen Kreise. Zieht man von a die Tangenten an die vier Kreise, so müssen diese gleich sein, weil für jeden Kreis das Quadrat der von einem äusseren Punkte gezogenen Tangente gleich dem Doppelabstande dieses Punktes ist. Schlägt man also um a einen 272 Kreis, dessen Radius gleich jenen Tangenten ist, so werden alle vier † Kreise von diesem letztern Kreise senkrecht geschnitten. Liegt hingegen a innerhalb eines der Kreise, so muss es auch innerhalb der andern liegen. Zieht man dann von a in irgend einem der Kreise diejenige Sehne, die durch a halbirt wird, so ist das {negativ genommene} Quadrat der halben Sehne gleich dem Doppelabstande des Punktes a von diesem Kreise, zieht man also in allen vier Kreisen die durch a halbirten Sehnen, so müssen diese alle einander gleich sein. Schlägt man endlich um a mit der halben Sehne s einen Kreis, so wird dieser Kreis von jedem der vier Kreise im Durchmesser, das heisst so geschnitten, dass die beiden Durchschnittspunkte die Endpunkte eines und desselben durch diesen Kreis gezogenen Durchmessers sind.

Man kann diesen in Durchmessern geschnittenen Kreis als einen senkrecht schneidenden betrachten, dessen Radius imaginär $= s\sqrt{-1}$ ist, während a der Mittelpunkt bleibt, und erlangt dadurch den Vortheil eines gemeinschaftlichen Ausdrucks. Unser Satz würde dann so lauten: Vier Kreise stehen dann und nur dann in einer Zahlbeziehung zu einander, wenn sie von Einem Kreise senkrecht geschnitten werden, und zwar ist der Mittelpunkt dieses Kreises der Punkt des gleichen Doppelabstandes von irgend dreien der vier Kreise, und der Radius gleich der Quadratwurzel dieses Abstandes. Wir können dies auch so ausdrücken: Das aus drei Kreisen ableitbare Gebiet ist die Gesammtheit der Kreise, welche von einem und demselben Kreise senkrecht geschnitten werden. In diesem Sinne stellt also der letztgenannte Kreis jenes Gebiet, das heisst, das aus Kreisen erzeugbare Gebiet dritter Stufe dar; während das Gebiet zweiter Stufe durch einen Verein zweier Punkte dargestellt wurde, {nach 397}.

400. Aufgabe. *Den Kreis zu finden, welcher aus n gegebenen einfachen Kreisen durch n gegebene Zahlen ableitbar ist.*

Auflösung. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die n gegebenen Zahlen, ihre Summe α; ferner sei ein beliebiger Punkt O als Anfangspunkt aller Strecken angenommen, und seien die von ihm nach den n Mittelpunkten gezogenen Strecken $a_1, a_2, \ldots a_n$, und die n Radien seien $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$; ferner sei die von O nach einem variablen Punkte gezogene Strecke r, so sind die n zu den Kreisen gehörigen einfachen Funktionen

$$(r - a_a)^2 - \beta_a^2$$

für jeden Werth des Index a von 1 bis n. Also ist die gesuchte Kreisfunktion f,

$$f = \Sigma\alpha_a[(r - a_a)^2 - \beta_a^2] = \Sigma\alpha_a(r^2 - 2[r|a_a] + a_a^2 - \beta_a^2)$$
$$= \alpha r^2 - 2[r|\Sigma\alpha_a a_a] + \Sigma\alpha_a(a_a^2 - \beta_a^2),$$

weil $\Sigma\alpha_a = \alpha$ angenommen ist. Da nun der Punkt O willkürlich ist, 273 so können wir ihn, *wenn α nicht null ist,* so wählen, dass er der Schwerpunkt der mit den Koefficienten $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ versehenen Kreismittelpunkte wird. Dann ist {nach 222} $\Sigma\alpha_a a_a = 0$ und das zweite Glied fällt weg. Es wird also

$$f = \alpha r^2 + \Sigma\alpha_a(a_a^2 - \beta_a^2).$$

Setzen wir

$$\Sigma\alpha_a(\beta_a^2 - a_a^2) = \alpha\beta^2,$$

so wird

$$f = \alpha(r^2 - \beta^2),$$

das heisst: *Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist, wenn die Summe der n gegebenen Zahlen nicht null ist, der aus den n Mittelpunkten der gegebenen Kreise durch die n gegebenen Zahlen ableitbare Punkt; und den Radius (β) des Kreises erhält man, wenn man die n Doppelabstände des gefundenen Mittelpunktes von den n gegebenen Kreisen beziehlich mit den n gegebenen Zahlen multiplicirt, die Summe dieser Produkte durch die*

Summe der n gegebenen Zahlen dividirt, den Quotienten mit — 1 multiplicirt und aus diesem Produkte die Wurzel zieht.

Anm. Die Behandlung des Falles, *wo* $\alpha = 0$ *wird*, überlasse ich dem Leser {Weiteres über Kreisgeometrie findet sich noch in Nr. 405—409.}

§ 6. Verwandtschaften von dem Gesichtspunkte der Funktionsverknüpfung aus betrachtet.

401. Erklärung. Zwei Vereine von Grössen nenne ich verwandt, wenn jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grössen des ersten oder zweiten Vereines herrscht, auch zwischen den entsprechenden des andern stattfindet, das heisst, wenn der Grösse

$$p = \alpha a + \beta b + \cdots$$

die Grösse

$$p_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \cdots$$

entspricht, und umgekehrt, wo nämlich $a, b, \ldots$ beliebige Grössen des ersten Vereins und $a_1, b_1, \ldots$ die entsprechenden des andern, und $\alpha, \beta, \ldots$ beliebige Zahlen sind.

402. *Wenn zwei Vereine von Grössen, in denen die Grössen eines jeden Vereins sich aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen desselben numerisch ableiten lassen, einander verwandt sein sollen,* 274 *so kann man beliebigen † n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen des einen Vereins beliebige n derselben Bedingung unterworfene Grössen des andern entsprechend setzen; dann ist zu jeder Grösse eines jeden der beiden Vereine die entsprechende des andern genau bestimmt.*

Beweis. Es seien $a, b, \ldots$ n beliebige, in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen des einen, und $a_1, b_1, \ldots$ n derselben Bedingung unterworfene Grössen des andern Vereins, so lässt sich nach der Voraussetzung jede Grösse p des ersten Vereins aus $a, b, \ldots$ numerisch ableiten. Es sei

$$p = \alpha a + \beta b + \cdots$$

der Ausdruck dieser Ableitung, so sind (nach 29) die Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$ genau bestimmt, sobald p eine bestimmte Grösse ist. Sollen nun beide Vereine verwandt sein, so muss (nach 401) der Grösse p eine Grösse

$$p_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \cdots$$

entsprechen. Es ist also zu jeder Grösse des einen Vereins die entsprechende des andern genau bestimmt.

Es ist noch zu zeigen, dass die so gebildeten Vereine in der That einander verwandt sind, das heisst, dass jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grössen des ersten Vereins herrscht, auch zwischen den entsprechenden Grössen des zweiten herrsche und umgekehrt.

Es sei

$$\text{(a)} \qquad \varrho r + \sigma s + \cdots = 0$$

eine zwischen den Grössen $r, s, \ldots$ des ersten Vereins herrschende Zahlbeziehung, und seien $r_1, s_1, \ldots$ die den Grössen $r, s, \ldots$ entsprechenden Grössen des zweiten Vereins, so ist zu zeigen, dass auch

$$\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots = 0$$

sei. Setzt man in (a) statt $r, s, \ldots$ die Ausdrücke ihrer Ableitung aus $a, b, \ldots$, löst die Klammern auf, und fasst die Glieder, welche a enthalten, in Ein Glied zusammen, und so weiter, so erhält man einen Ausdruck der Form

$$\alpha a + \beta b + \cdots = 0,$$

wo $\alpha, \beta, \ldots$ Funktionen der Zahlgrössen $\varrho, \sigma, \ldots$ und der † Ableitungszahlen von $r, s, \ldots$ sind. Hieraus folgt, da $a, b, \ldots$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, (nach 29) 275

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \ldots.$$

Wendet man nun dasselbe Verfahren auf den Ausdruck $\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots$ an, so erhält man, da die Ableitzahlen von $r_1, s_1, \ldots$ dieselben sind, wie die von $r, s, \ldots$,

$$\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots = \alpha a_1 + \beta b_1 + \cdots,$$

wo $\alpha, \beta, \ldots$ dieselbe Bedeutung haben, wie oben. Da aber $\alpha, \beta, \ldots$ null sind, so erhält man

$$\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots = 0,$$

das heisst, jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grössen des ersten Vereins herrscht, herrscht auch zwischen den entsprechenden des zweiten, und ebenso umgekehrt, das heisst, die beiden Vereine sind verwandt.

403. *Wenn man aus zwei verwandten Vereinen zwei neue Vereine dadurch ableitet, dass man jedem linealen Produkt P, was aus Grössen des ersten Vereines gebildet ist, dasjenige Produkt als entsprechend setzt, welches auf gleiche Weise aus den entsprechenden Grössen des zweiten Vereins gebildet ist, so sind diese beiden neuen Vereine einander gleichfalls verwandt; das heisst, wenn $r, s, \ldots$ beliebige Grössen des einen und $r_1, s_1, \ldots$ die entsprechenden des verwandten Vereines sind, und die linealen Produkte $P(r, s, \ldots)$ und $P(r_1, s_1, \ldots)$ einander entsprechend gesetzt werden, wie auch $r, s, \ldots$ gewählt sein mögen, so sind auch die so erhaltenen Vereine einander verwandt.*

Beweis. Es seien $a_1, a_2, \ldots a_n$ Grössen des ersten Vereins, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und aus welchen

sich alle Grössen des ersten Vereins numerisch ableiten lassen, und $b_1, b_2, \ldots b_n$ die entsprechenden des andern, welche also derselben Bedingung unterworfen sind, und sei

$$r = \Sigma \varrho_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a} = \varrho_1 a_1 + \cdots + \varrho_n a_n, \quad s = \Sigma \sigma_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a}, \ldots,$$

also (nach 401)

$$r_1 = \Sigma \varrho_\mathfrak{a} b_\mathfrak{a}, \quad s_1 = \Sigma \sigma_\mathfrak{a} b_\mathfrak{a}, \ldots,$$

so wird

$$\left.\begin{array}{l} P(r, s, \ldots) = \Sigma \varrho_\mathfrak{a} \sigma_\mathfrak{b} \ldots P(a_\mathfrak{a}, a_\mathfrak{b}, \ldots) \\ P(r_1, s_1, \ldots) = \Sigma \varrho_\mathfrak{a} \sigma_\mathfrak{b} \ldots P(b_\mathfrak{a}, b_\mathfrak{b}, \ldots) \end{array}\right\} \quad [45].$$

276 Da nun die Produkte lineale sind, so muss (nach 50) jede Bestimmungsgleichung, welche zwischen den Produkten $P(a_\mathfrak{a}, a_\mathfrak{b}, \ldots)$ herrscht, auch bestehen bleiben, wenn man statt $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Grössen $b_1, b_2, \ldots b_n$ setzt. Nun lassen sich (nach 49), wenn p die Anzahl der verschiedenen Produkte von der Form $P(a_\mathfrak{a}, a_\mathfrak{b}, \ldots)$ und q die Anzahl der von einander unabhängigen Bestimmungsgleichungen ist, die sämmtlichen Produkte $P(a_\mathfrak{a}, a_\mathfrak{b}, \ldots)$ aus $p - q$ derselben, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, numerisch ableiten, und zwar so, dass, wenn diese $p - q$ Produkte bestimmt sind, auch für jedes der übrigen Produkte die Ableitzahlen bestimmt sind.

Die Ausdrücke dieser Ableitung sind nur von den Bestimmungsgleichungen abhängig. Setzt man daher statt $a_1, a_2, \ldots$ überall $b_1, b_2, \ldots$, so müssen, da die Bestimmungsgleichungen bei dieser Substitution noch geltend bleiben, auch die Ausdrücke jener Ableitung bestehen bleiben, das heisst, wenn $A_1, A_2, \ldots$ die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Produkte sind, aus welchen sich alle übrigen Produkte der Form $P(a_\mathfrak{a}, a_\mathfrak{b}, \ldots)$ ableiten lassen, und

$$P(a_\mathfrak{a}, a_\mathfrak{b}, \ldots) = \alpha_{1,\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots} A_1 + \alpha_{2,\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots} A_2 + \cdots$$

ist, wenn ferner $B_1, B_2, \ldots$ diejenigen Produkte sind, welche aus den Produkten $A_1, A_2, \ldots$ dadurch hervorgehen, dass man in diesen $b_1, b_2, \ldots$ statt $a_1, a_2, \ldots$ setzt, so ist

$$P(b_\mathfrak{a}, b_\mathfrak{b}, \ldots) = \alpha_{1,\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots} B_1 + \alpha_{2,\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots} B_2 + \cdots.$$

Also

$$P(r, s, \ldots) = \Sigma \varrho_\mathfrak{a} \sigma_\mathfrak{b} \ldots (\alpha_{1,\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots} A_1 + \alpha_{2,\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots} A_2 + \cdots)$$
$$P(r_1, s_1, \ldots) = \Sigma \varrho_\mathfrak{a} \sigma_\mathfrak{b} \ldots (\alpha_{1,\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots} B_1 + \alpha_{2,\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots} B_2 + \cdots),$$

das heisst, es ist $P(r, s, \ldots)$ durch dieselben Zahlen aus $A_1, A_2, \ldots$ abgeleitet, wie das entsprechende Produkt $P(r_1, s_1, \ldots)$ aus den entsprechenden Produkten $B_1, B_2, \ldots$, das heisst (nach 401), es ist der Verein der Produkte $P(r, s, \ldots)$ verwandt dem Vereine der entsprechenden Produkte $P(r_1, s_1, \ldots)$.

404. *Man kann in zwei Vereinen, deren jeder aus n Grössen desselben ableitbar ist, und welche einander verwandt sein sollen, in jedem beliebige $n+1$ Grössen annehmen, von denen keine n in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, und festsetzen, dass den $n+1$ Grössen des ersten Vereins † Grössen entsprechen sollen, welche den $n+1$ im zweiten* 277 *Verein angenommenen Grössen kongruent sind; dann ist zu jeder Grösse eines Vereines die entsprechende des andern, abgesehen von einem für alle gleichen Zahlkoefficienten, genau bestimmt.*

Beweis. Es seien $a_1, \ldots a_{n+1}$ die Grössen des ersten und $b_1, \ldots b_{n+1}$ die des zweiten Vereins, welche der im Satze ausgesprochenen Bedingung unterworfen sind, so wird sich, gemäss dieser Bedingung, jede der Grössen $a_1, \ldots a_{n+1}$ aus den übrigen durch Zahlen ableiten lassen, welche alle von Null verschieden sind. Denn, da der Verein aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen ableitbar sein soll, so muss er auch (nach 24) aus je n dieser Bedingung unterworfenen Grössen ableitbar sein, also auch jede der Grössen $a_1, \ldots a_{n+1}$ aus den übrigen; und sollte von den Ableitzahlen irgend eine null sein, so würde zwischen den n übrigen, gegen die Voraussetzung, eine Zahlbeziehung herrschen. Dasselbe gilt für die Grössen $b_1, \ldots b_{n+1}$. Nun sei

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} a_{n+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \\ b_{n+1} = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n, \end{cases}$$

{wo} also $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, $\beta_1, \ldots \beta_n$ alle ungleich Null {sind}.

Ferner seien $c_1, \ldots c_{n+1}$ die Grössen, welche beziehlich den Grössen $a_1, \ldots a_{n+1}$ entsprechen und den Grössen $b_1, \ldots b_{n+1}$ kongruent sein sollen. Aus diesen Kongruenzen folgt, dass für jeden Index r von 1 bis $n+1$ sich c_r als Produkt von b_r in eine {von} Null verschiedene Zahl x_r muss darstellen lassen, also

$$\text{(b)} \qquad c_r = x_r b_r.$$

Da ferner $c_1, \ldots c_{n+1}$ den Grössen $a_1, \ldots a_{n+1}$ so entsprechen sollen, dass die Vereine verwandt sind, so muss (nach 401)

$$\text{(c)} \qquad c_{n+1} = \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n$$

sein. Substituirt man in (c) die Werthe aus (b) und dividirt mit x_{n+1}, so erhält man

$$b_{n+1} = \frac{x_1 \alpha_1}{x_{n+1}} b_1 + \cdots + \frac{x_n \alpha_n}{x_{n+1}} b_n.$$

Aber aus (a) hat man zugleich

$$b_{n+1} = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n,$$

278 also muss (nach 29)

$$\frac{x_1 \alpha_1}{x_{n+1}} = \beta_1, \ldots, \frac{x_n \alpha_n}{x_{n+1}} = \beta_n$$

{sein}.

Hierdurch bestimmen sich alle Unbekannten bis auf eine. Setzen wir $x_{n+1} = \lambda$, so wird

$$\text{(d)} \qquad x_1 = \frac{\lambda \beta_1}{\alpha_1}, \ldots, x_n = \frac{\lambda \beta_n}{\alpha_n}, \quad x_{n+1} = \lambda.$$

Wenn diese Bedingungen (d) erfüllt sind, so wird auch umgekehrt die Gleichung (c) erfüllt. Dann sind also die Vereine verwandt in Bezug auf die $n+1$ Grössen $a_1, \ldots a_{n+1}$ und die ihnen entsprechenden $c_1, \ldots c_{n+1}$, und jeder Grösse

$$p = u_1 a_1 + \cdots + u_n a_n$$

entspricht die Grösse

$$q = u_1 c_1 + \cdots + u_n c_n,$$

oder, indem man statt $c_1, \ldots c_n$ ihre Werthe aus (b) und dann statt $x_1, \ldots x_n$ ihre Werthe aus (d) setzt,

$$q = \lambda \left(\frac{u_1 \beta_1}{\alpha_1} b_1 + \cdots + \frac{u_n \beta_n}{\alpha_n} b_n \right),$$

das heisst, q ist, abgesehen von einem konstanten Faktor λ, genau bestimmt.

Anm. Es lässt sich die Verwandtschaft zweier Vereine, abgesehen von den metrischen Werthen der entsprechenden Grössen, auch in der Art bestimmen, dass man festsetzt, es sollen jeden drei in einer Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen des ersten Vereins auch drei in einer Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen des zweiten und umgekehrt entsprechen. Der Beweis der Identität dieser Bestimmung mit der oben {in Nr. 401} gegebenen (wenn man von den metrischen Werthen der entsprechenden Grössen absieht) ergiebt sich leicht, wenn man die von Möbius in seinem barycentrischen Calcul {ges. Werke Bd. 1} in § 200—206 und besonders in § 203 gegebene vortreffliche Entwickelung der Collineation auf die hier betrachtete allgemeine Verwandtschaft überträgt.

405. *Der Raum und die Ebene lassen sich in der Art einander verwandt setzen, dass jedem Punkte im Raume ein Kreis in der Ebene entspricht und umgekehrt. Dann entsprechen den in Einer Ebene liegenden Punkten des Raumes solche Kreise, welche von einem und demselben Kreise senkrecht geschnitten werden. Und zwar kann man fünf beliebige Punkte des Raumes, von denen keine vier in Einer Ebene liegen, mit fünf be-* 279 *liebigen Kreisen der Ebene, von † denen keine vier von Einem Kreise senkrecht geschnitten werden, entsprechend setzen. Dann aber ist zu jedem Punkte des Raumes der entsprechende Kreis der Ebene und umgekehrt bestimmt. Jeder Satz der Stereometrie lässt sich in diesem Sinne auf*

Kreise der Ebene, und umgekehrt jeder Satz über Kreise der Ebene auf Punkte des Raumes übertragen.

Beweis. Nach 395 ist jede Kreisfunktion aus vier beliebigen in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Kreisfunktionen numerisch ableitbar, und nach 232 ist jeder Punkt im Raume aus vier beliebigen in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Punkten numerisch ableitbar. Folglich kann man (nach 404), wenn die Punkte des Raumes und die Kreise einer Ebene zwei verwandte Vereine bilden sollen, fünf beliebige Punkte des Raumes, von denen keine vier in einer Zahlbeziehung stehen, das heisst, keine vier in Einer Ebene liegen, und fünf beliebige Kreise der Ebene, von denen keine vier in einer Zahlbeziehung stehen, das heisst, keine vier von Einem Kreise senkrecht geschnitten werden {399, Anm.}, annehmen und festsetzen, dass jenen fünf Punkten des Raumes diese fünf Kreise entsprechen sollen, dann ist zu jedem Punkte des Raumes der entsprechende Kreis der Ebene und umgekehrt bestimmt.

Ferner, da nach dem Begriffe der Verwandtschaft (401) jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grössen des einen Vereins herrscht, auch zwischen den entsprechenden Grössen des verwandten Vereins besteht, so folgt, dass, wenn zwischen vier Punkten des Raumes eine Zahlbeziehung herrscht, auch zwischen den vier entsprechenden Kreisen eine solche herrschen muss, das heisst, wenn die vier Punkte in Einer Ebene liegen, so müssen die vier entsprechenden Kreise von Einem Kreise senkrecht geschnitten werden.

Endlich die Uebertragbarkeit der Sätze folgt daraus, dass jeder Satz des Raumes sich vermittelst der vier Ableitungszahlen, durch die jeder Punkt darstellbar ist, in einen analytischen Satz kleidet, und dieser sich wieder, indem man die vier Ableitzahlen als die Ableitzahlen des jenem Punkte entsprechenden Kreises setzt, in einen Satz über Kreise der Ebene verwandeln lässt, und ebenso umgekehrt.

406. *Man kann in der Ebene zwei verwandte Vereine von Kreisen annehmen, und dabei fünf beliebige Kreise des einen fünf beliebigen Kreisen des andern Vereins entsprechend setzen, vorausgesetzt, dass keine vier der in demselben Vereine angenommenen fünf Kreise von einem und demselben Kreise senkrecht geschnitten werden. Dann ist zu jedem sechsten Kreise des einen Vereins der entsprechende des andern bestimmt, und jeden vier Kreisen des einen Vereins, die von Einem Kreise senkrecht geschnitten werden, entsprechen vier Kreise des andern, die gleichfalls von Einem Kreise senkrecht geschnitten werden.* 280

Beweis ergiebt sich aus dem Obigen von selbst.

Anm. Wir nennen die soeben behandelte Verwandtschaft die syncyklische. Von besonderem Interesse ist der Fall, wo solchen Kreisen, die sich in Punkte zusammenziehen, auch in dem andern Vereine gleichfalls solche entsprechen.

407. *Wenn der Kreis, dessen Gleichung*

(a) $$\alpha(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0$$

ist, wo α, β, γ, δ *reell sind, sich in einen Punkt zusammenziehen soll, so muss*

(b) $$\alpha\delta = \beta^2 + \gamma^2$$

sein. Umgekehrt, wenn die Gleichung (b) *stattfindet und nicht alle Koefficienten null sind, so muss der durch* (a) *dargestellte Kreis sich entweder in einen Punkt zusammenziehen, oder in die unendlich entfernte Gerade umschlagen; letzteres, wenn* α, β, γ *zugleich null sind.*

Beweis. Aus der Gleichung (a) ergiebt sich, wenn α nicht null ist, für den Radius r des zu jener Gleichung gehörigen Kreises

$$r^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha\delta}{\alpha^2},$$

woraus das Uebrige hervorgeht. Wenn hingegen α null ist, so wird die Gleichung (a) die Gleichung einer geraden Linie; aber dann folgt aus (b), dass $\beta^2 + \gamma^2$ null sei, das heisst, dass β und γ null seien; also ist dann die durch die Gleichung (a) dargestellte {gerade} Linie die unendlich entfernte.

408. *Nimmt man* x *und* y *als (rechtwinklige) Koordinaten eines Vereins von Kreisen und* x' *und* y' *als die eines andern, und setzt den vier Funktionen*

281 $$x^2 + y^2, \quad x, \quad y, \quad 1$$

nach der Reihe die Funktionen

$$1, \quad x', \quad y', \quad x'^2 + y'^2$$

entsprechend, so dass also jedem Kreise, dessen Gleichung

(a) $$\alpha(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0$$

ist, derjenige Kreis entspricht, dessen Gleichung

(b) $$\alpha + 2\beta x' + 2\gamma y' + \delta(x'^2 + y'^2) = 0$$

ist, so entspricht jedem Punkte des ersten Vereines, mit Ausnahme des Anfangspunktes der Abscissen, ein Punkt des zweiten und umgekehrt; dem Anfangspunkte der Abscissen hingegen entspricht in dem andern Vereine jedesmal die unendlich entfernte Gerade.

Beweis. Wenn der Kreis, dessen Gleichung (a) ist, sich in einen Punkt zusammenzieht, so ist $\alpha\delta = \beta^2 + \gamma^2$ (407). Wenn aber diese

Gleichung gilt, so ist auch der Kreis, dessen Gleichung (b) ist, (nach 407) entweder ein Punkt (wenn $\delta \gtrless 0$) oder die unendlich entfernte Gerade, letzteres wenn β, γ, δ null sind, das heisst, wenn der Punkt des ersten Vereins durch die Gleichung $\alpha(x^2 + y^2) = 0$ bestimmt, also Anfangspunkt der Koordinaten ist.

409. {Umkehrung.} *Wenn bei zwei syncyclisch verwandten Vereinen von Kreisen der unendlich entfernten Geraden jedes Vereins ein Punkt des andern entspricht, und allen übrigen Punkten jedes Vereines wiederum Punkte des andern entsprechen, so kann man stets den (zu einander senkrechten) Koordinatenaxen jedes Vereins eine solche Lage geben, und dem als Einheit genommenen Maasse der Längen einen solchen Werth, dass den vier Funktionen*

$$x^2 + y^2, \quad x, \quad y, \quad 1$$

des ersten Vereines nach der Reihe die vier Funktionen

$$1, \quad x', \quad y', \quad x'^2 + y'^2$$

des andern entsprechen.

Beweis. Die unendlich entfernte Gerade wird durch eine Funktion dargestellt, welche bloss aus einer Konstanten besteht. Der Punkt, welcher in jedem Vereine der unendlich entfernten Geraden des andern Vereines entspricht, sei zum Anfangspunkte der Abscissen gemacht. Der Anfangspunkt † der Abscissen wird durch die Kreisfunktion $x^2 + y^2$ 282 dargestellt. Dieser Funktion entspreche in dem zweiten Vereine die Konstante a, durch welche die unendlich entfernte Gerade dargestellt {wird}; ebenso entspreche der Funktion $x'^2 + y'^2$ des zweiten Vereins in dem ersten die Konstante b.

Man ändere nun das als Einheit genommene Maass der Längen, so multipliciren sich die Koordinaten mit einem konstanten Faktor λ, und es entsprechen sich dann

$$\begin{array}{ll} \lambda^2(x^2 + y^2), & b \\ a, & \lambda^2(x'^2 + y'^2). \end{array}$$

Es werde λ^2 so bestimmt, dass $a : \lambda^2 = \lambda^2 : b$, das heisst, $\lambda^4 = ab$ sei. Setzen wir dann $a : \lambda^2 = \mu$, so entsprechen sich

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2, & 1 \\ \mu, & \mu(x'^2 + y'^2). \end{array}$$

Nun werden aber die räumlichen Gebilde, welche durch Funktionen dargestellt werden, nicht verändert, wenn man diese alle mit einer konstanten Zahl, also hier mit μ dividirt, und wir können daher $x^2 + y^2$ und 1 mit 1 und $x'^2 + y'^2$ entsprechend setzen.

Es mögen ferner den Funktionen x und y des ersten Vereines die Funktionen f_1 und f_2, nämlich

$$f_1 = \alpha_1(x'^2 + y'^2) + \beta_1 x' + \gamma_1 y' + \delta_1$$
$$f_2 = \alpha_2(x'^2 + y'^2) + \beta_2 x' + \gamma_2 y' + \delta_2$$

entsprechen, so dass also den Funktionen

$$x^2 + y^2,\ x,\ y,\ \ 1$$

die Funktionen

$$1,\ \ f_1,\ f_2,\ x'^2 + y'^2$$

entsprechen. Aus den ersteren sei durch die Koefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eine Funktion f abgeleitet, so entspricht ihr im zweiten Vereine die Funktion f', welche durch dieselben Koefficienten aus den vier letzten Funktionen abgeleitet ist. Die Bedingung dafür, dass die erstere Funktion f einen blossen Punkt darstellt, ist (nach 407)

$$\text{(a)} \qquad 4\alpha\delta = \beta^2 + \gamma^2.$$

Für die zweite Funktion

$$f' = \alpha + \beta f_1 + \gamma f_2 + \delta(x'^2 + y'^2)$$
$$= (\delta + \beta\alpha_1 + \gamma\alpha_2)(x'^2 + y'^2) + (\beta\beta_1 + \gamma\beta_2)x' +$$
$$+ (\beta\gamma_1 + \gamma\gamma_2)y' + \alpha + \beta\delta_1 + \gamma\delta_2$$

283 lautet diese Bedingung:

$$4(\delta + \beta\alpha_1 + \gamma\alpha_2)(\alpha + \beta\delta_1 + \gamma\delta_2) = (\beta\beta_1 + \gamma\beta_2)^2 + (\beta\gamma_1 + \gamma\gamma_2)^2.$$

Führt man hier statt δ den Werth aus (a) ein, so erhält man

$$(\beta^2 + \gamma^2 + 4\alpha\beta\alpha_1 + 4\alpha\gamma\alpha_2)(\alpha + \beta\delta_1 + \gamma\delta_2) =$$
$$= \alpha(\beta\beta_1 + \gamma\beta_2)^2 + \alpha(\beta\gamma_1 + \gamma\gamma_2)^2.$$

Diese Gleichung muss für beliebige Werthe von α, β, γ gelten, also müssen die Koefficienten, die zu gleichen Potenzen dieser Grössen gehören, auf beiden Seiten gleich sein. Da die rechte Seite α nur in der ersten Potenz enthält, so müssen die Koefficienten der Glieder, welche α^2 enthalten, und derer, welche α gar nicht enthalten, null sein, also sind α_1, α_2, δ_1, δ_2 null, das heisst, f_1 und f_2 stellen gerade Linien dar, welche durch den Anfangspunkt der Abscissen gehen. Legen wir die Abscissenaxe so, dass sie mit der durch f_2 dargestellten Linie zusammenfällt, so reducirt sich f_2 bloss auf das Glied, was y enthält, das heisst, β_2 wird null. Dividiren wir dann noch die so reducirte Gleichung durch α, so geht sie über in

$$\beta^2 + \gamma^2 = \beta^2\beta_1^2 + (\beta\gamma_1 + \gamma\gamma_2)^2.$$

Da in der entwickelten Gleichung $2\gamma_1\gamma_2$ der Koefficient von $\beta\gamma$ ist,

so muss $\gamma_1 \gamma_2 = 0$ sein; γ_2 kann nicht null sein, weil sonst f_2 identisch gleich Null wäre, also muss γ_1 null sein. Dann erhält man

$$\beta^2(1 - \beta_1^2) + \gamma^2(1 - \gamma_2^2) = 0,$$

also $\beta_1 = \mp 1$, $\gamma_2 = \mp 1$. Da auf jeder der beiden Koordinatenaxen die Seite, nach welcher die Koordinaten positiv genommen sind, beliebig gewählt werden kann, so können wir β_1 und $\gamma_2 = +1$ setzen, und es wird dann $f_1 = x'$, $f_2 = y'$, und entsprechen also den Funktionen

$$x^2 + y^2, \ x, \ y, \qquad 1$$

des ersten Vereins die Funktionen

$$1, \qquad x', \ y', \ x'^2 + y'^2$$

des zweiten.

Anm. Die hier behandelte specielle Art der syncyklischen Verwandtschaft ist zuerst von **Möbius** aufgestellt und von ihm **Kreisverwandtschaft** genannt worden; vgl. **Möbius**, Ueber eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren (in den Berichten der Königl. Sächs. Gesellsch. der Wiss., 5. Febr. 1853, {Werke, Bd. 2, S. 205}).

Es ergiebt sich aus dem Obigen, dass derjenige Punkt in jedem der beiden kreisverwandten + Vereine als charakteristisch hervortritt, welchem im andern 284 Vereine die unendlich entfernte Gerade entspricht. Es sei dieser Punkt *Centralpunkt* des Vereins genannt. Legt man nun die beiden Vereine so auf einander, dass die Centralpunkte, die x-Axen und die y-Axen sich gegenseitig decken, so *deckt auch jede durch den Centralpunkt gehende gerade Linie*, zum Beispiel die gerade Linie $qx + ry = 0$, *die entsprechende*. Schlägt man nun noch um den Centralpunkt mit der Länge, welche als Maass der Koordinaten zu Grunde gelegt ist, einen Kreis, welcher *Hauptkreis* heisse, so stellt sich die ganze Art des gegenseitigen Entsprechens aufs Anschaulichste dar. Dann *besteht die Peripherie des Hauptkreises aus den sämmtlichen Punkten, welche ihre entsprechenden decken;* jedem Punkt im Innern des Hauptkreises entspricht im andern Vereine ein auf demselben Radius liegender Punkt ausserhalb des Kreises, und zwar so, dass *der Radius stets die mittlere Proportionale zwischen den Abständen der beiden entsprechenden Punkte vom Centrum ist.*

Letzteres folgt für einen Punkt der x-Axe sogleich aus den entsprechenden Funktionen; denn die Kreis-Gleichung eines Punktes der x-Axe, dessen Abscisse $= c$ ist, ist $(x - c)^2 + y^2 = 0$, das heisst,

$$x^2 + y^2 - 2cx + \qquad c^2 \qquad = 0,$$

also die des entsprechenden Punktes

$$1 \qquad - 2cx + c^2(x^2 + y^2) = 0,$$

das heisst

$$\left(x - \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = 0,$$

also ist der Abstand dieses Punktes vom Centralpunkte $= 1 : c$, während der des entsprechenden Punktes $= c$ war, also ihr Produkt 1, das heisst, die als Einheit genommene Länge die mittlere Proportionale zwischen den Abständen der entsprechenden Punkte auf der x-Axe. Da man nun jede durch den Centralpunkt gehende gerade Linie als x-Axe annehmen kann, so gilt jene Beziehung allgemein.

Wenn man statt der Annahme, dass der unendlich entfernten Geraden ein Punkt entsprechen soll, die Annahme macht, dass in den beiden syncyklischen

Vereinen ohne Ausnahme jedem Punkte des einen Vereins ein Punkt des andern entsprechen soll, so entspricht auch der unendlich entfernten Geraden des einen Vereins die unendlich entfernte des andern, und man gelangt zur Aehnlichkeit, welche sich also auf diese Weise der Kreisverwandtschaft gegenüber stellt.

§ 7. Normale Einheiten der Funktionen, Stetigkeit der letzteren.

410. Erklärung. Normale Einheiten reeller Grössen. Für die reellen Zahlen setze ich 1 als normale Einheit, für die reellen extensiven Grössen {erster Stufe} setze ich als normale Einheiten 285 die ursprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \ldots e_n$; † für die reellen extensiven Grössen m-ter Stufe ferner die wohlgeordneten (multiplikativen) Kombinationen *ohne Wiederholung* zur m-ten Klasse aus den ursprünglichen Einheiten; für die reellen algebraischen Produkte von Grössen gleicher Stufe endlich die (wohlgeordneten) Kombinationen *mit Wiederholung* aus den normalen Einheiten der Faktoren (wobei jede dieser Kombinationen als algebraisches Produkt der darin enthaltenen Elemente aufzufassen ist).

Anm. Es sind hier nur die früher vereinzelt vorkommenden Bestimmungen zusammengefasst. Es kommt noch darauf an, auch für die reellen Lückenausdrücke {mit vertauschbaren Lücken} die normalen Einheiten festzustellen.

Wir haben (in 368, Anm.) gesehen, dass das Produkt der Faktoren, welche die Lücken eines {solchen} Lückenausdrucks ausfüllen sollen, als ein algebraisches Produkt aufzufassen ist, mit welchem der Lückenausdruck multiplicirt werden soll. Folglich kommt es nur darauf an, welche Werthe der Lückenausdruck annimmt, wenn die normalen Einheiten jener algebraischen Produkte mit ihm multiplicirt werden. Es seien $E_1, E_2, \ldots$ die normalen Einheiten dieser algebraischen Produkte und L der Lückenausdruck, so kommt es auf die Werthe $LE_1, LE_2, \ldots$ an. Diese Werthe können wieder extensive Grössen sein, die normalen Einheiten derselben seien $e_1, e_2, \ldots$, so ergeben sich als normale Einheiten von L diejenigen Lückenausdrücke, welche mit $E_1, E_2, \ldots$ multiplicirt irgend eine der Einheiten $e_1, e_2, \ldots$ liefern.

411. Erklärung. Normale Einheiten reeller Lückenausdrücke. Wenn $E_1, E_2, \ldots$ die normalen Einheiten derjenigen algebraischen Produkte sind, deren Faktoren die Lücken eines reellen Lückenausdruckes L, {dessen Lücken vertauschbar sind,} auszufüllen vermögen, und $e_1, e_2, \ldots$ die normalen Einheiten derjenigen Grössen sind, in welche L nach Ausfüllung seiner Lücken übergeht, so setze ich diejenigen Lückenausdrücke $E_{r,s}$ als normale Einheiten von L, welche den Gleichungen

$$E_{r,s}E_r = e_s \text{ und } E_{r,s}E_t = 0 \quad (t \gtrless r)$$

genügen.

Anm. Es ist diese Erklärung in Uebereinstimmung mit der in 381 für die Einheiten des Quotienten, das heisst, des Lückenausdruckes mit Einer Lücke gegebenen.

412. *Jeder (reelle) Lückenausdruck {mit vertauschbaren Lücken} lässt sich aus den in* 411 *festgesetzten normalen Einheiten desselben numerisch ableiten, und diese letzteren stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander.*

Beweis wie in 381.

413. Erklärung. Normale Einheiten einer Grössengattung. Als Grössen derselben Gattung setze ich alle diejenigen Grössen, welche nach dem Früheren zu einander addirt werden können. Die Anzahl der normalen Einheiten einer Grössengattung nehme ich stets als eine gerade an, indem die eine Hälfte derselben reell ist, und die andere daraus durch Multiplikation mit $i = \sqrt{-1}$ hervorgeht. Die Ableitzahlen, durch welche eine Grösse aus ihren normalen Einheiten numerisch abgeleitet wird, nehme ich stets als reell an. 286

Anm. Für die allgemeinen Zahlgrössen sind also 1 und $\sqrt{-1} = i$ die normalen Einheiten, für die allgemeinen Grössen erster Stufe {sind es}

$$e_1, e_2, \ldots e_n, \quad e_1 i, \quad e_2 i, \ldots, \quad e_n i,$$

wo $e_1, e_2, \ldots e_n$ die ursprünglichen Einheiten sind, und so weiter.

414. Erklärung. Numerischer Werth einer Grösse heisst die positive Quatratwurzel aus der Summe der Quadrate aller Zahlen, durch welche jene Grösse aus ihren normalen Einheiten ableitbar ist, das heisst, wenn $E_1, E_2, \ldots$ die normalen Einheiten einer Grösse P sind und

$$P = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots$$

ist, so ist der numerische Werth von P gleich

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots}.$$

Anm. Diese Definition ist in Uebereinstimmung mit der in 151 gegebenen. Der numerische Werth einer komplexen Zahlgrösse $p + qi$ ist hiernach gleich $\sqrt{p^2 + q^2}$.

415. *Wenn der numerische Werth einer Grösse null ist, so sind alle Zahlen, durch welche diese Grösse aus ihren normalen Einheiten abgeleitet ist, einzeln genommen null.*

Beweis. Es seien $E_1, E_2, \ldots$ die normalen Einheiten der Grösse P und sei

$$P = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots.$$

Wenn nun der numerische Werth von P null sein soll, so heisst das (nach 414)

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots} = 0,$$

also

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots = 0.$$

Da aber $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ (nach 413) alle reell sind, so kann die Summe

ihrer Quadrate nicht anders null sein, als wenn sie alle einzeln genommen null sind, also

$$0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots.$$

287 **416.** Erklärung. Wenn der numerische Werth einer Grösse a kleiner ist als der einer Grösse b, so sage ich, a sei **numerisch kleiner als** b und schreibe dies

$$a \text{ num. } < b.$$

417. *Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Zahlen sind, durch welche a aus seinen normalen Einheiten ableitbar ist, und ebenso $\beta_1, \beta_2, \ldots$ die Zahlen, durch welche b aus seinen normalen Einheiten ableitbar ist, so sind die Vergleichungen*

$$a \text{ num. } < b$$

und

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots < \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots$$

einander gleichbedeutend.

Beweis folgt unmittelbar aus 416 und 414.

418. *Wenn $p, q, \ldots$ positive Zahlwerthe und $a, b, \ldots$ beliebige (aus denselben normalen Einheiten ableitbare) Grössen von der Art sind, dass*

$$a \text{ num. } < p, \quad b \text{ num. } < q, \ldots$$

sei, so ist auch

$$a + b + \cdots \text{ num. } < p + q + \cdots.$$

Beweis. 1. Für *zwei* Grössen. Es seien $e_1, e_2, \ldots$ die normalen Einheiten von a und b und sei

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots$$
$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots$$

und sei α der numerische Werth von a, β der von b und γ der von $a + b$, so ist $\alpha < p$, $\beta < q$; zu zeigen ist, dass $\gamma < p + q$ sei.

Nach 414 ist

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots$$
$$\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots$$
$$\gamma^2 = (\alpha_1 + \beta_1)^2 + (\alpha_2 + \beta_2)^2 + \cdots,$$

also

(*) $$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots).$$

Nun können wir zeigen, dass $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots \overline{\gtrless}\, \alpha\beta$ sei. In der That ist

$$(\alpha\beta)^2 - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots)^2 =$$
$$= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots)^2$$
$$= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 + \cdots.$$

Die rechte Seite ist die Summe mehrerer Quadrate, {sie ist} also gleich oder grösser als Null, und dasselbe gilt dann auch von der linken, das heisst, es ist

$$(\alpha\beta)^2 \overline{>} (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots)^2,$$

also auch, da α und β positiv sind, 288

$$\alpha\beta \overline{>} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots.$$

Wenden wir diese Vergleichung auf die Gleichung (*) an, so folgt

$$\gamma^2 \overline{<} \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta, \text{ das heisst } \gamma^2 \overline{<} (\alpha + \beta)^2,$$

also, da γ und $\alpha + \beta$ positiv sind,

$$\gamma \overline{<} \alpha + \beta;$$

aber, da α und β (positive) Zahlen sind, welche beziehlich kleiner als die positiven Zahlen p und q sind, so ist

$$\alpha + \beta < p + q,$$

also

$$\gamma < p + q,$$

das heisst, der numerische Werth von $a + b$ ist kleiner als $p + q$.

2. Für *mehr* Grössen. Da nun (nach Beweis 1) $a + b$ num. $< p + q$ und (nach Hypothesis) c num. $< r$ ist, so ist (nach Beweis 1)

$$a + b + c \text{ num.} < p + q + r,$$

und so weiter für beliebig viele Grössen.

419. Zusatz. *Wenn p und q positive Zahlwerthe und a und b beliebige (aus denselben normalen Einheiten ableitbare) Grössen von der Art sind, dass*

$$a \text{ num.} < p, \quad b \text{ num.} < q$$

ist, so ist auch

$$a - b \text{ num.} < p + q.$$

419b.*) *Wenn a eine beliebige Grösse, $b, c, \ldots$ aber Zahlgrössen* (310) *sind, so ist der numerische Werth (ϱ) des Produktes $abc\ldots$ dieser Grössen gleich dem Produkte ihrer numerischen Werthe ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots$); das heisst,*

$$\varrho = \alpha\beta\gamma \ldots.$$

Beweis. 1. Für *zwei* Grössen. Es seien $e_1, e_2, \ldots$ die reellen, 311 $ie_1, ie_2, \ldots$ $(i = \sqrt{-1})$ die imaginären Einheiten von a und sei

$$a = \Sigma\{\alpha_a e_a + i\gamma_a e_a\},$$

*) {Die Sätze 419b und 419c tragen in der Originalausgabe die Nummern 457 und 458; Grassmann sagt jedoch selbst in einer Anmerkung nach Nr. 458: „Diese zwei Sätze, welche systematischer nach 419 ständen, sind hier nachgeholt, um sie im Folgenden verwenden zu können“, deshalb sind sie jetzt nach Nr. 419 eingeschaltet worden.}

wo die α_a und γ_a alle reell sind, und sei $b = \delta + \varepsilon i$, so ist (nach 414)

$$\alpha^2 = \Sigma\{\alpha_a^2 + \gamma_a^2\}, \quad \beta^2 = \delta^2 + \varepsilon^2.$$

Ferner ist

$$ab = \Sigma\{(\delta\alpha_a - \varepsilon\gamma_a)e_a + i(\delta\gamma_a + \varepsilon\alpha_a)e_a\},$$

also

$$\begin{aligned}\varrho^2 &= \Sigma\{(\delta\alpha_a - \varepsilon\gamma_a)^2 + (\delta\gamma_a + \varepsilon\alpha_a)^2\}\\ &= \Sigma\{\delta^2\alpha_a^2 + \varepsilon^2\gamma_a^2 + \delta^2\gamma_a^2 + \varepsilon^2\alpha_a^2\}\\ &= (\delta^2 + \varepsilon^2)\,\Sigma\{\alpha_a^2 + \gamma_a^2\} = \beta^2\alpha^2,\end{aligned}$$

also, da ϱ, α, β positiv sind,

$$\varrho = \alpha\beta,$$

das heisst,

$$ab \text{ num.} = \alpha\beta.$$

2. {Für *mehr* Grössen.} Da nun (nach Beweis 1) ab num. $= \alpha\beta$ ist, so ergiebt sich (nach Beweis 1)

$$abc \text{ num.} = \alpha\beta\gamma,$$

und so weiter.

419c. *Wenn a und a_1 beliebige Grössen, $b, c, \ldots, b_1, c_1, \ldots$ aber Zahlgrössen sind und*

$$a \text{ num.} < a_1,$$

$$b \text{ num.} < b_1, \quad c \text{ num.} \overline{\gtrless} c_1, \quad \ldots$$

ist, so ist auch

$$abc \ldots \text{num.} < a_1 b_1 c_1 \ldots.$$

Beweis. Denn es seien $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ beziehlich die numerischen Werthe von $a, b, c, \ldots, a_1, b_1, c_1, \ldots$, so ist (nach 419b) $\alpha\beta\gamma \ldots$ der numerische Werth von $abc \ldots$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ der von $a_1 b_1 c_1 \ldots$. Da aber $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ positive Zahlen sind und $\alpha < \alpha_1$, $\beta < \beta_1$, $\gamma \overline{\gtrless} \gamma_1, \ldots$ ist, so ist auch $\alpha\beta\gamma \cdots < \alpha_1\beta_1\gamma_1 \cdots$, das heisst:

$$abc \ldots \text{num.} < a_1 b_1 c_1 \ldots.$$

(288) **420.** Erklärung. Ich sage, eine Funktion $f(q)$ einer positiven Zahlgrösse $\{q\}$ verschwinde mit q, wenn sich zu jeder positiven Zahl p ein positiver Werth von q angeben lässt von der Art, dass

$$f(q) \text{ num.} < p$$

sei, und auch bleibe, wenn q beliebig abnimmt, aber positiv bleibt. Wenn ausserdem $f(0) = 0$ ist, so sage ich $f(q)$ werde mit q null.

Anm. Beide Ausdrücke: Mit (positivem) q verschwinden und mit q null werden, sind also nicht identisch; sondern nur der zweite schliesst den ersten ein, nicht umgekehrt; denn es könnten für $f(q)$ die Bedingungen des Verschwindens mit q erfüllt sein, und dennoch könnte $f(q)$ für $q = 0$ in einen isolirten, von Null verschiedenen Werth überspringen.

421. *Wenn mehrere Funktionen $f_1(q), f_2(q), \ldots, f_n(q)$ einer positiven Zahlgrösse q mit q verschwinden, so verschwindet mit q auch*

(a) $$a_1 f_1(q) + a_2 f_2(q) + \cdots + a_n f_n(q),$$ 289

wo $a_1, a_2, \ldots a_n$ *endliche Zahlen, oder auch beliebige endliche Lückenausdrücke mit je einer Lücke sind, welche durch* $f_1(q), f_2(q), \ldots$ *ausgefüllt werden kann.* (*Und ebenso, wenn jene Funktionen mit* q *null werden, so wird auch dieser letzte Ausdruck* (a) *mit* q *null.*)

Beweis. 1. Für *Zahlen.* Sollten von den Grössen $a_1, \ldots a_n$ einige null sein, so kann man in dem Ausdrucke (a) die Glieder weglassen, in denen diese Koefficienten, welche gleich Null sind, vorkommen. Wir nehmen an, dies sei schon geschehen, und es seien also $a_1, \ldots a_n$ lauter von Null verschiedene (endliche) Zahlen.

Da nun (nach Hypothesis) $f_1(q)$ mit q verschwindet, so muss sich (nach 420) zu jeder von Null verschiedenen Zahl, zum Beispiel zu $p : a_1 n$, ein positiver Werth q_1 von der Art angeben lassen, dass $f_1(q_1)$ numerisch kleiner als $p : a_1 n$ sei und auch bleibe, wenn q_1 beliebig abnimmt, aber positiv bleibt; aus gleichem Grunde wird man auch einen positiven Werth q_2 der Art angeben können, dass $f_2(q_2)$ numerisch kleiner als $p : a_2 n$ sei und auch bleibe bei abnehmendem $q_2, \ldots$. Wenn nun q ein positiver Werth ist, welcher noch kleiner als jede der Grössen $q_1, q_2, \ldots q_n$ ist, so ist auch $f_1(q)$ num. $< p : a_1 n, \ldots$, oder

$$a_1 f_1(q) \text{ num.} < \frac{p}{n}, \quad a_2 f_2(q) \text{ num.} < \frac{p}{n}, \quad \ldots, \quad a_n f_n(q) \text{ num.} < \frac{p}{n};$$

folglich ist (nach 418) auch die Summe der linken Seiten numerisch kleiner als die der rechten, das heisst,

$$a_1 f_1(q) + a_2 f_2(q) + \cdots + a_n f_n(q) \text{ num.} < p,$$

eine Vergleichung, die auch bestehen bleibt, wenn q beliebig abnimmt, aber positiv bleibt, das heisst, es verschwindet der Ausdruck (a), wenn $a_1, \ldots a_n$ {endliche} Zahlen sind, mit q.

2. Es reducire sich der Ausdruck (a) auf $a_1 f_1(q)$, wo a_1 eine normale Einheit eines Lückenausdruckes sei, dessen Lücke durch $f_1(q)$ ausgefüllt werden kann; es seien ferner $e_1, e_2, \ldots$ die normalen Einheiten von $a_1 f_1(q)$ und $E_1, E_2, \ldots$ die von $f_1(q)$ und sei

(b) $$f_1(q) = E_1 \varphi_1(q) + E_2 \varphi_2(q) + \cdots = \Sigma E_\alpha \varphi_\alpha(q),$$

so wird (nach 411) a_1 die Eigenschaft haben, dass es mit einer der 290 Einheiten $E_1, E_2, \ldots$, zum Beispiel mit E_r, multiplicirt, eine der Einheiten $e_1, e_2, \ldots$, zum Beispiel die Einheit e_s, liefert, hingegen mit jeder der übrigen Einheiten $E_1, E_2, \ldots$ multiplicirt Null giebt, so dass also dann

(c) $$a_1 E_r = e_s, \quad a_1 E_t = 0, \text{ für } t \gtrless r$$

ist. Dann erhalten wir

$$a_1 f_1(q) = a_1 \Sigma E_\mathfrak{a} \varphi_\mathfrak{a}(q) = \Sigma a_1 E_\mathfrak{a} \varphi_\mathfrak{a}(q) \quad [44]$$
$$= a_1 E_r \varphi_r(q) = e_s \varphi_r(q) \quad [(c)].$$

Also ist (nach 414) der numerische Werth von $a_1 f_1(q)$ gleich $\sqrt{(\varphi_r(q))^2}$. Da nun (nach Hypothesis) $f_1(q)$ mit q verschwindet, so lässt sich (nach 420) zu jeder positiven Zahl p ein Werth von q der Art angeben, dass $f_1(q)$ num. $< p$ sei, und auch bei abnehmendem q bleibe, das heisst (nach 417), dass

$$(\varphi_1(q))^2 + (\varphi_2(q))^2 + \cdots < p^2$$

sei und bei abnehmendem q bleibe. Da aber (nach 413) $\varphi_1(q)$, $\varphi_2(q), \ldots$ reell, also $(\varphi_1(q))^2$, $(\varphi_2(q))^2, \ldots$ positiv sind, so muss jedes dieser Quadrate kleiner als p^2 sein, also auch $(\varphi_r(q))^2 < p^2$, das heisst, $a_1 f_1(q)$ num. $< p$, also verschwindet $a_1 f_1(q)$ mit q.

3. Es seien endlich a_1, a_2, ... beliebige Lückenausdrücke (mit je einer Lücke), und sei

$$a_r = \Sigma \alpha_{r,\mathfrak{b}} E_{r,\mathfrak{b}},$$

wo $E_{r,1}$, $E_{r,2}$, ... die normalen Einheiten von a_r darstellen, so wird

$$a_1 f_1(q) + a_2 f_2(q) + \cdots = \Sigma \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} f_\mathfrak{a}(q).$$

Da nun (nach Beweis 2) $E_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} f_\mathfrak{a}(q)$ mit q verschwindet, so verschwindet (nach Beweis 1) auch die Vielfachensumme dieser Ausdrücke mit q; also auch $a_1 f_1(q) + a_2 f_2(q) + \cdots$. Wenn ausserdem $f_1(q)$, $f_2(q), \ldots$, für $q = 0$, auch null sind, so gilt dasselbe auch für $a_1 f_1(q) + a_2 f_2(q) + \cdots$, also, da ausserdem der letzte Ausdruck mit q verschwindet, so wird er nun auch mit q null.

422. *Wenn zwei Funktionen $f_1(q)$ und $f_2(q)$ einer positiven Zahlgrösse q mit dieser verschwinden (oder null werden), so muss mit ihr auch die Differenz $f_1(q) - f_2(q)$ verschwinden (oder null werden).*

Beweis in 421, {vgl. 419, Zusatz}.

291 **423.** Erklärung. Wenn $f(x)$ für einen bestimmten Werth x die Eigenschaft hat, dass sich allemal ein konstanter Werth c von der Art angeben lässt, dass $f(x + qdx) - c$ jedesmal mit dem positiven Zahlwerthe q verschwindet, was für eine endliche Grösse, die mit x von gleicher Gattung ist, auch unter dx verstanden sein mag, so sage ich, die Funktion $f(x)$ konvergire um x nach c.

Anm. Es ist hier also unter dx vorläufig nichts weiter verstanden, als eine beliebige endliche Grösse, welche mit x von gleicher Gattung ist. Doch habe ich schon hier diese Bezeichnung gewählt, da sie für das Folgende am bequemsten ist.

424. *Wenn $f(x)$ um x nach c konvergirt, so kann es um x nicht zugleich nach einem von c verschiedenen Werthe c_1 konvergiren.*

Beweis. Denn sollte beides zugleich der Fall sein, so müssten (nach 423) $f(x+qdx)-c$ und $f(x+qdx)-c_1$ beide mit q verschwinden, also (nach 422) auch die Differenz beider, das heisst $c-c_1$, was unmöglich ist, da c und c_1 zwei verschiedene Konstanten sind.

425. **Erklärung.** Eine Funktion $f(x)$ heisst in x **stetig**, wenn $f(x)$ um x nach *dem* Werthe konvergirt, den $f(x)$ in x hat.

426. *Wenn $f(x)$ in x stetig ist, so verschwindet für jedes endliche dx, {das mit x von gleicher Gattung ist}, die Differenz $f(x+qdx)-f(x)$ mit q {und wird auch zugleich mit q null}.*

Beweis unmittelbar aus 425, 423.

Anm. Wenn $f(x)$ in x nicht stetig ist, so verschwindet nicht für jedes endliche dx die Differenz $f(x+qdx)-f(x)$ mit q; sondern es könnte $f(x+qdx)$ für verschiedene Grössen dx nach verschiedenen Gränzen konvergiren, oder, wenn es auch für alle endlichen Werthe dx nach ein und demselben Werthe c konvergirte, also (nach 423) die Funktion $f(x)$ selbst *um* x nach diesem Werthe zu konvergirte, so würde doch $f(x)$, wenn es in x unstetig ist, dort in einen von c verschiedenen Werth überspringen.

427. **Erklärung.** Wenn $f_1(x)$ eine Zahlfunktion und $f(x)$ eine beliebige Funktion ist, und beide für denselben Werth von $x=a$ null werden, doch so, dass der Quotient $f(x):f_1(x)$ um $x=a$ nach einem konstanten Werthe c konvergirt: so verstehe ich unter dem Bruche

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}$$

diejenige Funktion, welche im Uebrigen mit jenem Quotienten übereinstimmt, aber für † $x=a$ den Werth c annimmt, und bezeichne 292 den Werth c, welchen dieser Bruch für $x=a$ annimmt, mit

$$c=\left[\frac{f(x)}{f_1(x)}\right]_{(x=a)}.$$

Anm. Es ist diese Bestimmung, ebenso wie die vorhergehenden, nicht bloss für die Funktionen extensiver Grössen, sondern auch für die gewöhnliche Funktionenlehre nothwendig.

In der That, mag nun x eine extensive Grösse oder eine Zahlgrösse, $f(x)$ eine extensive Funktion oder eine Zahlfunktion sein, so wird, wenn der Bruch

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}$$

wieder als eine Funktion behandelt werden soll, derselbe für jeden bestimmten Werth von x gleichfalls einen bestimmten Werth annehmen müssen (348). Dieser Werth wird im Allgemeinen durch Division der besonderen Werthe, welche $f(x)$ und $f_1(x)$ dann annehmen, gefunden. Aber wenn für $x=a$ sowohl $f(x)$ als $f_1(x)$ null werden, so wird der Quotient dieser besonderen Werthe vollkommen unbestimmt, eine Unbestimmtheit, welche für den Bruch $f(x):f_1(x)$ durchaus aufgehoben werden muss, falls man den Bruch Verknüpfungen unterwerfen will, die auch für den Fall, dass $x=a$ sei, ihre Geltung haben sollen.

An und für sich ist es möglich, in diesem Falle für jenen Bruch einen beliebigen bestimmten Werth b festzustellen, allein dann müsste in die Bezeichnung des Bruches diese Bestimmung, dass derselbe für $x = a$ den bestimmten Werth b annehmen sollte, mit aufgenommen werden. Diese willkürliche Bestimmung wird überflüssig, wenn der in der obigen Erklärung aufgestellte Begriff festgehalten wird, nach welchem jener Bruch in $x = a$ stetig gesetzt wird. Aber dieser Begriff setzt voraus, dass jener Bruch um $x = a$ nach einem bestimmten Werthe c zu konvergirt. Ist dies nicht der Fall, sondern konvergirt der Bruch

$$\frac{f(a + qb)}{f_1(a + qb)}$$

beim Verschwinden der positiven Zahlgrösse q nach verschiedenen Gränzen zu, je nachdem b andere Werthe annimmt, zum Beispiel bei Zahlgrössen, wenn b die Werthe $+1$, -1 oder $\cos p + i \sin p$ annimmt, so ist der oben gegebene Begriff nicht mehr anwendbar, und es bleibt nichts übrig, als dann eine willkürliche Bestimmung hinzuzufügen und mit in die Bezeichnung aufzunehmen.

Die Verkennung aller dieser Verhältnisse hat in die höhere Analysis eine heillose Verwirrung gebracht, welche sich häufig genug durch Widersprüche und fehlerhafte Resultate verrieth. Um diesen Irrthümern zu entgehen, hat man hier und da die Methode zu verbessern gesucht; namentlich ist es Cauchy's Verdienst, dass er durch einen unerschöpflichen Reichthum der genialsten Kunstgriffe die Methode überall, wo sie schien zu Irrthümern führen zu können, gegen dieselben sicher zu stellen suchte. Aber auch er konnte damit nicht zum Ziele 293 gelangen, weil er † das Uebel nicht bei der Wurzel ergriff, und nicht die wesentlichen Begriffsbestimmungen hinzufügte, aus deren Mangel alle jene Verwirrung hervorging. Ich habe mich daher genöthigt gesehen, diese Begriffsbestimmungen, so weit sie für das Folgende nothwendig erschienen, hier nachzutragen, und, statt mich auf frühere Bearbeitungen der Differenzialrechnung, der Potenzreihen und der Integralrechnung berufen zu können, musste ich diese Wissenschaften von vorne an aufbauen, um sie auch für extensive Grössen mit Sicherheit anwenden zu können. Es wurde dadurch um somehr geboten, mich nur auf das Nothwendigste zu beschränken.

Ich bemerke hier noch, was sich aus dem oben Bemerkten leicht ergiebt, dass ähnliche Begriffsbestimmungen für alle die Fälle festzustellen sind, wo die zu verknüpfenden Funktionen für gewisse Werthe der Variabeln in solche Ausdrücke übergehen, welche keinen Verknüpfungen (oder wenigstens nicht denen, durch welche jene Funktionen unter sich verbunden sind) unterworfen werden dürfen, also namentlich, wenn eine oder mehrere derselben unendlich oder mehrdeutig werden. In allen diesen Fällen kann die Bestimmung ganz analog der soeben mitgetheilten getroffen werden.

Die Bezeichnung, welche ich oben hinzugefügt {habe}, indem ich hinter die Funktion den besonderen Werth der Variabeln in Parenthese beifügte, um durch das Ganze den Werth auszudrücken, welchen die Funktion für diesen besonderen Werth der Variabeln annimmt, ist auch in vielen anderen Fällen mit Vortheil anwendbar, und zum Theil unvermeidlich.

Kapitel 2. **Differenzialrechnung.**

§ 1. Differenzial erster Ordnung.

428. Erklärung. Wenn q eine reelle Zahlgrösse, dx aber eine beliebige endliche Grösse, *welche mit x von gleicher Gattung ist*, bezeichnet, so verstehe ich unter der (nach der Veränderlichen x und dem Zahlfaktor q genommenen) Differenz der Funktion $f(x)$, geschrieben $d_{x,q}f(x)$, diejenige Funktion, welche der Gleichung

$$\text{(a)} \qquad d_{x,q}f(x) = \frac{f(x+q\,dx)-f(x)}{q}$$

genügt (wobei die Division durch q in dem {in Nr.} 427 bestimmten Sinne zu fassen ist).

429. Erklärung. Wenn der Ausdruck $d_{x,q}f(x)$ in $q=0$ und in x (425) stetig ist {vgl. auch 427}, so bezeichne ich $d_{x,0}f(x)$ mit $d_xf(x)$ † und nenne $d_xf(x)$ das nach x genommene Differenzial von 294 $f(x)$, das heisst, ich setze

$$d_xf(x) = d_{x,0}f(x) = \left[\frac{f(x+q\,dx)-f(x)}{q}\right]_{(q=0)}.$$

Wenn $d_{x,q}f(x)$ nicht die Eigenschaft hat, dass es in $q=0$ und in x stetig sei, so sage ich, dass auch $d_xf(x)$ unstetig sei.

Wenn in einer Formel das vor eine Funktion gesetzte Differenzialzeichen d ohne jeden Index geschrieben ist, so soll das heissen, dass die Formel allgemein gelten soll, nach welcher Variabeln auch die dadurch ausgedrückte Differenziation genommen sei, das heisst, welchen Index man auch dem d hinzufügen mag, vorausgesetzt nur, dass man dann in dieser Formel jedem Differenzialzeichen d (was vor eine Grösse tritt) denselben Index hinzufügt.

Anm. Es lässt sich der Begriff des Differenzials auch für den Fall, dass dasselbe unstetig wird, feststellen, und {es} lassen sich mit solchen Differenzialen unter gewissen Umständen noch gültige Verknüpfungen vornehmen. Doch ist es bei jeder Behandlung der Differenzialrechnung am zweckmässigsten, diesen Fall zunächst ganz auszuschliessen, und namentlich den Fall, wo das Differenzial unendlich wird, im Zusammenhange mit der allgemeinen Betrachtung unbegränzt wachsender Funktionen in einem eigenen, die ganze Analysis des Unendlichen behandelnden Abschnitte nachzuholen. Aus dem vorliegenden Werke schliessen wir jedoch diese Betrachtung aus, und *setzen im Folgenden bei jedem Differenzial voraus, dass es stetig sei.*

Noch bemerke ich, dass die Stetigkeit von $d_xf(x)$ voraussetzt, dass

$$f(x+q\,dx)-f(x)$$

um $q=0$ gleichfalls null werde, das heisst, dass auch $f(x)$ stetig sei.

430. *Wenn $d_x f(x)$ stetig ist und $f(x) = y$ gesetzt wird, so ist*

$$f(x + q dx) = f(x) + q(d_x f(x) + N)$$
$$= y + q(d_x y + N),$$

wo N mit der reellen Zahlgrösse q zugleich null wird.

Beweis. Man setze

$$\frac{f(x + q dx) - f(x)}{q} - d_x f(x) = N.$$

Da $d_x f(x)$ stetig ist (nach Hypothesis), so ist (nach 429) auch der Quotient

$$\frac{f(x + q dx) - f(x)}{q}$$

in $q = 0$ stetig, und dann $= d_x f(x)$, also wird N als die Differenz dieser beiden Ausdrücke mit q zugleich null. Dann erhalten wir aber

$$f(x + q dx) = f(x) + q(d_x f(x) + N) = y + q(d_x y + N).$$

295 **431.** *Wenn A ein konstanter Lückenausdruck mit n {vertauschbaren} Lücken (in jedem Gliede) ist, in welche Grössen von der Gattung x eintreten sollen, so ist*

(a) $$d_x(\mathsf{A}x^n) = n\mathsf{A}x^{n-1}dx;$$

ins Besondere ist

(b) $$d_x(\mathsf{A}x) = \mathsf{A}dx$$

(c) $$d_x\mathsf{A} = 0.$$

Beweis. Da für die Produkte, deren Faktoren in die Lücken eines {solchen} Lückenausdruckes eintreten sollen, (nach 363 {Anm.}) die gewöhnlichen Gesetze der Algebra gelten, so folgt, wie in der Algebra, dass

$$\mathsf{A}(x + q dx)^n = \mathsf{A}x^n + nq\mathsf{A}x^{n-1}dx + q^2\mathsf{B}$$

ist, wo B eine steigende Potenzreihe von q ist. Hieraus folgt unmittelbar, dass

$$\frac{\mathsf{A}(x + q dx)^n - \mathsf{A}x^n}{q} = n\mathsf{A}x^{n-1}dx + q\mathsf{B}$$

in $q = 0$ stetig ist, also ist (nach 429)

$$d_x(\mathsf{A}x^n) = n\mathsf{A}x^{n-1}dx.$$

Hieraus folgen die Formeln (b) und (c) für $n = 1$ und 0.

432. *Wenn u_1, u_2, … beliebige Funktionen einer beliebigen Variabeln x sind, so ist (wenn du_1, du_2, … stetig sind)*

$$d(u_1 + u_2 + \cdots) = du_1 + du_2 + \cdots.$$

Beweis. Es sei $u_1 = f_1(x)$, $u_2 = f_2(x)$, …, so ist (nach 430)

$$f_1(x + q dx) = u_1 + q(du_1 + N_1),$$

wo N_1 mit q zugleich null wird, und so für jeden andern Index. Also

$$\Sigma f_a(x + qdx) = \Sigma\{u_a + q(d_x u_a + N_a)\}.$$

Also ist

$$\frac{\Sigma\{f_a(x + qdx) - u_a\}}{q} = \Sigma\{d_x u_a + N_a\}$$
$$= \Sigma d_x u_a + \Sigma N_a.$$

Da nun N_1, N_2, ... mit q null werden, wie gezeigt, so wird auch (nach 421) ihre Summe ΣN_a mit q null, also

$$\left[\frac{\Sigma\{f_a(x + qdx) - u_a\}}{q}\right]_{(q=0)} = \Sigma d_x u_a.$$

Die linke Seite ist aber 296

$$d_x \Sigma f_a(x) = d_x \Sigma u_a,$$

also

$$d_x \Sigma u_a = \Sigma d_x u_a,$$

oder, da die Formel für jeden Index x gilt,

$$d\Sigma u_a = \Sigma du_a.$$

433. *Wenn y und z beliebige Funktionen von x sind, und $[yz]$ ein beliebiges Produkt derselben ist, so ist, (vorausgesetzt, dass dy und dz stetig sind),*

$$d[yz] = [dy \, . \, z] + [y \, . \, dz].$$

Beweis. Es sei $y = f(x)$, $z = F(x)$, so ist (nach 430)

$$f(x + qdx) = y + q(d_x y + N),$$
$$F(x + qdx) = z + q(d_x z + N'),$$

wo N und N' mit q zugleich null werden. Somit ist

$$d_x[yz] = \left[\frac{[f(x + qdx) \, . \, F(x + qdx)] - [yz]}{q}\right]_{(q=0)}$$
$$= [y\,(d_x z + N')] + [(d_x y + N)z] \text{ für } q = 0,$$

oder (nach 429) mit Weglassung des Index,

$$d[yz] = [y \, . \, dz] + [dy \, . \, z] + [yN'] + [Nz] \text{ für } q = 0.$$

Da nun N und N' mit q null werden, so wird (nach 421) auch

$$[yl]N' + [lz]N,$$

wo l eine Lücke, in welche N {oder N'} eintreten soll, bezeichnet, mit q null, das heisst, $[yN'] + [Nz]$ wird mit q null, also ist

$$d[yz] = [y \, . \, dz] + [dy \, . \, z].$$

434. *Wenn y aus seinen normalen Einheiten e_1, e_2, ... durch die Zahlgrössen y_1, y_2, ... ableitbar ist, und y_1, y_2, ... Funktionen einer beliebigen Variabeln x sind, so ist (vorausgesetzt, dass dy_1, dy_2, ... stetig sind)*

$$dy = e_1 dy_1 + e_2 dy_2 + \cdots.$$

Beweis. Da

$$y = e_1 y_1 + e_2 y_2 + \cdots$$

ist (nach Hypothesis), so ist

$$dy = d(e_1 y_1) + d(e_2 y_2) + \cdots \qquad [432]$$
$$= e_1 dy_1 + e_2 dy_2 + \cdots \qquad [433, 431\,(c)].$$

Anm. Hierdurch lässt sich das Differenzial einer extensiven Funktion auf die Differenziale von Zahlfunktionen zurückführen.

§ 2. Differenzialquotient erster Ordnung.

435. Erklärung. Unter $\frac{d}{dx}f(x)$ oder unter $f'(x)$ **verstehe ich** 297 **(vorausgesetzt, dass $d_x f(x)$ stetig sei) den Ausdruck, welcher, † mit jeder** Grösse dx **(die mit x von gleicher Gattung ist) multiplicirt, $d_x f(x)$ liefert, das heisst, welcher der Gleichung**

$$\frac{d}{dx}f(x)\,.\,dx = f'(x)dx = d_x f(x) = \left[\frac{f(x+\varrho dx) - f(x)}{\varrho}\right]_{(\varrho=0)}$$

genügt. Ich nenne $\frac{d}{dx}f(x)$ den **nach** x **genommenen** Differenzialquotienten erster Ordnung **von $f(x)$, und $f'(x)$ die erste abgeleitete** Funktion **von $f(x)$.**

436. Erklärung. Wenn man die Differenzialquotienten einer Funktion $u = f(x, y, \ldots)$ **mehrerer Veränderlichen $x, y, \ldots$ auf die** Weise bildet, dass man jedesmal den Differenzialquotienten nach einer dieser Veränderlichen nimmt, während man dabei die übrigen Veränderlichen wie Konstante behandelt, so nenne ich die so hervorgehenden Differenzialquotienten die zu dem Vereine der Veränderlichen $x, y, \ldots$ gehörigen partiellen Differenzialquotienten, und bezeichne dann den in diesem Sinne nach $x, y, \ldots$ genommenen Differenzialquotienten mit

$$\frac{d}{dx}u, \text{ oder } \frac{d}{dx}f(x, y, \ldots), \ \ldots,$$

{die entsprechenden Differenzen und Differenziale mit $d_{x,\varrho}u$ und $d_x u$ oder mit $d_{x,\varrho}f(x, y, \ldots)$ und $d_x f(x, y, \ldots)$, ...}.

Anm. Es ist bei den partiellen Differenzialquotienten unumgänglich nothwendig (worauf schon Jacobi in Crelle's Journal, Bd. 22, S. 321 {Werke, Bd. 3 S. 397} aufmerksam gemacht hat) den zugehörigen Verein der Veränderlichen anzugeben, also nicht bloss diejenige Veränderliche zu nennen, nach welcher der Differenzialquotient genommen werden soll, sondern auch diejenigen, welche bei der Bildung desselben als Konstante behandelt werden sollen. Denn, wenn zum Beispiel eine Gleichung zwischen x und y hervortritt, so lässt sich die Anzahl der Veränderlichen um eine vermindern; schafft man zum Beispiel x weg, so bleiben nur $y, z, \ldots$ übrig; und betrachtet man jetzt diese als den Verein der Veränderlichen bildend, so

gewinnt $\frac{d}{dy}u$ jetzt eine ganz andere Bedeutung und im Allgemeinen einen ganz andern Werth als vorher.

Aber es würde sehr unbequem sein, wenn man den ganzen Verein der Variabeln, zu welchem die partiellen Differenzialquotienten gehören, mit in die Bezeichnung derselben aufnehmen wollte. Man beugt allen Verwechselungen vor, wenn man den Verein der Veränderlichen jedesmal angiebt, und wenn man, sobald in einer zusammenhängenden Darstellung bei der Differenziation nach derselben Variabeln, zum Beispiel nach x, das eine Mal andere Grössen als konstant behandelt werden sollen, als das andere Mal, ein neues, † im Uebrigen willkür- 298 liches Zeichen statt $\frac{d}{dx}$ setzt; hat man dann die Bedeutung dieses Zeichens angegeben, so ist eine Verwechselung unmöglich.

Die allgemeine Bezeichnung durch

$$\frac{d}{dx}u,$$

welche ich für die partiellen Differenzialquotienten nach x gewählt habe, bedarf, obwohl sie ungebräuchlich ist, wohl kaum einer Rechtfertigung, indem sie, ohne willkürlich zu sein, äusserst bequem ist, und eine so ungehinderte Verwendung gestattet, wie keine andere.

437. *Wenn $e_1, e_2, \ldots$ die normalen Einheiten von $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots$ sind, und $\delta_1 f(x)$, $\delta_2 f(x), \ldots$ die nach $x_1, x_2, \ldots$ genommenen {partiellen} Differenzialquotienten von $f(x)$, welche zu dem Vereine der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$ gehören, bezeichnen, so ist (vorausgesetzt, dass $d_x f(x)$ stetig ist)*

$$d_x f(x) = \delta_1 f(x) . dx_1 + \delta_2 f(x) . dx_2 + \cdots.$$

Beweis. 1. Es seien die normalen Einheiten $e_1, e_2, \ldots$ in zwei Gruppen zerlegt, und y aus der einen Gruppe, z aus der andern numerisch abgeleitet, und zwar so, dass $x = y + z$ sei, so zeige ich, dass $d_x f(x) = d_y f(x) + d_z f(x)$ sei, wo bei den durch d_y, d_z bezeichneten Differenziationen y und z als den Verein der Variabeln bildend gedacht sind.

In der That, es sei dy aus denselben Einheiten ableitbar, wie y, und dz aus denselben wie z, und sei

$$dy + dz = dx = e_1 dx_1 + e_2 dx_2 + \cdots.$$

Nun ist (nach Hypothesis) $d_x f(x)$ stetig, das heisst, es ist

$$\frac{f(x + q dx) - f(x)}{q}$$

für jeden Werth dx (der aus $e_1, e_2, \ldots$ ableitbar ist) in $q = 0$ und in x stetig, also auch, wenn man dy statt dx setzt, das heisst, es ist

$$\frac{f(x + q dy) - f(x)}{q}$$

in $q = 0$ und in x stetig. Ferner ist

$$\frac{f(x + q dy) - f(x)}{q} = \frac{f(y + q dy + z) - f(y + z)}{q} = d_{y,q} f(x),$$

also ist $d_y f(x)$ von $d_{y.q} f(x)$ verschieden um eine Grösse N, die mit q null wird, somit

$$d_y f(x) = \frac{f(x+q\,dy) - f(x)}{q} + N$$

und ebenso

$$d_z f(x) = \frac{f(x+q\,dz) - f(x)}{q} + N_1,$$

299 wo N und N_1 mit q null werden, und die ersten Glieder in $\dagger\ q = 0$ und in x stetig sind.

Wenn nun eine Funktion $\varphi(x)$ in x stetig ist, so heisst das (nach 425), es konvergire $\varphi(x + q\,dx)$, wo dx eine beliebige Grösse, die mit x von gleicher Gattung ist, und q eine positive Zahl bedeutet, um $q = 0$ nach einem Werthe zu, den es in $q = 0$ erreicht, das heisst, es lasse sich $\varphi(x + q\,dx)$ in der Form $\varphi(x) + N_2$ darstellen, wo N_2 mit q null wird. Demnach wird $\varphi(x) = \varphi(x + q\,dx) - N_2$, oder, falls wir für dx, das willkürlich war, das obige dz setzen, $\varphi(x) = \varphi(x + q\,dz) - N_2$. Wenden wir diese Umformung auf das erste Glied von $d_y f(x)$ an, also auf die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{f(x+q\,dy) - f(x)}{q},$$

so erhalten wir

$$d_y f(x) = \frac{f(x+q\,dz+q\,dy) - f(x+q\,dz)}{q} + N - N_2.$$

Hier ist

$$q\,dz + q\,dy = q(dz + dy) = q\,dx,$$

da wir oben $dy + dz = dx$ setzten, also

$$d_y f(x) + d_z f(x) =$$

$$= \frac{f(x+q\,dx) - f(x+q\,dz) + f(x+q\,dz) - f(x)}{q} + N + N_1 - N_2.$$

Hier hebt sich das zweite und dritte Glied im Zähler, und da $N + N_1 - N_2 = \mathsf{N}$ (nach 421) mit q null wird, so erhalten wir

$$d_y f(x) + d_z f(x) = \frac{f(x+q\,dx) - f(x)}{q} + \mathsf{N},$$

wo N mit q null wird, also

$$d_y f(x) + d_z f(x) = d_x f(x).$$

2. Da man nun ebenso, wie man x in y und z zerlegte, wieder y oder z zerlegen kann, so gilt der Satz auch für beliebig viele Stücke, in die man x in der Art zerlegen kann, dass jedes Stück aus einer Gruppe der Einheiten $e_1, e_2, \ldots$ numerisch abgeleitet ist, und die verschiedenen Gruppen keine gleichen Einheiten enthalten; also namentlich, wenn $x_1 e_1 = y_1$, $x_2 e_2 = y_2, \ldots$ und demgemäss $dy_1 = e_1 dx_1$, $dy_2 = e_2 dx_2, \ldots$ ist, so ist

$$d_x f(x) = d_{y_1} f(x) + d_{y_2} f(x) + \cdots,$$

wo die durch $d_{y_1}, \ldots$ bezeichneten partiellen Differenziale sich auf den Verein der Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots$ beziehen.

3. Nun ist

$$d_{y_1} f(x) = \left[\frac{f(x + q d y_1) - f(x)}{q}\right]_{(q=0)}.$$

Aber {man hat}

$$f(x + q d y_1) = f(x + q e_1 d x_1) = f(x_1 e_1 + z + q e_1 d x_1),$$

wenn der Kürze wegen $x_2 e_2 + x_3 e_3 + \cdots$ mit z bezeichnet wird, 300 also ist

$$f(x + q d y_1) = f(e_1(x_1 + q d x_1) + z),$$

also

$$\begin{aligned} d_{y_1} f(x) &= \left[\frac{f(e_1(x_1 + q d x_1) + z) - f(e_1 x_1 + z)}{q}\right]_{(q=0)} \\ &= d_{x_1} f(x) = \frac{d}{d x_1} f(x) \, . \, d x_1 \qquad \text{[nach 436, \{435\}]} \\ &= \delta_1 f(x) \, . \, d x_1, \end{aligned}$$

und ebenso für die übrigen Indices. Setzt man diese Werthe in die vorher gefundene Gleichung ein, so erhält man

$$d_x f(x) = \delta_1 f(x) \, . \, d x_1 + \delta_2 f(x) \, . \, d x_2 + \cdots.$$

438. *Wenn $d_x f(x)$ stetig ist, so ist $\frac{d}{dx} f(x)$ oder $f'(x)$ ein von dx unabhängiger Quotient, und zwar, wenn $e_1, e_2, \ldots$ die normalen Einheiten von $x = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \cdots$ sind, so ist*

$$f'(x) e_r = \frac{d}{d x_r} f(x) = \delta_r f(x)$$

und

$$f'(x) = \frac{\delta_1 f(x), \ \delta_2 f(x), \ \ldots}{e_1, \ \ e_2, \ \ \ldots},$$

wo $\delta_1, \delta_2, \ldots$ oder $\frac{d}{d x_1}, \frac{d}{d x_2}, \ldots$ die zu dem Verein der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$ gehörigen {partiellen} Differenzialquotienten nach $x_1, x_2, \ldots$ bezeichnen.

Beweis. Wenn x eine Zahlgrösse ist, so ist (nach 428) auch dx eine Zahlgrösse und

$$\frac{d_{x,q} f(x)}{dx} = \frac{f(x + q dx) - f(x)}{q dx} = \frac{f(x + q') - f(x)}{q'},$$

wenn man $q dx$ mit q' bezeichnet. Nun wird q' mit q null {und, wenn $dx \gtrless 0$ ist, auch umgekehrt q mit q'}, also ist

$$\frac{d_x f(x)}{dx} = \frac{d_{x,0} f(x)}{dx} = \left[\frac{f(x + q') - f(x)}{q'}\right]_{(q'=0)}.$$

Ferner ist (nach Hypothesis) $d_x f(x)$, also, da $dx \gtrless 0$ ist, auch $\frac{d_x f(x)}{dx}$ stetig, und somit auch

$$\frac{f(x + q') - f(x)}{q'}$$

in $q' = 0$ stetig, das heisst (nach 425), es konvergirt dieser Ausdruck, wenn x konstant ist, um $q' = 0$ nach einem konstanten (von q' un-301 abhängigen) † Werthe, welchen er in $q' = 0$ erreicht; dieser Werth ist also bei variablem x eine blosse Funktion von x, unabhängig von q', das heisst, von qdx. Es sei diese Funktion $\varphi(x)$, so ist

$$d_x f(x) = \varphi(x) \, . \, dx,$$

also ist $\varphi(x)$ die Grösse, welche mit jedem dx multiplicirt, $d_x f(x)$ liefert, das heisst (nach 435),

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} f(x),$$

also ist $\frac{d}{dx} f(x)$ von dx unabhängig.

2. Es sei $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$, so ist (nach 437)

$$d_x f(x) = \delta_1 f(x) \, . \, dx_1 + \delta_2 f(x) \, . \, dx_2 + \cdots,$$

wo δ_1, δ_2, ... die in jenem Satze angegebene Bedeutung haben. Nun ist $f'(x)$ (nach 435) der Ausdruck, welcher mit jedem

$$dx = e_1 dx_1 + e_2 dx_2 + \cdots$$

multiplicirt $d_x f(x)$ giebt, also hat man

$$f'(x)(e_1 dx_1 + e_2 dx_2 + \cdots) = \delta_1 f(x) \, . \, dx_1 + \delta_2 f(x) \, . \, dx_2 + \cdots,$$

also

$$f'(x) e_1 \, . \, dx_1 + f'(x) e_2 \, . \, dx_2 + \cdots = \delta_1 f(x) \, . \, dx_1 + \delta_2 f(x) \, . \, dx_2 + \cdots.$$

Nach Beweis 1 und nach 350 sind aber die Grössen $\delta_1 f(x)$, $\delta_2 f(x)$, ... blosse Funktionen von x, also von dx_1, dx_2, ... unabhängig; das heisst, für jeden Werth x ist die rechte Seite obiger Gleichung eine Summe von Produkten der variabeln Zahlgrössen dx_1, dx_2, ... mit Grössen, welche bei unverändertem x sich nicht ändern; also muss auch die linke Seite von gleicher Form, und müssen die entsprechenden Koefficienten gleich sein, das heisst, es ist

$$f'(x) e_1 = \delta_1 f(x), \;\; f'(x) e_2 = \delta_2 f(x), \;\; \ldots.$$

Damit ist $f'(x)$ als derjenige Ausdruck bestimmt, welcher, mit e_1, e_2, ... einzeln multiplicirt, beziehlich die Werthe $\delta_1 f(x)$, $\delta_2 f(x)$, ... liefert, das heisst (nach 377), es ist

$$f'(x) = \frac{\delta_1 f(x), \;\; \delta_2 f(x), \;\; \ldots}{e_1, \;\; e_2, \;\; \ldots}.$$

Anm. Hierdurch ist die *Differenziation nach einer extensiven Grösse* x auf die partiellen Differenzialquotienten nach Zahlgrössen zurückgeführt, während in 434 das *Differenzial der extensiven Funktion* auf die Differenziale von Zahlfunktionen zurückgeführt war, wodurch also die Reduktion des nach einer extensiven Grösse genommenen Differenzialquotienten einer extensiven Funktion auf die nach Zahlgrössen genommenen Differenzialquotienten von Zahlfunktionen vollendet ist.

439. *Wenn z eine beliebige endliche Grösse, welche mit x von gleicher* 302
Gattung ist, und q wie bisher eine positive Zahlgrösse bezeichnet, so ist

$$f(x + qz) = f(x) + q(f'(x)z + N),$$

wo N mit q null wird (und vorausgesetzt ist, dass $d_x f(x)$ stetig ist).

Beweis. Es ist für jede endliche Grösse dx, welche mit x von gleicher Gattung ist, (nach 430)

$$f(x + qdx) = f(x) + q(d_x f(x) + N),$$

wo N mit q null wird. Es ist aber dann (nach 435) $d_x f(x) = f'(x)dx$, also

$$f(x + qdx) = f(x) + q(f'(x)dx + N);$$

da aber z nach der Voraussetzung dieselbe Bedeutung hat wie dx, so können wir auch jenes für dieses setzen und erhalten die zu erweisende Gleichung.

440. *Es ist*

$$df(y) = f'(y)dy = \frac{d}{dy}f(y) \,.\, dy = d_y f(y)$$

auch dann, wenn y wieder Funktion einer beliebigen Grösse ist, auf welche sich die durch das vorgesetzte Zeichen d dargestellte Differenziation bezieht (vorausgesetzt, dass dy und $df(y)$ stetig sind).

Beweis. Es beziehe sich die Differenziation auf x und sei $y = \varphi(x)$, so ist (nach 430)

$$(*) \qquad \varphi(x + qdx) = y + q(dy + N),$$

wo N mit q null wird, und

$$df(y) = df(\varphi(x)) = \left[\frac{f[\varphi(x + qdx)] - f(y)}{q}\right]_{(q=0)} \qquad [429]$$

$$= \left[\frac{f[y + q(dy + N)] - f(y)}{q}\right]_{(q=0)} \qquad [(*)]$$

$$= \left[\frac{f(y) + q[f'(y)(dy + N) + N'] - f(y)}{q}\right]_{(q=0)} \qquad [439],$$

wo N' mit q null wird,

$$= f'(y)(dy + N) + N' \text{ für } q = 0.$$

Da nun N und N' mit q null werden, so wird (nach 421) auch $f'(y)N + N'$ mit q null, und also ist

$$df(y) = f'(y)dy.$$

441. *Wenn x und $y = f(x)$ aus den n ursprünglichen Einheiten* 303
$e_1, e_2, \dots e_n$ numerisch ableitbar sind, und

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$
$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n$$

ist, und $d_x y$ stetig ist, so ist der Potenzwerth des Quotienten $\frac{d}{dx} y$ gleich der Funktionaldeterminante *von $y_1, y_2, \ldots$ nach $x_1, x_2, \ldots,$ das heisst, gleich der Determinante, welche aus den partiellen Differenzialquotienten der Funktionen $y_1, y_2, \ldots$ nach den Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ gebildet wird, das heisst,*

$$\left[f'(x)^n\right] = \left[\left(\frac{d}{dx} y\right)^n\right] = \sum \mp \frac{d}{dx_1} y_1 \cdot \frac{d}{dx_2} y_2 \cdots \frac{d}{dx_n} y_n,$$

wo für jeden Index r von 1 bis n, das Zeichen $\frac{d}{dx_r}$ den partiellen Differenzialquotienten bezeichnet, welcher nach x_r so genommen ist, dass alle übrigen unter den Variabeln $x_1, \ldots x_n$ (ausser x_r) bei der Differenziation als konstant gesetzt sind.

Beweis. Es ist, wenn das Zeichen $\frac{d}{dx_r}$ der Kürze wegen durch δ_r ersetzt wird, (nach 438)

$$f'(x) = \frac{\delta_1 y,\ \delta_2 y,\ \ldots,\ \delta_n y}{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n},$$

also (nach 383) der Potenzwerth

$$\left[f'(x)^n\right] = [\delta_1 y \,.\, \delta_2 y \,\ldots\, \delta_n y].$$

Aber, da $y = e_1 y_1 + e_2 y_2 + \cdots$ ist, so ist (nach 434)

$$\delta_1 y = e_1 \delta_1 y_1 + e_2 \delta_1 y_2 + \cdots,$$

also

$$\left[f'(x)^n\right] = [e_1\delta_1 y_1 + e_2\delta_1 y_2 + \cdots)(e_1\delta_2 y_1 + e_2\delta_2 y_2 + \cdots)\cdots(e_1\delta_n y_1 + e_2\delta_n y_2 + \cdots)]$$
$$= \Sigma \mp \delta_1 y_1 \,.\, \delta_2 y_2 \ldots \delta_n y_n \qquad [63],$$

indem nämlich $[e_1 e_2 \ldots e_n]$ (nach 94) gleich 1 ist.

Anm. Der Begriff der Funktionaldeterminante, wie er von Jacobi in Crelle's Journal, Bd. 22, S. 319 ff. {Werke, Bd. 3, S. 393 ff.}, zuerst aufgestellt wurde, tritt hier als Potenzwerth der abgeleiteten Funktion in seiner wahren Bedeutung hervor, und die dort nachgewiesenen Sätze ergeben sich aus dieser Bedeutung aufs leichteste; ich überlasse diese Ableitung daher dem Leser.

442. *Wenn u eine beliebige Funktion der veränderlichen Grössen $x, y, \ldots$ ist, so ist*

304
$$du = \frac{d}{dx} u \,.\, dx + \frac{d}{dy} u \,.\, dy + \cdots$$
$$= d_x u + d_y u + \cdots,$$

wo

$$\frac{d}{dx},\ \frac{d}{dy},\ \cdots$$

die zu dem Verein der Veränderlichen $x, y, \ldots$ gehörigen partiellen Differenzialquotienten und $d_x, d_y, \ldots$ in demselben Sinne die partiellen Differenziale bezeichnen (und die letzteren als stetig vorausgesetzt sind).

Beweis. Es sei x aus seinen normalen Einheiten durch die veränderlichen Zahlgrössen $x_1, x_2, \ldots$, ebenso y aus seinen normalen Einheiten durch die veränderlichen Zahlgrössen $y_1, y_2, \ldots$ ableitbar, und so weiter. Man bilde nun ein neues System normaler Einheiten $e_1, e_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots, \ldots$ und setze

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$$
$$+ y_1 f_1 + y_2 f_2 + \cdots + \cdots,$$

so wird u (nach 352) eine Funktion der einzigen Variabeln v und man erhält (nach 437)

$$d_v u = \frac{d}{dx_1} u \,.\, dx_1 + \frac{d}{dx_2} u \,.\, dx_2 + \cdots$$
$$+ \frac{d}{dy_1} u \,.\, dy_1 + \frac{d}{dy_2} u \,.\, dy_2 + \cdots + \cdots,$$

wo $\frac{d}{dx_1}, \ldots$ sich auf den Verein der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, \ldots$ beziehen. Da u eine Funktion von v ist, so können wir (nach 440) statt $d_v u$ auch du schreiben.

Ferner ist, wenn man $y, z, \ldots$, das heisst, $y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots, \ldots$ konstant setzt (nach 437)

$$\frac{d}{dx} u \,.\, dx = \frac{d}{dx_1} u \,.\, dx_1 + \frac{d}{dx_2} u \,.\, dx_2 + \cdots,$$

und ebenso

$$\frac{d}{dy} u \,.\, dy = \frac{d}{dy_1} u \,.\, dy_1 + \frac{d}{dy_2} u \,.\, dy_2 + \cdots, \cdots.$$

Also

$$du = \frac{d}{dx} u \,.\, dx + \frac{d}{dy} u \,.\, dy + \cdots.$$

§ 3. Differenziale höherer Ordnung.

443. Erklärung. Wenn u eine beliebige Funktion ist, und δ und δ_1 zwei beliebige Differenzzeichen ($d_{x,q}$, $d_{y,q}$) † oder Differenzialzeichen (d_x, d_y) sind, bei denen sich jedoch die Differenziation auf ein und denselben Verein von Variabeln bezieht, *deren Differenziale bei jeder Differenziation konstant gesetzt werden*, so verstehe ich unter $\delta\delta_1 u$ den Ausdruck $\delta(\delta_1 u)$, und nenne $\delta\delta_1$ in diesem Sinne ein Produkt von Differenzzeichen; und halte diese Bestimmung auch dann noch fest, wenn δ_1 ein Produkt von Differenzzeichen ist, das heisst, ich setze 305

$$\delta\delta_1 u = \delta(\delta_1 u)$$
$$\delta\delta_1\delta_2 u = \delta(\delta_1\delta_2 u) = \delta(\delta_1(\delta_2 u))$$

und so weiter, wo $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ sich auf denselben Verein von Variabeln beziehen, deren Differenziale konstant gesetzt werden.

444. Erklärung. Wenn δ ein beliebiges Differenzzeichen $(d_{x,q})$ {oder ein Differenzialzeichen (d_x)} ist, so setze ich

$$\delta^0 u = u$$
$$\delta^{n+1} u = \delta \delta^n u,$$

letzteres jedoch nur, wenn $n + 1$ eine ganze positive Zahl ist.

Anm. Es lässt sich auch dem negativen Exponenten eine Bedeutung beilegen, was jedoch erst in der Integralrechnung klar werden kann.

445. *Es ist*

$$\text{(a)}\quad d_{x,q} d_{y,q} f(x,y) = \frac{f(x+q\,dx, y+q\,dy) - f(x+q\,dx, y) - f(x, y+q\,dy) + f(x,y)}{q^2},$$

auch wenn $f(x,y)$ *noch andere Veränderliche enthält, welche aber alle bei der Differenziation konstant gesetzt werden, und ebenso ist*

$$\text{(b)}\qquad d_{x,q} d_{y,q} u = d_{y,q} d_{x,q} u.$$

Beweis. Es ist (nach 443)

$$d_{x,q} d_{y,q} f(x,y) = d_{x,q}[d_{y,q} f(x,y)]$$
$$= d_{x,q} \frac{f(x, y+q\,dy) - f(x,y)}{q} \qquad [436, 428]$$

und dies aus demselben Grunde

$$= \frac{f(x+q\,dx, y+q\,dy) - f(x+q\,dx, y) - f(x, y+q\,dy) + f(x,y)}{q^2},$$

306 Also ist Formel (a) erwiesen. Aber aus dieser Formel folgt sogleich, dass $d_{y,q} d_{x,q} f(x,y)$ denselben Ausdruck liefert, wie $d_{x,q} d_{y,q} f(x,y)$, also auch Formel (b) erwiesen.

Anm. Man hätte auch das zu y gehörige q von dem zu x gehörigen verschieden setzen und jenes etwa mit q_1 bezeichnen können, so wären die Formeln noch bestehen geblieben, eine Verallgemeinerung, die jedoch ohne besonderen Nutzen ist.

446. *Die Ordnung der auf einander folgenden Differenzzeichen* $(d_{x,q}, \ldots)$, *unter denen die Differenzialzeichen mit einbegriffen sind, ist gleichgültig für das Resultat.*

Beweis. Denn nach 445(b) lassen sich je zwei auf einander folgende Differenzzeichen vertauschen.

447. *Wenn ein höheres Differenzial stetig ist, so sind auch die niederen Differenziale, durch deren fortschreitende Differenziation jenes entstanden ist, stetig.*

Beweis. Es sei u ein beliebiges Differenzial, und sei $d_x u$ stetig. Es wird u im Allgemeinen eine Funktion der Variabeln $x, y, \ldots$ und ihrer Differenziale sein. Allein, da bei der Differenziation nach x alle übrigen Variabeln und sämmtliche Differenziale als Konstante be-

handelt werden, so genügt es für diese Differenziation, u als blosse Funktion von x zu betrachten. Es sei in diesem Sinne $u = f(x)$, so ist

$$d_x u = \left[\frac{f(x + q\,dx) - f(x)}{q}\right]_{(q=0)}.$$

Da nun $d_x u$ stetig ist, so muss der in Klammer geschlossene Bruch um $q = 0$ nach einer bestimmten endlichen Gränze konvergiren, die er in $q = 0$ erreicht, also muss mit dem Nenner (q) auch der Zähler null werden, das heisst, $f(x + q\,dx) - f(x)$ muss mit q null werden, das heisst (nach 425), $f(x)$ ist in x stetig, also auch u.

Durch Fortsetzung dieser Schlussweise gelangt man zu dem allgemeinen Resultate des Satzes.

448. *Es ist, wenn* A *einen Ausdruck mit* n *{vertauschbaren} Lücken von der Gattung* x *bezeichnet,*

$$d_x^m(\mathsf{A}x^n) = \frac{n!}{(n-m)!}\mathsf{A}x^{n-m}dx^m.$$

Beweis. 1. Der Satz gilt (nach 431) für $m = 1$.

2. Wenn nun der Satz für irgend einen Werth m gilt, so gilt er auch für $m + 1$; denn dann ist

$$d_x^{m+1}(\mathsf{A}x^n) = d_x(d_x^m(\mathsf{A}x^n)) \qquad [444]$$

307

$$= d_x\left(\frac{n!}{(n-m)!}\mathsf{A}x^{n-m}dx^m\right),$$

da nach der Annahme der Satz für den angenommenen Werth m gilt,

$$= d_x\left(\frac{n!}{(n-m)!}\mathsf{A}dx^m x^{n-m}\right) \qquad [362].$$

Da nun (nach 443) dx bei der Differenziation als konstant betrachtet werden soll, und es mit x von gleicher Gattung ist, so ist

$$\frac{n!}{(n-m)!}\mathsf{A}dx^m$$

ein Ausdruck mit $n - m$ Lücken, folglich erhalten wir (nach 431) den zuletzt gefundenen Ausdruck

$$= \frac{(n-m)n!}{(n-m)!}\mathsf{A}dx^m x^{n-m-1}dx$$

$$= \frac{n!}{(n-m-1)!}\mathsf{A}x^{n-m-1}dx^{m+1} \qquad \{362\},$$

das heisst, der Satz gilt dann auch, wenn man $m + 1$ statt m setzt; da er nun (nach Beweis 1) für $m = 1$ gilt, so gilt er auch für $m = 2$, und weil für $m = 2$, so auch für $m = 3$, also für alle positiven Werthe.

449. *Wenn* $e_1, e_2, \ldots$ *die normalen Einheiten von* $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots$ *sind, und* $\delta_1, \delta_2, \ldots$ *die zu dem Vereine der Veränderlichen* $x_1, x_2, \ldots$

gehörigen partiellen Differenzialquotienten nach $x_1, x_2, \ldots$ bezeichnen, so ist (vorausgesetzt, dass $d_x^n u$ stetig sei)

$$d_x^n u = \Sigma\{\delta_a \delta_b \ldots u \,.\, dx_a dx_b \ldots\},$$

wo die Anzahl der Faktoren $dx_a, dx_b, \ldots$ in jedem Gliede n ist, und die Summe sich auf alle unter dieser Bedingung möglichen ganzen positiven Werthe $a, b, \ldots$ bezieht.

Beweis. Nach 437 ist

$$d_x u = \Sigma\{\delta_a u \,.\, dx_a\}.$$

Differenzirt man noch einmal nach x, so ist, da bei dieser Differenziation (nach 443) dx, also auch $dx_1, dx_2, \ldots$ konstant zu setzen sind, (nach 437)

$$d_x^2 u = \Sigma\{\delta_b \delta_a u \,.\, dx_a dx_b\} = \Sigma\{\delta_a \delta_b u \,.\, dx_a dx_b\} \qquad [446],$$

und so weiter.

450. Erklärung. Unter

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \text{ oder unter } f^{(n)}(x)$$

verstehe ich (vorausgesetzt, dass $d_x^n f(x)$ stetig ist) den Ausdruck, 308 welcher mit dx^n multiplicirt, was auch dx für eine mit x gleichgattige Grösse sein mag, $d_x^n f(x)$ liefert.

451. *Wenn $d_x^n f(x)$ stetig ist, so ist $f^{(n)}(x)$ derjenige Ausdruck mit je n {vertauschbaren} Lücken in jedem Gliede, welcher die Eigenschaft hat, dass*

$$\text{(a)} \qquad f^{(n)}(x)(\overset{n}{\smile}{e_r e_s \ldots}) = \delta_r \delta_s \ldots f(x)$$

ist, für jede Reihe von n Indices $r, s, \ldots$, wobei die Bedeutung von $e_1, e_2, \ldots, \delta_1, \delta_2, \ldots$, dieselbe ist, wie in 449, {und wo das über dem Produkte $(e_r e_s \ldots)$ stehende Zeichen $\overset{n}{\smile}$ andeuten soll, dass die Anzahl der Faktoren gleich n ist}.

Beweis. Nach 450 ist zu zeigen, dass allemal

$$f^{(n)}(x) dx^n = d_x^n f(x)$$

ist, wenn $f^{(n)}(x)$ den Gleichungen (a) genügt. Es ist dann

$$f^{(n)}(x) dx^n = f^{(n)}(x)(e_1 dx_1 + e_2 dx_2 + \cdots)^n$$

$$= \Sigma f^{(n)}(x)(\overset{n}{\smile}{e_a e_b \ldots}) dx_a dx_b \ldots,$$

nach dem allgemeinen polynomischen Lehrsatze (oder auch nach 45)

$$= \Sigma\{\delta_a \delta_b \ldots f(x) \,.\, dx_a dx_b \ldots\} \qquad [(a)]$$

$$= d_x^n f(x) \qquad [449].$$

452. Erklärung. Wenn $x, y, \ldots$ Zahlgrössen und u eine

Funktion derselben ist, so verstehe ich, wenn $a + b + \cdots = n$ ist, unter

$$\frac{d^n}{dx^a\,dy^b\ldots}\,u$$

den Ausdruck

$$\frac{d^n}{dx^a\,dy^b\ldots}\,u = \frac{d_x^a d_y^b\ldots u}{dx^a\,dy^b\ldots},$$

wo sich die Differenziationen auf den Verein der Variabeln $x, y, \ldots$ beziehen, und $dx, dy, \ldots$ von Null verschieden angenommen sind.

Anm. Die partiellen Differenzialquotienten nach verschiedenen extensiven Variabeln können fast überall entbehrt werden, da man mehrere extensive Variabeln stets auf eine einzige zurückführen kann (nach 352).

453. *Wenn y noch wieder Funktion einer beliebigen Veränderlichen ist, so ist (die Stetigkeit der vorkommenden Differenziale vorausgesetzt)*

$$\frac{d^n f(y)}{n!} = \sum \frac{f^{(\mathfrak{r})}(y)}{\mathfrak{r}!}\left(\overbrace{\frac{d^{\mathfrak{a}}y}{\mathfrak{a}!}\cdot\frac{d^{\mathfrak{b}}y}{\mathfrak{b}!}\cdots}^{\mathfrak{r}}\right) \qquad (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots = n).$$

Beweis. Wie in der gewöhnlichen Analysis.

Kapitel 3. Unendliche Reihen. 309

§ 1. Die unendlichen Reihen im Allgemeinen.

454. Erklärung. Eine Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

heisst **ächt**, wenn sich eine positive Zahl $T > 1$ finden lässt von der Art, dass $u_0, u_1 T, u_2 T^2, \ldots$ bis ins Unendliche hin endlich bleiben, dass heisst, dass sie numerisch kleiner bleiben als eine gewisse endliche Grösse M, so dass also

$$u_r T^r \text{ num.} < M$$

bleibt für jeden Index r.

455. Zusatz. Setzen wir $1 : T = t$, so können wir die Bedingung der Aechtheit auch so ausdrücken, dass sich zwei positive Zahlen t und M, von denen $t < 1$ ist, finden lassen, so dass stets

$$u_r : t^r \text{ num.} < M$$

bleibe.

456. *Jede ächte Reihe ist konvergent.*

Beweis. Es sei

$$R = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

eine ächte Reihe, so giebt es (nach 455) eine positive Zahl $t < 1$ von der Art, dass, für jeden Index r, der Quotient $u_r : t^r$, den wir mit a_r

bezeichnen wollen, numerisch kleiner als eine gewisse endliche (positive) Zahl M sei; dann wird

$$R = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots,$$

wo a_r num. $< M$.

Der Rest ϱ_n dieser Reihe von dem Gliede $a_n t^n$ an ist

$$\varrho_n = a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \cdots.$$

Nun ist

$$a_r \text{ num.} < M, \quad a_r t^r \text{ num.} < M t^r,$$

also (nach 418)

$$\begin{aligned}\varrho_n \text{ num.} &< M t^n + M t^{n+1} + \cdots \\ \text{num.} &< M t^n (1 + t + t^2 + \cdots) \\ \text{num.} &< M \frac{t^n}{1 - t}.\end{aligned}$$

Nun lässt sich n hier so gross wählen, dass ϱ_n num. kleiner wird als eine beliebig gegebene positive Grösse k, und auch bleibt, wenn n noch wächst; dies wird nämlich erfüllt, wenn

$$n > \log \frac{M}{k(1-t)} : \log \left(\frac{1}{t}\right)$$

310 ist. Da also der Rest ϱ_n mit wachsendem n nach Null zu konvergirt, so ist die Reihe konvergent.

Anm. Um die Beziehung zwischen ächten, unächten, konvergenten und divergenten Reihen noch anschaulicher hervortreten zu lassen, will ich hier noch die unächten Reihen berühren.

Wenn die sämmtlichen Glieder einer unächten Reihe endlich bleiben, das heisst, numerisch kleiner bleiben als eine endliche positive Zahl M, so will ich diese Reihe eine Uebergangsreihe nennen, wenn dagegen die Glieder einer Reihe unendlich werden, das heisst, wenn es zu jeder positiven Zahl M Glieder der Reihe giebt, welche noch grösser als M sind, so mag eine solche Reihe eine absurde heissen. So zum Beispiel ist die Reihe $t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \cdots$ eine ächte, wenn der numerische Werth der Zahlgrösse t kleiner als 1 ist; sie wird eine Uebergangsreihe, wenn t numerisch gleich 1 wird, und zwar eine divergente Uebergangsreihe, wenn $t = 1$, eine konvergente, wenn $t = -1$ ist; sie wird absurd, wenn t num. > 1 wird.

Eine solche absurde Reihe ist stets zu verwerfen. Hingegen hat die Uebergangsreihe mit der ächten noch das gemein, dass sie den Werth der Funktion, welche durch die Reihe dargestellt werden soll, wirklich ausdrückt, gleichviel ob sie konvergirt oder divergirt. Im letzteren Falle zeigt sie, *falls sie sich dem Unendlichen nähert*, dass für diesen Fall in der That die Funktion unendlich wird; so zum Beispiel ist die obige Reihe bekanntlich die Reihe für $-\log(1-t)$; diese Funktion wird mit $t = 1$ unendlich, ebenso wie die Reihe $t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \cdots$, und diese stellt also auch für diesen Fall noch den Werth jener Funktion dar. Oder, um ein einfacheres Beispiel zu wählen, die Reihe $1 + t + t^2 + \cdots$ wird für $t = \mp 1$ eine Uebergangsreihe; und zwar nimmt sie für $t = 1$, entsprechend der Funktion

$$\frac{1}{1-t},$$

deren Entwickelung sie darstellt, unendlichen Werth an. — Wenn hingegen die divergente Uebergangsreihe *sich keinem unendlichen Werthe annähert*, sondern stets, wie weit man sie auch verfolge, zwischen verschiedenen Werthen hin und her schwankt, wie zum Beispiel die Reihe $1+t+t^2+\cdots$ bei dem Werthe $t=-1$, so lässt sich dennoch ihr Werth aus der Gränze bestimmen, nach welcher jene Reihe konvergirt, wenn man t zuerst kleiner als 1 setzt und sich dann t der 1 unbegränzt annähern lässt. Aber alle diese Uebergangsreihen, selbst wenn sie konvergiren, dürfen nur mit Vorsicht angewandt werden, da die Rechnungsgesetze ächter Reihen auf sie nicht mehr anwendbar sind.

459. *) *Wenn mehrere Reihen ächt sind, so ist auch ihre Vielfachensumme ächt, das heisst, wenn* (311)

$$R_1 = u_1 + u_1' + u_1^{(2)} + u_1^{(3)} + \cdots$$
$$R_2 = u_2 + u_2' + u_2^{(2)} + u_2^{(3)} + \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$R_n = u_n + u_n' + u_n^{(2)} + u_n^{(3)} + \cdots$$

ächte Reihen sind, und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *beliebige endliche Zahlgrössen sind, so ist auch die Reihe*

$$R = u + u' + u^{(2)} + u^{(3)} + \cdots,$$

wo für jeden Zeiger s

$$u^{(s)} = \alpha_1 u_1^{(s)} + \alpha_2 u_2^{(s)} + \cdots + \alpha_n u_n^{(s)} \tag{312}$$

ist, eine ächte Reihe.

Beweis. Da R_1 eine ächte Reihe ist, so giebt es (nach 454) zwei positive Zahlen T_1 und M_1, von denen die erstere >1 ist, von der Art, dass für jeden Zeiger s

$$u_1^{(s)}\, T_1^s \text{ num.} < M_1$$

sei. Ebenso lassen sich für die übrigen Reihen $R_2, \ldots R_n$ solche positive Zahlenpaare $T_2, M_2, \ldots, T_n, M_n$ finden, von denen die erste jedes Zahlenpaares >1, und so, dass

$$u_2^{(s)}\, T_2^s \text{ num.} < M_2, \;\ldots,\; u_n^{(s)}\, T_n^s \text{ num.} < M_n$$

ist. Es sei T die kleinste der Zahlen $T_1, \ldots T_n$, also noch $T>1$, so bleibt

$$u_1^{(s)}\, T^s \text{ num.} < M_1,\; u_2^{(s)}\, T^s \text{ num.} < M_2, \;\ldots,\; u_n^{(s)}\, T^s \text{ num.} < M_n,$$

also auch (nach 419c), wenn $\beta_1, \ldots \beta_n$ die numerischen Werthe von $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ sind,

$$\alpha_1 u_1^{(s)}\, T^s \text{ num.} < \beta_1 M_1, \;\ldots,\; \alpha_n u_n^{(s)}\, T^s \text{ num.} < \beta_n M_n;$$

folglich. da die rechten Seiten dieser Vergleichungen positiv sind, so ist (nach 418)

---

*) {Die Nummern 457 und 458 stehen jetzt an ihrer richtigen Stelle, nämlich hinter Nr. 419 als Nr. 419b und 419c.}

$$\alpha_1 u_1^{(s)} T^s + \cdots + \alpha_n u_n^{(s)} T^s \text{ num.} < \beta_1 M_1 + \cdots + \beta_n M_n,$$

das heisst

$$u^{(s)} T^s \text{ num.} < M,$$

wenn $\beta_1 M_1 + \cdots + \beta_n M_n$ mit M bezeichnet ist; folglich ist die Reihe R (nach 454) eine ächte.

§ 2. Die Reihen als Funktionen einer Zahlgrösse.

460. *Die nach der Zahlgrösse x genommenen Differenzialquotienten einer ächten Reihe*

$$R = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \Sigma a_\mathfrak{a} x^\mathfrak{a}$$

sind wieder ächte Reihen.

Beweis. 1. Da R eine ächte Reihe ist, so müssen sich (nach 455) zwei positive Grössen t und M, von denen die erste < 1 ist, finden lassen, so dass für jedes r

$$\frac{a_r x^r}{t^r} \text{ num.} < M$$

ist. Nun sei τ eine positive Zahl zwischen t und 1, das heisst $\tau > t$ aber < 1, so zeige ich, dass alle Glieder der Reihe

313 $$\frac{d}{dx} R = \Sigma \mathfrak{a} a_\mathfrak{a} x^{\mathfrak{a}-1}$$

die Eigenschaft haben, dass für jeden Index r bis ins Unendliche hin der Ausdruck $r a_r x^{r-1} : \tau^r$ endlich sei.

In der That ist

$$\frac{r a_r x^{r-1}}{\tau^r} = \frac{r t^r}{x \tau^r} \cdot \frac{a_r x^r}{t^r}.$$

Der zweite Faktor ist (nach Hypothesis) numerisch kleiner als M, also (nach 419c) der ganze Ausdruck

$$\text{num.} < \frac{r t^r}{\tau^r} M_1,$$

wenn wir der Kürze wegen den numerischen Werth von $M : x$ mit M_1 bezeichnen. Nun sei

$$n > \frac{t}{\tau - t},$$

was stets möglich ist, da τ grösser als t, also $\tau - t$ ungleich Null ist. Dann wird

$$n > (n + 1)\frac{t}{\tau}$$

oder, indem wir mit $t^n : \tau^n$ multipliciren,

$$\frac{nt^n}{\tau^n} > \frac{(n+1)t^{n+1}}{\tau^{n+1}},$$

und aus gleichem Grunde

$$\frac{(n+1)t^{n+1}}{\tau^{n+1}} > \frac{(n+2)t^{n+2}}{\tau^{n+2}} > \cdots.$$

Nun werden aber die Ausdrücke

$$\frac{t}{\tau}, \frac{2t^2}{\tau^2}, \ldots, \frac{nt^n}{\tau^n},$$

da ihre Zahl endlich ist, und sie alle endliche Werthe haben, {sämmtlich} kleiner sein als eine gewisse positive endliche Grösse; diese heisse m. Da nun alle Ausdrücke $rt^r : \tau^r$ für jedes r, was grösser als n ist, wie eben bewiesen, kleiner als $nt^n : \tau^n$ sind, und dies letztere $< m$ ist, so werden alle jene Ausdrücke für jeden Werth von r kleiner als m sein, also auch

$$\frac{rt^r}{\tau^r} M_1 < m M_1.$$

Hier ist m eine endliche Grösse, aber auch M_1, wenn nicht etwa x gleich Null ist, also auch mM_1 endlich, also auch $ra_r x^{r-1} : \tau^r$ numerisch kleiner als eine endliche Grösse, das heisst, die † Reihe 314 $\frac{d}{dx} R$ ist eine ächte, vorausgesetzt noch, dass $x \gtrless 0$ ist. Wenn aber $x = 0$ ist, so ist

$$\frac{d}{dx} R = a_1,$$

also gewiss eine ächte Reihe.

2. Da nun $\frac{d}{dx} R$ eine ächte Reihe ist, so ist (nach Beweis 1) auch dessen Differenzialquotient nach x, das heisst

$$\frac{d^2}{dx^2} R$$

eine ächte Reihe, und so weiter.

461. *Wenn eine Reihe*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

für irgend einen Werth x' der Zahlgrösse x ächt ist, so ist sie es auch für jeden Werth, der numerisch gleich oder kleiner als x' ist.

Beweis. Denn, wenn die Reihe für $x = x'$ ächt ist, so müssen

sich (nach 454) zwei positive Werthe T und M, von denen der erste > 1 ist, angeben lassen, so dass für jedes r

$$a_r x'^r T^r \text{ num.} < M$$

ist. Dann ist aber, wenn x num. $\overline{\overline{<}}\, x'$ ist,

$$a_r x^r T^r \text{ num.} < a_r x'^r T^r \qquad [419\text{c}]$$

$$\text{num.} < M,$$

das heisst, die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ ist dann auch eine ächte (nach 454).

Anm. Es folgt hieraus sogleich (nach 460), dass auch die nach x genommenen Differenzialquotienten jener Reihe für jedes x, was numerisch gleich oder kleiner als x' ist, ächte Reihen, also auch stetig sein müssen. Daraus folgt auch umgekehrt, dass, wenn eine Funktion $f(x)$ für irgend einen Werth von x, der numerisch gleich x' ist, sich in eine ächte Reihe soll entwickeln lassen, nothwendig $f(x)$ und seine Differenziale für jeden Werth, der numerisch gleich oder kleiner als x' ist, auch stetig sein müssen. Aber es bleibt noch zu untersuchen, ob diese Bedingung der Stetigkeit ausreichend dafür ist, dass sich $f(x)$ in eine ächte Reihe entwickeln lasse.

Zu dem Ende kommt es darauf an, $f(x)$ für die verschiedenen numerisch gleichen Werthe zu betrachten, namentlich für eine Reihe solcher Werthe, von denen jeder folgende aus dem vorhergehenden durch gleiche circuläre Aenderung hervorgeht. Nun hat Cauchy nachgewiesen, dass, wenn $f(x)$ stetig ist, das arithmetische Mittel aller Werthe, welche $f(x)$ erhält, indem x fortschreitend einer konstanten circulären Aenderung unterworfen wird, bis x wieder zu dem ursprünglichen Werthe zurückkehrt, ein Ausdruck ist, welcher stets nach einer kon-315 stanten (von x unabhängigen) † Gränze konvergirt, sobald der Winkel der circulären Aenderung verschwindend klein wird. Er hat aus diesem Satze auf eine sehr sinnreiche Weise die Bedingung abgeleitet, unter welcher eine Funktion $f(x)$ sich in eine konvergente (genauer in eine ächte) Reihe entwickeln lässt, worüber Moigno, Leçons de calcul différentiel Tome 1, p. 150 ss. {Paris 1840} zu vergleichen ist. Der Gang der folgenden Entwickelung ist im wesentlichen derselbe, wie er in dem angeführten Werke gewählt ist; doch ist hier die Betrachtung verallgemeinert, in sofern $f(x)$ als extensive Grösse betrachtet wird, während x selbst eine Zahlgrösse bleibt.

462. Lehrsatz und Erklärung. *Wenn $f'(x)$ stetig ist für jede Zahlgrösse x, deren numerischer Werth zwischen den Gränzen a und b liegt, und Θ eine n-te Wurzel der absoluten Einheit und zwar*

$$\Theta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

ist, so konvergirt der Ausdruck

$$\frac{1}{n}\Sigma f(x\Theta^a) = \frac{f(x\Theta) + f(x\Theta^2) + \cdots + f(x\Theta^n)}{n}$$

mit unendlich wachsendem n nach einer konstanten (von x unabhängigen)

Gränze. Diese konstante Gränze sei das zu jenem Stetigkeitsgebiete gehörende k o n s t a n t e G l i e d *der Funktion $f(x)$ genannt und mit*

$$\mathrm{C}[f(x)]$$

bezeichnet.

B e w e i s d e s L e h r s a t z e s. Da $f'(x)$ stetig ist, so ist (nach 439)

$$f(x+q)-f(x)=q(f'(x)+N),$$

wo N mit q null wird. Da nun $\Theta^{\mathfrak{a}}$ numerisch gleich 1 ist, so ist $x\Theta^{\mathfrak{a}}$ numerisch $=x$, also auch $f'(x\Theta^{\mathfrak{a}})$ stetig. Setzt man nun in die obige Gleichung $x\Theta^{\mathfrak{a}}$ statt x, und $q=x\Theta^{\mathfrak{a}}(\Theta-1)$; so verwandelt sich $x+q$ in $x\Theta^{\mathfrak{a}+1}$, und wir erhalten, wenn wir noch dem N den Zeiger $\mathfrak{a}$ beifügen,

$$f(x\Theta^{\mathfrak{a}+1})-f(x\Theta^{\mathfrak{a}})=x\Theta^{\mathfrak{a}}(\Theta-1)[f'(x\Theta^{\mathfrak{a}})+N_{\mathfrak{a}}].$$

Nun ist, wenn wir $\frac{d}{dx}$ mit δ bezeichnen,

$$\delta f(x\Theta^{\mathfrak{a}})=\Theta^{\mathfrak{a}}f'(x\Theta^{\mathfrak{a}})$$

(nach 440); also wird

$$\frac{f(x\Theta^{\mathfrak{a}+1})-f(x\Theta^{\mathfrak{a}})}{x(\Theta-1)}=\delta f(x\Theta^{\mathfrak{a}})+N_{\mathfrak{a}}',$$

indem wir statt $\Theta^{\mathfrak{a}}N_{\mathfrak{a}}$, welches mit $N_{\mathfrak{a}}$ numerisch gleich ist, also, eben so wie dies, mit q zugleich null wird, $N_{\mathfrak{a}}'$ geschrieben haben.

Gehen wir nun zum arithmetischen Mittel über, so wird, wenn 316 die folgenden Summen von $\mathfrak{a}=1$ bis n genommen werden,

$$\frac{1}{nx(\Theta-1)}\sum\left\{f(x\Theta^{\mathfrak{a}+1})-f(x\Theta^{\mathfrak{a}})\right\}=\delta\sum\frac{f(x\Theta^{\mathfrak{a}})}{n}+\frac{1}{n}\Sigma N_{\mathfrak{a}}'.$$

Die linke Seite ist null; denn die dort erscheinende Summe ist gleich

$$f(x\Theta^{n+1})+f(x\Theta^{n})+\cdots+f(x\Theta^{2})-f(x\Theta^{n})-\cdots-f(x\Theta^{2})-f(x\Theta),$$

also

$$=f(x\Theta^{n+1})-f(x\Theta)=0,$$

da $\Theta^{n}=1$, also $x\Theta^{n+1}=x\Theta$ ist. Somit erhalten wir

$$\delta\sum\frac{f(x\Theta^{\mathfrak{a}})}{n}=-\frac{1}{n}\Sigma N_{\mathfrak{a}}'.$$

Aber $\Sigma N_{\mathfrak{a}}':n$ ist das arithmetische Mittel der Grössen $N_1', N_2', \ldots$ ist also, wie gross auch n sei, numerisch kleiner als der grösste numerische Werth dieser Grössen, den wir mit N' bezeichnen wollen. Wenn nun n unendlich wird, so konvergirt

$$\Theta=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

nach 1, also $\Theta-1$ nach 0, also konvergirt auch $q=x\Theta^{\mathfrak{a}}(\Theta-1)$,

was mit $x(\Theta - 1)$ numerisch gleich ist, nach 0, also auch N_1', N_2', ..., also auch N'; also auch

$$\delta \sum \frac{f(x\Theta^a)}{n},$$

da sein numerischer Werth noch kleiner ist als der von N'. Setzen wir die Gränze, nach welcher

$$\sum \frac{f(x\Theta^a)}{n}$$

konvergirt $= \varphi(x)$, so haben wir also

$$\delta\varphi(x) = 0,$$

das heisst

$$\varphi(x) = \text{Const.}$$

Anm. Ich habe hier den Satz, dass, wenn das Differenzial einer Funktion null bleibt, die Funktion konstant sei, als bekannt vorausgesetzt, um hier nicht die Entwickelung zu unterbrechen. Der Beweis dieses Satzes ist im Eingange des folgenden Kapitels (der Integralrechnung) nachgeholt, und zwar, ohne dass in diesem Beweise auf irgend einen Satz des gegenwärtigen Kapitels zurückgegangen sei.

463. *Das konstante Glied einer Vielfachensumme von Funktionen (deren erste abgeleitete Funktionen stetig sind), ist die entsprechende Vielfachensumme aus den konstanten Gliedern der Funktionen, das heisst (wenn $f_1'(x)$, $f_2'(x)$, ... stetig sind, so ist)*

$$\mathbf{C}[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots] = \alpha_1 \mathbf{C}[f_1(x)] + \alpha_2 \mathbf{C}[f_2(x)] + \cdots.$$

317 Beweis. Wenn Θ dieselbe Bedeutung wie in 462 hat, so ist $\mathbf{C}[f_1(x)]$ die Gränze, nach welcher

$$\frac{1}{n} \Sigma f_1(x\Theta^a)$$

mit unendlichem n konvergirt, das heisst, es verschwindet

$$\frac{1}{n} \Sigma f_1(x\Theta^a) - \mathbf{C}[f_1(x)]$$

mit $\frac{1}{n}$, ebenso

$$\frac{1}{n} \Sigma f_2(x\Theta^a) - \mathbf{C}[f_2(x)], \ldots,$$

also (nach 421) auch ihre Vielfachensumme, das heisst

$$\frac{1}{n} \Sigma\{\alpha_1 f_1(x\Theta^a) + \alpha_2 f_2(x\Theta^a) + \cdots\} - \alpha_1 \mathbf{C}[f_1(x)] - \alpha_2 \mathbf{C}[f_2(x)] - \cdots,$$

das heisst, es konvergirt

$$\frac{1}{n} \Sigma\{\alpha_1 f_1(x\Theta^a) + \alpha_2 f_2(x\Theta^a) + \cdots\}$$

nach

$$\alpha_1 \mathbf{C}[f_1(x)] + \alpha_2 \mathbf{C}[f_2(x)] + \cdots.$$

Aber die Gränze, nach welcher jener Ausdruck konvergirt, ist (nach 462) mit

$$\mathbf{C}[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots]$$

bezeichnet, also

$$\mathbf{C}[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots] = \alpha_1 \mathbf{C}[f_1(x)] + \alpha_2 \mathbf{C}[f_2(x)] + \cdots.$$

464. *Wenn m eine {positive oder negative} ganze Zahl, aber ungleich Null ist, so ist*

$$\mathbf{C}[x^m] = 0.$$

Beweis. $\mathbf{C}[x^m]$ ist (nach 462) die Gränze, nach welcher

$$\frac{1}{n}\,\Sigma(x\Theta^a)^m$$

mit unendlich wachsendem n konvergirt. Es ist aber

$$\frac{1}{n}\,\Sigma(x\Theta^a)^m = \frac{x^m}{n}\,\Sigma\Theta^{am}.$$

Nehmen wir n so gross an, dass m num. $< n$ ist, und setzen $\Sigma\Theta^{am} = s$, so ist

$$s = \Theta^m + \Theta^{2m} + \cdots + \Theta^{nm}$$

$$s = 1 + \Theta^m + \Theta^{2m} + \cdots + \Theta^{(n-1)m},$$

weil $\Theta^{nm} = 1$ ist. Es geht aber der obere Ausdruck aus dem unteren durch Multiplikation mit Θ^m hervor; also haben wir

$$s\Theta^m = s, \text{ das heisst } s(1 - \Theta^m) = 0.$$

Es ist aber (nach 462)

$$\Theta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

also

$$\Theta^m = \cos\frac{2m\pi}{n} + i\sin\frac{2m\pi}{n};$$

also, da $m:n$ ein ächter Bruch ist, so ist $\Theta^m \gtrless 1$, also folgt aus der Gleichung $s(1 - \Theta^m) = 0$, dass † s gleich Null ist, also auch 318

$$\frac{x^m}{n}\,\Sigma\Theta^{am} = 0,$$

das heisst

$$\frac{1}{n}\,\Sigma(x\Theta^a)^m = 0,$$

sobald $n > m$ ist, also {ist} die Gränze, nach welcher dieser Ausdruck mit unendlich wachsendem n konvergirt, 0, das heisst $\mathbf{C}[x^m] = 0$.

Anm. In diesen Sätzen liegt der Grund der obigen Benennung, indem, wenn $f(x)$ eine beliebige (begränzte) Potenzreihe von x mit ganzen positiven oder negativen Exponenten und dem konstanten Gliede a ist, $\mathbf{C}[f(x)]$ gleich diesem konstanten Gliede a ist.

465. *Wenn* x num. $> a$ *ist, so ist*

$$\mathbf{C}\left[\frac{x}{x-a}\right] = 1.$$

Beweis. Es ist

$$\frac{x}{x-a} = 1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \cdots + \frac{a^{r-1}}{x^{r-1}} + \frac{a^r}{x^{r-1}(x-a)}.$$

Also (nach 463, {464})

$$\mathbf{C}\left[\frac{x}{x-a}\right] = 1 + \mathbf{C}\left[\frac{a^r}{x^{r-1}(x-a)}\right].$$

Nun ist das letzte Glied der rechten Seite (nach {der Schlussweise von} 462) numerisch kleiner als der grösste der Ausdrücke, welche aus

$$\frac{a^r}{x^{r-1}(x-a)}$$

hervorgehen, indem man statt x beliebige mit x numerisch gleiche Werthe setzt. Der grösste dieser Ausdrücke ist, wenn A und X die numerischen Werthe von a und x sind,

$$= \frac{A^r}{X^{r-1}(X-A)}.$$

Ist nun p eine beliebige positive Grösse, so kann man r stets so gross wählen, dass

$$\frac{A^r}{X^{r-1}(X-A)} \text{ num.} < p$$

wird, und auch bleibt, wenn r noch wächst; also wird dann

$$\mathbf{C}\left[\frac{x}{x-a}\right] - 1 \text{ num.} < p,$$

das heisst, numerisch kleiner als jede positive Grösse, das heisst $= 0$, also

$$\mathbf{C}\left[\frac{x}{x-a}\right] = 1.$$

466. *Wenn die zweite abgeleitete Funktion von $f(x)$ stetig ist für jeden Zahlwerth x, der numerisch kleiner als x' ist, so lässt sich $f(x)$ in eine ächte, nach Potenzen von x aufsteigende Reihe entwickeln. Und* 319 *zwar, wenn z num. $> x$, † aber num. $< x'$ ist und das Zeichen* $\mathbf{C}$ *sich auf die Variable z bezieht, während x als konstant gesetzt wird, so ist*

$$f(x) = \mathbf{C}\left[\frac{zf(z)}{z-x}\right] = \sum x^a \mathbf{C}\left[\frac{f(z)}{z^a}\right],$$

und wenn X und Z beziehlich die numerischen Werthe von x und z sind, und F der grösste der numerischen Werthe ist, welche $f(z)$ für die

verschiedenen Werthe von z, welche numerisch $= Z$ sind, annimmt, so ist jedes Glied der obigen Entwickelungsreihe von $f(x)$, und auch der Rest der Reihe numerisch kleiner als das entsprechende Glied und als der entsprechende Rest der nach Potenzen von X entwickelten Reihe

$$\frac{FZ}{Z-X} = F \sum \frac{X^a}{Z^a}.$$

Beweis. Es sei zunächst für z nur vorausgesetzt, dass es numerisch kleiner als x' sei, so ist (nach Hypothesis) $f''(z)$ stetig, also (nach 447) auch $f'(z)$ und $f(z)$. Nun sei x als konstant betrachtet, und nur z als variabel, und sei das konstante Glied der Funktion

(*) $$\varphi(z) = \frac{z(f(z) - f(x))}{z-x}$$

betrachtet; also zunächst die Stetigkeit von $\varphi'(z)$ untersucht.

Es ist *zuerst* für $z = x$ der Ausdruck

$$\frac{f(z) - f(x)}{z-x}$$

(nach 429, wo man nur $dx = 1$, und $x + q = z$ zu setzen hat, {und nach 435, 438}) $= f'(x) = f'(z)$, also in diesem Falle $\varphi(z) = zf'(z)$, also $\varphi'(z)$ in diesem Falle $= f'(z) + zf''(z)$, also stetig, da $f'(z)$ und $f''(z)$ es sind.

Ferner, wenn $z \gtrless x$, also $z - x \gtrless 0$ ist, so ist

$$\varphi'(z) = \frac{f(z) - f(x)}{z-x} + \frac{zf'(z)}{z-x} - \frac{z(f(z) - f(x))}{(z-x)^2}.$$

Da nun $f(z)$, $f'(z)$, z stetig sind, und $z - x \gtrless 0$ ist, so ist auch in diesem Falle $\varphi'(z)$ stetig; also $\varphi'(z)$ so lange stetig, als z num. $< x'$ ist.

Somit bleibt $\mathbf{C}[\varphi(z)]$ (nach 462) von unverändertem Werthe, so lange z num. $< x'$ ist, aber für $z = 0$ wird (nach (*)) $\varphi(z)$ gleichfalls null, somit ist $\mathbf{C}[\varphi(0)] = 0$, also auch $\mathbf{C}[\varphi(z)]$, also erhalten wir die Gleichung

$$\mathbf{C}\left[\frac{z(f(z) - f(x))}{z-x}\right] = 0.$$

Nehmen wir jetzt z numerisch $> x$ aber noch immer num. $< x'$ an, so ist $z - x \gtrless 0$ und es sind daher 320

$$\frac{zf(z)}{z-x} \text{ und } \frac{zf(x)}{z-x}$$

so wie ihre Differenziale nach z stetig, also (nach 463) {auch}

$$\mathbf{C}\left[\frac{zf(z)}{z-x}\right] - f(x)\,\mathbf{C}\left[\frac{z}{z-x}\right] = 0.$$

Aber

$$\mathbf{C}\left[\frac{z}{z-x}\right] = 1$$

(nach 465, wo man nur z statt x, und x statt a zu schreiben hat), folglich hat man

$$f(x) = \mathbf{C}\left[\frac{zf(z)}{z-x}\right].$$

Nun ist

$$\frac{z}{z-x} = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \cdots + \frac{x^{r-1}}{z^{r-1}} + \frac{x^r}{z^{r-1}(z-x)},$$

also (nach 463)

$$f(x) = \mathbf{C}[f(z)] + x\mathbf{C}\left[\frac{f(z)}{z}\right] + x^2\mathbf{C}\left[\frac{f(z)}{z^2}\right] + \cdots +$$
$$+ x^{r-1}\mathbf{C}\left[\frac{f(z)}{z^{r-1}}\right] + \mathbf{C}\left[\frac{x^r f(z)}{z^{r-1}(z-x)}\right].$$

Hier ist das letzte Glied (nach {der Schlussweise von} 462) numerisch kleiner als der numerisch grösste der Ausdrücke, die man erhält, wenn man in

$$\frac{x^r f(z)}{z^{r-1}(z-x)}$$

statt z alle möglichen mit ihm numerisch gleichen Werthe setzt. Der grösste der numerischen Werthe, die dabei $f(z)$ annimmt, ist oben mit F bezeichnet, die numerischen Werthe von z und x aber mit Z und X; der numerisch grösste Werth, den $1:(z-x)$ annehmen kann, ist $1:(Z-X)$; also ist

$$\mathbf{C}\left[\frac{x^r f(z)}{z^{r-1}(z-x)}\right] \text{ num.} < \frac{X^r F}{Z^{r-1}(Z-X)};$$

und aus gleichem Grunde sind die übrigen Glieder, vom ersten anfangend, numerisch kleiner als

$$F, \frac{XF}{Z}, \frac{X^2F}{Z^2}, \ldots, \frac{X^{r-1}F}{Z^{r-1}};$$

dies sind aber die entsprechenden Glieder und ersteres der entsprechende Rest der Reihe

$$\frac{FZ}{Z-X} = F\sum\frac{X^\alpha}{Z^\alpha}.$$

Da nun endlich die letztgenannte Reihe eine ächte ist, so ist auch die Reihe für $f(x)$, da ihre Glieder numerisch noch kleiner sind, als die Glieder dieser Reihe, eine ächte.

321 **467.** Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Satz. *Wenn $f''(x)$ stetig ist für jedes x, was numerisch kleiner als x' ist, so ist in demselben Umfange*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots = \sum f^{(\alpha)}(0)\frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

Beweis. Denn dann lässt sich $f(x)$ (nach 466) in eine Reihe entwickeln. Es sei diese Reihe

(*) $$f(x) = \Sigma a_a x^a,$$

so ist

$$f^{(n)}(x) = \sum \frac{a!}{(a-n)!} a_a x^{a-n} \qquad [448, \{450\}],$$

also

$$f^{(n)}(0) = n! a_n,$$

da alle übrigen Glieder null sind, also

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Dies in (*) eingesetzt giebt die zu erweisende Gleichung.

Anm. Da $f(a+x)$ als Funktion von x betrachtet werden kann, so ist es überflüssig, den Satz in zwei Sätze (den Taylor'schen und Maclaurin'schen) zu zertrennen.

§ 3. Entwickelung der Funktionen mehrerer Zahlgrössen oder Einer extensiven Grösse in Reihen.

468. Lehrsatz und Erklärung (Erweiterung von 462). *Wenn $f(x_1, x_2, \ldots)$ eine Funktion mehrerer veränderlicher Zahlgrössen $x_1, x_2, \ldots$ ist, und die zu diesem Vereine gehörigen partiellen ersten Differenzialquotienten*

$$\frac{d}{dx_1} f(x_1, x_2, \ldots), \ \frac{d}{dx_2} f(x_1, x_2, \ldots), \ \ldots$$

allemal stetig sind, sobald gleichzeitig der numerische Werth von x_1 zwischen den Gränzen a_1 und b_1, der von x_2 zwischen den Gränzen a_2 und b_2 liegt, und so weiter; und wenn endlich

$$\Theta_1 = \cos\frac{2\pi}{n_1} + i\sin\frac{2\pi}{n_1}, \ \Theta_2 = \cos\frac{2\pi}{n_2} + i\sin\frac{2\pi}{n_2}, \ \ldots,$$

so konvergirt der Ausdruck

$$\frac{1}{n_1 n_2 \ldots} \Sigma f(x_1 \Theta_1^a, x_2 \Theta_2^b, \ldots)$$

mit den unbegränzt wachsenden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ nach einer konstanten (von $x_1, x_2, \ldots$ unabhängigen) Gränze. Diese konstante Gränze sei das zu jenem Stetigkeitsgebiete gehörende konstante Glied *der Funktion $f(x_1, x_2, \ldots)$ genannt und mit* 322

$$\mathbf{C}[f(x_1, x_2, \ldots)]$$

bezeichnet. Dann ist für zwei Variabeln

$$\mathbf{C}[f(x_1, x_2)] = \mathbf{C}_1(\mathbf{C}_2[f(x_1, x_2)]),$$

wo C_2 *sich nur auf die Variable* x_2 *bezieht* (x_1 *als konstant gesetzt*) *und* C_1 *sich nur auf die Variable* x_1 *bezieht* (x_2 *als konstant gesetzt*); *und entsprechend für mehr Variabeln.*

Beweis. 1. Für *zwei* Variabeln. Nach der Bedeutung der Summenbezeichnung ist

$$\frac{1}{n_1 n_2} \Sigma f(x_1 \Theta_1^{\mathfrak{a}}, \; x_2 \Theta_2^{\mathfrak{b}}) = \sum \frac{1}{n_1} \sum \frac{1}{n_2} f(x_1 \Theta_1^{\mathfrak{a}}, \; x_2 \Theta_2^{\mathfrak{b}}),$$

wo die innere Summe sich nur auf den Index $\mathfrak{b}$ bezieht, die äussere nur auf den Index $\mathfrak{a}$. Lassen wir nun zunächst n_2 unbegränzt wachsen, so konvergirt die innere Summe (nach 462) nach einer von x_2 unabhängigen Gränze, welche wir mit

$$\mathsf{C}_2 [f(x_1 \Theta_1^{\mathfrak{a}}, \; x_2)]$$

zu bezeichnen haben. Diese Gränze wird also nur noch eine Funktion von $x_1 \Theta_1^{\mathfrak{a}}$ sein; es sei dieselbe mit $\varphi(x_1 \Theta_1^{\mathfrak{a}})$ bezeichnet, so ist die Gränze, nach welcher der obige Ausdruck mit unbegränzt wachsendem n_2 konvergirt,

$$= \frac{1}{n_1} \Sigma \varphi(x_1 \Theta_1^{\mathfrak{a}}).$$

Wächst nun auch n_1 unbegränzt, so konvergirt (nach 462) dieser Ausdruck nach der auch von x_1 unabhängigen Gränze $\mathsf{C}_1[\varphi(x_1)]$. Nach dieser Gränze konvergirt also der ursprüngliche Ausdruck, wenn in ihm sowohl n_1 als n_2 unbegränzt wachsen; das heisst, es ist

$$\mathsf{C}[f(x_1, \; x_2)] = \mathsf{C}_1[\varphi(x_1)].$$

Aber es war

$$\varphi(x_1 \Theta_1^{\mathfrak{a}}) = \mathsf{C}_2[f(x_1 \Theta_1^{\mathfrak{a}}, \; x_2)]$$

gesetzt, also ist (für $\mathfrak{a} = 0$),

$$\varphi(x_1) = \mathsf{C}_2[f(x_1, \; x_2)];$$

also

$$\mathsf{C}[f(x_1, \; x_2)] = \mathsf{C}_1(\mathsf{C}_2[f(x_1, \; x_2)]).$$

2. Dieselbe Schlussreihe lässt sich auf *beliebig viele* Veränderliche übertragen.

Anm. Es versteht sich von selbst, dass man auch $n_1 = n_2 = \cdots$, also auch $\Theta_1 = \Theta_2 = \cdots$ setzen kann, ohne dass der Satz aufhört richtig zu sein.

323 **469.** (Erweiterung von 466). *Wenn* $f(x_1, x_2, \ldots)$ *eine Funktion mehrerer veränderlicher Zahlgrössen* $x_1, x_2, \ldots$ *ist, und die zu dem Vereine dieser Veränderlichen gehörigen partiellen zweiten Differenzialquotienten*

$$\frac{d^2}{dx_1^2} f(x_1, \; x_2, \; \ldots), \quad \frac{d^2}{dx_2^2} f(x_1, \; x_2, \; \ldots), \; \ldots$$

allemal stetig sind, sobald gleichzeitig x_1 *numerisch kleiner als* x_1',

x_2 numerisch kleiner als x_2' ist, ..., so lässt sich $f(x_1, x_2, \ldots)$ in eine nach ganzen homogenen Funktionen von $x_1, x_2, \ldots$ aufsteigende ächte Reihe entwickeln. Und zwar, wenn sich das Zeichen $\mathbf{C}$ auf die Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots$ bezieht, während $x_1, x_2, \ldots$ als konstant gesetzt werden, so ist

$$\text{(a)} \qquad f(x_1, x_2, \ldots) = \mathbf{C}\left[f(z_1, z_2, \ldots)\frac{z_1}{z_1 - x_1}\cdot\frac{z_2}{z_2 - x_2}\cdots\right]$$

$$\text{(b)} \qquad = \sum x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} \ldots \mathbf{C}\left[\frac{f(z_1, z_2, \ldots)}{z_1^{\mathfrak{a}} z_2^{\mathfrak{b}} \ldots}\right];$$

und wenn $X_1, Z_1, X_2, Z_2, \ldots$ beziehlich die numerischen Werthe von $x_1, z_1, x_2, z_2, \ldots$ sind, und F der grösste der numerischen Werthe ist, welche $f(z_1, z_2, \ldots)$ für die verschiedenen Werthe von $z_1, z_2, \ldots$, welche beziehlich numerisch $= Z_1, Z_2, \ldots$ sind, annimmt, so ist jedes Glied der obigen Entwickelungsreihe von $f(x_1, x_2, \ldots)$, so wie auch jede Summe jener Glieder und namentlich der mit dem homogenen Gliede eines beliebigen (n-ten) Grades beginnende Rest der Reihe numerisch kleiner als das entsprechende Glied oder die entsprechende Summe oder der entsprechende Rest in der Reihe

$$F\frac{Z_1}{Z_1 - X_1}\cdot\frac{Z_2}{Z_2 - X_2}\cdots = \sum\left(F\frac{X_1^{\mathfrak{a}}}{Z_1^{\mathfrak{a}}}\cdot\frac{X_2^{\mathfrak{b}}}{Z_2^{\mathfrak{b}}}\cdots\right).$$

Beweis. 1. Für *zwei* Veränderliche. Betrachten wir zunächst x_1 als konstant, so ist (nach 466)

$$(*) \qquad f(x_1, x_2) = \mathbf{C}_2\left[\frac{z_2 f(x_1, z_2)}{z_2 - x_2}\right].$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist nur noch eine Funktion von x_1 und x_2; diese Funktion sei mit $\varphi(x_1, x_2)$ bezeichnet, so ist (nach 466)

$$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) = \mathbf{C}_1\left[\frac{z_1}{z_1 - x_1}\varphi(z_1, x_2)\right], \qquad 324$$

wo $\mathbf{C}_1$ sich nur auf die Veränderliche z_1 bezieht. Setzen wir nun statt $\varphi(z_1, x_2)$ seinen Werth, welcher aus der rechten Seite der obigen Gleichung (*) dadurch hervorgeht, dass man z_1 statt x_1 setzt, so erhalten wir

$$f(x_1, x_2) = \mathbf{C}_1\left(\frac{z_1}{z_1 - x_1}\mathbf{C}_2\left[\frac{z_2}{z_2 - x_2}f(z_1, z_2)\right]\right).$$

Da $\mathbf{C}_2$ sich nur auf die Variable z_2 bezieht, also $z_1 : (z_1 - x_1)$ in Bezug auf $\mathbf{C}_2$ als konstant gesetzt wird, so können wir (nach 463) auch das Zeichen $\mathbf{C}_2$ vor diesen Faktor setzen und erhalten

$$f(x_1, x_2) = \mathsf{C}_1\left(\mathsf{C}_2\left[\frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} f(z_1, z_2)\right]\right)$$

$$= \mathsf{C}\left[\frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} f(z_1, z_2)\right] \qquad \text{[nach 468]},$$

also {ist} Formel (a) bewiesen.

Es kommt nun darauf an, hier den in Klammern geschlossenen Ausdruck, in welchem wir der Kürze wegen f statt $f(z_1, z_2)$ schreiben wollen, in eine Reihe nach steigenden ganzen homogenen Funktionen von x_1 und x_2 zu entwickeln, und den zugehörigen Rest hinzuzufügen. Setzen wir $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$ als die n ersten Glieder und r_n als den zugehörigen Rest dieser Reihe, also

$$(**) \qquad \frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} f = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + r_n,$$

so ist bekanntlich

$$u_0 = f, \quad u_1 = \left(\frac{x_1}{z_1} + \frac{x_2}{z_2}\right) f,$$

und für jeden Index r

$$(***) \qquad u_r = \sum \frac{x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}}}{z_1^{\mathfrak{a}} z_2^{\mathfrak{b}}} f \quad (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = r),$$

und

$$r_n = \frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} u_n.$$

Dann ist also

$$f(x_1, x_2) = u_0 + \mathsf{C}(u_1) + \mathsf{C}(u_2) + \cdots + \mathsf{C}(u_{n-1}) + \mathsf{C}(r_n).$$

Hier ist jedes Glied der rechten Seite (nach {der Schlussweise von} 462) numerisch kleiner als der numerisch grösste der Ausdrücke, die 325 man erhält, wenn man in die in Klammer geschlossene Funktion von z_1 und z_2 statt dieser Variabeln alle möglichen mit ihnen numerisch gleichen Werthe setzt. Der grösste der numerischen Werthe, die dabei f annimmt, ist oben mit F bezeichnet, die numerischen Werthe von z_1 und z_2, x_1 und x_2 mit Z_1 und Z_2, X_1 und X_2. Folglich ist

$$\frac{x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} f}{z_1^{\mathfrak{a}} z_2^{\mathfrak{b}}} \text{ num.} < \frac{X_1^{\mathfrak{a}} X_2^{\mathfrak{b}} F}{Z_1^{\mathfrak{a}} Z_2^{\mathfrak{b}}};$$

also, da der Ausdruck rechts positiv ist, so ist (nach 418) auch

$$\sum \frac{x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} f}{z_1^{\mathfrak{a}} z_2^{\mathfrak{b}}} \text{ num.} < \sum \frac{X_1^{\mathfrak{a}} X_2^{\mathfrak{b}} F}{Z_1^{\mathfrak{a}} Z_2^{\mathfrak{b}}},$$

also auch (nach (***)) für jeden Index r

$$u_r \text{ num.} < U_r,$$

wo U_r dasjenige bezeichnet, was aus u_r hervorgeht, wenn man darin X_1, Z_1, X_2, Z_2, F statt x_1, z_1, x_2, z_2, f setzt, so dass also

$$(****) \qquad \frac{Z_1}{Z_1 - X_1} \cdot \frac{Z_2}{Z_2 - X_2} F = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} + R_n$$

wird, wo auch der Rest R_n aus r_n durch dieselben Substitutionen hervorgeht. Dieser Rest ist noch zu untersuchen.

Es ist, wie soeben gezeigt,

$$u_n \text{ num.} < U_n.$$

Ferner aber auch, da unter allen Werthen, welche $z_1 - x_1$ annehmen kann, wenn statt z_1 und x_1 alle möglichen mit ihnen numerisch gleichen Werthe gesetzt werden, $Z_1 - X_1$ der numerisch kleinste ist, so ist

$$\frac{z_1}{z_1 - x_1} \text{ num.} < \frac{Z_1}{Z_1 - X_1},$$

und aus gleichem Grunde

$$\frac{z_2}{z_2 - x_2} \text{ num.} < \frac{Z_2}{Z_2 - X_2}.$$

Also, da die beiden letzten Vergleichungen nur Zahlgrössen enthalten, so ist (nach 419c)

$$\frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} u_n \text{ num.} < \frac{Z_1}{Z_1 - X_1} \cdot \frac{Z_2}{Z_2 - X_2} U_n,$$

das heisst

$$r_n \text{ num.} < R_n.$$

Also ist auch (nach 468)

$$\mathsf{C}(u_r) \text{ num.} < U_r, \quad \mathsf{C}(r_n) \text{ num.} < R_n,$$

das heisst, jedes Entwickelungsglied der Reihe für $f(x_1, x_2)$, und der 326 Rest derselben ist numerisch kleiner als das entsprechende Glied und als der entsprechende Rest der Entwickelungsreihe (****). Diese letztere Reihe ist aber bekanntlich konvergent, das heisst, ihr Rest R_n konvergirt mit unbegränzt wachsendem n nach Null; also thut dies auch der Rest $\mathsf{C}(r_n)$, da er numerisch noch kleiner als R_n ist, das heisst, auch die Entwickelungsreihe für $f(x_1, x_2)$ ist konvergent, so lange nämlich die Bedingung erfüllt wird, dass x_1 num. $< x_1'$ und x_2 num. $< x_2'$ bleibt.

Die Reihe für $f(x_1, x_2)$ war aber, wenn wir den Rest, wie dies bei konvergenten Reihen gestattet ist, weglassen,

$$f(x_1, x_2) = u_0 + \mathsf{C}(u_1) + \mathsf{C}(u_2) + \cdots,$$

wo

$$\mathsf{C}(u_r) = \mathsf{C}\left[\sum \frac{x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} f}{z_1^{\mathfrak{a}} z_2^{\mathfrak{b}}}\right] (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = r),$$

das heisst,

$$= \sum x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} \mathsf{C}\left[\frac{f(z_1, z_2)}{z_1^{\mathfrak{a}} z_2^{\mathfrak{b}}}\right] (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = r),$$

womit die Formel (b) bewiesen ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Reihe

$$f(x_1, x_2) = u_0 + \mathbf{C}(u_1) + \mathbf{C}(u_2) + \cdots$$

nicht bloss eine konvergente, sondern auch eine ächte ist.

Da x_1, x_2 num. $< x_1'$, x_2' sind, so sind $x_1' : x_1$ und $x_2' : x_2$ num. > 1; folglich muss es eine positive Zahl T geben, welche > 1 aber numerisch kleiner als $x_1' : x_1$ und $x_2' : x_2$ ist. Dann hat man $x_1 T$ num. $< x_1'$ und $x_2 T$ num. $< x_2'$, folglich muss {nach 461} die Reihe für $f(x_1, x_2)$ noch konvergent bleiben, wenn man $x_1 T$ statt x_1 und $x_2 T$ statt x_2 setzt; dann verwandelt sich aber $\mathbf{C}(u_r)$, da es eine homogene Funktion r-ten Grades von x_1, x_2 ist, in $T^r \mathbf{C}(u_r)$, folglich bleibt die Reihe

$$u_0 + T\mathbf{C}(u_1) + T^2\mathbf{C}(u_2) + \cdots$$

konvergent, also auch ihre Glieder bis ins Unendliche hin endlich, also {ist} (nach 454) die Reihe

$$u_0 + \mathbf{C}(u_1) + \mathbf{C}(u_2) + \cdots$$

eine ächte.

2. Der Beweis 1 ist überall so geführt, dass er sich unmittelbar auf *beliebig viele* Variable übertragen lässt.

327 **470.** *Der Taylor'sche Satz* (467) *gilt auch, wenn x eine beliebige extensive Grösse ist; das heisst, es ist auch in diesem Falle {für jedes x, das numerisch kleiner ist als x',}*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots = \sum \frac{x^a}{a!} f^{(a)}(0),$$

vorausgesetzt, dass $d^2 f(x)$ für jeden Werth x, der numerisch kleiner als x' ist, stetig sei.

Beweis. Es sei

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots,$$

wo e_1, e_2, ... die normalen Einheiten von x sind, so ist (nach Hypothesis) $d^2 f(x)$ stetig; aber (nach 449)

$$d_x^2 f(x) = \delta_1^2 f(x) \,.\, dx_1^2 + \delta_2^2 f(x) \,.\, dx_2^2 + \cdots +$$
$$+ 2\delta_1\delta_2 f(x) \,.\, dx_1 dx_2 + \cdots,$$

wo δ_1, δ_2, ... die zu dem Vereine der Variabeln x_1, x_2, ... gehörigen partiellen Differenzialquotienten sind. Diese Gleichung gilt für jede Werthreihe von dx_1, dx_2, ..., also namentlich, wenn man dx_2, dx_3, ... null setzt. Dann aber wird $d_x^2 f(x) = \delta_1^2 f(x) \,.\, dx_1^2$, also ist $\delta_1^2 f(x)$ stetig, aus gleichem Grunde $\delta_2^2 f(x)$, ...; also lässt sich (nach 469) $f(x)$, als Funktion von x_1, x_2, ..., in eine ächte Reihe entwickeln, deren Glieder nach ganzen homogenen Funktionen von x_1, x_2, ... fortschreiten; es sei

diese Reihe, wo

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

$$u_r = \Sigma a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} \ldots (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots = r)$$

ist. Setzen wir hier

$$\Sigma a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots} [l|e_1]^{\mathfrak{a}} [l|e_2]^{\mathfrak{b}} \ldots (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots = r) = a_r,$$

wo l eine durch x ausfüllbare Lücke bezeichnet, so wird $u_r = a_r x^r$, und also

(*) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

Setzen wir hier $x = yz$, wo z eine Zahl ist, so wird

$$f(x) = f(yz) = a_0 + a_1 y \,.\, z + a_2 y^2 \,.\, z^2 + \cdots = \Sigma\{a_{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{a}} \,.\, z^{\mathfrak{a}}\}.$$

Also sind (nach 460) die Differenzialquotienten dieser Reihe nach z gleichfalls ächte Reihen, und es wird also

$$\frac{d^n}{dz^n} f(yz) = \sum \left(\frac{\mathfrak{a}!}{(\mathfrak{a} - n)!} a_{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{a}} \,.\, z^{\mathfrak{a} - n} \right).$$

Aber (nach 440) ist

$$\frac{d}{dz} f(yz) = f'(yz) \frac{d}{dz}(yz) = f'(x) y,$$

und † ebenso 328

$$\frac{d^2}{dz^2} f(yz) = f''(x) y^2, \ \ldots, \ \frac{d^n}{dz^n} f(yz) = f^{(n)}(x) y^n.$$

Also

$$f^{(n)}(x) y^n = \sum \left(\frac{\mathfrak{a}!}{(\mathfrak{a} - n)!} a_{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{a}} \,.\, z^{\mathfrak{a} - n} \right).$$

Setzt man nun $z = 0$, so wird auch $x = yz = 0$, also

$$f^{(n)}(0) y^n = n! a_n y^n,$$

da alle übrigen Glieder der rechten Seite verschwinden. Somit, da diese Gleichung für jeden Werth y gilt, so ist, wie aus 357 leicht hervorgeht,

$$f^{(n)}(0) = n! a_n, \text{ also } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

was, in die obige Gleichung (*) eingeführt, die zu erweisende Formel liefert.

Kapitel 4. **Integralrechnung.**

§ 1. Integration von Differenzialausdrücken.

471. *Wenn $f(t)$ eine reelle Zahlfunktion der reellen Zahlgrösse t ist, und die abgeleitete Funktion $f'(t)$ zwischen $t = t_1$ und $t = t_2$ stetig und positiv ist, so wächst zwischen denselben Gränzen $f(t)$ mit t; wenn dagegen $f'(t)$ stetig und negativ ist, so nimmt $f(t)$ ab, während t wächst.*

Beweis. Es ist (nach 439, indem man hier t statt x, und $z = 1$ setzt)

$$f(t+q) = f(t) + q(f'(t) + N),$$

wo N mit q null wird, also

$$f(t+q) - f(t) = q(f'(t) + N).$$

Da N mit q null wird, so muss für gehörig kleine Werthe von q auch $f'(t) + N$ mit $f'(t)$ gleichbezeichnet sein; also, wenn q und $f'(t)$ gleichbezeichnete Grössen sind, so wird dann $q(f'(t) + N)$ positiv, also auch $f(t+q) > f(t)$ sein, das heisst, $f(t)$ wächst mit t; wenn aber q und $f'(t)$ ungleichbezeichnete Grössen sind, so wird $q(f'(t) + N)$ negativ, also $f(t+q) < f(t)$, das heisst, $f(t)$ nimmt ab, wenn t wächst.

472. *Wenn die reelle Zahlfunktion $f(t)$ der reellen Zahlgrösse t für $t = t_1$ denselben Werth annimmt, wie für $t = t_2$, wo $t_2 > t_1$ ist, und* 329 *$f'(t)$ für jeden Werth t, der zwischen t_1 † und t_2 liegt, stetig ist, so muss für irgend einen Werth t, der zwischen t_1 und t_2 liegt, $f'(t) = 0$ sein.*

Beweis. Wenn $f'(t)$ für jedes zwischen t_1 und t_2 liegende t von Null verschieden wäre, so müsste es fortdauernd positiv oder fortdauernd negativ sein. Denn wäre $f'(t)$ für einige Werthe positiv, für andere negativ, so müsste es mindestens einen Werth geben, wo $f'(t)$ aufhörte positiv zu sein und anfinge negativ zu werden, oder umgekehrt; da aber $f'(t)$ (nach Hypothesis) stetig ist, so müsste es bei diesem Werthe von t nothwendig null werden. Wenn aber $f'(t)$ dauernd positiv wäre, so würde (nach 471) $f(t_2) > f(t_1)$ sein, was mit der Voraussetzung, dass $f(t_1) = f(t_2)$ sei, streitet. Wäre andererseits $f'(t)$ dauernd negativ, so müsste (nach 471) $f(t_2) < f(t_1)$ sein, was gleichfalls mit der Voraussetzung streitet. Also ist die Annahme, dass $f'(t)$ für jedes zwischen t_1 und t_2 liegende t von Null verschieden sei, unmöglich, das heisst, $f'(t)$ ist für irgend ein zwischen t_1 und t_2 liegendes t null.

473. *Wenn $f(t)$ eine reelle Zahlfunktion einer reellen Zahlgrösse t ist, und $f'(t)$ für jedes zwischen t_1 und t_2 liegende t stetig ist, so muss für irgend ein zwischen diesen Gränzen liegendes t*

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = f'(t)$$

sein.

Beweis. Die Funktion

$$\varphi(t) = f(t) - \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}(t - t_1)$$

nimmt für $t = t_1$ den Werth $f(t_1)$, für $t = t_2$ denselben Werth $f(t_1)$ an; da nun

$$\varphi'(t) = f'(t) - (f(t_2) - f(t_1)) : (t_2 - t_1)$$

ist, so ist also auch $\varphi'(t)$ zwischen jenen Gränzen stetig, folglich giebt es (nach 472) einen zwischen denselben Gränzen liegenden Werth t, für welchen $\varphi'(t) = 0$, das heisst,

$$f'(t) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

ist.

474. *Wenn $f(t)$ eine beliebige Funktion der reellen Zahlgrösse t ist, so ist, so lange $f'(t) = 0$ ist, auch $f(t)$ nothwendig konstant.*

Beweis. 1. $f(t)$ sei eine *reelle Zahlfunktion.* Angenommen, es 330 habe $f(t)$ für zwei verschiedene Werthe t_1 und t_2 ungleiche Werthe, also $f(t_1) \gtrless f(t_2)$, während doch $f'(t)$ zwischen t_1 und t_2 null sei, so hätte man (nach 473) für irgend ein zwischen t_1 und t_2 liegendes t

$$f'(t) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1},$$

also ungleich Null, was mit der Voraussetzung streitet; also ist die Annahme, dass $f(t)$ für irgend zwei Werthe, welche noch innerhalb der Gränzen liegen, zwischen welchen $f'(t) = 0$ ist, ungleiche Werthe annehme, unmöglich, das heisst, $f(t)$ ist innerhalb dieser Gränzen konstant.

2. Wenn $f(t)$ eine *beliebige Funktion* ist, und $e_1, e_2, \ldots$ ihre normalen Einheiten und $f_1(t), f_2(t), \ldots$ die zugehörigen Ableitzahlen sind, also

$$f(t) = e_1 f_1(t) + e_2 f_2(t) + \cdots$$

ist, so ist (nach 434)

$$df(t) = e_1 df_1(t) + e_2 df_2(t) + \cdots,$$

das heisst,

$$f'(t) = e_1 f_1'(t) + e_2 f_2'(t) + \cdots.$$

Da nun vorausgesetzt war, dass $f'(t) = 0$ sei, so sind (nach 28)

$$f_1'(t) = f_2'(t) = \cdots = 0,$$

also (nach Beweis 1, da $f_1(t), \ldots$ Zahlfunktionen sind) $f_1(t), f_2(t), \ldots$ konstant, also auch $e_1 f_1(t) + e_2 f_2(t) + \cdots$ konstant, das heisst, $f(t)$ konstant.

475. *Wenn $d_x f(x)$ innerhalb gewisser Gränzen, für jedes dx null ist, so ist innerhalb derselben Gränzen $f(x)$ konstant.*

Beweis. Es seien $e_1, e_2, \ldots$ die normalen Einheiten, und $x_1, x_2, \ldots$ die zugehörigen Ableitzahlen von x, also $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$, und seien die zu dem Vereine der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ gehörigen partiellen

Differenzialquotienten nach $x_1, x_2, \ldots$ beziehlich mit $\delta_1, \delta_2, \ldots$ bezeichnet, so ist (nach 437)

$$d_x f(x) = \delta_1 f(x) \cdot dx_1 + \delta_2 f(x) \cdot dx_2 + \cdots.$$

Da nun $d_x f(x)$ (nach Hypothesis) für jedes dx null ist, also auch, wenn $dx_1 \gtrless 0$, dx_2, dx_3, ... null sind, so hat man $\delta_1 f(x) = 0$, also (nach 474) $f(x)$ von x_1 unabhängig, und aus gleichem Grunde auch $f(x)$ von $x_2, x_3, \ldots$ unabhängig, das heisst, von x unabhängig, also konstant.

476. ***Wenn innerhalb gewisser Gränzen die Differenziale der Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ fortdauernd gleich sind, und für irgend einen*** 331 ***Werth x innerhalb jener Gränzen die Funktionen † selbst einander gleich sind, so findet diese Gleichheit auch für jeden andern zwischen jenen Gränzen liegenden Werth x statt.***

Beweis. Es sei $F(x) = f(x) - \varphi(x)$, so hat man

$$dF(x) = df(x) - d\varphi(x),$$

also $dF(x)$ innerhalb jener Gränzen, für welche die Voraussetzung, dass $df(x) = d\varphi(x)$ sei, stattfand, null; also (nach 475) innerhalb derselben Gränzen $F(x)$ konstant, das heisst, $f(x) - \varphi(x) =$ Konst. Da nun für einen gewissen Werth von x, nach der Voraussetzung, $f(x) = \varphi(x)$ ist, so ist die obige Konstante null, also für jeden Werth x innerhalb jener Gränzen $f(x) - \varphi(x) = 0$, das heisst, $f(x) = \varphi(x)$.

477. Erklärung. Wenn t eine positive Zahl ist und die Funktion $f(t)$ zwischen $t = 0$ und $t = t_1$ stetig ist, so verstehe ich unter dem Integral von $f(t)dt$ diejenige Funktion $F(t)$, welche mit t null wird und deren nach t genommenes Differenzial für jedes t, welches zwischen jenen Gränzen liegt, gleich $f(t)dt$ ist. Ich bezeichne dies Integral mit $d^{-1}f(t)dt$; das heisst, es ist

$$d^{-1}f(t)dt = F(t),$$

wenn

$$d_t F(t) = f(t)dt \text{ und } F(0) = 0$$

ist.

Anm. Die gewählte Bezeichnung gewährt vor der gewöhnlichen den Vorzug, dass sie nur als eine Erweiterung der für die Differenzialrechnung geltenden erscheint; eine neue Bezeichnung schien aber wünschenswerth, da der Begriff des Integrals, wie er oben aufgestellt ist, mit dem gewöhnlichen Begriffe desselben nicht deckend ist. Wenn wir bei der gewählten Bezeichnung festsetzen, dass das Differenzial, auf welches sich die Integration bezieht (hier dt) stets an den Schluss des zu integrirenden Ausdruckes gestellt werde, so können wir bei derselben die Klammer, welche eigentlich den zu integrirenden Ausdruck umschliessen müsste, entbehren. Ebenso hat man nicht nöthig, die Grösse, nach welcher integrirt werden soll, dem Integrationszeichen beizufügen, da diese gleichfalls durch das

an den Schluss gestellte Differenzial schon bezeichnet ist. Allein dann muss man festhalten, dass man dann nicht für dies Differenzial einen ihm gleichen Ausdruck, welcher ein anderes Differenzial enthält, setzen darf, wenn man nicht zuvor nachgewiesen hat, dass das Integral, wenn es sich auf dies neue Differenzial bezieht, denselben Werth beibehält.

Die Aenderung in dem Begriffe des Integrals, wie sie die obige Definition zeigt, besteht darin, dass die Unbestimmtheit, welche das sogenannte *allgemeine Integral* vermöge der willkürlich hinzuzufügenden Konstanten erhält, aufgehoben ist, indem das Integral nach dem aufgestellten Begriffe stets zwischen zwei genau festgestellten Gränzen genommen † ist, indem nämlich als Anfangsgränze 0, als 332 Endgränze der Werth der Variabeln selbst gesetzt ist. Das allgemeine Integral ist als für sich bestehende Grösse aus der Mathematik aus demselben Grunde gänzlich zu verbannen, wie alle andern mehrdeutigen Grössen und Grössenverknüpfungen, weil nämlich kein algebraisches Gesetz für solche mehrdeutige Ausdrücke allgemeine Geltung behält. Es hat also nur das bestimmte Integral wissenschaftliche Berechtigung.

Die gewählte Bezeichnung reicht aber {auch} aus, um jedes *bestimmte Integral* zu bezeichnen. Denn soll zum Beispiel das Integral von $f(z)dz$ zwischen den Gränzen a und $a+b$ genommen werden, so hat man nur $z=a+t$ zu setzen und $d^{-1}f(a+t)dt$ zu nehmen und nach der Integration $t=b$ zu setzen.

Noch bemerke ich, dass die Stetigkeit der zu integrirenden Funktion im Folgenden überall vorausgesetzt wird, auch wenn diese Bedingung nicht ausdrücklich hinzugefügt ist.

478. Zusatz. ***Wenn t eine positive Zahlgrösse ist, so ist***

$$d_t(d^{-1}f(t)dt)=f(t)dt,$$

und

$$[d^{-1}f(t)dt]_{(t=0)}=0.$$

479. ***Wenn $f(0)=0$ ist, so ist für jede positive Zahlgrösse t, die zwischen den Gränzen 0 und t' liegt, zwischen welchen $df(t)$ stetig ist,***

$$d^{-1}df(t)=f(t).$$

Beweis. Nach 478 ist, wenn alle Differenziale nach t genommen sind,

$$d(d^{-1}df(t))=df(t)$$

und

$$[d^{-1}df(t)]_{(t=0)}=0;$$

also haben die beiden Funktionen $d^{-1}df(t)$ und $f(t)$ die Eigenschaft, dass für jedes zwischen 0 und t' liegende t ihre Differenziale gleich sind, und dass für $t=0$ beide Funktionen einander gleich, nämlich gleich Null werden; denn für $d^{-1}df(t)$ haben wir es soeben bewiesen, und für $f(t)$ ist es (nach Hypothesis) der Fall. Also sind (nach 476) beide Funktionen einander gleich.

480. ***Eine Summe integrirt man {nach einer positiven Zahlgrösse}, indem man die Stücke integrirt, und ein Produkt, dessen einer Faktor***

konstant ist, integrirt man, indem man den variablen Faktor integrirt, und den konstanten unverändert lässt; oder, beides zu einer allgemeineren Formel zusammengefasst,

$$d^{-1}\Sigma a_\alpha f_\alpha(t)\,.\,dt = \Sigma a_\alpha d^{-1}f_\alpha(t)dt.$$

Beweis. Nach 478 wird die Funktion $d^{-1}f_\alpha(t)dt$ mit t null, also auch $a_\alpha d^{-1}f_\alpha(t)dt$, also (nach 421) auch die Summe dieser Ausdrücke; folglich ist (nach 479)

333
$$\begin{aligned}\Sigma a_\alpha d^{-1}f_\alpha(t)dt &= d^{-1}d\,\Sigma a_\alpha d^{-1}f_\alpha(t)dt\\ &= d^{-1}\Sigma a_\alpha d d^{-1}f_\alpha(t)dt \qquad [432, 433]\\ &= d^{-1}\Sigma a_\alpha f_\alpha(t)\,.\,dt \qquad [478].\end{aligned}$$

481. *Wenn $f(t)$ stetig ist für jede zwischen den Gränzen 0 und t' liegende positive Zahlgrösse t, so ist für jedes solche t auch die Integration von $f(t)dt$ ausführbar.*

Beweis. Wenn $f(t)$ eine reelle Zahlfunktion ist, so ist der Beweis bekannt (vgl. zum Beispiel Moigno, Calcul intégral p. 1 ss. (Paris 1844)). Wenn aber $f(t)$ eine beliebige Grösse ist, und $e_1, e_2, \ldots$ ihre normalen Einheiten, $f_1(t), f_2(t), \ldots$ ihre Ableitzahlen sind, also

$$f(t) = e_1 f_1(t) + e_2 f_2(t) + \cdots$$

ist, so ist (nach 480)

$$d^{-1}f(t)dt = e_1 d^{-1}f_1(t)dt + e_2 d^{-1}f_2(t)dt + \cdots.$$

Da nun (nach 413) $f_1(t), f_2(t), \ldots$ reell sind, so sind, wie eben gezeigt, die Integrationen $d^{-1}f_1(t)dt$, $d^{-1}f_2(t)dt$, ... ausführbar, also auch die Integration $d^{-1}f(t)dt$.

482. *Wenn die positive Zahlgrösse $t = \varphi(u)$ Funktion einer andern positiven Zahlgrösse u ist, und $\varphi(u)$ mit u zugleich null wird, so ist*

$$d^{-1}f(t)dt = d^{-1}f(t)\varphi'(u)du.$$

Beweis. Es sei $d^{-1}f(t)dt = F(t)$, das heisst, $d_t F(t) = f(t)dt$ und $F(0) = 0$. Da nun $d_t F(t) = F'(t)dt$ ist, so folgt aus der ersteren Gleichung $F'(t) = f(t)$. Nun ist (nach 440)

$$\begin{aligned}d_u F(t) &= F'(t)d_u t = F'(t)d_u\varphi(u)\\ &= F'(t)\varphi'(u)du \qquad [435].\end{aligned}$$

Ferner ist, wie oben gezeigt, $F'(t) = f(t)$, und $F(t) = F(\varphi(u))$, also, da $\varphi(u)$ mit u zugleich null wird, so wird $F(t)$ nicht bloss mit t, sondern auch mit u null, und wir erhalten also

$$d_u F(\varphi(u)) = f(t)\varphi'(u)du$$

und

$F(\varphi$ [illegible]

integri[illegible] nöthig, [illegible]

also ist (nach 477)

$$F(\varphi(u)) = d^{-1}f(t)\varphi'(u)du;$$

aber es war auch

$$F(\varphi(u)) = F(t) = d^{-1}f(t)dt,$$

also

$$d^{-1}f(t)dt = d^{-1}f(t)\varphi'(u)du.$$

483. Erklärung. Wenn x eine beliebige Grösse ist, deren numerischer Werth t ist, und $x:t$ mit e bezeichnet wird (wo also der numerische Werth von e gleich 1 und $x = et$ ist), so setze ich

$$d^{-1}f(x)dx = d^{-1}f(et)edt,$$

wo e bei der Integration als konstant gesetzt und vorausgesetzt wird, 334 dass $f(et)$ in t stetig ist, und auch bleibt, wenn t bis Null hin abnimmt. Wenn sich *eine mit x null werdende Funktion von x* finden lässt, deren nach x genommenes Differenzial $f(x)dx$ ist, so sagen wir, dass in diesem Falle $f(x)dx$ allseitig integrirbar sei.

Anm. Wir werden späterhin {vgl. Nr. 486} zeigen, dass jedesmal, wenn es eine Funktion $F(x)$ von der Art giebt, das $d_x F(x) = f(x)dx$, und $F(0) = 0$ sei, dann auch für jedes x jene Funktion $F(x) = d^{-1}f(x)dx$ sei, wobei $d^{-1}f(x)dx$ in dem oben gegebenen Sinne aufzufassen ist. Dagegen wird sich zeigen, dass es nicht zu jedem $f(x)dx$ eine Funktion $F(x)$ von der genannten Eigenschaft giebt, während auf der andern Seite $d^{-1}f(x)dx = d^{-1}f(et)edt$ (nach 481) stets gefunden werden kann. Es ist also $d^{-1}f(x)dx$ in der Weise, wie wir es oben definirt haben, als das allgemeine stets mögliche Integral von $f(x)dx$ aufzufassen, welches sich nur in speciellen Fällen als Funktion von x in der Art darstellen lässt, dass das nach x genommene Differenzial dieser Funktion gleich $f(x)dx$ sei.

484. *Statt eine Summe zu integriren, kann man die Stücke einzeln integriren, das heisst,*

$$d^{-1}(f_1(x) + f_2(x) + \cdots)dx = d^{-1}f_1(x)dx + d^{-1}f_2(x)dx + \cdots$$

oder

$$d^{-1}\Sigma f_a(x) . dx = \Sigma d^{-1}f_a(x)dx,$$

{*auch wenn die unabhängige Veränderliche x eine beliebige extensive Grösse ist*}.

Beweis. Es sei $x = et$, wo t eine positive Zahlgrösse und e numerisch gleich 1 ist, so ist

$$\begin{aligned} d^{-1}\Sigma f_a(x).dx &= d^{-1}\{\Sigma f_a(et)\}edt && [483] \\ &= d^{-1}\Sigma f_a(et)e.dt && [39] \\ &= \Sigma d^{-1}f_a(et)edt && [480], \end{aligned}$$

weil nämlich t eine positive Zahlgrösse ist,

$$= \Sigma d^{-1}f_a(x)dx \qquad [483].$$

485. *Statt ein Produkt zweier Faktoren, von denen der eine konstant ist, zu integriren, kann man den andern Faktor integriren, und den konstanten Faktor unverändert lassen, das heisst*

$$d^{-1} a f(x) dx = a d^{-1} f(x) dx,$$

wo $f(x)$ im Allgemeinen einen Ausdruck mit zwei Lücken darstellt, von denen die eine durch a, die andere durch dx ausgefüllt werden soll. Bezeichnen wir die erstere Lücke durch l, die letztere durch l_1, und schreiben statt a und dx beziehlich

$$\frac{a}{l} \text{ und } \frac{dx}{l_1},$$

335 *um dadurch symbolisch auszudrücken, dass a † in die Lücke l, und dx in die Lücke l_1 eintreten soll, so können wir die obige Formel bezeichnender schreiben*

$$d^{-1} \frac{a}{l} f(x) \frac{dx}{l_1} = \frac{a}{l} d^{-1} f(x) \frac{dx}{l_1}.$$

Beweis. Setzen wir $x = et$ (in dem Sinne von 483), so ist

$$\frac{a}{l} d^{-1} f(x) \frac{dx}{l_1} = \frac{a}{l} d^{-1} f(et) \frac{e}{l_1} dt \qquad [483]$$

$$= d^{-1} d\left[\frac{a}{l} d^{-1} f(et) \frac{e}{l_1} dt\right] \qquad [479, \{477\}]$$

$$= d^{-1} \frac{a}{l} d d^{-1} f(et) \frac{e}{l_1} dt \qquad [433]$$

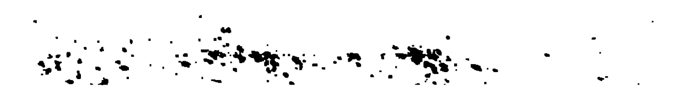
$$= d^{-1} \frac{a}{l} f(et) \frac{e}{l_1} dt \qquad [478]$$

$$= d^{-1} \frac{a}{l} f(x) \frac{dx}{l_1} \qquad [483].$$

Anm. {Da es hier nothwendig wird, zwischen den einzelnen Lücken der Funktion $f(x)$ und ihren Füllgrössen a und dx eine bestimmte Zuordnung festzusetzen, so tritt der Lückenausdruck $f(x)$, — wir wollen ihn einen Ausdruck mit „gebundenen" Lücken nennen, — in Gegensatz zu den bisher betrachteten Lückenausdrücken mit „freien" Lücken, bei denen eine Kettung der Lücken an einzelne Füllgrössen nicht stattfand*). Die Verschiedenheit beider Arten von Lückenausdrücken zeigt sich sogleich darin, dass ein Ausdruck mit n gebundenen Lücken bei der Multiplikation mit dem Produkte von n Füllgrössen stets nur ein einziges Glied ergiebt, während ein Ausdruck mit n freien Lücken bei derartiger Multiplikation eine Schaar von $n!$ Gliedern lieferte, aus denen das arithmetische Mittel zu nehmen war.

Hält man an der oben gewählten Bezeichnung fest, bei welcher die Lücken durch Zeiger von einander unterschieden werden, während ihre Verkettung mit den Füllgrössen durch die zu den Füllgrössen hinzugefügten Nenner kenntlich gemacht wird, so bleibt es vollkommen willkürlich, ob man die Füllgrössen vor

*) {Die Lückenausdrücke der letzteren Art wurden bisher im Texte weniger bezeichnend Ausdrücke mit „vertauschbaren" Lücken genannt.}



oder hinter den Lückenausdruck stellt, da ja doch jeder von ihnen durch ihren Nenner der Platz, den sie beim Einrücken in den Lückenausdruck erhalten soll, genau vorgeschrieben ist. Doch wird im Folgenden auch eine andere, bequemere Schreibweise Verwendung finden. Zur Festlegung der Zuordnung zwischen den Lücken und ihren Füllgrössen genügt es nämlich, wenn man den Lücken, etwa wieder durch Hinzufügung von Zeigern, eine gewisse *Rangordnung* ertheilt, die Füllfaktoren aber ohne Beifügung von Nennern hinter den Lückenausdruck stellt mit der Bestimmung, dass die zuerst aufgeführte Füllgrösse in die erste Lücke eintreten solle, die zweite in die zweite, und so fort.

Ob die Lücken eines Lückenausdrucks als frei oder gebunden aufzufassen sind, ergiebt sich meist aus der Entstehungsweise des Ausdrucks. Ein Beispiel möge dies erläutern.

Es sei $f(x)$ ein Ausdruck mit einer oder mehreren Lücken und

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots,$$

wo die Grössen $e_1, e_2, \ldots$ ein einfaches Normalsystem bilden. Dann wird (nach 438 und 382) der Differenzialquotient

$$f'(x) = [l|e_1]\frac{d}{dx_1}f(x) + [l|e_2]\frac{d}{dx_2}f(x) + \cdots.$$

Er wird also noch eine Lücke mehr enthalten als die Funktion $f(x)$ selbst. Ferner wird (nach 435)

$$f'(x)dx = d_x f(x).$$

Dabei versteht es sich von selbst, dass die durch Differenziation in den Ausdruck $f'(x)$ hineingekommene Lücke l der Füllgrösse dx zugewiesen werden muss; und, da die Grösse dx unmittelbar hinter den Differenzialquotienten gestellt zu werden pflegt, so wird die Zuordnung zwischen der Lücke l und der Füllgrösse dx formell durch die Bestimmung festgelegt sein, dass l als die *erste* Lücke von $f'(x)$ aufgefasst werden solle.

Von besonderer Wichtigkeit für das Folgende ist der Fall, wo ein Ausdruck mit gebundenen Lücken die Eigenschaft hat, dass stets dasselbe Resultat hervorgeht, mag man nun die Füllgrössen in der vorgeschriebenen oder in einer anderen Ordnung in die Lücken einführen; dann heissen seine Lücken vertauschbar. So sind zum Beispiel bei einem Ausdrucke A_{l,l_1} mit zwei *gebundenen* Lücken l und l_1, von denen l als die erste gelten soll, diese Lücken *vertauschbar*, wenn für je zwei beliebige Füllgrössen a und b die Gleichung besteht

$$A_{l,l_1}ab = A_{l,l_1}ba,$$

das heisst also, wenn für beliebige Werthe von a und b

$$(*) \qquad A_{a,b} = A_{b,a}$$

ist. In diesem Falle liefert dann die Multiplikation des Ausdruckes A_{l,l_1} mit dem Produkte der Füllgrössen a, b genau dasselbe Ergebniss, wie wenn der Ausdruck zwei *freie* Lücken besässe. Denn, bezeichnet man noch den Ausdruck, der aus dem Lückenausdrucke A_{l,l_1} bei Aufhebung der Bindung seiner Lücken hervorgeht, mit $A_{l,l}$, so wird

$$A_{l,l}ab = \tfrac{1}{2}\{A_{a,b} + A_{b,a}\}$$

das heisst (nach (*))

$$= A_{a,b}$$

$$= A_{l,l_1}ab.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe des Lückenausdruckes (Nr. 357), der in dieser Form auch für Ausdrücke mit gebundenen Lücken festgehalten werden soll, kann man also in diesem Falle setzen

$$A_{l,l_1} = A_{l,l};$$

das heisst: *Vertauschbare gebundene* Lücken können stets durch *freie* Lücken ersetzt werden*). Wenn daher in der Formel des obigen Satzes (das heisst, in 485) die beiden Lücken der Funktion $f(x)$ vertauschbar sein sollten, so wird die Unterscheidung ihrer Lücken überflüssig.

Uebrigens ist es oft vortheilhaft, auch bei einem Ausdrucke mit vertauschbaren gebundenen Lücken an der Bindung seiner Lücken festzuhalten, da die Multiplikation eines solchen Ausdruckes mit einem Produkte von Füllgrössen sich begrifflich und formell einfacher gestaltet, als bei einem Ausdrucke mit freien Lücken. Die Wichtigkeit des Begriffes vertauschbarer gebundener Lücken zeigt der folgende Satz.}

486. *Es ist $f(x)dx$ dann und nur dann allseitig integrirbar, wenn die abgeleitete Funktion $f'(x)$ entweder ein lückenloser Ausdruck (das heisst, x eine reelle Zahlgrösse) oder ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren {gebundenen} Lücken ist, nämlich so, dass es für das Resultat gleichgültig ist, in welcher Vertheilung zwei Grössen in die beiden Lücken eintreten. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, und $F(x)$ die mit x null werdende Funktion von x ist, deren nach x genommenes Differenzial $f(x)dx$ ist, so ist allemal*

$$F(x) = d^{-1}f(x)dx.$$

Beweis. 1. Wenn es eine mit x verschwindende Funktion $F(x)$ giebt, so dass

$$d_x F(x) = f(x)dx$$

336 ist, so ist $F'(x) = f(x)$ (nach 435), † also $F''(x) = f'(x)$ (nach 450). Aber $F''(x)$ ist (nach 451) ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken, {und diese Lücken bleiben (wegen 446) auch dann noch vertauschbar, wenn man sie nicht mehr als freie, sondern als gebundene Lücken auffasst}, also gilt dasselbe auch von dem Ausdrucke $f'(x)$, der ja gleich $F''(x)$ ist. Wenn die Lücken von nullter Stufe sind, (das heisst, x eine Zahlgrösse ist), so können die Lücken weggelassen werden, und wird dann $f'(x)$ ein lückenloser Ausdruck.

2. Es sei $x = yt$, wo y numerisch gleich 1 und t eine positive

*) {Dagegen besteht zwischen einem Ausdrucke A_{l,l_1} mit zwei *nicht vertauschbaren gebundenen* Lücken und dem entsprechenden Ausdrucke $A_{l,l}$ mit freien Lücken die Beziehung

$$A_{l,l} = \tfrac{1}{2}\{A_{l,l_1} + A_{l_1,l}\},$$

eine Beziehung, die man leicht auch auf Ausdrücke mit beliebig vielen Lücken übertragen kann.}

Zahl ist, und sei vorausgesetzt, dass $f'(x)$ ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken sei, so hat man (nach 483)

$$d^{-1}f(x)dx = d^{-1}f(yt)ydt,$$

wo bei der Integration y als konstant betrachtet wird. Es sei dies Integral gleich $F(y, t)$ gesetzt, das heisst, es sei

$$d_t F(y, t) = f(yt)ydt,$$

und $F(y, 0) = 0$, so beweise ich, dass

$$d_x F(y, t) = f(x)dx$$

sei. Da y und t von einander unabhängig und ausserdem Funktionen von x sind (nämlich $t = \sqrt{x^2}$ und $y = x : \sqrt{x^2}$), so kann $F(y, t)$ auch als Funktion von x aufgefasst werden und es ist, wenn d_y und d_t die auf den Verein der beiden Variabeln y und t bezüglichen {partiellen} Differenziale sind, (nach 442)

$$d_x F(y, t) = d_y F(y, t) + d_t F(y, t) = d_y F(y, t) + f(yt)ydt.$$

Ferner ist (nach 446)

$$\begin{aligned} d_t[d_y F(y, t)] &= d_y[d_t F(y, t)] \\ &= d_y[f(yt) \, . \, ydt] \\ &= f'(yt) \, . \, tdy \, . \, ydt + f(yt)dydt \qquad [433], \end{aligned}$$

{wobei in dem Ausdrucke $f'(yt)$ die durch Differenziation entstandene Lücke als die erste, die schon in $f(x)$ vorhandene Lücke als die zweite aufgefasst ist. Da aber $f'(x)$ nach Voraussetzung ein Ausdruck mit zwei *vertauschbaren* Lücken ist, so lassen sich im ersten Gliede die Faktoren tdy und ydt umstellen, und man erhält den letzten Ausdruck

$$\begin{aligned} &= f'(yt) \, . \, ydt \, . \, tdy + f(yt)dydt \,\} \\ &= d_t f(yt) \, . \, tdy + f(yt)dtdy \qquad [440] \\ &= d_t[f(yt) \, . \, tdy] \qquad [433]. \end{aligned}$$

Da nun, wie oben gezeigt, $F(y, 0) = 0$ ist für jedes y, so ist auch $d_y F(y, 0)$ gleich Null, ebenso wird $f(yt) \, . \, tdy$ mit t null, also ist (nach 476)

$$d_y F(y, t) = f(yt) \, . \, tdy.$$

Indem wir nun diesen Werth in den oben für $d_x F(y, t)$ gefundenen Ausdruck einführen, erhalten wir

$$\begin{aligned} d_x F(y, t) &= f(yt) \, . \, tdy + f(yt) \, . \, ydt \\ &= f(yt)d(yt) = f(x)dx. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir endlich noch die Funktion $F(y, t)$, aufgefasst als

Funktion von x, mit $F(x)$, so haben wir also in jedem Falle, wo $f'(x)$ ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken ist (wohin auch der Fall gerechnet werden kann, wo $f'(x)$ ein lückenloser Ausdruck ist), *eine* mit $x = yt$ null werdende Funktion $F(x)$ gefunden, deren nach x genommenes Differenzial gleich $f(x)dx$ ist; und zwar war diese Funktion gleich $d^{-1}f(x)dx$.

337 3. Ausser der Funktion $F(x) = d^{-1}f(x)dx$ kann es *keine andere Funktion* $\varphi(x)$ geben, deren nach x genommenes Differenzial in demselben Umfange, wie das von $F(x)$, gleich $f(x)dx$ ist, und welche mit x null wird; denn, wenn $d_x F(x) = d_x \varphi(x)$ und für irgend einen Werth (hier für $x = 0$) $F(x) = \varphi(x)$ ist, so findet (nach 476) diese Gleichheit allgemein statt. Folglich, sobald $d_x F(x) = f(x)dx$ und $F(0) = 0$ ist, muss auch $F(x) = d^{-1}f(x)dx$ sein.

487. *Wenn x aus seinen normalen Einheiten e_1, e_2, ... durch die Zahlen x_1, x_2, ... ableitbar, also $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$ ist, und wenn zugleich $f(x)dx = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \cdots$ ist, wo A_1, A_2, ... Funktionen von x_1, x_2, ... sind: so ist die Bedingung (**allseitiger Integrirbarkeit**), dass $f'(x)$ ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren* {*gebundenen*} *Lücken sei, identisch der Bedingung, dass für je zwei Indices r und s*

$$\delta_r A_s = \delta_s A_r$$

sei, wo δ_1, δ_2, ... die zu dem Vereine der Veränderlichen x_1, x_2, ... gehörigen partiellen Differenzialquotienten nach x_1, x_2, ... bezeichnen.

Beweis. Statt $A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \cdots$ können wir, da (nach 142) $[e_r\, e_r] = 1$, und $[e_r\, e_s] = 0$ ist, wenn $r \gtrless s$ ist, schreiben

$$(A_1[l|e_1] + A_2[l|e_2] + \cdots)dx.$$

Also, da für jedes dx

$$f(x)dx = (A_1[l|e_1] + A_2[l|e_2] + \cdots)dx$$

ist, so ist (nach 357)

$$\{*\} \qquad f(x) = A_1[l|e_1] + A_2[l|e_2] + \cdots = \Sigma A_a[l|e_a].$$

Nun ist (nach 437)

$$d_x f(x) = \Sigma\{\delta_b f(x) \,.\, dx_b\},$$

{es wird also nach {*}, 433 und 431 c}

$$d_x f(x) = \Sigma\{\delta_b A_a \,.\, [l|e_a]\, dx_b\}.$$

{**Führt man in dieser Gleichung auf der linken Seite nach 435 den Differenzialquotienten $f'(x)$ ein und wendet auf der rechten Seite die vorhin benutzte Schlussweise noch einmal an, so erhält man**}

$$f'(x)dx = \Sigma\left\{\delta_b A_a . [l|e_a][l_1|e_b]\right\} \cdot \frac{dx}{l_1},$$

wo l_1 eine Lücke ist, in welche dx eintreten soll. Somit wird (nach 357)

$$f'(x) = \Sigma\{\delta_b A_a . [l|e_a][l_1|e_b]\}.$$

Sind nun l und l_1 *vertauschbare* Lücken, so hat man für je zwei Zeiger r und s

$$\Sigma\{\delta_b A_a . [e_s|e_a][e_r|e_b]\} = \Sigma\{\delta_b A_a . [e_r|e_a][e_s|e_b]\}.$$

Da aber $[e_r|e_s]$ null ist für je zwei verschiedene Zeiger r und s, und gleich 1 ist für je zwei gleiche, so erhält man

$$\delta_r A_s = \delta_s A_r, \qquad 338$$

und ebenso geht umgekehrt aus diesen letzteren Gleichungen die vorletzte, welche die Vertauschbarkeit der Lücken aussagt, hervor.

488. *Wenn $f(x)$ innerhalb gewisser Gränzen, in denen auch $x = 0$ und $x = a$ liegt, stetig {und allseitig integrirbar} ist, und*

$$F(x) = d^{-1}f(x)dx$$

ist, so ist auch, wenn $x = a + y$ ist,

$$F(a + y) - F(a) = d^{-1}f(a + y)dy.$$

Beweis. Wenn $F(x) = d^{-1}f(x)dx$ ist, so ist $d_x F(x) = f(x)dx$ {nach 483}, das heisst, $F'(x) = f(x)$; also

$$d_y[F(a + y) - F(a)] = F'(a + y)dy \qquad \text{[nach 440]}$$
$$= f(a + y)dy.$$

Ferner ist $F(a + y) - F(a)$ für $y = 0$ gleichfalls null, also (nach 477)

$$F(a + y) - F(a) = d^{-1}f(a + y)dy.$$

489. *Es ist, wenn a einen Ausdruck mit n Lücken l und einer Lücke l_1 bezeichnet,*

$$d^{-1}a\left(\frac{x}{l}\right)^n \frac{dx}{l_1} = \frac{1}{n+1}\, ax^{n+1}.$$

Beweis. Es sei $x = et$, wo t der numerische Werth von x, und e numerisch gleich 1 ist, so ist

$$d^{-1}a\left(\frac{x}{l}\right)^n \frac{dx}{l_1} = d^{-1}a\left(\frac{e}{l}\right)^n \frac{e}{l_1}\, t^n dt.$$

Es sei {das Produkt} ae^{n+1}, das wir, da in die Lücken l und l_1 in dem Ausdrucke

$$a\left(\frac{e}{l}\right)^n \frac{e}{l_1}$$

dieselbe Grösse e eintritt, statt dieses Ausdruckes setzen können, mit b bezeichnet, so erhalten wir

$$d^{-1} a \left(\frac{x}{l}\right)^n \frac{dx}{l_1} = d^{-1} b t^n dt = \frac{1}{n+1} b t^{n+1},$$

da der letzte Ausdruck mit t verschwindet und nach t differenzirt $b t^n dt$ liefert, also

$$= \frac{1}{n+1} a e^{n+1} t^{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} a x^{n+1}.$$

490. *Wenn die Reihe*

$$\sum a_\alpha \left(\frac{x}{l}\right)^\alpha \frac{dx}{l_1},$$

in welcher a_α einen Ausdruck mit α Lücken l und einer Lücke l_1 darstellt, eine ächte ist, so ist

$$d^{-1} \sum a_\alpha \left(\frac{x}{l}\right)^\alpha \frac{dx}{l_1} = \sum \frac{a_\alpha}{\alpha + 1} x^{\alpha+1}.$$

339 Beweis. Man hat (nach 484)

$$d^{-1} \sum a_\alpha \left(\frac{x}{l}\right)^\alpha \frac{dx}{l_1} = \sum d^{-1} a_\alpha \left(\frac{x}{l}\right)^\alpha \frac{dx}{l_1}$$

$$= \sum \frac{a_\alpha}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} \qquad \text{[nach 489]}.$$

Anm. Durch diese Formel, welche nur dann das allseitige Integral darstellt, wenn die Bedingung allseitiger Integrirbarkeit (486) erfüllt wird, ist die Aufgabe der Integration von Differenzialausdrücken allgemein gelöst. Da es uns hier nur auf die Darstellung der Integralrechnung in ihren wesentlichsten Zügen ankommt, so können wir mit dieser Lösung der Aufgabe uns hier begnügen.

§ 2. Integration von Differenzialgleichungen, wenn die unabhängige Variable eine Zahlgrösse ist.

491. Erklärung. Einen gegebenen Verein von Differenzialgleichungen (der aber auch aus einer einzigen Gleichung bestehen kann) vollständig integriren, heisst die sämmtlichen Vereine von Gleichungen finden, welche keine Differenziale mehr enthalten, und von denen jeder Verein die Eigenschaft hat, dass, wenn er erfüllt ist, auch der gegebene Verein erfüllt sei; jeder solche Verein heisst ein (den gegebenen Verein) *integrirender Verein.* Wenn also A ein Verein von Differenzialgleichungen und B ein ihn integrirender Verein ist, so heisst das: 1) B enthält keine Differenziale mehr und 2) sobald die Gleichungen des Vereins B als richtig vorausgesetzt sind, so lassen sich daraus die Gleichungen des Vereines A als richtig nachweisen.

Anm. Es soll in diesem Paragraphen vorausgesetzt werden, dass, wenn alle Variabeln als veränderliche Zahlgrössen aufgefasst werden, von einer der-

selben (t) alle übrigen ($x_1, \ldots x_n$) abhängen. Soll diese Abhängigkeit durch die gegebenen Differenzialgleichungen so genau bestimmt werden, als dies überhaupt durch Differenzialgleichungen möglich ist, so müssen so viel (n) von einander unabhängige Differenzialgleichungen gegeben sein, als es abhängige Variabeln giebt. Ist t die unabhängige (variable) Zahlgrösse und sind $x_1, \ldots x_n$ die abhängigen Zahlgrössen, so können wir ein System von n Einheiten $e_1, e_2, \ldots e_n$ annehmen und $x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = x$ setzen. Da t als die unabhängige Variable angenommen ist, so werden alle in den gegebenen Differenzialgleichungen vorkommenden Differenzialquotienten † nach t genommen sein müssen. Wenn 340 diese Differenzialquotienten bis zur m-ten Ordnung aufsteigen, so wird jede der n Gleichungen die Form haben, dass eine Zahlfunktion von t, x und den Differenzialquotienten von x bis zur m-ten Ordnung hin gleich 0 gesetzt ist. Sind nun $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_n = 0$ diese n Gleichungen, so setze man $e_1 f_1 + \cdots + e_n f_n = f$, so haben wir eine Gleichung

$$f\left(t, x, \frac{d}{dt} x, \cdots \frac{d^m}{dt^m} x\right) = 0$$

aufzulösen, in welcher t eine Zahlgrösse ist, hingegen x und die Funktion f aus n Einheiten numerisch ableitbar sind.

Die Lösung dieser Gleichung bildet also den Gegenstand dieses Paragraphen. Zunächst behandeln wir die Differenzialgleichungen erster Ordnung, das heisst, den Fall, wo $m = 1$ ist.

492. Aufgabe. *Die Gleichung $f(t, x, \delta x) = 0$, in welcher t eine Zahlgrösse, x und $f(t, x, \delta x)$ Grössen sind, die aus n Einheiten ableitbar sind, und δx den Differenzialquotienten von x nach t bezeichnet, zu integriren; wobei vorausgesetzt wird, dass sich $f(t, x, \delta x)$ nicht aus weniger als n Einheiten ableiten lasse.*

Auflösung. Es seien $e_1, \ldots e_n$ die Einheiten, aus denen $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ und $f = e_1 f_1 + \cdots + e_n f_n$ numerisch abgeleitet sind. Es wird vorausgesetzt, dass die Gleichungen

$$f_1 = 0, \ \ldots, \ f_n = 0,$$

welche in $f = 0$ enthalten sind, nicht von einander abhängig sind, das heisst, dass keine derselben aus den übrigen sich mit Nothwendigkeit ergebe. Denn dann würde sich in der Gleichung $f = 0$, f aus weniger als n Einheiten numerisch ableiten lassen, was oben ausgeschlossen wurde.

Es sind hier $f_1, \ldots f_n$ Funktionen der Zahlgrössen, $t, x_1, \ldots x_n, \delta x_1, \ldots \delta x_n$. Man bestimme aus einer der Gleichungen $f_1 = 0, \ldots, f_n = 0$ eine der Unbekannten $\delta x_1, \ldots \delta x_n$ und setze den gefundenen Werth in die übrigen Gleichungen ein; mit den so erhaltenen, und überhaupt mit den jedesmal noch übrig bleibenden Gleichungen, so fern sie noch eine der Variabeln $\delta x_1, \ldots \delta x_n$ enthalten, verfahre man ebenso, so erhält man zuletzt *entweder* aus der zuletzt übrig bleibenden Glei-

chung den Werth der letzten jener Unbekannten, und dadurch dann nach und nach alle jene Unbekannten $\delta x_1, \ldots \delta x_n$ als Funktionen von $t, x_1, \ldots x_n$, das heisst, δx als Funktion von t und x, *oder* es 341 sind aus der letzten oder auch schon aus den letzten † m Gleichungen die sämmtlichen Grössen $\delta x_1, \ldots \delta x_n$ verschwunden. In diesem Falle bleiben m Gleichungen übrig, welche nur Beziehungen zwischen t, $x_1, \ldots x_n$ ausdrücken, und zwar müssen diese Gleichungen alle von einander unabhängig sein, weil im entgegengesetzten Falle auch die n ursprünglichen Gleichungen von einander abhängig wären. Diese m Gleichungen bilden dann einen Theil der gesuchten Integralgleichungen. Durch sie kann man m der Werthe $t, x_1, \ldots x_n$ durch die übrigen $n - m + 1$ ausdrücken, und dadurch reduciren sich die $n - m$ ersten Differenzialgleichungen (vermittelst welcher man $n - m$ der Unbekannten $\delta x_1, \ldots \delta x_n$ ausdrückte) auf $n - m$ Gleichungen, in welchen ausser t nur $n - m$ der Grössen $x_1, \ldots x_n$ und die entsprechenden $n - m$ der Grössen $\delta x_1, \ldots \delta x_n$ vorkommen; und durch welche sich diese letzteren als Funktionen der ersteren darstellen lassen.

Somit kommt es nur auf die Integration der Gleichungen von der Form $\delta x = f(t, x)$, das heisst $dx = f(t, x)dt$ an. Diese Integration soll in den nächstfolgenden Nummern behandelt werden.

493. *Wenn*

$$dx = f(t)dt$$

ist, wo t eine Zahlgrösse und x eine aus einem Systeme von n Einheiten ableitbare Grösse ist, so ist

$$x = d^{-1}f(t)dt + c,$$

wo c eine (aus n Einheiten ableitbare) willkürliche Konstante ist.

Beweis. Es sei $d^{-1}f(t)dt$ gleich y gesetzt, so ist (nach 478) $dy = f(t)dt$, also $dx - dy = 0$, das heisst (nach 432, 433) $d(x - y) = 0$, also (nach 475) $x - y$ konstant. Diese Konstante, welche mit x von gleicher Gattung, also aus n Einheiten ableitbar ist, sei c, so hat man $x = y + c = d^{-1}f(t)dt + c$.

494. *Wenn*

$$\delta x = f(x, t) \tag{a}$$

ist, und man überall unter δ den totalen Differenzialquotienten nach t versteht (auch x als von t abhängig gedacht), hingegen unter $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dt}$ die partiellen Differenzialquotienten in Bezug auf den Verein der Variabeln 342 *x, t, von denen die erste eine † extensive Grösse, die letztere eine Zahlgrösse darstellt, so ist*

$$\text{(b)}\quad \begin{cases} \delta^2 x = \frac{d}{dt} f + f \frac{d}{dx} f \\ \delta^3 x = \frac{d}{dt}(\delta^2 x) + f \frac{d}{dx}(\delta^2 x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \delta^{r+1} x = \frac{d}{dt}(\delta^r x) + f \frac{d}{dx}(\delta^r x), \end{cases}$$

und wenn man

$$\delta^{r+1} x = f_r(x, t)$$

setzt, so ist

$$\text{(c)}\qquad x = c + f(c, 0)t + f_1(c, 0)\frac{t^2}{2!} + f_2(c, 0)\frac{t^3}{3!} + \cdots,$$

wo c eine willkürliche Konstante ist, nämlich der Werth, den x annimmt, wenn t null wird, und wo vorausgesetzt wird, dass die Reihe auf der rechten Seite eine ächte sei. Aus der Gleichung (c) *findet man auch c als Funktion von x und t, nämlich:*

$$\text{(d)}\qquad c = x - f(x, t)t + f_1(x, t)\frac{t^2}{2!} - f_2(x, t)\frac{t^3}{3!} + \cdots.$$

Beweis. Die Formeln (b) ergeben sich unmittelbar aus (a) indem, wenn φ eine beliebige Funktion von x und t ist, und x als von t abhängig gedacht wird,

$$d\varphi = \frac{d}{dx}\varphi \,.\, dx + \frac{d}{dt}\varphi \,.\, dt,$$

also $\frac{d\varphi}{dt}$, das heisst

$$\delta\varphi = \frac{d}{dx}\varphi \,.\, \delta x + \frac{d}{dt}\varphi$$

ist; es ist aber nach (a) $\delta x = f$, also erhält man

$$\delta\varphi = f\frac{d}{dx}\varphi + \frac{d}{dt}\varphi,$$

woraus die Formeln (b) hervorgehen, indem man statt φ nach und nach $\delta x, \delta^2 x, \ldots \delta^r x$ setzt. Dann aber ergiebt sich die Formel (c) unmittelbar aus dem Taylor'schen (Maclaurin'schen) Satze (470).

Setzen wir $x = F(t)$, so können wir den Taylor'schen Satz auch in der Form darstellen

$$F(t + \tau) = x + f(x, t)\tau + f_1(x, t)\frac{\tau^2}{2!} + \cdots,$$

oder, wenn wir $\tau = -t$ setzen,

$$F(0) = x - f(x, t)t + f_1(x, t)\frac{t^2}{2!} - f_2(x, t)\frac{t^3}{3!} + \cdots.$$

$F(0)$ ist aber der Werth von $x = F(t)$ für $t = 0$, das heisst, $F(0)$ 343 ist gleich c, somit auch Gleichung (d) bewiesen.

Anm. Es versteht sich von selbst, dass die willkürliche Konstante c mit x von gleicher Gattung ist, und also n numerische Konstanten einschliesst, wenn x aus einem Systeme von n Einheiten ableitbar ist. Die Integrationsgleichung in der Form (d) ist von besonderem Interesse, in so fern in ihr eine Funktion von x und t einer Konstanten gleich gesetzt ist, und zwar derjenigen Konstanten, welcher x gleich wird, wenn $t = 0$ wird, worauf wir im folgenden Paragraphen {s. Nr. 517} zurückkommen werden.

Wir haben oben die Differenzialquotienten $\delta^2 x$, $\delta^3 x$, ... fortschreitend, jeden aus dem nächstvorhergehenden abgeleitet. Es ist von Interesse, auch eine unmittelbare Darstellung dieser Differenzialquotienten als Funktionen von x und t zu versuchen, was in dem folgenden Satze geschehen ist, dessen sich leicht ergebenden aber etwas umständlichen Beweis ich dem Leser überlasse.

495. *Wenn in dem Sinne von 494*

$$\delta x = f(x, t)$$

ist, so ist

$$\delta^{r+1} x = \sum \left\{ \alpha_{a, \mathfrak{a}, b, \mathfrak{b}, \ldots} f^{\mathfrak{k}} \cdot \frac{d^{a+\mathfrak{a}}}{d t^a \, d x^{\mathfrak{a}}} f \cdot \frac{d^{b+\mathfrak{b}}}{d t^b \, d x^{\mathfrak{b}}} f \ldots \right\},$$

wo sich die Summe auf alle möglichen ganzen, aber nicht negativen Werthe $a, \mathfrak{a}, b, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{k}$ *bezieht, welche den Bedingungen unterworfen sind, dass*

$$\mathfrak{k} = 1 + (\mathfrak{a} - 1) + (\mathfrak{b} - 1) + \cdots,$$

dass ferner

$$a + \mathfrak{a} + b + \mathfrak{b} + \cdots = r,$$

und die Summen $a + \mathfrak{a}$, $b + \mathfrak{b}$, ... *alle grösser als Null seien, und wo*

$$\alpha_{a, \mathfrak{a}, b, \mathfrak{b}, \ldots} = \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - 1)(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} - 2) \ldots}{(r - a)(r - a - b - 1)(r - a - b - c - 2) \ldots} \cdot \frac{r!}{a! \, \mathfrak{a}! \, b! \, \mathfrak{b}! \ldots}$$

ist.

496. Aufgabe. *Die Differentialgleichung*

$$f(\delta^m x, \delta^{m-1} x, \ldots \delta^0 x, t) = 0,$$

wo x *sowohl als* f *aus einem Systeme von* n *Einheiten* $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ *ableitbar sind,* t *eine Zahlgrösse darstellt,* δ *den totalen Differenzialquotienten nach* t (x *als von* t *abhängig gedacht*) *bezeichnet, und* $\delta^0 x$ *statt* x *geschrieben ist, zu integriren.*

Auflösung. Man setze

$$\delta^0 x = p_0, \quad \delta x = p_1, \ldots, \quad \delta^{m-1} x = p_{m-1},$$

so wird $\delta^m x = \delta p_{m-1}$, und man hat die m Gleichungen:

344 {a} $$\delta p_0 = p_1, \quad \delta p_1 = p_2, \ldots, \quad \delta p_{m-2} = p_{m-1}$$

und die Gleichung

$$f(\delta p_{m-1}, p_{m-1}, \ldots p_1, p_0, t) = 0.$$

Aus der letzten Gleichung bestimme man δp_{m-1}, es sei

{b} $$\delta p_{m-1} = \varphi(p_0, p_1, \ldots p_{m-1}, t).$$

Nun nehme man ausser den n Einheiten $e_1, \ldots e_n$, aus denen x abgeleitet ist, noch m neue Einheiten $e^{(0)}, e^{(1)}, \ldots e^{(m-1)}$ an und multiplicire die obigen m Gleichungen {{a} und {b}} beziehlich mit $e^{(0)}, e^{(1)}, \ldots e^{(m-1)}$ und addire. Man setze ferner

$$p_0 e^{(0)} + p_1 e^{(1)} + \cdots + p_{m-1} e^{(m-1)} = p$$

und

$$p_1 e^{(0)} + p_2 e^{(1)} + \cdots + p_{m-1} e^{(m-2)} + \varphi(p_0, p_1, \ldots p_{m-1}, t) e^{(m-1)} = F(p, t),$$

so sind p und F aus den nm Einheiten $e^{(r)} e_s$ (wo r jeden der m Werthe 0 bis $m - 1$, und s jeden der n Werthe 1 bis n annehmen kann) ableitbar, und man erhält die Gleichung

$$\delta p = F(p, t).$$

Diese Gleichung ist nach der Methode von 494 zu integriren und liefert eine aus nm Einheiten $(e^{(r)} e_s)$ ableitbare willkürliche Konstante.

Anm. Hierdurch ist die für diesen Paragraphen vorgesteckte Aufgabe durch Anwendung unendlicher Reihen ganz allgemein gelöst, denn auch die sogenannten besonderen Auflösungen sind, wie dies schon die Allgemeinheit der angewandten Beweismethode zu erkennen giebt, in der oben mitgetheilten allgemeinen Auflösungsmethode vollständig mit eingeschlossen. Da jedoch diejenigen Differenzialgleichungen, welche in Bezug auf die abhängige Variable (x) und deren Differenziale von erstem Grade sind, und welche die unabhängige numerische Variable (t) nur in Gliedern enthalten, in denen jene Variable und deren Differenziale nicht vorkommen, durch Gleichungen von endlicher Form integrirbar sind, so will ich diesen Fall hier noch behandeln.

498.*) *Die Differentialgleichung*

(a) $$\delta x + A x = 0,$$

in welcher δ und x die Bedeutung der vorigen Nummern haben, A aber einen Bruch mit n Nennern (377 ff.) *darstellt, wird, wenn $m_1, \ldots m_n$, die wir alle von einander verschieden † voraussetzen, die n Hauptzahlen* 345 *des Bruches A, und $a_1, \ldots a_n$ die zugehörigen Hauptgebiete erster Stufe* ({387}, 388, 389) *sind, integrirt durch die Gleichung*

(b) $$x = \sum \alpha_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a} e^{-m_\mathfrak{a} t},$$

wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist, und $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ willkürliche konstante Zahlen bezeichnen, und die Summe sich auf $\mathfrak{a} = 1$ bis n bezieht. Die n Werthe $m = m_1, \ldots m_n$ sind durch die Gleichung n-ten Grades

(c) $$[(m - A)^n] = 0$$

bestimmt und die n Grössen $a_1, \ldots a_n$ durch die n Gleichungen

(d) $$(m_r - A) a_r = 0.$$

*) {In der Originalausgabe ist keine Nr. 497 vorhanden.}

Beweis. Dass die n Hauptzahlen $m = m_1, m_2, \ldots m_n$ die n Wurzeln der Gleichung (c) und die n zugehörigen Hauptgebiete $a_1, \ldots a_n$ durch die Gleichungen (d) bestimmt sind, folgt sogleich aus 388, womit noch die Anmerkung zu 383 {und die zu 506} zu vergleichen ist. Die Hauptgebiete $a_1, \ldots a_n$ haben (nach 389) die Eigenschaft, dass sie in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen und $Aa_r = m_r a_r$ ist. Es muss sich also x aus $a_1, \ldots a_n$ numerisch ableiten lassen. Es sei

(*) $$x = \Sigma x_a a_a$$

der Ausdruck dieser Ableitung, so verwandelt sich die Gleichung (a) in

$$0 = \Sigma a_a \delta x_a + \Sigma\{Aa_a \,.\, x_a\},$$

also, da $Aa_r = m_r a_r$ ist, so erhalten wir

$$0 = \Sigma a_a(\delta x_a + m_a x_a).$$

Da hier $\delta x_a + m_a x_a$ eine Zahlgrösse ist, und $a_1, \ldots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so hat man (nach 28) $\delta x_a + m_a x_a = 0$, das heisst, $dx_a = - m_a x_a dt$, also

$$x_a = \alpha_a e^{-m_a t},$$

wo α_a eine willkürliche konstante Zahl ist. Setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung (*) ein, so erhalten wir

$$x = \sum \alpha_a e^{-m_a t} a_a.$$

Anm. Es sind hier die Hauptzahlen des Bruches A als verschieden von einander vorausgesetzt. Sind einige derselben gleich, so gelangt man leicht zu dem Resultate, wenn man in bekannter Weise diejenigen unter ihnen, welche gleich werden sollen, zunächst als unendlich wenig von einander verschieden 246 setzt, dann x nach dem † obigen Satze entwickelt, und endlich, nachdem man die unendlich kleinen Differenzen aus den Nennern weggeschafft hat, diese Differenzen ganz verschwinden lässt. Ob Wurzeln imaginär werden oder nicht, ist für die ganze Behandlung gleichgültig; auch kann man die imaginären Formen der Endresultate leicht in reelle Formen umsetzen.

499. *Die Differenzialgleichung*

(a) $$\delta x + Ax = f(t),$$

in welcher δ, x, A, t dieselbe Bedeutung wie in 498 haben, wird, wenn man auch den Grössen $m_1, \ldots m_n$, $a_1, \ldots a_n$ dieselbe Bedeutung giebt, wie dort, und

(b) $$f(t) = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n,$$

ferner $d^{-1} f_r e^{m_r t} dt = y_r$ setzt, durch die Gleichung integrirt

(c) $$x = \sum (y_a + \alpha_a) e^{-m_a t} a_a,$$

in welcher $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ willkürliche konstante {Zahlgrössen} sind.

Beweis. Da $a_1, \ldots a_n$ (nach 389) in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so lässt sich sowohl f (wie oben geschehen), als auch x aus ihnen numerisch ableiten. Es sei

$$(*) \qquad x = \Sigma a_\alpha x_\alpha,$$

so hat man, da (nach 387) $A a_\alpha = m_\alpha a_\alpha$ ist, aus der Gleichung (a)

$$0 = \Sigma a_\alpha(\delta x_\alpha + m_\alpha x_\alpha - f_\alpha),$$

also (nach 28) $\delta x_\alpha + m_\alpha x_\alpha - f_\alpha = 0$, wo alle Grössen Zahlgrössen sind, das heisst, $dx_\alpha + m_\alpha x_\alpha dt = f_\alpha dt$. Setzt man hier

$$x_\alpha = (y_\alpha + \alpha_\alpha)e^{-m_\alpha t},$$

wo y_α eine Funktion von t ist, die mit t null wird, und α_α konstant ist, so erhält man, indem man dies in die vorige Gleichung einsetzt,

$$dy_\alpha = f_\alpha e^{m_\alpha t} dt,$$

also (nach 477)

$$y_\alpha = d^{-1} f_\alpha e^{m_\alpha t} dt,$$

wie oben. Setzt man dann statt x_α den gefundenen Werth in die Gleichung (*) ein, so erhält man die zu erweisende Gleichung.

Anm. Die Integration einer Gleichung, welche Differenzialquotienten höherer Ordnung nach t enthält, im Uebrigen aber die Form der Gleichungen 498 und 499 hat, reducirt sich nach der Methode in 496 auf Gleichungen, welche ganz diese Form der Gleichungen 498 und 499 haben, nur dass statt der n Einheiten $e_1, \ldots e_n$ hier, wenn die Differenzialgleichung von m-ter Ordnung ist, mn Einheiten hervortreten.

§ 3. Integration von Differenzialgleichungen, wenn die unabhängige Variable eine extensive Grösse ist. 347

500. *Die Integration jeder beliebigen partiellen Differenzialgleichung erster Ordnung lässt sich zurückführen auf die Integration einer Differenzialgleichung der Form $Xdx = 0$, in welcher x eine extensive Grösse, Xdx eine Zahlgrösse darstellt.*

Beweis. Wenn $x_1, \ldots x_n$ die unabhängigen Variabeln und x_0 die von ihnen abhängige Variable ist, und $x_0, x_1, \ldots x_n$ Zahlgrössen sind, so wird jede partielle Differenzialgleichung erster Ordnung zwischen diesen Grössen sich in Form einer Gleichung darstellen lassen, welche zwischen den Grössen

$$x_0, x_1, \ldots x_n, \frac{d}{dx_1}x_0, \frac{d}{dx_2}x_0, \ldots \frac{d}{dx_n}x_0$$

stattfindet. Bezeichnen wir die Grössen

$$\frac{d}{dx_1}x_0, \ldots \frac{d}{dx_n}x_0$$

mit $p_1, \ldots p_n$, so können wir vermittelst jener Gleichung eine der Grössen $p_1, \ldots p_n$, zum Beispiel p_n, als Funktion der sämmtlichen Grössen $x_0, \ldots x_n, p_1, \ldots p_{n-1}$ darstellen, und also der zu integrirenden partiellen Differenzialgleichung die Form geben

$$(*) \qquad p_n = f(x_0, x_1, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}) = f.$$

Nun ist $dx_0 = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$. Und umgekehrt, wenn diese Gleichung erfüllt ist, so sind $p_1, \ldots p_n$ die partiellen Differenzialquotienten von x_0 nach $x_1, x_2, \ldots x_n$. Setzt man daher in dieser Gleichung statt p_n seinen Werth aus der vorigen, so ist, wenn die Gleichung

$$(**) \qquad dx_0 = p_1 dx_1 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} + f dx_n$$

erfüllt ist, auch die gegebene erfüllt. Jeder Verein von Gleichungen also, welcher die letztere integrirt, erfüllt auch die erstere und es kommt also nur auf die Integration dieser letzteren an. Setzen wir nun $e_0, e_1, \ldots e_n$ als ein System von Einheiten und

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$

also

$$dx = e_0 dx_0 + e_1 dx_1 + \cdots + e_n dx_n,$$

und setzen ferner, wenn l eine Lücke darstellt,

$$X = [l|e_0] - p_1[l|e_1] - p_2[l|e_2] - \cdots - p_{n-1}[l|e_{n-1}] - f[l|e_n],$$

348 so verwandelt sich die Gleichung (**) in

$$Xdx = 0,$$

auf deren Integration es also nur ankommt.

Anm. Die Integration der Gleichung $Xdx = 0$, auf welche es hier ankommt, ist nach der berühmten Pfaff'schen Methode, wie sie namentlich durch Jacobi (Crelle's Journal Bd. 2, p. 347 und Bd. 17, p. 138 {Jacobi's Gesammelte Werke Bd. 4, S. 19 und 101}) vereinfacht ist, vollständig zu lösen, oder genauer, auf die im vorigen Paragraphen behandelten Integrationen zurückzuführen. Die Darstellung und Ergänzung dieser Methode durch Anwendung extensiver Grössen, durch welche sich die lösenden Formeln grösstentheils in einer erstaunenswerthen Einfachheit darstellen, sollen den Hauptgegenstand der folgenden Entwickelung bilden. Doch wollen wir zuvor den aufgestellten Satz auch auf partielle Differenzialgleichungen höherer Ordnungen ausdehnen.

501. *Die Integration jeder beliebigen partiellen Differenzialgleichung von höherer als erster Ordnung lässt sich zurückführen auf die Integration einer Differenzialgleichung der Form $Xdx = 0$, in welcher sowohl x als Xdx extensive Grössen darstellen.*

Beweis. Es sei z die abhängige Variable und $y_1, \ldots y_n$ seien die unabhängigen Variabeln, wo $z, y_1, \ldots y_n$ Zahlgrössen darstellen.

Um die partiellen Differenzialquotienten höherer Ordnung bequem bezeichnen zu können, nehmen wir zunächst ein System von n Einheiten $e_1, \ldots e_n$ an und setzen

$$y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n = y,$$

so werden die verschiedenen {partiellen} Differenzialquotienten {von z} bis zur m-ten Ordnung hin sich ausdrücken lassen durch die Differentialquotienten

$$\frac{d}{dy} z, \; \frac{d^2}{dy^2} z, \; \ldots \; \frac{d^m}{dy^m} z.$$

Hier stellt jeder dieser Differenzialquotienten einen Ausdruck mit so viel (unter einander vertauschbaren {gebundenen}) Lücken dar, als die Ordnung des Differenzialquotienten beträgt, und zwar in der Art, dass der Ausdruck nach Ausfüllung dieser Lücken durch die *Einheiten* von y, einen Zahlausdruck liefert und zwar jedesmal *einen der gewöhnlichen* (*numerischen*) {*partiellen*} *Differenzialquotienten;* zum Beispiel stellt $\frac{d^2}{dy^2} z$ einen Ausdruck mit zwei vertauschbaren {gebundenen} Lücken dar und zwar so, dass

$$\frac{d^2}{dy^2} z \, . \, e_1 e_2 = \frac{d^2}{dy_1 \, dy_2} z$$

ist, und so weiter.

Es seien nun

$$\frac{d}{dy} z = p_1, \; \frac{d^2}{dy^2} z = p_2, \cdots, \; \frac{d^m}{dy^m} z = p_m \qquad 349$$

gesetzt, so wird die partielle Differenzialgleichung in ihrer vollständigsten Allgemeinheit die Form annehmen

$$(*) \qquad f(y, z, p_1, p_2, \ldots p_m) = 0.$$

Von den hierin vorkommenden Variabeln ist nur z eine Zahlgrösse, alle übrigen sind extensive Grössen, und zwar enthält y, vermöge der ihm beigelegten Bedeutung, n veränderliche Zahlgrössen, und jede der Grössen $p_1, \ldots p_m$ so viel veränderliche Zahlgrössen, als es Kombinationen mit Wiederholung aus n Elementen zur so vielten Klasse giebt, als der Index jener Grösse beträgt. Die Anzahl der veränderlichen Zahlgrössen, welche in den sämmtlichen in der obigen Gleichung (*) vorkommenden Variabeln enthalten sind, sei r, so kann man vermöge der Gleichung (*) eine dieser Variabeln durch die übrigen $r-1$ ausdrücken. Es bleiben also noch $r-1$ Variabeln übrig. Jetzt erweitere man das System der n Einheiten $e_1, \ldots e_n$ so, dass es nun $r-1$ Einheiten enthält, und multiplicire mit jeder derselben eine der $r-1$ veränderlichen Zahlgrössen, und setze die Summe dieser Produkte $= x$, so enthält x die sämmtlichen $r-1$ veränderlichen Zahlgrössen.

Nun hat man ferner vermöge der oben angegebenen Bedeutung der Grössen $p_1, \dots p_m$

$$(**)\qquad dz = p_1 dy,\; dp_1 = p_2 dy,\; \dots,\; dp_{m-1} = p_m dy,$$

und wenn diese Gleichungen erfüllt sind, und zugleich vermittelst der Gleichung (*) eine der r veränderlichen Zahlgrössen, welche in jenen Gleichungen (**) enthalten sind, durch die $(r-1)$ übrigen ausgedrückt wird, so ist damit die gegebene partielle Differenzialgleichung (*) erfüllt. Folglich kommt es nur darauf an, die Gleichungen (**) zu integriren.

Von diesen ist nur die erste eine Zahlgleichung, die folgenden enthalten, da dp_1 mit p_1 von gleicher Grössengattung ist, und so weiter, jedesmal so viel Zahlgleichungen, als in den Grössen $p_1, \dots p_{m-1}$ veränderliche Zahlgrössen enthalten sind. Die Anzahl der sämmtlichen Zahlgleichungen, welche in den obigen Gleichungen (**) enthalten sind, sei s, so ist s kleiner als r (nämlich um so viel als die Anzahl 350 der veränderlichen Zahlgrössen † beträgt, welche in y und p_m zusammen enthalten sind). Man bringe diese Zahlgleichungen auf die Form, dass die rechte Seite null ist, und multiplicire sie nach der Reihe mit den Einheiten $e_1, \dots e_s$, so werden sie die Form haben

$$e_1 X_1 dx = 0,\; e_2 X_2 dx = 0,\; \dots,\; e_s X_s dx = 0.$$

Dann sind diese Gleichungen gleichbedeutend der einen Gleichung

$$e_1 X_1 dx + e_2 X_2 dx + \cdots + e_s X_s dx = 0,$$

das heisst {mit der Gleichung}

$$(e_1 X_1 + e_2 X_2 + \cdots + e_s X_s) dx = 0;$$

setzt man also

$$e_1 X_1 + e_2 X_2 + \cdots + e_s X_s = X,$$

so werden jene Gleichungen (**) gleichbedeutend der Gleichung

$$X dx = 0,$$

auf deren Integration es also allein ankommt.

Anm. 1. Es ergiebt sich leicht, dass die Zahlen r und s von n und m auf die Weise abhängen, dass

$$r = n + \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{1\;.\;2\;\dots\;m},\quad s = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)}{1\;.\;2\;\dots\;(m-1)}$$

ist, ferner dass in dx, wie es in der Gleichung Xdx hervortritt, nicht die Differenziale aller r Unbekannten enthalten sind, sondern die Differenziale der zu p_m gehörigen veränderlichen Zahlgrössen in dx nicht erscheinen; die Zahl der numerischen Differenziale, die in dx hervortreten, ist $s + n$.

Als Beispiel sei die partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln gewählt. Man erhält bei dieser, wenn man die Bezeichnung der Unbekannten ändert, drei Gleichungen der Form

$$dz = pdx + qdy$$
$$dp = rdx + sdy$$
$$dq = sdx + tdy,$$

welche die acht Variabeln z, x, y, p, q, r, s, t enthalten, von denen eine vermittelst der gegebenen partiellen Differenzialgleichung durch die übrigen ausgedrückt werden kann; ferner kommen in ihr fünf Differenziale vor (dx, dy, dz, dp, dq).

Anm. 2. Man sieht, dass die Integration der Gleichung Xdx, wenn dx und Xdx extensive Grössen darstellen, die allgemeinste, ja man kann sagen, die einzige Aufgabe der Integralrechnung ist, indem auch die in den früheren Abschnitten behandelten Aufgaben der Integralrechnung sich hierauf zurückführen lassen, und auch, da jede Zahlgrösse zugleich als specielle Gattung der extensiven Grössen erscheint, die vorher (in 500) behandelte Aufgabe in ihr enthalten ist. Mit der Lösung dieser Aufgabe wäre man also am Ziele der Integralrechnung angelangt.

Allein die Pfaff'sche Methode ist für den Fall, wo auch Xdx eine extensive Grösse ist, das heisst, wo mehrere numerische Differenzialgleichungen hervortreten, nicht mehr anwendbar, und die Methoden, welche man für die Auflösung der partiellen Differenzialgleichungen † höherer Ordnungen anwendet, 351 und welche auch für die Lösung dieser allgemeineren Aufgabe förderlich sein würden, haben nur eine äusserst beschränkte Sphäre. Daher werde ich nur den Fall ins Auge fassen, wo Xdx eine Zahlgrösse ist, und werde auf den allgemeineren Fall nur gelegentlich hindeuten.

502. *Wenn die Gleichung*

$$Xdx = 0,$$

(in welcher, wie im ***Folgenden überall,*** *Xdx eine Zahlgrösse, X eine Funktion von x, und x aus einem Systeme von m Einheiten $e_1, \ldots e_m$ numerisch ableitbar ist) durch einen Verein von n Zahlgleichungen $u_1 = c_1, \ldots, u_n = c_n$, wo $c_1, \ldots c_n$ willkürliche Konstanten sind, integrirt wird, so lässt sich Xdx auf die Form*

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$$

bringen.

Beweis. 1. Es sei $x = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m$, so sind $u_1, \ldots u_n$ als Funktionen von $x_1, \ldots x_m$ aufzufassen. Da nun die Gleichungen $u_1 = c_1, \ldots, u_n = c_n$ einen die Gleichung $Xdx = 0$ integrirenden Verein bilden, so heisst das (nach 491), es muss sich aus jenen Gleichungen die letztere ableiten lassen, das heisst, wenn man aus den Gleichungen $du_1 = 0, \ldots, du_n = 0$, welche in Bezug auf die m Differenziale $dx_1, \ldots dx_m$ homogen vom ersten Grade sind, n dieser letzteren Grössen durch die übrigen ausdrückt, und diese Ausdrücke in Xdx einführt, so muss dadurch Xdx *identisch* gleich Null werden, oder, was nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen

dasselbe ist, es müssen sich Grössen $U_1, U_2, \ldots U_n$ finden lassen, welche die Gleichung

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$$

erfüllen.

2. (Ich füge einen *zweiten Beweis* hinzu, um zugleich die Grössen $U_1, \ldots U_n$ finden zu lehren.) Die Funktionen $u_1, \ldots u_n$ können als von einander unabhängig aufgefasst werden, weil sonst die gegebene Gleichung schon durch einen Theil derselben integrirt werden würde. Sind aber $u_1, \ldots u_n$ von einander unabhängige Funktionen von $x_1, \ldots x_m$, so lassen sich n dieser letzteren Grössen, zum Beispiel $x_1, \ldots x_n$, als Funktionen der übrigen und der Grössen $u_1, \ldots u_n$ darstellen. Es sei

$$x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = y,$$

und

$$x_{n+1} e_{n+1} + \cdots + x_m e_m = z$$

352 gesetzt, und seien die auf den Verein der Variabeln $u_1, \ldots u_n, z$ bezüglichen partiellen Differenzialquotienten erster Ordnung nach der Reihe mit $\delta_1, \ldots \delta_n, \delta$ bezeichnet, von denen also der letzte nach der extensiven Grösse z genommen ist, so wird

$$dy = \delta_1 y \,.\, du_1 + \cdots + \delta_n y \,.\, du_n + \delta y \,.\, dz,$$

und also

$$\begin{aligned} Xdx &= X(dy + dz) \\ &= X\delta_1 y \,.\, du_1 + \cdots + X\delta_n y \,.\, du_n + (X\delta y + X)dz, \end{aligned}$$

oder wenn wir

$$X\delta_1 y = U_1, \ldots, X\delta_n y = U_n$$

setzen, so wird

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n + (X\delta y + X)dz.$$

Da nun, wenn man $u_1, \ldots u_n$ als konstant setzt, Xdx *identisch* gleich Null werden muss, und da dann $du_1, \ldots du_n$ gleich Null sind, so hat man $(X\delta y + X)dz = 0$, und also

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n.$$

Anm. Es gilt dieser Satz auch, wenn Xdx eine extensive Grösse ist, und namentlich gilt der zweite der eben mitgetheilten Beweise unmittelbar auch für diesen Fall.

503. *Wenn sich der Ausdruck Xdx (in dem Sinne von 502) auf n Glieder, nämlich auf $U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$ zurückführen lässt, aber nicht auf weniger als n solche Glieder, so wird die Gleichung*

(a) $$Xdx = 0$$

integrirt durch Vereine von je n von einander unabhängigen Gleichungen, und zwar bilden die folgenden Vereine von je n Gleichungen:

$$
\text{(b)} \quad \begin{cases} u_1 = \varphi_1(u_{r+1}, \ldots u_n), \ldots, u_r = \varphi_r(u_{r+1}, \ldots u_n) \\ U_1 \frac{d}{du_{r+1}} \varphi_1 + \cdots + U_r \frac{d}{du_{r+1}} \varphi_r + U_{r+1} = 0 \\ \quad . \quad \ldots \quad . \quad . \quad . \\ U_1 \frac{d}{du_n} \varphi_1 + \cdots + U_r \frac{d}{du_n} \varphi_r + U_n = 0, \end{cases}
$$

wo r jeden der Werthe 0, 1, 2, ... n annehmen kann, und $\varphi_1, \ldots \varphi_r$ willkürliche Funktionen bezeichnen, das vollständige System der integrirenden Vereine. Wenn ins Besondere $r = 0$ ist, so hat man den Verein

$$
\text{(c)} \qquad U_1 = U_2 = \cdots = U_n = 0, \qquad 353
$$

und wenn $r = n$ ist, den Verein

$$
\text{(d)} \qquad u_1 = c_1, \; u_2 = c_2, \; \ldots, \; u_n = c_n,
$$

wo $c_1, \ldots c_n$ willkürliche Konstanten sind.

Beweis. Die Gleichung $Xdx = 0$ kann nicht durch einen Verein von weniger als n Zahlgleichungen integrirt werden, weil sonst (nach 502) Xdx auf weniger als n Glieder der Form Udu zurückgeführt werden könnte, was mit der Voraussetzung streitet. Es kommt also darauf an, Vereine von n Gleichungen zu finden, welche die Gleichung $Xdx = 0$ integriren und zwar die sämmtlichen möglichen Vereine dieser Art.

Es mögen die n von einander unabhängigen Gleichungen $v_1 = 0$, $v_2 = 0, \ldots, v_n = 0$ einen die Gleichung $Xdx = 0$ integrirenden Verein bilden, so lassen sich die Funktionen $v_1, \ldots v_n$, welche ursprünglich als Funktionen der m Variabeln $x_1, \ldots x_m$ angenommen sein mögen, zugleich darstellen als Funktionen von $u_1, \ldots u_n$ und von $m - n$ der Grössen $x_1, \ldots x_m$, zum Beispiel als Funktionen von $u_1, \ldots u_n$, $x_{n+1}, \ldots x_m$. Wenn alle jene Funktionen $v_1, \ldots v_n$ dann nur $u_1, \ldots u_n$ enthalten, aber von $x_{n+1}, \ldots x_m$ unabhängig sind, so ergeben sich $u_1, \ldots u_n$ als konstant, und es tritt der besondere Fall (d) ein. Wenn aber mindestens eine der Funktionen $v_1, \ldots v_n$, zum Beispiel v_n, noch mindestens eine der Variabeln $x_{n+1}, \ldots x_m$, zum Beispiel x_m, enthält, so lässt sich, vermittelst der Gleichung $v_n = 0$, x_m durch die übrigen $(u_1, \ldots u_n, x_{n+1}, \ldots x_{m-1})$ ausdrücken. Führt man diesen Ausdruck in die übrigen Gleichungen $v_1 = 0, \ldots, v_{n-1} = 0$ ein, so ist es möglich, dass in den so erhaltenen Gleichungen noch mindestens eine der Variabeln $x_{n+1}, \ldots x_{m-1}$ vorkommt, zum Beispiel x_{m-1} in $v_{n-1} = 0$; in diesem Falle drücke man x_{m-1} vermittelst dieser Gleichung durch die noch übrigen Variabeln $u_1, \ldots u_n, x_{n+1}, \ldots x_{m-2}$ aus, und setze diesen Ausdruck in die übrigen Gleichungen ein; und so fahre man

fort, bis man endlich entweder alle Gleichungen $v_1 = 0, \ldots, v_n = 0$ erschöpft hat, oder bis nur noch solche Gleichungen übrig bleiben, die nur $u_1, \ldots u_n$ enthalten.

Im ersteren Falle muss (nach 491) der Ausdruck

$$U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$$

identisch gleich Null werden, also $U_1 = 0, \ldots, U_n = 0$, was den be-354 sonderen Fall (c) liefert. Im letzteren Falle mögen zuletzt † r Gleichungen $v_1 = 0, \ldots, v_r = 0$ übrig geblieben sein, welche nur die Variabeln $u_1, \ldots u_n$ enthalten, so können wir vermittelst dieser Gleichungen r der Grössen $u_1, \ldots u_n$ als Funktionen der übrigen darstellen, zum Beispiel $u_1, \ldots u_r$ als Funktionen von $u_{r+1}, \ldots u_n$. Der Verein wird in diesem Falle stets ein integrirender sein, wenn nur, von welcher Art auch jene r Funktionen sein mögen, durch sie der Ausdruck $U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$ identisch gleich Null gemacht wird. Da wir $u_1, \ldots u_r$ als Funktionen von $u_{r+1}, \ldots u_n$ dargestellt haben, so erhalten wir

$$\begin{cases} U_1 \dfrac{d}{du_{r+1}} u_1 + \cdots + U_r \dfrac{d}{du_{r+1}} u_r + U_{r+1} = 0 \\ \quad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \qquad . \\ U_1 \dfrac{d}{du_n} u_1 + \cdots + U_r \dfrac{d}{du_n} u_r + U_n = 0 \end{cases}$$

als die nothwendigen, aber {auch} ausreichenden Bedingungen, damit in diesem Falle $U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$ identisch gleich Null werde.

Somit haben sich die Vereine (b) (von welchen (c) und (d) nur specielle Fälle darstellen) als die sämmtlichen möglichen Vereine ergeben, welche die Gleichung $X dx = 0$ unter der Voraussetzung des Satzes integriren.

Anm. Es ist dieser Satz nach seiner einen Seite hin in der angeführten Abhandlung Jacobi's (Crelle's Journal Bd. 2, p. 348 {Gesammelte Werke Bd. 4, S. 20}), nachgewiesen. Aber es ist dort die wichtigste Seite unseres Satzes, dass es nämlich ausser den Gleichungsvereinen (b) keinen Verein integrirender Gleichungen gebe, nicht nachgewiesen. Auch ist dort nicht gezeigt, worin der verschiedene Charakter der integrirenden Vereine (b) je nach dem Werthe des Index r bestehe, obgleich Jacobi mehrfach auf die Verschiedenheit dieses Charakters hinweist. Offenbar war Jacobi auch mit dieser Seite unseres Satzes vollkommen vertraut, und es lag nur in dem besonderen Zwecke jener Abhandlungen, dass er sich darüber nicht weiter ausspricht.

Man sieht aus diesem und dem vorhergehenden Satze, dass es dasselbe ist, zu sagen, es lasse sich $X dx = 0$ durch Vereine von je n (und nicht weniger als n) Gleichungen integriren, oder zu sagen, es lasse sich $X dx$ (in dem Sinne von 502) auf eine Summe von n (und nicht weniger als n) Gliedern der Form $U du$ zurückführen. Also kommt es darauf an, die Bedingungen aufzufinden,

unter denen diese Reduktion möglich ist, und wenn diese Bedingungen erfüllt sind, die Methode der Reduktion anzugeben. Um beides auf eine leichte Weise zu erreichen, wird es † zweckmässig sein, die folgenden Bestimmungen und Sätze 355 über Lückenausdrücke {mit *gebundenen Lücken*} aufzustellen.

Noch bemerke ich, dass der vorstehende Satz nicht mehr gilt, wenn Xdx eine extensive Grösse ist; und dass, wenn die Reduktion von Xdx auf die möglichst geringe Anzahl von Gliedern der Form Udu vollzogen ist, doch damit noch keineswegs die Integration der Gleichung $Xdx = 0$ gegeben ist. Aber aus 502 folgt, dass, wenn man die sämmtlichen möglichen Reduktionen dieser Art kennt, man auch die Gleichung $Xdx = 0$ zugleich vollständig integrirt habe. Und diese Betrachtung scheint mir den Weg anzugeben, auf welchem man hoffen kann, zu diesem letzten Ziele der Integralrechnung zu gelangen.

504. Erklärung. Wenn L einen Ausdruck mit n {gebundenen} Lücken gleicher Gattung darstellt, für welche jedoch nicht Vertauschbarkeit der Lücken vorausgesetzt ist, so verstehe ich unter

$$[La_1 a_2 \ldots a_n]$$

den Ausdruck, welcher hervorgeht, wenn man $a_1, \ldots a_n$ in allen möglichen Ordnungen in die n Lücken von L eintreten lässt, den erhaltenen Ausdrücken das Zeichen $+$ oder $-$ vorsetzt, je nachdem das kombinatorische Produkt der Grössen, welche nach der Reihe in die n Lücken von L eintreten, dem Produkte $[a_1 a_2 \ldots a_n]$ gleich oder entgegengesetzt ist, und dann die Summe der so erhaltenen Glieder durch deren Anzahl dividirt.

Wenn L *weniger* als n, zum Beispiel nur $n - r$ Lücken enthält, so verstehe ich unter

$$[La_1 a_2 \ldots a_n]$$

den Ausdruck, welcher hieraus hervorgeht, indem man dem L noch r Faktoren 1 *voranstellt*, von denen man jeden als Ausdruck mit einer Lücke betrachtet, indem nämlich, wenn man diese Lücke durch eine Grösse a ausgefüllt denkt, aus 1 die Grösse $1 . a$, das heisst a, hervorgeht. {Dabei mögen die auf diese Weise neu hinzutretenden Lücken der r Faktoren 1 als die *ersten* Lücken des entstandenen Ausdrucks mit n Lücken betrachtet werden, und zwar die Lücke des ersten Faktors 1 als die erste Lücke des ganzen Ausdrucks, die des zweiten Faktors als die zweite Lücke und so weiter. Die $n - r$ Lücken des Ausdruckes L aber mögen ihrer ursprünglichen Rangordnung entsprechend als $(r + 1)$-te, $(r + 2)$-te, ... n-te Lücke des neu entstandenen Ausdrucks gelten. Endlich sollen die an die Stelle der Faktoren 1 tretenden Grössen a_i mit einander und mit dem aus L durch Ausfüllung seiner Lücken hervorgehenden Ausdrucke kombinatorisch multipliciert werden.

Durch diese Bestimmungen ist der Fall eines Ausdruckes L mit *weniger* als n Lücken auf den vorigen zurückgeführt.}

Wenn ins Besondere L ein Ausdruck mit $n-1$ Lücken ist, *der durch Ausfüllung dieser Lücken eine Zahlgrösse wird*, so wird

$$[La_1 \dots a_n] = \frac{1}{n}(a_1[LA_1] + \dots + a_n[LA_n]),$$

wo A_r (für jeden Index r) alle Grössen $a_1, \dots a_n$, mit Ausschluss von a_r, als Faktoren enthält und $[a_r A_r] = [a_1 a_2 \dots a_n]$ ist.

{Enthält L *mehr* als n, etwa m Lücken, so soll unter

$$[La_1 a_2 \dots a_n]$$

der Ausdruck mit $m-n$ gebundenen Lücken verstanden werden, den man erhält, wenn man das Produkt

$$[La_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots a_m]$$

nach den bisherigen Angaben entwickelt und dann die $m-n$ Grössen $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots a_m$ durch die gebundenen Lücken $l_1, l_2, \dots l_{m-n}$ ersetzt, deren Zeiger zugleich den Rang der einzelnen Lücken in dem hervorgehenden Lückenausdruck bezeichnen.}

Ich nenne auch diese Produkte (wie überhaupt alle, welche durch die scharfe Klammer umschlossen sind, s. Nr. 94) bezügliche Produkte, und zwar setze ich als das Hauptgebiet, auf welches sie sich beziehen, 356 das Gebiet der Einheiten, aus † welchen die sämmtlichen Grössen, welche in die Lücken einzutreten fähig sind, abgeleitet werden können.

505. *Wenn L einen Ausdruck mit n {gebundenen} Lücken bezeichnet, und*

1) $$[a_1 \dots a_n] = [b_1 \dots b_n]$$

ist, so ist auch

$$[La_1 \dots a_n] = [Lb_1 \dots b_n],$$

und wenn

2) $$[a_1 \dots a_n] = 0$$

ist, so ist auch

$$[La_1 \dots a_n] = 0.$$

Beweis. {1.} Wenn zwei der Grössen $a_1, \dots a_n$, zum Beispiel a_r und a_s einander gleich werden, so ordne man die Ausdrücke, welche (nach 504) bei der Entwickelung von $[La_1 \dots a_n]$ dadurch hervorgehen, dass man $a_1, \dots a_n$ in allen möglichen Folgen in die Lücken von L eintreten lässt, paarweise so, dass je zwei derselben, bei denen sich die Reihenfolge jener Grössen nur durch die gegenseitige Stellung von a_r und a_s unterscheidet, ein Paar bilden. Dann werden die Ausdrücke jedes Paares (nach 504) entgegengesetztes Vorzeichen haben. Wenn nun a_r und a_s einander gleich werden, so werden diese Ausdrücke, abgesehen von dem entgegengesetzten Vorzeichen, identisch; also wird ihre Summe null, also in diesem Falle auch $[La_1 \dots a_n] = 0$.

2. Wenn $[a_1 \dots a_n] = 0$ ist, so heisst das (nach 66), es stehen die Faktoren $a_1, \dots a_n$ in einer Zahlbeziehung, das heisst (nach 2), einer derselben, zum Beispiel a_n, wird sich als Vielfachensumme der übrigen $a_1, \dots a_{n-1}$ ausdrücken lassen. Führt man diesen Ausdruck für a_n in $[La_1 \dots a_{n-1}a_n]$ ein, und löst die diesen Ausdruck umschliessende Klammer auf, so stellt sich $[La_1 \dots a_{n-1}a_n]$ als eine Vielfachensumme von Ausdrücken dar, deren jeder zwei gleiche unter den Grössen $a_1, \dots a_{n-1}$ enthält, also (nach Beweis 1) null ist. Also ist auch jene Vielfachensumme, das heisst $[La_1 \dots a_n]$, gleich Null.

3. Wenn die Reihe der Grössen $a_1, \dots a_n$ eine einfache lineale Aenderung erleidet (vgl. 71), zum Beispiel a_r sich in $a_r + \alpha a_s$ verwandelt, wo α eine Zahlgrösse ist, und r und s von einander † verschieden sind, so verwandelt sich $[La_1 \dots a_r a_{r+1} \dots a_n]$ in 357

$$[La_1 \dots a_r a_{r+1} \dots a_n] + \alpha[La_1 \dots a_{r-1} a_s a_{r+1} \dots a_n].$$

Der zweite dieser Ausdrücke enthält, da s von r verschieden ist, a_s zweimal, ist also (nach Beweis 1) gleich Null, also bleibt der Ausdruck $[La_1 \dots a_n]$ von unverändertem Werthe, wenn die Reihe der Grössen $a_1, \dots a_n$ eine einfache lineale Aenderung erfährt, also auch, wenn sie wiederholt einfache lineale Aenderungen erfährt, das heisst (nach 71), wenn jene Reihe sich überhaupt lineal ändert.

Wenn nun

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = [b_1 b_2 \dots b_n] \gtrless 0$$

ist, so lässt sich (nach 76) die Reihe $b_1, b_2, \dots b_n$ aus der Reihe $a_1, a_2, \dots a_n$ durch lineale Aenderung ableiten, wobei, wie eben bewiesen, der Werth von $[La_1 \dots a_n]$ unverändert bleibt, das heisst, es ist dann

$$[La_1 \dots a_n] = [Lb_1 \dots b_n].$$

{ Anm. Man kann daher den Ausdruck

$$[La_1 \dots a_n]$$

als ein Produkt aus dem Lückenausdrucke L und dem kombinatorischen Produkte $[a_1 \dots a_n]$ auffassen (vgl. Nr. 383 Anm.). }

506. Erklärung. Wenn ein Ausdruck L mit n {gebundenen} Lücken die Eigenschaft hat, dass er mit je n Grössen $a_1, \dots a_n$, die in die Lücken eintreten können, ein Produkt $[La_1 \dots a_n]$ liefert, welches null ist, so setze ich $[L] = 0$. Wenn ferner ein Produkt $[a_1 \dots a_n] = 1$ ist, und L n Lücken enthält, so setze ich

$$[L] = [La_1 \dots a_n].$$

Anm. Es ist schon früher bei der Behandlung des Potenzwerthes eines Bruches Q (Nr. 383), obwohl nur gelegentlich, die hier gewählte Bezeichnung angewandt, indem, wenn $e_1, \dots e_n$ die n Nenner sind, deren Produkt $[e_1 \dots e_n] = 1$

ist, und $a_1, \dots a_n$ die zugehörigen Zähler, unter $[Q^n]$ das Produkt $[a_1 \dots a_n]$ verstanden war. Da nun Q als Lückenausdruck mit einer Lücke aufgefasst werden kann, indem nämlich (für jeden Index r) $Qe_r = a_r$ ist, so wird Q^n ein Ausdruck mit n Lücken, und gehört also $[Q^n]$ zu den hier (in 506) definirten Ausdrücken. Man überzeugt sich leicht, dass auch nach dieser Erklärung (506) der Ausdruck $[Q^n] = [a_1 a_2 \dots a_n]$ wird, und also beide Erklärungen in vollkommener Uebereinstimmung stehen.

Es hat sich mir die Allgemeinheit der hier (in 504 und 506) aufgestellten Begriffe, und ihre wesentliche Bedeutung für die Analysis erst während der Arbeit ergeben. Sonst würde ich diese Begriffe und die daraus fliessenden Sätze sogleich an ihrer Stelle (im ersten Kapitel dieses Abschnittes) behandelt haben. Da hier diese Sätze den Gang der Entwickelung unterbrechen, so beschränke ich mich auf diejenigen Sätze, welche für die folgende Darstellung unentbehrlich erscheinen.

507. *Wenn L zwei oder mehrere vertauschbare Lücken enthält, so ist*

$$[L] = 0.$$

358 Beweis. Es ist zu zeigen, dass, wenn von den n Lücken † von L auch nur zwei mit einander vertauschbar sind, allemal $[La_1 \dots a_n]$ null ist, was auch $a_1, \dots a_n$ für Grössen sein mögen. Denn es seien die übrigen Lücken durch beliebige jener Grössen ausgefüllt, so geht ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken hervor, dieser Ausdruck sei P. Sind nun b und c zwei beliebige Grössen, welche in diese zwei Lücken eintreten können, so ist, da die Lücken vertauschbar sind, {nach 485 Anm.} $Pbc = Pcb$; aber

$$[Pbc] = \frac{1}{2}(Pbc - Pcb),$$

also $= 0$, also auch $[La_1 \dots a_n] = 0$, für beliebige Grössen $a_1, \dots a_n$, das heisst (nach 506), $[L] = 0$.

508. *Wenn $A_1, \dots A_n$ Grössen mit je einer Lücke derselben Gattung sind, welche entweder alle, oder doch alle bis auf eine derselben, nach Ausfüllung dieser Lücken Zahlgrössen werden, und P ein Ausdruck mit beliebig vielen Lücken ist, so ist das Produkt*

$$[A_1 \dots A_n P]$$

ganz den Gesetzen der kombinatorischen Multiplikation (Nr. 52 ff.) *unterworfen und zwar in dem Sinne, dass $A_1, \dots A_n$ als einfache kombinatorische Faktoren betrachtet werden. Namentlich sind zwei Produkte, welche sich nur durch die gegenseitige Stellung zweier dieser Faktoren unterscheiden, einander engegengesetzt, das heisst*

(a) $$[A_1 \dots A_r \dots A_s \dots A_n P] = -[A_1 \dots A_s \dots A_r \dots A_n P],$$

wo beide Seiten der Gleichung sich nur durch die gegenseitige Stellung der Faktoren A_r und A_s unterscheiden, und wenn zwei jener Faktoren gleich werden, so ist das Produkt null, das heisst

(b) $$[A_1 \dots A_r \dots A_r \dots A_n P] = 0.$$

Beweis. Betrachtet man zum Beispiel nur die beiden ersten Faktoren A_1 und A_2 und nennt das Produkt der übrigen Q, und setzt $e_1, \dots e_n$ als Einheiten, deren kombinatorisches Produkt 1 ist, so ist

$$[A_1 A_2 Q] = [A_1 A_2 Q e_1 e_2 e_3 \dots e_n].$$

Hier sollen (nach 504) die Faktoren $e_1, e_2, e_3, \dots e_n$ in allen möglichen Ordnungen in die Lücken von $A_1 A_2 Q$ eintreten, und das Vorzeichen wird positiv, wenn $e_1, e_2, e_3, \dots e_n$ entweder in dieser Ordnung, also e_1 in A_1, e_2 in A_2 und die übrigen † $e_3, \dots e_n$ nach der Reihe in Q, 359 eintreten, oder in irgend einer andern Ordnung, welche durch eine gerade Anzahl von Versetzungen aus jener Ordnung hervorgeht; ganz dieselbe Bedeutung hat aber $[A_2 A_1 Q e_2 e_1 e_3 \dots e_n]$, indem auch hier das Zeichen positiv wird, wenn e_1 in A_1, e_2 in A_2, und $e_3, \dots e_n$ in dieser Reihe in Q eintreten, und so weiter, also ist

$$[A_1 A_2 Q e_1 e_2 e_3 \dots e_n] = [A_2 A_1 Q e_2 e_1 e_3 \dots e_n],$$

letzteres ist aber, da (nach 55) $[e_2 e_1 e_3 \dots e_n] = -[e_1 e_2 e_3 \dots e_n]$ ist, (nach 505 {Anm. und nach 46}) gleich $-[A_2 A_1 Q e_1 e_2 e_3 \dots e_n]$, also

$$[A_1 A_2 Q] = -[A_2 A_1 Q].$$

Werden A_1 und A_2 einander gleich, so folgt aus dieser letzten Formel, dass dann $[A_1 A_2 Q]$ null wird. Dasselbe gilt nun aus demselben Grunde, wenn man statt der beiden ersten Faktoren des Ausdruckes $[A_1 A_2 \dots A_n P]$ irgend zwei andere, A_r und A_s, betrachtet.

Somit gelten die Formeln (a) und (b), und auf ihnen beruhen die übrigen Gesetze der kombinatorischen Multiplikation.

509. *Wenn A ein Ausdruck mit einer Lücke {ist} und B ein Ausdruck mit $m-1$ Lücken derselben Gattung ist, {welcher nach Ausfüllung dieser Lücken eine Zahlgrösse wird}, und {wenn endlich} $a_1, \dots a_m$ Grössen jener Gattung sind, {welche in die Lücken eintreten sollen,} so ist*

$$[A B a_1 \dots a_m] = A[B a_1 \dots a_m]$$
$$= \frac{1}{m} \sum A a_\alpha [B A_\alpha],$$

wo A_α alle Faktoren $a_1, \dots a_m$, mit Ausnahme des Faktors a_α, enthält, und zwar so, dass

$$[a_\alpha A_\alpha] = [a_1 a_2 \dots a_m]$$

ist, und wo die Summe sich auf die Werthe $\alpha = 1, \dots m$ bezieht.

Beweis. 1. Um den Ausdruck $[A B a_1 \dots a_m]$ zu entwickeln, muss man in die Lücken von AB nach und nach alle möglichen Anordnungen der Faktoren $a_1, \dots a_m$ eintreten lassen; dabei muss also in A nach und nach jede der Grössen $a_1, \dots a_m$ eintreten.

Wenn nun zuerst in A die Grösse a_1 eintritt, so müssen in B die übrigen Faktoren, also die Faktoren von A_1 in allen möglichen Folgen und zwar gleichfalls mit dem Zeichengesetz eintreten, dass zwei so hervorgehende Ausdrücke gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben, je nachdem die beiden Reihenfolgen ein gleiches oder entgegengesetztes kombinatorisches Produkt liefern. Die so hervorgehenden Glieder werden also $+ Aa_1[BA_1]$ liefern. Hier ist jedoch das $+$-Zeichen zu wählen, weil $[a_1 A_1] = [a_1 a_2 \ldots a_m]$ ist. Aus gleichem 360 Grunde † ist die Summe der Glieder, bei denen in A die Grösse a_2 eintritt, $= + Aa_2[BA_2]$, und so weiter; also wird, da man diese Summe noch durch die Anzahl ihrer Glieder dividiren muss,

$$[ABa_1 \ldots a_m] = \frac{1}{m}\sum Aa_a[BA_a].$$

2. Ferner ist (nach 504)

$$\begin{aligned} A[Ba_1 \ldots a_m] &= \frac{1}{m} A \sum a_a[BA_a] \\ &= \frac{1}{m}\sum Aa_a[BA_a] \qquad [39] \\ &= [ABa_1 \ldots a_m] \qquad [\text{Beweis } 1]. \end{aligned}$$

{Anm. Wenn B und A bei Ausfüllung ihrer Lücken nicht in Zahlgrössen, sondern in extensive Grössen übergehen, so tritt an die Stelle der zweiten Formel von 509 die Formel

$$\{*\} \qquad [ABa_1 \ldots a_m] = \frac{1}{m}\sum [(Aa_a)[BA_a]],$$

während die erste Formel von 509 ihre Gültigkeit verliert. Sollte wenigstens A bei Ausfüllung seiner Lücke eine Zahlgrösse werden, so kann man auf der rechten Seite der Formel {*} die scharfe Klammer hinter dem Summenzeichen weglassen.}

510. *Wenn C ein Ausdruck mit zwei Lücken gleicher Gattung ist, welcher durch Ausfüllung seiner Lücken eine Zahlgrösse wird, und a eine Grösse jener Gattung, B aber ein Produkt von $2n-1$ solchen Grössen, und $2n$ die Anzahl der Einheiten ist, aus welchen die Grössen dieser Gattung ableitbar sind, so ist*

$$\left[Ca[C^{n-1}B]\right] = [C^n aB]$$

$$\left[C[C^{n-1}B]a\right] = [C^n Ba].$$

Beweis. $[C^n aB]$ drückt, da die n Faktoren C alle einander gleich sind, und nach Ausfüllung ihrer Lücken Zahlfaktoren werden, also untereinander vertauschbar sind, aus, dass a in eine Lücke eines der Faktoren, zum Beispiel des ersten Faktors C, eintritt, während die $2n-1$ Faktoren von B in die andere Lücke jenes Faktors und in die übrigen Faktoren eintreten. Dieselbe Bedeutung besitzt aber der Ausdruck $\left[Ca[C^{n-1}B]\right]$, also sind beide gleich.

Auf gleiche Weise ergiebt sich die zweite Formel.

511. *Wenn Xdx (in dem Sinne von 502) auf n Glieder der Form Udu zurückführbar sein soll, das heisst,*

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$$

sein soll, so muss nothwendig

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

sein.

Beweis. Es sei $U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$ der Kürze wegen mit $\Sigma U_\mathfrak{a} du_\mathfrak{a}$ bezeichnet, so ist

$$\Sigma U_\mathfrak{a} du_\mathfrak{a} = \sum U_\mathfrak{a}\left\{\frac{d}{dx} u_\mathfrak{a} \,.\, dx\right\} = \sum U_\mathfrak{a} \frac{d}{dx} u_\mathfrak{a} \cdot dx, \qquad 361$$

also

$$X = \sum U_\mathfrak{a} \frac{d}{dx} u_\mathfrak{a}.$$

Somit

$$\frac{d}{dx} X = \frac{d}{dx} \sum U_\mathfrak{a} \frac{d}{dx} u_\mathfrak{a}$$
$$= \sum\left\{\frac{d}{dx} U_\mathfrak{a} \cdot \frac{d}{dx} u_\mathfrak{a}\right\} + \sum U_\mathfrak{a} \frac{d^2}{dx^2} u_\mathfrak{a}.$$

Da $\frac{d^2}{dx^2} u_\mathfrak{a}$ ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken ist (451) {und da (wegen 446) die Vertauschbarkeit der Lücken auch dann nicht aufhört, wenn man die Lücken als gebundene auffasst}, so können wir bei der Substitution von $\frac{d}{dx} X$ in den Ausdruck

$$\left[X\left(\frac{d}{dx} X\right)^n\right]$$

(nach 507) die Glieder

$$\sum U_\mathfrak{a} \frac{d^2}{dx^2} u_\mathfrak{a}$$

weglassen, und erhalten

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = \left[\sum U_\mathfrak{a} \frac{d}{dx} u_\mathfrak{a} \,.\left(\sum\left\{\frac{d}{dx} U_\mathfrak{b} \cdot \frac{d}{dx} u_\mathfrak{b}\right\}\right)^n\right]$$
$$= \sum\left[U_\mathfrak{a} \frac{d}{dx} u_\mathfrak{a} \cdot \frac{d}{dx} U_\mathfrak{b} \cdot \frac{d}{dx} u_\mathfrak{b} \cdot \frac{d}{dx} U_\mathfrak{c} \cdot \frac{d}{dx} u_\mathfrak{c} \cdots\right],$$

wo die Anzahl der Indices $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ gleich $n + 1$ ist. Da aber u nur n verschiedene Indices hat, so müssen unter den Indices $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ nothwendig mindestens zwei gleiche vorkommen; also werden auch unter den Grössen

$$\frac{d}{dx} u_\mathfrak{a}, \quad \frac{d}{dx} u_\mathfrak{b}, \quad \frac{d}{dx} u_\mathfrak{c}, \ldots$$

nothwendig zwei gleiche vorkommen, also ist (nach 508) jedes Glied der obigen Summe null, also die Summe selbst, das heisst

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0.$$

Anm. Ich werde im Folgenden zeigen, dass diese Bedingungsgleichung zugleich die vollkommen ausreichende ist, so dass, wenn sie erfüllt wird, auch allemal die Reduktion auf n Glieder der Form Udu, also auch (nach 508) die Integration durch Vereine von n Gleichungen möglich ist. Es ist daher diese in der 362 That wunderbar einfache † Formel von sehr weitreichender Bedeutung.

Der Beweis derselben ist oben so geführt, dass auch die Art, wie dieselbe gefunden ist, unmittelbar hindurchleuchtet. Auch hält es nicht schwer, die entsprechenden Formeln für den Fall zu entwickeln, dass Xdx eine extensive Grösse ist; und ich habe diese letzteren Formeln hier nur deshalb nicht aufgestellt, weil, wie schon oben angedeutet, die Behandlung dieses allgemeinen, die ganze Integralrechnung abschliessenden Falles hier unterbleiben musste. Dagegen werde ich die oben mitgetheilte Formel in der folgenden Nummer in die gewöhnliche Analysis kleiden.

512. Aufgabe. *Die Bedingungsgleichung aus* 511, *nämlich*

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]=0$$

durch Zahlgleichungen zu ersetzen.

Auflösung. Es sei

$$x=x_1e_1+\cdots+x_me_m,$$

wo $e_1,\ldots e_m$ das System der Einheiten bilden. Dann ist

$$dx=e_1dx_1+\cdots+e_mdx_m;$$

und es wird

$$Xdx=Xe_1dx_1+\cdots+Xe_mdx_m=X_1dx_1+\cdots+X_mdx_m,$$

wenn wir die Zahlgrössen $Xe_1,\ldots Xe_m$ beziehlich mit $X_1,\ldots X_m$ bezeichnen. Die obige Bedingungsgleichung sagt dann (nach 506), da X eine und $\frac{d}{dx}X$ zwei Lücken enthält, aus, dass

$$(*)\qquad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_1e_2\ldots e_{2n+1}\right]=0$$

sei, und auch bleibe, wenn man statt $e_1, e_2,\ldots e_{2n+1}$ beliebige $2n+1$ unter den m Einheiten $e_1,\ldots e_m$ setzt.

Ist $m=2n+1$, so tritt keine andere numerische Bedingungsgleichung als die Gleichung (*) hervor; ist $m<2n+1$, so tritt gar keine hervor, weil dann je $2n+1$ Grössen, mit denen

$$X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n$$

multiplicirt werden mag, in einer Zahlbeziehung stehen, also

$$X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n$$

dann mit ihnen multiplicirt (nach 505) Null liefert, also (nach 506)

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$$

von selbst null ist. Wir nehmen daher jetzt an, dass $m > 2n + 1$ sei; und suchen unter dieser Voraussetzung, in der Gleichung (*) X und x durch die Zahlgrössen $X_1, \ldots X_m, x_1, \ldots x_m$ zu ersetzen.

Nun ist nach dem Obigen † $Xe_r = X_r$. Fasst man daher in dem 363 Ausdrucke $\frac{d}{dx} X$ die Lücke der Funktion X selbst als die erste Lücke auf und die durch Differenziation in den Ausdruck hineingekommene Lücke als die zweite Lücke, so wird

$$\frac{d}{dx} X . e_r e_s = \frac{d}{dx} X_r . e_s = \frac{d}{dx_s} X_r$$

(nach 451), folglich verwandelt sich die obige Formel (*) in

$$0 = \sum \mp X_1 \cdot \frac{d}{dx_3} X_2 \cdot \frac{d}{dx_5} X_4 \cdots \frac{d}{dx_{2n+1}} X_{2n},$$

wo man die Indices auf alle möglichen Arten zu vertauschen und dem jedesmaligen Gliede das Zeichen + oder — vorzusetzen hat, je nachdem die Anzahl der Vertauschungen, durch die es hervorging, eine gerade oder ungerade war. Bezeichnen wir nach Jacobi's Vorgange (Crelle's Journal 2, S. 351 {Werke 4, S. 23})

$$\frac{d}{dx_3} X_2 - \frac{d}{dx_2} X_3$$

mit (2, 3), und so weiter, oder allgemein, setzen wir

$$\frac{d}{dx_s} X_r - \frac{d}{dx_r} X_s = (r, s),$$

so können wir die vorige Formel auch schreiben

$$0 = \sum \mp X_1 (2, 3)(4, 5) \ldots (2n, 2n + 1),$$

wobei die Vertauschungen je zweier in einer Klammer stehenden Indices ausgeschlossen bleiben. Ebenso können wir, ohne die Bedeutung der Gleichung zu ändern, festsetzen, dass der erste der beiden in Klammern geschlossenen Indices von einem Faktor zum nächstfolgenden nur wachse, nie abnehme. Denn, da die Ordnung der Zahlfaktoren (2, 3), ... gleichgültig ist, so können wir ihnen immer jene Anordnung geben. Wir bezeichnen in diesem Sinne (mit Jacobi a. a. O. S. 355 f. {Werke 4, S. 27}) die Summe

$$\sum \mp (2, 3)(4, 5) \ldots (2n, 2n + 1)$$

mit

$$(2, 3, 4, 5, \ldots 2n, 2n + 1),$$

so verwandelt sich die obige Gleichung in

$$0 = \sum \mp X_1 (2, 3, \ldots 2n + 1),$$

das heisst, in

$$0 = X_1(2, 3, \ldots 2n+1) - X_2(1, 3, \ldots 2n+1) + \\ + X_3(1, 2, 4, \ldots 2n+1) - \cdots,$$

was Jacobi a. a. O. S. 356 {Werke 4, S. 28} schreibt

$$(^{**}) \qquad 0 = \sum X_1(2, 3, \ldots 2n+1).$$

Solcher Gleichungen giebt es so viele, als es Kombinationen ohne Wiederholung aus m Elementen zur $(2n+1)$-ten Klasse giebt. Aber diese Gleichungen sind, wenn $m > 2n+1$ ist, nicht unabhängig von einander. In der That können wir zeigen, dass, wenn die Gleichung (*), 364 deren Transformirte die † Gleichung (**) ist, für alle Kombinationen aus $e_1, \ldots e_m$ zur $(2n+1)$-ten Klasse, in denen eine Einheit e_r vorkommt, deren zugehöriges $Xe_r = X_r$ nicht null ist, als geltend angenommen wird, sie auch für alle übrigen Kombinationen (in denen e_r nicht vorkommt) gelten muss.

In der That, es sei $X_1 \gtrless 0$, und gelte die Gleichung (*) für alle Kombinationen, in denen e_1 vorkommt, das heisst, es sei allemal

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_1 E_r\right] = 0,$$

wenn E_r eine beliebige Kombination ohne Wiederholung aus $e_2, \ldots e_m$ zur $2n$-ten Klasse ist, so ist zu zeigen, es sei auch allemal

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_r\right] = 0,$$

auch wenn e_s eine beliebige in E_r nicht vorkommende Einheit bezeichnet. In der That ist (nach 508)

$$\left[X^2\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$$

allemal null, also ist (nach 506) auch

$$\left[X^2\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_1 e_s E_r\right] = 0,$$

das heisst, es ist

$$\sum \mp Xe_1\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_r\right] = 0,$$

wo die Summe sich auf die verschiedenen Glieder bezieht, welche aus dem unter dem Summenzeichen stehenden dadurch hervorgehen, dass man e_1 nach und nach mit jeder in $e_s E_r$ vorkommenden Einheit vertauscht (und das Vorzeichen ändert); allein alle diese Glieder sind null, weil dann

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$$

mit einer Kombination von Einheiten multiplicirt ist, unter denen e_1 vorkommt, und diese Produkte nach der Voraussetzung null sind, also

bleibt das unter dem Summenzeichen stehende Glied allein übrig, das heisst, es ist

$$Xe_1\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_r\right] = 0.$$

Nun ist gleichfalls vorausgesetzt, dass die Zahlgrösse $Xe_1 = X_1$ von Null verschieden sei, also erhält man

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_r\right] = 0,$$

was zu zeigen war. 365

Wir fassen nun das Resultat in einen Satz zusammen:

513. *Wenn der Ausdruck*

$$X_1 dx_1 + \cdots + X_m dx_m,$$

in welchem $X_1, \ldots X_m$ Funktionen der Variabeln $x_1, \ldots x_m$ sind, sich auf n Glieder, nämlich auf

$$U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n,$$

soll reduciren lassen können, oder, anders ausgedrückt, wenn die Gleichung

$$X_1 dx_1 + \cdots + X_m dx_m = 0,$$

sich soll durch Vereine von je n Gleichungen integriren lassen können, so muss erstens, wenn $m = 2n + 1$ ist, die eine Bedingungsgleichung

$$\sum X_1(2, 3, \ldots 2n + 1) = 0,$$

welche die in 512 beschriebene Bedeutung hat, erfüllt werden; wenn aber zweitens $m > 2n + 1$ ist, so treten so viele solcher Gleichungen hervor, als es Kombinationen aus m Elementen zur $(2n + 1)$-ten Klasse giebt, indem man nämlich statt der Indices $1, 2, \ldots 2n + 1$ in obiger Gleichung jede andere Gruppe von ebenso vielen Indices setzen kann; doch reicht unter diesen Gleichungen schon eine geringere Anzahl aus, indem, wenn zum Beispiel X_1 ungleich Null ist, es ausreichend ist, wenn man in der obigen Gleichung statt der Gruppe der Indices $2, 3, \ldots 2n + 1$, jede andere Kombination aus den Indices $2, 3, \ldots m$ zur $2n$-ten Klasse setzt. So bleiben nur soviel Bedingungsgleichungen übrig, als es Kombinationen ohne Wiederholung aus $m - 1$ Elementen zur $2n$-ten Klasse giebt.

Anm. Für den einfachsten Fall, wo $m = 2n + 1$ ist, hat Jacobi (a. a. O. S. 356 {Werke 4, S. 28}) die Bedingungsgleichung aufgestellt. Für den Fall, wo $n = 1$ ist, erhält man die bekannten Bedingungsgleichungen der Integrabilität, welche (nach 511) in der Gleichung

$$\left[X\frac{d}{dx}X\right] = 0$$

zusammengefasst erscheinen. Es kommt nun darauf an, die Zurückführung von Xdx auf n Glieder der Form Udu, sobald nur die Bedingungsgleichung (511) für die Möglichkeit dieser Zurückführung erfüllt ist, auch wirklich zu vollziehen. Zu diesem Ende lösen wir nach Pfaff's Vorgange die folgende Aufgabe:

514. Aufgabe. *Die Zahlgleichung*

(a) $$X dx = 0,$$

in welcher X eine Funktion von x, und $x = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m$ aus einem Systeme von m Einheiten abgeleitet ist, auf die Form zu bringen, dass die hervorgehende Gleichung nur $m - 1$ veränderliche Zahlgrössen enthalte.

366 Auflösung. Es kommt zu dem Ende nur darauf an, x als Funktion einer aus $m - 1$ Einheiten ableitbaren Veränderlichen a, und einer veränderlichen Zahlgrösse t in der Art darzustellen, dass, wenn man diese Ausdrücke für x in die gegebene Gleichung einführt, dann der Koefficient von dt in der entwickelten Gleichung null wird, und der Koefficient von da entweder t gar nicht mehr enthält, oder nur in einem Zahlfaktor N, so dass, wenn man die Gleichung mit N dividirt, die so hervorgehende Gleichung t nicht mehr enthält.

Bezeichnet man mit δ' das Differenzial nach a, wobei t konstant gesetzt ist, und mit δ den Differenzialquotienten nach t, wobei a konstant gesetzt ist, so erhält man

$$dx = \delta' x + \delta x \,.\, dt;$$

folglich müssen, wenn die verlangte Aufgabe gelöst sein soll, die beiden Gleichungen erfüllt werden

(b) $$X \delta x = 0$$

(c) $$\delta \frac{X \delta' x}{\mathsf{N}} = 0,$$

indem die letztere ausdrückt, dass $X \delta' x : \mathsf{N}$ nicht mehr von t abhängig ist.

Die letzte dieser Gleichungen giebt, wenn man

(d) $$\frac{\delta \mathsf{N}}{\mathsf{N}} = \lambda$$

setzt,

(e) $$\lambda X \delta' x = \delta(X \delta' x) = \delta X \,.\, \delta' x + X \delta \delta' x.$$

Differenzirt man auch die Gleichung (b) nach a, so erhält man

(f) $$0 \qquad = \delta' X \,.\, \delta x + X \delta' \delta x.$$

Subtrahirt man die zweite dieser Gleichungen von der ersten, so erhält man

(g) $$\lambda X \delta' x = \delta X \,.\, \delta' x - \delta' X \,.\, \delta x$$
$$= \frac{d}{dx} X \,.\, \delta' x \,.\, \delta x - \frac{d}{dx} X \,.\, \delta x \,.\, \delta' x$$

(h) $$\lambda X \delta' x = 2 \left[\frac{d}{dx} X \,.\, \delta' x \,.\, \delta x \right].$$

Hier ist $\frac{d}{dx} X$ ein Ausdruck mit zwei Lücken; und zwar ist hier
'e Lücke, das heisst als diejenige Lücke, in welche der zuerst
Faktor (im ersten Gliede $\delta' x$) eintreten † soll, diejenige Lücke 367
welche in X enthalten ist, und als zweite die durch die
'on nach x und Division mit dx hinzutretende.
·hung (h) wird nun offenbar erfüllt sein, wenn für jede
uit x (also auch mit $\delta' x$) von gleicher Gattung ist,

$$\lambda Xc = 2\left[\frac{d}{dx} X \,.\, c \,.\, \delta x\right]$$

dass, sobald diese Gleichung (i) für jede Grösse c
eiden Gleichungen (b) und (c) erfüllt sind, und
ie Aufgabe gelöst ist, vorausgesetzt, dass λ von Null
.uen ist.

Es ist $\delta' x$ mit x von gleicher Grössengattung, muss also, wenn die Gleichung (i) allgemein gilt, in dieser Gleichung statt c eingesetzt werden können, wodurch man die Gleichung (h) erhält; also gilt auch die Gleichung (g), da sie mit (h) gleichbedeutend ist. Ferner ist auch δx von gleicher Gattung mit x, kann also statt c in Gleichung (i) eingesetzt werden. Dann wird aber die rechte Seite derselben (nach 505) null, also erhält man $\lambda X \delta x = 0$, also da $\lambda \gtrless 0$ (nach Voraussetzung), so ergiebt sich $X\delta x = 0$, das heisst, die Gleichung (b) gilt. Dann aber gilt auch die daraus abgeleitete (f). Durch Addition der Gleichungen (f) und (g) geht aber die Gleichung (e) hervor. Setzt man nun $\log \mathsf{N} = d^{-1} \lambda dt$, so wird auch die Gleichung (d) erfüllt, und indem man den daraus fliessenden Werth von λ in (e) einsetzt, auch die Gleichung (c), und es wird dann

$$\frac{X\delta' x}{\mathsf{N}} = 0$$

die aus $Xdx = 0$ transformirte Gleichung, welche nur noch a, also eine aus $m - 1$ Einheiten ableitbare Grösse als Variable enthält, und die Aufgabe ist gelöst.

Dies in einem Satze dargestellt:

Wenn die Zahlgleichung

(a) $$Xdx = 0,$$

in welcher X eine Funktion von x, und x aus m Einheiten ableitbar ist, angenommen wird, und man x als Funktion einer aus m — 1 {Einheiten} ableitbaren Variabeln a und einer veränderlichen Zahl t so bestimmt, dass, wenn δ' das Differensial nach a, wobei t konstant gesetst ist, und δ den Differensialquotienten † nach t, wobei a konstant gesetst ist, beseichnen, 368

und c eine beliebige mit x gleichgattige Grösse, λ aber eine noch unbekannte, jedoch von Null verschiedene Zahlgrösse darstellt, die Gleichung

(i) $$\lambda Xc = 2\left[\frac{d}{dx}X \, . \, c\delta x\right]$$

{für jedes c} erfüllt sei, so wird die Gleichung (a) *ersetzt durch die Gleichung*

(k) $$\frac{X\delta' x}{\mathsf{N}} = 0,$$

in welcher $\frac{X\delta' x}{\mathsf{N}}$ nicht mehr von t abhängt, und

(l) $$\log \mathsf{N} = d^{-1}\lambda dt$$

ist.

515. Fortsetzung. Es kommt zunächst darauf an, aus der gefundenen Gleichung 514 i die Grösse δx auf eine Seite allein zu schaffen. Wir thun dies *zunächst unter der Voraussetzung, dass $m = 2n$ sei.*

Jene Gleichung enthält, wenn man statt c nach und nach die Einheiten $e_1, \ldots e_{2n}$ setzt, $2n$ Zahlgleichungen, durch welche sich die Grössen $\delta x_1, \ldots \delta x_{2n}$, welche in $\delta x = e_1\delta x_1 + \cdots + e_{2n}\delta x_{2n}$ enthalten sind, im Allgemeinen ausdrücken lassen. Es gelingt dies auf eine sehr einfache Weise, sobald vorausgesetzt wird, dass

(a) $$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \gtrless 0$$

(b) $$\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right] \gtrless 0$$

seien.

In der That hat man dann, um δx_r zu finden, nur in 514 i statt c den Werth

$$\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]$$

zu setzen, wo $[e_r E_r] = 1$ ist und E_r als Faktoren die $2n - 1$ von e_r verschiedenen Einheiten enthält. Da nämlich

$$\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}$$

im Ganzen $2n - 2$ Lücken enthält und E_r ein Produkt von $2n - 1$ Einheiten ist, so wird (nach 504)

$$\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]$$

eine Vielfachensumme der Einheiten, aus denen x abgeleitet ist, also mit x von gleicher Gattung und kann also statt c in die Gleichung 514 i eingesetzt werden. Dann verwandelt sich diese in

369 $$\lambda X\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right] = 2\left[\frac{d}{dx}X \, . \left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]\delta x\right].$$

Wandelt man die linke Seite dieser Gleichung (nach 509) und die rechte (nach 510) um, indem man bedenkt, dass $\frac{d}{dx} X$ ein Ausdruck mit zwei Lücken ist, und sowohl X als $\frac{d}{dx} X$ nach Ausfüllung ihrer Lücken Zahlgrössen werden, so verwandelt sich jene Gleichung in

$$\lambda\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right] = 2\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n E_r \delta x\right].$$

Setzen wir hierin statt δx seinen Werth $e_1\delta x_1 + \cdots + e_{2n}\delta x_{2n}$, so bleibt, da $[E_r e_s]$, wenn r von s verschieden ist, gleiche Faktoren enthält, also {nach 505} das Produkt

$$\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n E_r e_s\right]$$

null wird, und da (nach 58) $[E_r e_r] = -[e_r E_r] = -1$ ist,

(c) $$\lambda\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right] = -2\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]\delta x_r.$$

Wenn nun die Vergleichungen (a) und (b) erfüllt sind, und man

(d) $$-n\lambda : \left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = \mu$$

setzt, so erhält man

(d*) $$\delta x_r = \frac{\mu}{2n}\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right];$$

also wird

$$\delta x = \Sigma e_a \delta x_a = \frac{\mu}{2n}\sum e_a\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_a\right],$$

das heisst (nach 504 und 506),

(e) $$\delta x = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right],$$

oder (nach 2)

(f) $$\delta x \equiv \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right].$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Werth δx aus der Gleichung (e), in welcher μ die durch (d) ausgedrückte Bedeutung hat, in die Gleichung 514 i eingesetzt, diese für *jeden beliebigen Werth* c identisch macht.

Setzt man zunächst statt $\dagger\, c$ eine der Einheiten, zum Beispiel e_r, 370 so wird die rechte Seite der Gleichung 514 i

$$2\left[\frac{d}{dx}X \,.\, e_r \delta x\right] = 2\mu\left[\frac{d}{dx}X \,.\, e_r\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]\right].$$

Da {der Ausdruck}

$$X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}$$

nach Ausfüllung seiner $2n-1$ Lücken eine Zahlgrösse wird, so können wir, ohne die Bedeutung des Produktes

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$

zu ändern, (nach 504) innerhalb der scharfen Klammer als ersten Faktor noch eine Lücke l hinzufügen, welche mit den übrigen Lücken von gleicher Gattung ist. Dann wird

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]=\left[lX\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]=-\left[Xl\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$

(nach 508), und dies wieder (nach 509)

$$=-\frac{1}{2n}\sum Xe_a\left[l\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_a\right],$$

wo E_a die von e_a verschiedenen Einheiten zu Faktoren hat, und $[e_a E_a]=1$ ist; also erhält man, da Xe_a eine Zahlgrösse ist, also in dem Produkte beliebig gestellt werden darf,

$$2\left[\frac{d}{dx}X.\,e_r\delta x\right]=-\frac{\mu}{n}\sum Xe_a\left[\frac{d}{dx}X.\,e_r\left[l\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_a\right]\right]$$

{oder, wenn man jetzt wieder die Lücke l weglässt und dann Nr. 510 anwendet,}

$$=-\frac{\mu}{n}\sum Xe_a\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}e_rE_a\right] \qquad [510].$$

Da nun E_a alle von e_a verschiedenen Einheiten als Faktoren enthält, so enthält es, wenn a von r verschieden ist, auch e_r; dann aber ist $[e_rE_a]$ (nach 60) null, also auch (nach 505) der ganze Ausdruck, in welchem e_rE_a vorkommt, also reducirt sich die obige Summe auf das Glied, für welches $a=r$ wird; da aber $[e_rE_r]=1$ ist, so erhält man dann den obigen Ausdruck {nach 506}

$$=-\frac{\mu}{n}Xe_r\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right].$$

Setzt man hierin statt μ seinen Werth aus (d), so wird der letzte Ausdruck

$$=\lambda Xe_r.$$

Somit gilt die Gleichung 514 i für jede Einheit e_r, die statt c gesetzt werden mag, also auch für jede Vielfachensumme dieser Einheiten, 371 das heisst, für jede Grösse c, die mit x † von gleicher Gattung ist. Also ist bewiesen, dass der Ausdruck (e) für δx unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichung 514 i allgemein löst.

Anm. In der erwähnten Abhandlung hat Jacobi (Crelle 2, S. 354 {Werke 4, S. 25}) die hier gemachten, durch die Vergleichungen (a) und (b) ausgedrückten Voraussetzungen stillschweigend gleichfalls angenommen, und die übrigen Fälle, wo diese Voraussetzungen nicht eintreten, gar nicht behandelt.

Die resultirenden Formeln (e) oder (f) liefern in Form der gewöhnlichen Analysis gekleidet, dieselben Gleichungen, welche Jacobi dort (Crelle 2, S. 354 ff.

{Werke 4, S. 25 ff.}) aufstellt, ohne jedoch den Beweis mitzutheilen. Die Determinante, welche aus den in 514i enthaltenen $2n$ Zahlgleichungen direkt ab geleitet wird, enthält doppelt so viel Faktoren, als die zur Lösung der Gleichungen dienenden Ausdrücke erfordern; es lässt sich diese Determinante aber als Quadrat eines Ausdrucks darstellen, der zugleich auch in den sämmtlichen Zählerdeterminanten der Brüche $\delta x_1, \ldots \delta x_{2n}$ als Faktor auftritt. Dieser Ausdruck hebt sich daher aus den betreffenden Brüchen weg, und es bleiben in deren Zählern Ausdrücke übrig, die in jedem Gliede nur halb so viel Faktoren wie die ursprünglichen Zähler enthalten, und welche mit den oben in (d^*) mitgetheilten Ausdrücken

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right] \qquad (r = 1, \ldots 2n)$$

genau übereinstimmen. Alle diese Umgestaltungen sind durch die oben angewandte Methode, welche sich von selbst darbietet, vermieden.

Der Ausdruck für δx steht in einer merkwürdigen Beziehung zu der Bedingungsgleichung von Nr. 511, wofür sich der Grund weiterhin ergeben wird. Es bleibt noch übrig, die Methode für den Fall zu ergänzen, dass die durch die obigen Vergleichungen (a) und (b) dargestellten Voraussetzungen nicht erfüllt werden.

516. Fortsetzung. Wenn zwar, wie in der vorigen Nummer,

(a) $$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \gtrless 0,$$

aber

(b) $$\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right] = 0$$

ist, so liefert die Gleichung 515c, welche von den Voraussetzungen 515a und b unabhängig ist, für λ den Werth Null. Also haben wir nicht mehr auf die Gleichung 514i zurückzugehen, da diese nur für den Fall, dass $\lambda \gtrless 0$ sei, zu einer Lösung der Aufgabe führte. Es zeigt sich aber, dass {auch} dann {noch} die Gleichung {515e, also die Gleichung}

(c) $$\delta x = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right],$$

für die man auch die Kongruenz

$$\delta x \equiv \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$ 372

setzen kann, die Auflösung der Aufgabe 514 ergiebt, das heisst, die Gleichungen 514b und c identisch macht.

Denn dann wird

$$X\delta x = \mu X\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$

$$= \mu\left[X^2\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \qquad [509]$$

(d) $$X\delta x = 0 \qquad [508].$$

Ferner wird aus gleichem Grunde, wie in 515,

$$2\left[\frac{d}{dx}X \,.\, e_r\delta x\right] = -\frac{\mu}{n} Xe_r\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$$
$$= 0$$

nach der zweiten Voraussetzung (b). Diese Gleichung gilt für jede Einheit $e_r = e_1, \ldots e_{2n}$, also auch für eine beliebige Vielfachensumme dieser Einheiten, also auch für $\delta' x$, da dies mit x von gleicher Gattung, also auch aus den Einheiten $e_1, \ldots e_{2n}$ numerisch ableitbar ist. Es wird also

$$\left[\frac{d}{dx}X \,.\, \delta' x \,.\, \delta x\right] = 0,$$

das heisst,

$$\frac{d}{dx}X \,.\, \delta' x \,.\, \delta x - \frac{d}{dx}X \,.\, \delta x \,.\, \delta' x = 0.$$

Es ist aber $\frac{d}{dx}X \cdot \frac{\delta x}{l_2} = \delta X$ und $\frac{d}{dx}X \cdot \frac{\delta' x}{l_2} = \delta' X$, {wobei die hinzugefügten Nenner l_2 andeuten sollen, dass die Füllgrössen δx und $\delta' x$ in die zweite, das heisst, in die durch Differenziation entstandene Lücke eintreten sollen}; also hat man

$$\delta X \,.\, \delta' x - \delta' X \,.\, \delta x = 0.$$

Differenzirt man nun die Gleichung (d) nach a, während t als konstant gesetzt ist, so erhält man, da δ' das zu dieser Differenziation gehörige Zeichen war,

$$\delta' X \,.\, \delta x + X\delta\delta' x = 0.$$

Addirt man diese Gleichung zu der vorigen, so hat man

$$\delta X \,.\, \delta' x + X\delta\delta' x = 0,$$

das heisst,

(e) $$\delta(X\delta' x) = 0,$$

das heisst, es ist $X\delta' x$ von t unabhängig, und also, da (nach 514) $Xdx = X\delta' x + X\delta x \,.\, dt$ war, und $X\delta x = 0$ ist,

$$Xdx = X\delta' x,$$

wo der letzte Ausdruck von t unabhängig ist, also nur von $2n - 1$ Variabeln abhängt.

Anm. Die Gleichung (b) ist also (unter der Voraussetzung (a)) die Bedingungsgleichung dafür, dass der Ausdruck Xdx sich *unmittelbar* † (*ohne Hinzutreten eines Faktors*) in einen Ausdruck transformiren lasse, der nur noch $2n - 1$ veränderliche Zahlgrössen enthält; wenn dagegen die Gleichung (b) nicht erfüllt ist, so gelang diese Transformation nur vermittelst eines veränderlichen Faktors, dessen reciproker Werth oben mit N bezeichnet war. Wenn ins Besondere $n = 1$ ist, das heisst, Xdx die Form $X_1 dx_1 + X_2 dx_2$ hat, so ergiebt sich die Gleichung

373

$$\left[\frac{d}{dx}X\right] = 0,$$

als Bedingungsgleichung dafür, dass sich $X_1 dx_1 + X_2 dx_2$ in einen Differenzialausdruck Udu mit nur einer veränderlichen Zahlgrösse (u) verwandeln, also sich allseitig integriren lässt. Die Gleichung

$$\left[\frac{d}{dx} X\right] = 0$$

sagt aber aus, dass $\frac{d}{dx} X$ zwei vertauschbare {gebundene} Lücken enthält, was mit Nr. 486 stimmt.

Ehe ich nun zeige, wie die Aufgabe zu lösen ist, wenn auch die Vergleichung (a) wegfällt, will ich noch durch Integration der Gleichung 515e die angedeutete Transformation wirklich vollziehen, wobei ich mich der Methode Jacobi's (in Crelle 17, S. 138 {Werke 4, S. 101}) bediene.

517. Fortsetzung. Die Kongruenz oder Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \delta x \equiv \left[X\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n-1}\right] \quad \text{oder} \quad \delta x = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n-1}\right]$$

bestimmt nur die Verhältnisse der Differenzialquotienten $\delta x_1, \ldots \delta x_{2n}$; wir können also einen derselben willkürlich annehmen, das heisst, wir können t beliebig wählen.

Setzen wir $t = x_{2n}$, so wird $\delta x_{2n} = 1$. Setzen wir dann für den Augenblick $x_1 e_1 + \cdots + x_{2n-1} e_{2n-1} = y$, so wird $x = y + te_{2n}$ und $\delta x = \delta y + e_{2n}$, dann erhält man

$$\delta y = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n-1}\right] - e_{2n}.$$

Hier bestimmt sich μ aus der Voraussetzung $\delta x_{2n} = 1$; setzt man in dieser Gleichung statt δx_{2n} seinen Werth aus 515d*, so erhält man zur Bestimmung von μ die Gleichung

$$1 = \frac{\mu}{2n}\left[X\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n-1} E_{2n}\right],$$

wo

$$E_{2n} = -[e_1 e_2 \ldots e_{2n-1}]$$

ist; somit erhalten wir

$$\delta y = 2n\left[X\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n-1}\right] : \left[X\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n-1} E_{2n}\right] - e_{2n}.$$

Hier ist die rechte Seite eine Funktion von x, also von y und t; und es kann daher diese Gleichung nach der Methode 494 integrirt werden. Es ergab sich y (nach 494c) in der Form

$$y = a + t\varphi, \qquad 374$$

wo φ noch wieder eine Funktion von a und t, das heisst von x ist, und wo a der Werth ist, den y, und also auch x, für $t = 0$ annimmt.

Die Formel 494d lehrte zugleich a als Funktion von y und t, das heisst, hier als Funktion von x finden. Dann wird $\delta' x$, da δ' die Differenziation nach a, wobei t konstant war, bedeutete, gleich

$2\left[\frac{d}{dx}X \cdot e_r \delta x\right] = -\frac{p}{n} X e_r \left[\left(\frac{d}{d}\right.\right.$ ...ie gezeigt, von t un-
$= 0$ ...n wir daher statt X und
...hen, $X(x)$, $\mathsf{N}(x)$ schreiben,
nach der zweiten Voraussetzung (b).
Einheit $e_r = e_1, \ldots e_{2n}$, also auch ...$+ t\delta'\varphi)$.
dieser Einheiten, also auch fl- ... $\mathsf{N}(x)$
tung, also auch aus den T- ... links von t unabhängig ist, so muss es
Es wird also ... also muss er denselben Werth behalten,
... in diesem Falle $y = a$ wird, und also auch
das heisst, ... wird, so erhält man

$$\frac{X\delta' x}{\mathsf{N}} = \frac{X(a)\,da}{\mathsf{N}(a)}.$$

... da $X\delta x = 0$ ist, $Xdx = X\delta' x = 0$, also erhält man

$$X(a)da = 0,$$

als die Transformirte von $Xdx = 0$; und zwar ist in jener a aus den Einheiten $e_1, \ldots e_{2n-1}$ ableitbar, also nur von $2n - 1$ veränderlichen Zahlgrössen abhängig, was verlangt war.

Anm. Wir hätten dem Satze in 494, den wir hier benutzten, für den hier vorliegenden Zweck auch die Form geben können: Wenn x aus mehreren (m) Einheiten ableitbar ist, und $dx \cdot f(x)$ gegeben ist, so wird diese Kongruenz integrirt durch eine Funktion $F(x)$ von x, welche einer aus $m - 1$ Einheiten ableitbaren Konstanten a gleich gesetzt ist; und ins Besondere kann man dieser integrirenden Gleichung $F(x) = a$ (welche $m - 1$ Zahlgleichungen enthält) die Form geben, dass a derjenige Werth wird, welchen x für den Fall annimmt, dass eine der Ableitzahlen von x, zum Beispiel x_m, null wird.

In dieser Form werde ich den Satz in der Folge benutzen, indem ja der Beweis des Satzes in dieser veränderten Form, ganz in dem oben Gesagten enthalten ist. Um nun die vorliegende Aufgabe auch für den bisher ausgeschlossenen Fall lösen zu können, will ich noch einen Hülfssatz voranstellen, welcher auch an sich von Interesse ist.

375 **518.** *Wenn*

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

ist, so ist auch

$$\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1}\right] = 0.$$

Beweis. 1. Die Lücken des ersteren dieser Ausdrücke werden durch $2n + 1$, die des letzteren durch $2n + 2$ Faktoren ausgefüllt. Ich zeige nun zuerst, dass der zweite Ausdruck nach Ausfüllung seiner Lücken durch beliebige $2n + 2$ Faktoren $a_1, a_2, \ldots a_{2n+2}$ sich als Vielfachensumme von Ausdrücken der ersten Art darstellen lässt.

Ich gehe, um beide Arten von Ausdrücken zu vermitteln, von dem Ausdrucke

$$Xa_1\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_{2n+2}\right]$$

:. Ich will zu dem Ende mit F_r das Produkt der von a_r verschie-
·n Grössen $a_1, \ldots a_{2n+2}$ bezeichnen, und zwar dies Produkt so ge-
ıen, dass

$$[a_r F_r] = [a_1 a_2 \ldots a_{2n+2}]$$

.ıd ebenso mit $F_{r,s}$ das Produkt der von a_r und a_s verschiedenen unter jenen Grössen und zwar so, dass

$$[a_r a_s F_{r,s}] = [a_1 a_2 \ldots a_{2n+2}]$$

sei. Dann wird der obige Ausdruck

$$= Xa_1\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 F_1\right].$$

Hierzu können wir, da $[a_1 F_\mathfrak{b}]$, wenn $\mathfrak{b} \gtrless 1$ ist, nothwendig den Faktor a_1 zweimal enthält, also in diesem Falle (nach 505) der obige Ausdruck null wird, sobald wir $a_1 F_\mathfrak{b}$ statt $a_1 F_1$ und gleichzeitig $Xa_\mathfrak{b}$ statt Xa_1 schreiben würden, noch beliebig viele Ausdrücke dieser Art hinzufügen; und wir erhalten den obigen Ausdruck

$$= \sum Xa_\mathfrak{b}\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 F_\mathfrak{b}\right],$$

wo sich die Summe auf alle Werthe $\mathfrak{b} = 1, \ldots 2n + 2$ beziehen soll. Dieser Ausdruck ist aber {(nach 510)

$$= \sum Xa_\mathfrak{b}\left[\frac{d}{dx}X \,.\, a_1\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_\mathfrak{b}\right]\right]$$

und das ist wieder (nach 504)}

$$= \frac{1}{2n+1}\sum Xa_\mathfrak{b}\sum\left[\frac{d}{dx}X \,.\, a_1 a_\mathfrak{a}\right]\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}\right],$$

wenn $F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$ die oben angegebene Bedeutung hat, das heisst,

$$[a_\mathfrak{b} a_\mathfrak{a} F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}] = [a_1 a_2 \ldots a_{2n+2}],$$

also $[a_\mathfrak{a} F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}] = F_\mathfrak{b}$ ist, woraus folgt, dass $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{b}$ verschieden sein muss und daher {für jeden der $2n + 2$ Werthe von $\mathfrak{b}$} nur $2n + 1$ verschiedene Werthe annehmen kann.

Fassen wir jetzt (nach 509) den ersten und dritten der unter dem Summenzeichen stehenden Faktoren zusammen, {das heisst, führen wir bei festgehaltenem $\mathfrak{a}$ die Summation nach $\mathfrak{b}$ aus,} so erhalten wir den gefundenen Ausdruck (nach 509)

$$= -\sum\left[\frac{d}{dx}X \,.\, a_1 a_\mathfrak{a}\right]\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_\mathfrak{a}\right], \qquad 376$$

wo {$\mathfrak{a}$ jetzt alle Werthe $1, \ldots 2n + 2$ zu durchlaufen hat, und wo} das Minus-Zeichen zu setzen ist, weil aus

$$[a_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a}} F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}] = [a_1 a_2 \ldots a_{2n+2}]$$

folgt, dass

$$[a_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b}} F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}] = -[a_1 a_2 \ldots a_{2n+2}]$$

ist, und also nach dem Princip der obigen Bezeichnung $F_{\mathfrak{a}} = -[a_{\mathfrak{b}} F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}]$ sein muss. Die gewonnene Formel ist also

$$\text{(a)} \qquad X a_1 \left[\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n+1} a_1 F_1\right] = -\sum \left[\frac{d}{dx} X . a_1 a_{\mathfrak{a}}\right] \left[X \left(\frac{d}{dx} X\right)^n F_{\mathfrak{a}}\right],$$

wo nach dem Obigen $F_{\mathfrak{a}}$ ein Produkt ist, dessen Faktoren aus einer beliebig gewählten Faktorenreihe $a_1, a_2, \ldots a_{2n+2}$ genommen sind, und zwar so, dass ausser $a_{\mathfrak{a}}$ alle Faktoren dieser Reihe darin vorkommen und $[a_{\mathfrak{a}} F_{\mathfrak{a}}] = [a_1 a_2 \ldots a_{2n+2}]$ ist.

2. Wenn nun

$$\left[X \left(\frac{d}{dx} X\right)^n\right] = 0$$

ist, so ist auch die rechte Seite der Formel (a) null, also auch die linke. Also müsste entweder $X a_1$ oder

$$\left[\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n+1} a_1 F_1\right],$$

das heisst,

$$\left[\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_{2n+2}\right]$$

null sein. Sollte das erstere der Fall sein, so könnte man statt a_1 irgend eine andere der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_{2n+2}$ setzen; und wenn auch nur für eine derselben a_r das Produkt $X a_r \gtrless 0$ wird, so ergiebt sich schon der zweite Faktor

$$\left[\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n+1} a_1 \ldots a_{2n+2}\right]$$

gleich Null. Sollten aber $X a_1, X a_2, \ldots X a_{2n+2}$ sämmtlich null sein, so würde auch $\frac{d}{dx}(X a_r)$ für jeden Index r null, also auch

$$\frac{d}{dx} X . a_r a_s$$

{null für jeden Index r und s,} also auch

$$\left[\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n+1} a_1 \ldots a_{2n+2}\right]$$

gleich Null. Dieser Ausdruck ist also für jede Faktorenreihe $a_1, \ldots a_{2n+2}$ gleich Null, also (nach 506)

$$\left[\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n+1}\right]$$

selbst gleich Null.

519. Fortsetzung der Aufgaben 514—517. Es sei, wie in 514, die Zahlgleichung

(a) $$Xdx = 0$$

betrachtet, in welcher, wie dort, x aus einem Systeme von m Einheiten ableitbar ist. Immer wird sich ein Werth n von der Art angeben lassen, dass

(b) $$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$ 377

(c) $$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \gtrless 0$$

sei.

Denn die Vergleichung (c) wird immer erfüllt, wenn $n = 1$ ist, wo sie sich auf $[X] \gtrless 0$ reducirt; und die Gleichung (b) wird immer erfüllt, wenn $2n + 1 > m$ ist; denn dann wird zwischen jeden $2n + 1$ Grössen, welche die Lücken des Ausdruckes

$$X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n$$

auszufüllen vermögen, eine Zahlbeziehung herrschen, weil sie aus weniger als $2n + 1$, nämlich aus m Einheiten numerisch ableitbar wären, folglich giebt jener Ausdruck mit jeden $2n + 1$ Grössen, die seine Lücken füllen, multiplicirt (nach 505) Null; also ist er selbst null (nach 506). Dies tritt also stets ein, wenn $2n + 1 > m$, das heisst, $n > \frac{1}{2}(m - 1)$ ist, folglich muss es zwischen 1 und $\frac{1}{2}(m + 1)$ {bei geradem m sogar zwischen 1 und $\frac{1}{2}m$, die Gränzen stets mit eingeschlossen,} einen Werth n geben, für welchen die obigen Vergleichungen (b) und (c) erfüllt sind. {Da endlich aus dem Verschwinden des Ausdrucks

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$

augenscheinlich das Bestehen der Gleichung (b) folgt, so wird es auch *nur* einen solchen Werth n geben.} Dieser Werth sei für n angenommen.

Nun kommt es (nach 514) darauf an, die Gleichung

$$2\left[\frac{d}{dx}X \,.\, e_s \delta x\right] - \lambda X e_s = 0$$

für jedes s von 1 bis m zu erfüllen; indem, sobald diese erfüllt ist, *und λ nicht null* ist, die Gleichung (a) durch die Gleichung

$$\frac{X\delta' x}{\mathsf{N}} = 0,$$

ersetzt wird, in welcher die linke Seite nicht mehr von t abhängt und N durch die Formel 514 (1) bestimmt ist.

Bezeichnen wir der Kürze wegen mit G_s den Ausdruck

$$G_s = 2\left[\frac{d}{dx}X \,.\, e_s \delta x\right] - \lambda X e_s,$$

so können wir die obigen Gleichungen schreiben

$$0 = G_1 = G_2 = \cdots = G_m.$$

Nun zeige ich, *dass, wenn $m > 2n$ ist, zwischen jeden $2n + 1$ der Grössen $G_1, \ldots G_m$ eine Zahlbeziehung herrscht.* Angenommen, es 378 herrsche zwischen den $2n$ Grössen $G_1, \ldots G_{2n}$ † noch keine Zahlbeziehung, so zeige ich, dass jede der übrigen Grössen, zum Beispiel G_m, sich als Vielfachensumme von $G_1, \ldots G_{2n}$ darstellen lasse.

Bezeichnen wir mit E das Produkt $[e_1 e_2 \ldots e_{2n} e_m]$ und mit F_a das Produkt aller von e_a verschiedenen Faktoren des Produktes E, und zwar in dem Sinne, dass $[e_a F_a] = E$ sei, und bezeichnen wir endlich mit α_a den Ausdruck

$$\left[\left(\frac{d}{dx} X\right)^n F_a\right],$$

so wird, wenn man die folgenden Summen auf die Werthe $1, 2, \ldots 2n$ und m, welche a nach und nach annehmen soll, bezieht,

$$\Sigma \alpha_a G_a = -2 \sum \left[\frac{d}{dx} X \,.\, \delta x \,.\, e_a\right]\left[\left(\frac{d}{dx} X\right)^n F_a\right] - \lambda \sum X e_a \left[\left(\frac{d}{dx} X\right)^n F_a\right],$$

was nach dem Begriffe der durch die scharfen Klammern bezeichneten Produkte

$$= -2(2n+1)\left[\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n+1} \delta x \,.\, E\right] - \lambda(2n+1)\left[X \left(\frac{d}{dx} X\right)^n E\right]$$

ist. Nun ist (nach b)

$$\left[X \left(\frac{d}{dx} X\right)^n\right] = 0,$$

und also (nach 518) auch

$$\left[\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n+1}\right] = 0,$$

also wird die ganze rechte Seite gleich Null, also auch

$$\Sigma \alpha_a G_a = 0,$$

das heisst, zwischen den Grössen $G_1, \ldots G_{2n}$ und G_m und überhaupt zwischen jeden $2n + 1$ der Grössen $G_1, \ldots G_m$ herrscht eine Zahlbeziehung. Es werden also unter ihnen $2n$ angenommen werden können, etwa $G_1, \ldots G_{2n}$, aus denen die übrigen numerisch ableitbar sind.

Wenn also die Gleichungen $G_1 = 0, \ldots, G_{2n} = 0$ erfüllt sind, so werden auch die übrigen bis $G_m = 0$ erfüllt. Also können wir auch von den Grössen $\delta x_1, \ldots \delta x_m$, deren Verhältnisse aus den Gleichungen $G_1 = 0, \ldots, G_m = 0$ bestimmt werden sollen, die Grössen $\delta x_{2n+1}, \ldots \delta x_m$ willkürlich annehmen, zum Beispiel alle gleich Null, das heisst, wir können $x_{2n+1}, \ldots x_m$ in Bezug auf die durch δ ausgedrückte Differenziation als konstant ansehen. Dann haben wir also, *immer unter der Voraussetzung, dass $\lambda \gtrless 0$ sei,* die Gleichungen $G_1 = 0, \ldots,$

$G_{2n} = 0$ mit nur $2n$ Variabeln (indem wir $x_{2n+1}, \ldots x_m$ noch als konstant setzen) † und mit der Bedingung 379

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \gtrless 0.$$

Dann erhalten wir also (nach 515)

(d) $$\delta x \equiv \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} e_1 \ldots e_{2n}\right]$$

oder

$$\delta x = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} e_1 \ldots e_{2n}\right]$$

als eine Grösse, die die Gleichungen $G_1 = 0, \ldots, G_{2n} = 0$, und also auch (wie soeben gezeigt) die Gleichungen $G_1 = 0, \ldots, G_m = 0$ erfüllt, und also auch den Ausdruck $X\delta' x : \mathsf{N}$ von t unabhängig, und $X\delta x$ null werden lässt.

Integrirt man diese Kongruenz nach der Methode von Nr. 517 (vergl. Anm.) durch eine Gleichung von der Form $F(x) = b$, wo b den Werth bezeichnet, welchen $x_1 e_1 + \cdots + x_{2n-1} e_{2n-1}$ für $t = x_{2n} = 0$ annimmt, und setzt $a = b + x_{2n+1} e_{2n+1} + \cdots + x_m e_m$, so wird, da $x_{2n+1}, \ldots x_m$ von t unabhängig sind, a der Werth, den x für $t = 0$ annimmt; und da dann vermöge der Gleichungen $G_1 = \cdots = G_m = 0$, die Grösse $X\delta' x : \mathsf{N}$ von t unabhängig wird, so erhält man aus demselben Grunde, wie in 517, $X(a)da = 0$ als die Gleichung, welche die Gleichung $Xdx = 0$ oder $X(x)dx = 0$ ersetzt, und welche nur noch von $m-1$ veränderlichen Zahlgrössen, nämlich von den Zahlgrössen, durch welche a aus den Einheiten $e_1, \ldots e_{2n-1}, e_{2n+1}, \ldots e_m$ ableitbar ist, abhängt.

Es war auch hier noch vorausgesetzt, dass $\lambda \gtrless 0$ war. Diese Voraussetzung können wir ersetzen durch die Voraussetzung, dass

$$\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] \gtrless 0$$

sei. Nämlich, man kann aus den Gleichungen $G_1 = G_2 = \cdots = G_{2n} = 0$, ganz wie in 515, die Gleichung (die dort mit (c) bezeichnet war, nämlich)

$$\lambda\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} E_r\right] = -2\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]\delta x_r$$

ableiten; setzt man ins Besondere $r = 2n$, so wird $\delta x_r = \delta x_{2n} = 1$, und man erhält

$$\lambda\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} E_{2n}\right] = -2\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right].$$

Ist also

$$\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$$

von Null verschieden, so muss auch λ von † Null verschieden sein. 380

Es ist also nur noch *der Fall zu berücksichtigen, wo*

$$\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

ist. Ist aber diese Gleichung erfüllt, so ergiebt sich leicht, dass die Gleichung (d) gleichfalls der Aufgabe genügt. Denn es ergiebt sich dann, wie in 516 d, dass $X\delta x = 0$ sei, ebenso ergiebt sich:

$$2\left[\frac{d}{dx}X.e_s\delta x\right] = 2\mu\left[\frac{d}{dx}X.e_s\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}e_1\dots e_{2n}\right]\right],$$

was sich ganz, wie der entsprechende Ausdruck in 515, umwandelt in

$$= -\frac{\mu}{n}\sum Xe_a\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_a\right],$$

wo $[e_a E_a] = [e_1 \dots e_{2n}]$ und s jede der Zahlen $1, \dots m$ sein kann. Die rechte Seite ist nach der gemachten Voraussetzung null. Also

$$\left[\frac{d}{dx}X.e_s\delta x\right] = 0,$$

wo statt e_s jede der Einheiten $e_1, \dots e_m$, also auch jede Vielfachensumme derselben, also auch $\delta' x$ gesetzt werden kann, somit erhält man

$$\left[\frac{d}{dx}X.\delta' x.\delta x\right] = 0,$$

und hieraus ergiebt sich, wie in 516,

$$\delta(X\delta' x) = 0 \quad \text{und} \quad Xdx = X\delta' x.$$

Also hat sich der Satz ergeben:

Wenn in der Zahlgleichung

(a) $$Xdx = 0,$$

in welcher X eine Funktion von x, und x aus den Einheiten $e_1, \dots e_m$ durch die Zahlen $x_1, \dots x_m$ ableitbar ist, die Grösse X die Eigenschaft hat, dass für irgend einen Werth n, der kleiner als $\frac{m}{2}$ ist,

(b) $$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

und

(c) $$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \gtrless 0,$$

ist, so lässt sich jene Gleichung (a) *ersetzen durch eine Gleichung*

381 (e) $$Ada = 0,$$

in welcher a aus $m-1$ Einheiten ableitbar ist, das heisst, nur $m-1$ veränderliche Zahlen einschliesst, und A dieselbe Funktion von a, wie X von x ist. Und zwar findet man die Grösse a durch Integration der Gleichung

(d) $$\delta x = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}e_1\dots e_{2n}\right],$$

in welcher δ *den Differenzialquotienten nach einer der Variabeln* $x_1, \ldots x_{2n}$, *zum Beispiel nach* x_{2n}, *bedeutet, und also* $\delta x_{2n} = 1$ *ist, wodurch sich* μ *bestimmt, und in welcher* $x_{2n+1}, x_{2n+2}, \ldots x_m$ *als konstante Grössen behandelt werden.* {*Dabei wird vorausgesetzt, dass die Einheiten* $e_1, \ldots e_{2n}$ *so gewählt sind, dass der Faktor von* μ *auf der rechten Seite von* (d) *nicht verschwindet.*}

Wenn nun in diesem Sinne die Gleichung (d) *durch eine Gleichung von der Form*

$$F(x) = b \tag{f}$$

integrirt wird, wo b *den Werth bezeichnet, den* $x_1 e_1 + \cdots + x_{2n-1} e_{2n-1}$ *für* $x_{2n} = 0$ *annimmt, so ist*

$$a = F(x) + x_{2n+1} e_{2n+1} + \cdots + x_m e_m, \tag{g}$$

also a *aus den Einheiten* $e_1, \ldots e_{2n-1}, e_{2n+1}, \ldots e_m$ *ableitbar.*

520. Zusatz 1. *Wenn in der vorigen Nummer nur die Gleichungen* (a) *und* (b) *erfüllt sind, aber nicht die Vergleichung* (c), *so lässt sich, mag nun* $m = 2n$ *oder* $> 2n$ *sein, gleichfalls die Gleichung* (a) *auf* $m - 1$ *veränderliche Zahlgrössen zurückführen und zwar auf eine Gleichung der Form* $Ada = 0$, *wo* A *dieselbe Funktion von* a, *wie* X *von* x, *und* a *aus* $m - 1$ *Einheiten ableitbar ist.*

Beweis. Denn, wenn auch

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] = 0$$

sein sollte, so muss, da doch schliesslich $[X] \gtrless 0$ ist, sich ein Zahlwerth $n' < n$ finden lassen von der Art, dass die Vergleichungen (b) und (c) gelten, sobald man n' statt n setzt. Da nun $m >$ oder $= 2n$ war, so ist m stets $> 2n'$, also kann man dann nach dem vorigen Satze die Gleichung $Xdx = 0$ gleichfalls auf $m - 1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen, und so weiter.

{Anm. Bei ungeradem m kann nach 519 auch $n = \frac{1}{2}(m + 1)$, also $m = 2n - 1$ sein. *Nur für diesen Fall* ist die Zurückführung der Gleichung $Xdx = 0$ auf $m - 1$ veränderliche Zahlgrössen *nicht geleistet*; sie ist nämlich dann, wie sich unten (525 Anm.) zeigen wird, überhaupt *nicht möglich.*}

521. Zusatz 2. *Ins Besondere kann man, wenn* $m = 2n$ *ist, stets die Gleichung* $Xdx = 0$ *auf* $m - 1$ *veränderliche Zahlgrössen zurückführen.*

Beweis. Denn dann gilt die Gleichung (b) stets (nach 519); und wenn dann auch die Vergleichung (c) gilt, so findet † die Zurückführung (nach 517) statt; wenn jene Vergleichung aber nicht gilt, so geschieht sie nach 520. 382

522. *Wenn die Gleichungen* (a) *und* (b) *in demselben Sinne wie in* 519 *gelten, so kann man die Gleichung*

$$Xdx = 0$$

allemal auf $2n - 1$ *veränderliche Zahlgrössen zurückführen, und zwar auf die Form*

$$Ada = 0,$$

wo A *dieselbe Funktion von* a, *wie* X *von* x *ist, und* a *aus* $2n - 1$ *Einheiten ableitbar ist, das heisst, nur noch* $2n - 1$ *veränderliche Zahlgrössen einschliesst.*

Beweis. Es soll hier nicht bloss der Satz erwiesen, sondern auch gezeigt werden, wie die neue Variable a als Funktion von x gefunden werden kann.

Nach 520 kann man {*wenn* $m > 2n$ *ist*} $Xdx = 0$ durch eine Gleichung von der Form $A_1 da_1 = 0$ ersetzen, wo a_1, was aus $m - 1$ Einheiten ableitbar ist, eine bekannte Funktion von x, und A_1 dieselbe Funktion von a_1 ist, wie X von x. Da nun die Gleichung (b) für jeden Werth von x gilt, also auch, wenn man a_1 statt x setzt, so erhält man

$$\left[A_1 \left(\frac{d}{da_1} A_1\right)^n\right] = 0.$$

Wenn also noch $m - 1$ (die Anzahl der Einheiten aus denen a_1 ableitbar ist) grösser als $2n$ ist, so kann man abermals die Methode in 519 oder 520 anwenden, und erhält dann eine Gleichung der Form $A_2 da_2 = 0$, wo a_2, was aus $m - 2$ Einheiten ableitbar ist, eine bekannte Funktion von a_1, also auch von x ist, und A_2 dieselbe Funktion von a_2, wie A_1 von a_1, also auch wie X von x ist. Auf diese Weise kann man fortfahren, so lange noch die Anzahl der übrig bleibenden veränderlichen Zahlgrössen grösser als $2n$ ist; *ja* (nach 521) *auch noch, wenn diese Anzahl* $= 2n$ *ist.* Durch dieses Verfahren reducirt sich die Anzahl der veränderlichen Zahlgrössen auf $2n - 1$. Wenn dann die so resultirende Gleichung die Gleichung $Ada = 0$ ist, so ist also a aus $2n - 1$ Einheiten ableitbar, und eine bekannte Funktion von x, und A ist dieselbe Funktion von a, wie X von x.

{Ist $m = 2n - 1$, so besitzt die vorgelegte Gleichung $Xdx = 0$ schon von vornherein die verlangte Form.}

383 Anm. Dieser Satz enthält die allgemeinste Lösung der in 514 begonnenen Aufgabe der Zurückführung auf eine möglichst geringe Anzahl veränderlicher Zahlgrössen. Dass, wenn

$$\left[X\left(\frac{d}{dx} X\right)^{n-1}\right]$$

ungleich Null (519c) ist, sich auch Xdx nicht auf weniger als $2n - 1$ veränder-

liche Zahlgrössen zurückführen lässt, werde ich unten gelegentlich beweisen {vgl. Nr. 525 Anm.}.

Noch bemerke ich, dass man, statt $t = x_{2n}$ zu setzen, es auch gleich irgend einer Funktion der veränderlichen Zahlgrössen hätte setzen können. Dann hätte man nur eine der letzteren, zum Beispiel x_{2n}, durch t und die übrigen Variabeln auszudrücken und diesen Ausdruck in die gegebene Gleichung einzuführen, und dann ganz die vorher angegebene Methode zu befolgen. Ins Besondere kann man, wenn die Integration eine Funktion ergeben würde, die für $x_{2n} = 0$ unstetig wäre, $t = x_{2n} - c$ setzen, wo c eine Konstante bezeichnet; indem dann für $t = 0$, $x_{2n} = c$ wird und c so gewählt werden kann, dass jene Funktion in $t = 0$, das heisst, in $x_{2n} = c$ stetig sei.

523. Aufgabe. *Den numerischen Ausdruck Xdx, in welchem X eine Funktion der extensiven Grösse x ist, unter der Voraussetzung, dass*

(a) $$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

ist, auf die Form

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n,$$

wo $U_1, \ldots U_n, u_1, \ldots u_n$ Zahlgrössen sind, zurückzuführen.

Auflösung. Man kann (nach 522) die Gleichung $Xdx = 0$ auf $2n - 1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen, welche bekannte Funktionen von x sind. Eine beliebige dieser veränderlichen Zahlgrössen sei mit u_1 bezeichnet, so ist u_1 gleichfalls eine bekannte Funktion von x. Nun sei u_1 konstant gesetzt, so bleiben nur noch $2n - 2$ veränderliche Zahlgrössen übrig. Folglich können wir (nach 521) die erhaltene Gleichung (welche nach den obigen Sätzen stets die Form $Ada = 0$ hat) auf $2n - 3$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen, welche bekannte Funktionen der obigen $2n - 1$ Veränderlichen, und also auch bekannte Funktionen von x sind; eine derselben sei mit u_2 bezeichnet, und sei u_2 konstant gesetzt, so hat man nur noch $2n - 4$ veränderliche Zahlgrössen, welche sich auf $2n - 5$ solche zurückführen lassen, und so weiter.

Hat man diese Methode r mal angewandt, so nämlich, dass man nach und nach die Grössen $u_1, u_2, \ldots u_r$, welche sämmtlich bekannte Funktionen von x sind, konstant gesetzt hatte, so bleiben nur noch 384 $2(n - r) - 1$ veränderliche Zahlgrössen übrig. Setzt man also $r = n - 1$, so bleibt nur noch eine veränderliche Zahlgrösse übrig und die resultirende Gleichung hat die Form $U_n du_n = 0$, wo U_n nur von der variabeln Zahlgrösse u_n abhängt. Setzt man also auch u_n gleich einer Konstanten, so werden jetzt alle Differenzialgleichungen, also namentlich auch die erste $Xdx = 0$ erfüllt, wenn die Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ Konstanten gleich gesetzt werden, also lässt sich nach der Methode {von Nr.} 502 {der Ausdruck} Xdx in der Form

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$$

darstellen, und die Aufgabe ist gelöst.

524. *Der numerische Ausdruck Xdx, in welchem X eine Funktion der extensiven Grösse x ist, ist dann und nur dann auf eine Summe von n Gliedern der Form Udu, wo U und u Zahlgrössen vorstellen, zurückführbar, wenn*

(a) $$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

ist.

Beweis. Wenn die Gleichung (a) erfüllt ist, so ist die genannte Zurückführung von Xdx auf n Glieder der Form Udu (nach 523) ausführbar, und wenn umgekehrt diese Zurückführung möglich ist, so wird (nach 511) die Gleichung (a) erfüllt.

525. Zusatz. *Wenn x aus $2n$ Einheiten ableitbar ist, so lässt sich Xdx allemal auf n Glieder der Form Udu, wo U und u Zahlen sind, zurückführen.*

Beweis. Denn, wenn x aus $2n$ Einheiten ableitbar ist, so ist die Gleichung

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

(nach 519) stets erfüllt, und also Xdx (nach 524) auf n Glieder der Form Udu zurückführbar.

Anm. Es folgt aus diesen Sätzen sogleich, dass, wenn

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$

von Null verschieden ist, sich auch die Gleichung $Xdx = 0$ nicht auf weniger als $2n-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen lasse. Denn liesse sie sich auch nur auf $2n-2$ solche zurückführen, und wäre $Ada = 0$ die so erhaltene 385 Gleichung, so liesse sich (nach 525) Ada auf $+ n - 1$ Glieder der Form Udu zurückführen. Aber da die Gleichungen $Xdx = 0$ und $Ada = 0$ sich gegenseitig ersetzen, so können sie sich nur durch einen Zahlfaktor unterscheiden. Es sei $Xdx = \mathsf{N}Ada$, so wird nun auch Xdx auf $n-1$ Glieder der Form Udu zurückgeführt sein; also (nach 511)

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] = 0$$

sein, was mit der Voraussetzung streitet. Also lässt sich unter der gemachten Voraussetzung die Gleichung $Xdx = 0$ nicht auf weniger als $2n-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen.

Es bildet diese Bemerkung eine schon oben {Nr. 522 Anm.} angedeutete Ergänzung zu dem Satze 522.

526. Aufgabe. *Die Zahlgleichung $Xdx = 0$, in welcher X Funktion der extensiven Grösse x ist, vollständig zu integriren.*

Auflösung. Es lässt sich (nach 519) stets ein {eindeutig bestimmter} Werth n von der Art angeben, dass

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0, \quad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \gtrless 0$$

sei. Dann lässt sich (nach 523, 524) Xdx stets auf n (aber nicht auf weniger als n) Glieder der Form Udu (wo U und u Zahlen sind) zurückführen. Es sei

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n = 0,$$

so suche man zu der Gleichung $U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n = 0$ (nach 503) die sämmtlichen integrirenden Vereine von je n Gleichungen, so integriren diese Vereine auch die mit jener identische Gleichung $Xdx = 0$.

527. Zusatz. *Die Gleichung*

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

ist die nothwendige aber auch ausreichende Bedingungsgleichung dafür, dass sich die Gleichung $Xdx = 0$ durch Vereine von je n Gleichungen integriren lasse.

Anm. Nach 500 ist mit der vollständigen Integration der Zahlgleichung $Xdx = 0$ zugleich die der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung vollendet; während die Integration der partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnung (nach 501) auf die Integration der extensiven Gleichung $Xdx = 0$ zurückführte, welche wir hier ausgeschlossen haben.

Alphabetisches Verzeichniss

der gebrauchten Kunstausdrücke mit Angabe der Nummer, in welcher sie erklärt sind.

XI

Inhalt.

Verzeichniss

der wichtigsten Stellen, an denen die vorliegende Ausgabe der A_2 von dem Texte der Originalausgabe abweicht*).

S. 3, Z. 13 v. u. (III, Z. 13 v. u.): 31 fehlt. — S. 8, Z. 1, 2 v. o. (VII, Z. 19 v. u.): „das zweite die Lehre von den Reihen, das dritte die Differenzialrechnung." — S. 9, Z. 9, 10 v. o. (VIII, Z. 19, 18 v. u.): 3° statt 5° und p. 149 statt Nr. 227. — S. 9, Z. 17 v. u. (VIII, Z. 8 v. u.): 31 fehlt. — S. 9, Z. 11 v. u. (IX, Z. 3 v. o.): pag. statt §.

S. 12, Z. 2 v. u. (3, Z. 9 v. o.): Hier und im Folgenden sind die Summenzeichen Σ in der Originalausgabe überall oben mit wagerechten Strichen versehen: Σ^{-}, deren Länge jedesmal andeuten soll, auf welche Glieder sich das Zeichen Σ erstreckt. Wir haben diese Striche immer weggelassen. Dadurch wurde es freilich nöthig an einzelnen Stellen Klammern hinzuzufügen. Um jedoch einem übermässigen Anschwellen der ohnehin schon grossen Zahl der Klammern vorzubeugen, haben wir dem Multiplikationspunkte, dem Doppelpunkte der Division und späterhin auch dem Ergänzungsstriche insofern die Kraft einer Klammer beigelegt, als wir diese drei Verknüpfungszeichen zugleich als Gränzmarken eines etwa vorangehenden Summenzeichens verwendet haben. Diese Festsetzung steht damit im Einklang, dass in den späteren Kapiteln des Buches diese drei Zeichen so wie so zur Zusammenfassung der Faktoren eines Produktes zu Einzelprodukten und zur Abgränzung der Wirkung eines Differenzialzeichens benutzt werden. —

*) Die zuerst stehenden Seitenzahlen beziehen sich auf die vorliegende Ausgabe, die eingeklammerten auf die Originalausgabe; dahinter steht, wenn nichts Besonderes bemerkt ist, der Wortlaut der Originalausgabe. Die bei der vorliegenden Ausgabe im Texte gemachten Zusätze sind hier nicht mit aufgeführt, da sie durch Einschliessung in geschweifte Klammern: { } ausgezeichnet sind. Ebensowenig sind die Druckfehler der Originalausgabe, die unmittelbar als solche kenntlich sind und deren Berichtigung unmittelbar klar ist, aufgeführt.

Am Rande der vorliegenden Ausgabe sind die Seitenzahlen der Originalausgabe angegeben und die Seitenanfänge sind durch das Zeichen † angedeutet, da der früher benutzte Strich | in der A_2 als Zeichen für die Ergänzung verwendet wird. Die gesperrt gedruckten Stellen sind fast alle schon in der Originalausgabe durch gesperrten Druck ausgezeichnet, dagegen sind alle cursiv gedruckten Stellen in der Originalausgabe noch nicht durch besonderen Druck hervorgehoben.

In der Originalausgabe sind in den Seitenköpfen nur die Zahlen der Nummern angegeben, in die A_2 eingetheilt ist; die Kopfüberschriften der vorliegenden Ausgabe sind neu hinzugefügt.

S. 13, 17 und 18 (3, 7 und 8): Die Nummern 8, 16 und 18 sind in der Originalausgabe unrichtiger Weise als Erklärungen bezeichnet. — S. 22, Z. 11 v. u. (14, Z. 8 v. o.): „können" statt „könnte".

S. 23, Z. 10 v. o. (14, Z. 8 v. u.): „nach 22" statt „nach 23". — S. 23, Z. 13, 12 v. u. (15, Z. 12, 13 v. o.): Satz 18, 23, 24 statt Satz 19, 24, 25. — S. 24, Z. 17 und 13, 12 v. u. (16, Z. 11 und 15, 16 v. o.): 26 statt 28 und: „extensive Grösse *a* aus einer andern *b*". — S. 27, Z. 5 v. o. (19, Z. 4 v. o.): „In der That wird die Gleichung (a) ersetzt". — S. 31, Z. 15 v. o. (23, Z. 8 v. u.): Vor β_s fehlt das Σ. — S. 32 (25): In Nr. 45 steht q_r, r_s statt α_r, β_s. — S. 34, Z. 11 v. u. (27, Z. 14 v. u.): „Bedingungsgleichungen" statt „Bestimmungsgleichungen" und so später mehrfach. — S. 35, Z. 10 v. o., 8, 7 v. u. (28, Z. 9 v. o., 4, 3 v. u.): 45 statt 42, „welche $x_{b,d}$ keinmal oder zweimal enthalten" statt „welche $x_{b,d}$ nicht enthalten". — S. 36, Z. 9, 2, 1 v. u. (29, Z. 1 v. u., 30, Z. 8, 9 v. o.) überall 50 statt 51.

S. 38, Z. 10 v. u. (32, Z. 10 v. o.): 50 statt 51. — S. 39, Z. 8, 16, 26, 27 v. o. (32, Z. 7 v. u., 33, Z. 2, 13, 14 v. o.): 12, 4; 46; 38; 40 statt 12, 3; 45; 7, Anm.; 39. — S. 41, Z. 12, 11 v. u. (35, Z. 13, 12 v. u.): 55 und *s* statt 54 und *r*. — S. 42, Z. 12, 13 v. o. (36, Z. 9, 10 v. o.): 57 statt 58. — S. 43, Z. 3, 16 v. o., 2 v. u. (36, Z. 2 v. u., 37, Z. 14 v. o., 38, Z. 1 v. o.): 59 statt 60, „die Zahlen" statt „den Zahlen", 65 statt 45. — S. 45, Z. 4 v. o. (39, Z. 13 v. o.): 60 statt 62. — S. 49, Z. 15, 17 v. o. (43, Z. 1 v. u., 44, Z. 2 v. o.): „dasselbe" statt „das Gebiet", „einfache" statt „blosse". — S. 53, Z. 2, 16 v. o. (47, Z. 20, 7 v. u.): 73, 65 statt: 74, 67. — S. 54, Z. 15, 17 v. o. (48, Z. 3, 2 v. u.): 72, 74 statt 73, 75. — S. 55, Z. 10 v. o. (49, Z. 5 v. u.): 61 statt 60. — S. 56, Z. 2 v. u. (51, Z. 14 v. u.): „der andern" statt „des andern". — S. 58, Z. 10 v. o., 11 v. u. (53, Z. 6 v. o., 11 v. u.): 45, 34 statt 42, 28. — S. 59, Z. 19 v. o. (54, Z. 18 v. u.): 16 statt 28. — S. 60, Z. 17 v. u. (55, Z. 12 v. u.): „erzeugbar" statt „erzeugt". — S. 61, Z. 2, 15 v. o. (56, Z. 10, 24 v. o.): „auch", „wenn" statt „zugleich", „wo". — S. 61, Z. 5 v. u. (57, Z. 9 v. o.): 44 statt 39. — S. 63, Z. 2 v. o. (58, Z. 19 v. u.): „Stufen" statt „Stufe". — S. 63, Z. 5 v. u. (59, Z. 16 v. o.): 90 statt 89. — S. 65, Z. 21 v. o. (61, Z. 13 v. o.): „kleiner" statt „grösser". — S. 66, Z. 2 v. u. (62, Z. 6 v. u.): „*A*, *B*, *C*" statt „*A* und *B*". — S. 67, Z. 18, 12, 11 v. u. (63, Z. 18, 13, 12 v. u.): p. 64; kleiner; $<$ statt S. 12; grösser; $>$. — S. 68, Z. 21, 14, 8 v. u. (64, Z. 20, 12, 7 v. u.): 90, 90, $>$ statt 89, 89, $<$. — S. 68, Z. 2 v. u. bis 69, Z. 4 v. o. (65, Z. 1—5 v. o.): „zusammengenommen $= 2n - \alpha - \beta = n - (\alpha + \beta - n)$. Nun ist $\alpha + \beta - n$ positiv, da $\alpha + \beta$ nach der Annahme grösser als n ist, somit ist $n - (\alpha + \beta - n) < n$, also die Summe der Stufenzahlen von A' und B' kleiner als n. Also ist nach Beweis 1 $|[A'B'] = [A'B'] = [AB]$". Der Fall eines *geraden n* ist in der Originalausgabe ganz vergessen, und daher in der vorliegenden Ausgabe auf S. 69, Z. 11 v. o. bis 8 v. u. besonders behandelt. — S. 70, Z. 20—18 v. u. (65, Z. 3—1 v. u.): „Es folgt hieraus, dass das regressive Produkt als ein kombinatorisches u. s. w." — S. 71, Z. 10, 16 v. o. (66, Z. 15, 8 v. u.): φ und 99 statt $|\varphi$ und 98. — S. 72, Z. 5 v. o. (67, Z. 14 v. o.): 94 statt 97. — S. 73, Z. 16, 17 v. o. (68, Z. 8 v. u.) ist in der vorliegenden Ausgabe „das heisst A'" hinzugefügt. — S. 73, Z. 17, 16 v. u. (68, Z. 4, 3 v. u.): α statt α_1. — S. 73, Z. 11 v. u. (69, Z. 3 v. o.). Diese Gleichung ist in der Originalausgabe nicht besonders bezeichnet. — S. 74, Z. 8 v. o. (69, Z. 17 v. o.): α statt α_1. — S. 75, Z. 11 v. u. (71, Z. 4 v. o.): 45 statt 42. — S. 76, Z. 13, 9, 7 v. u. (72, Z. 3, 5, 7 v. o.): 90; 99; 99 statt 90, Zusatz; 97; 98. — S. 78, Z. 15 v. u. (74, Z. 2 v. o. : „sind" statt „ist". — S. 79, Z. 3, 8 v. o. (74, Z. 19, 13 v. u.): „α und β", „verbindende" statt „$\alpha + \beta$", „gemeinschaftliche". — S. 79, Z. 17—14

v. u. (75, Z. 5—7 v. o.): „entgegengesetzt ist, d. h. für die $E = [EE']E'$ war. Bezeichnen u. s. w." — S. 79, Z. 11 und 8, 7 v. u. (75, Z. 10 und 14 v. o.): „bezeichnet IA" und: „ist, d. h. so dass". — S. 79, Z. 6 v. u. und S. 80, Z. 5 v. o. (75, Z. 15 v. o., 17 v. u.): Diese Gleichungen sind in der Originalausgabe nicht besonders bezeichnet. — S. 80, Z. 8 v. o. (75, Z. 14 v. u.): „kleiner" statt „grösser". — S. 80, Z. 9 v. o. bis S. 81, Z. 11 v. o. (75, Z. 12 v. u. bis 76, Z. 14 v. o.). Im Original lautet diese Stelle wie folgt:

(75) „Es sei zuerst $[AB] = 0$, so müssen (nach 109) die Gebiete A und B ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben; sie mögen ein Gebiet γ-ter Stufe gemein haben, also γ einfache Faktoren, dann werden diese Faktoren, da IA nur diejenigen Faktoren enthält, welche in A nicht vorkommen, in IA fehlen, und aus gleichem Grunde auch in IB, also werden IA und IB von einem Gebiete von niederer als n-ter Stufe umfasst, somit (nach 109)

$$[IAIB] = 0,$$

also, da auch $[AB]$ null war und die Ergänzung einer Zahl (nach 89) dieser gleich, also die von null selbst null ist, so ist

$$I[AB] = [IAIB].$$

76 „Es sei zweitens $[AB]$ von null verschieden, so enthält dasselbe $\alpha + \beta$ verschiedene einfache Faktoren der Reihe $a_1 \ldots a_n$, es sei C das Produkt der übrigen, also $[ABC]$ (nach 57) dem Produkte $[a_1 \ldots a_n]$ entweder gleich oder entgegengesetzt, also da das letztere gleich 1 ist, so ist $[ABC] = \mp 1$. Da nun $[BC]$ das Produkt der in A nicht vorkommenden Faktoren ist, so ist nach der hier angenommenen Bezeichnung

$$IA = [ABC].[BC],$$

ebenso

$$IB = [BAC].[AC] \quad \text{und} \quad I[AB] = [ABC]C \ *.$$

Also, da $[ABC]$, $[BAC]$ Zahlen ($= \mp 1$) sind,

$$[IAIB] = [ABC][BAC][BC.AC]$$
$$= [ABC][BAC][BAC].C \qquad [107].$$

„Da nun $[BAC] = \mp 1$ ist, so ist $[BAC][BAC] = 1$. Also

$$[IAIB] = [ABC].C = I[AB] \qquad [*]."$$

S. 83, Z. 11 v. o., 14 v. u. (78, Z. 16, 1 v. u.): „von D", „darstellbar" statt „der D_r", „darstellen". — S. 84, Z. 8 v. u. (80, Z. 14 v. o.): „dasselbe" statt „dieselbe". — S. 85, Z. 17 v. o. (80, Z. 1 v. u.): 95 statt 96. — S. 85, Z. 7 v. u. bis S. 86, Z. 7 v. o. Diese Stelle steht in der Originalausgabe auf S. 98, Z. 4—16 v. o. — S. 86, Z. 18 v. o. (81, Z. 16 v. u.): „die also" statt „also die". — S. 87, Z. 16, 15, 15 v. u. (82, Z. 8, 7, 6 v. u.): E, E, „dem" statt G, G, „den". — S. 87, Z. 5 v. u. (83, Z. 4 v. o.): 114 statt 115. — S. 88, Z. 20, 12 v. u. (83, Z. 13, 5 v. u.): „kleiner als" und „nach Beweis 1" statt $\gtrless$ und „nach dem ersten Theile des Beweises". — S. 88, Z. 7 v. u. bis S. 89, Z. 14 v. u. In der Originalausgabe steht diese Stelle auf S. 183, Z. 2 v. o. bis 5 v. u. — S. 90, Z. 17, 18 und 20 v. o. (84, Z. 9 und 7 v. u.): „Faktoren, deren Stufenzahl nicht null ist, enthält, so ist" und: „A und B incidente Faktoren sind". — S. 90, Z. 14 v. u. (84, Z. 1 v. u.): „also" statt „aber". — S. 90, Z. 7 v. u. (85, Z. 8 v. o.): „Ein gemischtes Produkt dreier Grössen $[ABC]$ ist". — S. 91, Z. 4 v. o. (85, Z. 18 v. o.): 105 statt 103. — S. 91, Z. 10—12 und 13 v. o. (85, Z. 14, 13 und 12 v. u.): „Also ist das Produkt $[DC]$ dann und nur dann null (nach 109), wenn D und C ein System von höherer" und „System"

statt „Gebiet“. — S. 92, Z. 4 v. o. (86, Z. 17 v. u.): 121 statt 122. — S. 93, Z. 15, 17 v. o. (87, Z. 4, 2 v. u.): $\alpha+\beta+\gamma$ statt $q+r+s$. — S. 94, Z. 3 v. u. (89, Z. 17 v. u.) „System“ statt „Gebiet“. — S. 96, Z. 15, 16, 17 v. o. (91, Z. 2, 3, 4 v. o.): 58, 123, 58 statt 120, 124, 120. — S. 96, Z. 18 v. o. (91, Z. 5 v. o.): „folgt aus der letzten Kongruenz wieder die erste“. — S. 96, Z. 19, 2 v. u. (91, Z. 7 v. o., 17 v. u.): $[ABC]$, $[BA]$ statt $[BAC]$, $[BAC]$. — S. 97, Z. 3, 4 und 6 v. o. (91, Z. 13, 12 und 10 v. u.): „mit umgekehrter Ordnung in Klammern schliesst, d. h.“ und:

$$„\equiv [A_1 \,.\, A_n A_{n-1} \cdots A_2]“.$$

S. 97, Z. 16 v. o. (92, Z. 2 v. o.): 125 statt 119, 120. — S. 97, Z. 10, 9 v. u. (92, Z. 14 v. o.): „Ordnung in Klammern schliesst“. — S. 99, Z. 14 v. o. (94, Z. 6 v. o.): A_n statt A_9. — S. 99, Z. 19—14 v. u. (94, Z. 13—17 v. o.): „$m \gtreqless p$ sein. Aber dann ist (nach 90) die Stufenzahl von $[a_1 \ldots a_m]$ gleich $n-m$ und die von C gleich $n-p$, somit, da $n-m \gtreqless n-p$ ist, so ist die Stufenzahl des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, u. s. w.“. — S. 101, Z. 12, 8 v. u. (96, Z. 16, 11 v. u.): „Nun“, 127 statt „Dann“, 128. — S. 102, Z. 16 v. o. (97, Z. 14 v. o.): „kleiner“ statt „grösser“. — S. 102, Z. 19 und 20 v. o. (97, Z. 15 und 17 v. o.): „Projektion“ statt „Zurückleitung“. — S. 102, Z. 10 v. u. (97, Z. 12 v. u.): 98 statt 97. — S. 103, Z. 7 v. u. (99, Z. 2 v. o.): 77a statt 77. — S. 104, Z. 16—11 v. u. (99, Z. 10—6 v. u.): „Zusatz. Ist ins Besondere $A=\alpha_1 E_1+\alpha_2 E_2+\cdots$, so ist $[AF_r]=\alpha_r$, d. h. $[AF_1]=\alpha_1$, $[AF_2]=\alpha_2, \ldots$“. — S. 105, Z. 14 v. o. (100, Z. 17 v. u.): 76 statt 60. — S. 106, Z. 8 v. u. (101, Z. 10 v. u.): 79 statt 63. — S. 107, Z. 12 v. o. (102, Z. 13 v. o.).: 98 statt 89. — S. 109, Z. 10, 11 v. o. (104, Z. 12, 13 v. o.): „beziehlich mit $a_1, a_2, \ldots a_r$ multiplicirt; d. h. die n-te Gleichung ist aus u. s. w.“ — S. 111, Z. 9, 8 v. u. (106, Z. 6, 5 v. u.): E_0 und E_1 statt e_0 und $|e_1$. — S. 112, Z. 5, 6 v. o. (107, Z. 9, 11 v. o.): 1854; 1845 statt 1853; 1847.

S. 112, Z. 5 v. u. (107, Z. 2 v. u.): $\beta_n B_n$ statt $\beta_m B_m$. — S. 113, Z. 2 v. o. (108, Z. 5 v. o.): 100 statt 90. — S. 113, Z. 3 v. u. bis S. 114, Z. 2 v. o. (109, Z. 8—10 v. o.): „Die Klassenzahl ist dann also $\beta-\alpha$, im zweiten Falle $\alpha-\beta$, in beiden Fällen also der positiven Differenz von α und β gleich“. — S. 115, Z. 5 v. o. (110, Z. 12 v. o.): 144 statt 143. — S. 116, Z. 3, 4 v. o. (110, Z. 14, 13 v. u.): „$[E_1 G E_2 H]$ das Produkt aller n ursprünglichen Einheiten und gleich der u. s. w.“ — S. 116, Z. 19—17 v. u. (111, Z. 4, 5 v. o.): „Es sei $[EFG]$ das Produkt aller ursprünglichen Einheiten und gleich 1, so ist $|E=[FG]$, u. s. w.“ — S. 116, Z. 10 v. u. bis S. 118, Z. 5 v. o. In der Originalausgabe (S. 111, Z. 9 v. o. bis 8 v. u.) lautet diese Stelle so:

„**149.** *Wenn E, F, G Einheiten sind, und weder $[EF]$ noch $[EG]$ null ist, so ist entweder*

$$[EF|EG]=[F|G], \quad oder \quad [FE|GE]=[F|G],$$

ersteres, wenn F von höherer Stufe ist als G, letzteres, wenn G von höherer Stufe ist als F. Sind beide von gleicher Stufe, so sind beide Formeln gültig.

Beweis. 1. Wenn F und G nicht einander incident sind, so sind auch $[EF]$ und $[EG]$ nicht einander incident, also sind dann (nach 147) beide Seiten der zu erweisenden Gleichung null.

„2. Wenn G dem F untergeordnet ist, so sei $F=[GH]$. Dann ist

$$\begin{aligned}[EF|EG] &= [EGH|EG] = H && [148]\\ &= [GH|G] && [148]\\ &= [F|G].\end{aligned}$$

„3. Wenn F dem G untergeordnet ist, so sei $G = [HF]$. Dann ist

$$[FE\,GE] = [FE|HFE] = H \qquad [148]$$
$$= [F|HF] \qquad [148]$$
$$= [F|G].$$

„4. Wenn F und G von gleicher Stufe sind, also, bei Ausschluss des Falles in Beweis 1, zusammenfallen, so ist (nach 70) sowohl G dem F, als F dem G untergeordnet, und es gelten also nach Beweis 2 und 3 beide Formeln.“

S. 119, Z. 2 v. o. (112, Z. 10 v. u.): $\sqrt{-1}$ statt -1. — S. 119, Z. 4—2 v. u. (113, Z. 5, 4 v. u.): „übergeht, a_1 und b_1 von derselben Länge sind wie a und b und gegen einander senkrecht bleiben. Es bleiben u. s. w.“ — S. 120, Z. 14 v. o. (114, Z. 13 v. o.): $xb - ya$ statt $\mp(xb - ya)$. — S. 120, Z. 22 v. o. (114, Z. 20 v. o.):

$$[a_1|b_1] = [(xa + yb)|(xb - ya)] = xy(b^2 - a^2).$$

S. 123, Z. 4 v. u. (118, Z. 15 v. o.): „des“ statt „der“. — S. 124, Z. 19, 10 v. u. (119, Z. 7, 17 v. o.): „auf“, 159 statt „zu“, 161. — S. 125, Z. 5 v. u. (120, Z. 13 v. u.): 117 statt 141. — S. 126, Z. 15 v. o. (121, Z. 8 v. o.): „und zwar sowohl A als B jede“. — S. 127, Z. 16 v. u. (122, Z. 14 v. u.): 91 statt 89. — S. 129, Z. 1, 3 v. o. (124, Z. 6, 8 v. o.): „A auf B“, 145 statt „B auf A“, 169. — S. 129, Z. 18 v. o. (124, Z. 16 v. u.): 77b statt 77. — S. 129, Z. 17 v. u. bis S. 130, Z. 11 v. o. Diese Stelle lautet in der Originalausgabe (S. 124, Z. 10—5 v. u.) so:

„Aber $[A_1B_1|A_1C_r]$ ist, wenn A_1, B_1, C_r Einheiten höherer Stufe, d. h. kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten sind, (nach 149) gleich $[B_1\ C_r]$. Dasselbe findet aber (nach 168) noch statt, wenn jene Grössen kombinatorische Produkte der Grössen eines einfachen Normalsystems sind, also in unserm Falle. Somit wird“ u. s. w. —

S. 131, Z. 1 v. o. bis 4 v. u. (125, Z. 17—10 v. u.). In der Originalausgabe lautet die Stelle so:

„Beweis 1. Es seien die einfachen Faktoren von $[AB]$ alle zu einander normal. Da A von gleicher Stufe mit A ist, so ist es aus den multiplikativen Kombinationen $A, A_1, \ldots$ numerisch ableitbar. Es sei $\mathsf{A} = \alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots$, so ist

$$[AB|\mathsf{AB}] = [AB|(\alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots)\mathsf{B}]$$
$$= \alpha[AB|A\mathsf{B}] + \alpha_1[AB|A_1\mathsf{B}] + \cdots.\text{“}$$

S. 131, Z. 1 v. u. (S. 125, Z. 7 v. u.): In der Originalausgabe fehlt das Glied: $\alpha_q[AB|A_q\mathsf{B}]$. — S. 132, Z. 5, 7, 11 v. o. (125, Z. 1 v. u., 126, Z. 1, 6 v. o.): In der Originalausgabe fehlen die Glieder:

$$\alpha_q A_q^2[B_q|\mathsf{B}], \quad \alpha_t A_t, \quad [A_q|\mathsf{A}][B_q|\mathsf{B}]. \text{ —}$$

S. 132, Z. 8 v. o. (126, Z. 2 v. o.): „weil A_r mit den zu ihm normalen Grössen $A, A_1, \ldots$“ u. s. w. — S. 133, Z. 14, 15 v. o. (127, Z. 12 v. o.): „deren Summe ungeändert bleibt“. — S. 133, Z. 15 v. u. (127, Z. 13 v. u.): „Faktorreihe, also auch für $a, b, \ldots$ d. h.“ u. s. w. — S. 136, Z. 8 v. u. (130, Z. 2 v. u.): $-[a|b'][a'|b]$ statt $-[a|b'][b|a']$. — S. 136, Z. 4 v. u. (131, Z. 3 v. o.): $[abcd]^2$ statt $[abcd]^{\frac{2}{.}}$. — S. 137, Z. 16 v. o. (131, Z. 14 v. u.): „irgend einer (m-ten)“. — S. 139, Z. 12 v. u. (134, Z. 4 v. o.): 98 statt 100. — S. 141, Z. 5, 4 v. u. (136, Z. 13, 14 v. o.): $\Sigma\beta_r\alpha_r$ statt $\Sigma\beta_s\alpha_s$. — S. 142, Z. 1 v. o. (136, Z. 18 v. o.): 188 statt 152. — S. 143, Z. 2, 3 v. o. (137, Z. 12 v. u.): „sin($abc\ldots$) den Ausdruck, welcher numerisch“. — S. 143, Z. 3—1 v. u. (138, Z. 17—19 v. o.): „so ist das äussere Produkt derselben, abgesehen vom $\mp$ Zeichen, gleich dem Produkte der numerischen Werthe

in den sinus des Zwischenwinkels". — S. 145, Z. 8—6 v. u. (140, Z. 13, 14 v. o.): „Beweis. Die Formel geht aus 202 hervor, wenn man $\angle lk = 90^0$ setzt." — S. 146, Z. 4 v. u. (141, Z. 13 v. o.): „dargestellt ist" statt „dargestellte". — S. 147, Z. 3, 4 v. o. (141, Z. 16, 15 v. u.). Die Formel lautet in der Originalausgabe so:

206. $\sin \angle AB . \sin \angle \mathsf{AB} . \cos (\angle AB . \mathsf{AB}) = \Sigma \cos \angle A_r \mathsf{A} . \cos \angle B_r \mathsf{B}$.

S. 147 (141, 142). In den Nrn. 208—211, 213, 215 steht mehrfach $\cos ac$, $\cos bc, \ldots$ statt $\cos \angle ac$, $\cos \angle bc, \ldots$ und $\sin (ab)$ statt $\sin \angle ab$. — S. 147, Z. 9, 8 v. u. (142, Z. 4, 5 v. o.) „Ergänzungen" und: „$\sin ac . \sin bd . \cos (\angle ab . cd)$" statt „ergänzende Kombinationen" und: „$\sin \angle ac . \sin \angle db . \cos \angle (ac . db)$. — In der Originalausgabe folgt hinter Nr. 213 noch die Anmerkung:

„Anm. Ebenso würden sich die übrigen Formeln aus § 3 haben umgestalten (142) lassen, wenn man noch

$$\frac{[abc|d]}{\alpha\beta\gamma\delta} = \cos \angle abcd$$

gesetzt hätte u. s. w."

Wir haben im Texte diese Anmerkung weggelassen, da nicht einzusehen ist, was Grassmann eigentlich damit gemeint hat.

S. 148, Z. 1 v. u. bis S. 149, Z. 1 v. o. (143, Z. 13, 14 v. o.): „durch die Sätze in § 1 die Geltung". — S. 149, Z. 8 v. o. (143, Z. 20, 21 v. o.): „die senkrechten Projektionen (normalen Zurückleitungen) von EA". — S. 149, Z. 11, 18 v. o. (143, Z. 16, 8 v. u.): „Lehrsatz" statt „Lehnsatz". — S. 150, Z. 8 v. o. (144, Z. 15 v. u.): „von den" statt „für die". — S. 150, Z. 15, 8 v. u. (144, Z. 8 v. u., 145, Z. 1 v. o.): 119, 118 statt 219, 218. — S. 152, Z. 3 v. o. (146, Z. 16 v. o.). Diese Gleichung ist in der Originalausgabe nicht besonders bezeichnet. — S. 152, Z. 15 v. u. (147, Z. 3 v. o.): 218 statt 216. — S. 153, Z. 15 v. u. (148, Z. 5 v. o.): 222b statt 222(*). — S. 155, Z. 10 v. u. (150, Z. 20 v. u.): „einer" statt „der". — S. 162, Z. 4—8 v. o. (157, Z. 3—7 v. o.): „unendlich entfernt, so ist (in 231) gezeigt, dass dann a, b, c drei Einer Ebene parallele Strecken sind, d. h. (nach 228) dass a, b, c unendlich entfernte Punkte sind, die in Einer unendlich entfernten Ebene liegen". — S. 162, Z. 15, 16, 21 v. o. (157, Z. 13, 14, 19, 20 v. o.): $\varepsilon = -\delta$, $\delta(D-E)$, $D-A$ statt $\delta = -\varepsilon$, $\varepsilon(E-D)$, $A-D$. — S. 163, Z. 15 v. o. (158, Z. 14 v. o.): $D-A$ statt $A-D$. — S. 165, Z. 13 v. o., 1 v. u. (160, Z. 16, 1 v. u.): „Lehrsatz", „den" statt „Lehnsatz", „dem". — S. 166, Z. 6 v. o. (161, Z. 17 v. u.): 221 statt 216. — S. 167, Z. 3 v. o., 23, 22, 16 v. u. (162, Z. 16, 1 v. u., 163, Z. 1, 7 v. o.): 221, „Umwandlung" statt 230a, „Aenderung". — S. 169, Z. 11, 10 und 5, 4 v. u. (165, Z. 23, 22 und 17, 16 v. u.): „ab und ab' gleichbezeichnet und in derselben Ebene liegend", „durch mehrmalige Anwendung einer einfachen linearen Aenderung, d. h.". — S. 170, Z. 12 v. u. (166, Z. 20 v. u.): „da auch $\alpha b = b'$ gesetzt war". — S. 171, Z. 4 v. o. (166, Z. 5 v. u.): 244 statt 254. — S. 173, Z. 12 v. o. (169, Z. 2 v. o.): 46 statt 40. — S. 174, Z. 21—18 und 9 v. u. (170, Z. 7—10 und 21 v. o.): „also auch mit AB parallel, und folglich auch mit der Ebene ABC ist, so sind (nach 244) die Spate $ABCD$ und $ABCE$ gleich und gleichbezeichnet, d. h. die Spate abc und abc', d. h. der Spat abc bleibt" und: „gleichbezeichnet. Also da nach dem Obigen". — S. 175, Z. 6 v. o. (170, Z. 3 v. u.): „Also" statt „Dann sind". — S. 175, Z. 2 v. u. (171, Z. 9 v. u.): 79 statt 80. — S. 176, Z. 15, 14 und 9 v. u. (172, Z. 22, 21 und 16 v. u.):

$$„= [ABC\alpha D] \quad [67]$$
$$= \alpha[ABCD] \quad [40]“.$$

und: „das Spat", wofür noch einige Male, der sonstigen Schreibweise Grassmanns

entsprechend, „der Spat" gesetzt ist. — S. 179, Z. 15, 4 v. u. (175, Z. 15, 3 v. u.): 221, 251 statt 216, 257. — S. 179, Z. 1 v. u. bis S. 180, Z. 2 v. o. (176, Z. 2—6 v. o.): „zweiter und dritter Stufe. Da ferner alle Punkte der Ebene sich aus dreien, aber nicht aus weniger Punkten derselben numerisch ableiten lassen (233), so ist (nach 14) die Ebene ein Gebiet dritter Stufe, und ebenso (nach 232 und 14) der Raum ein Gebiet vierter Stufe. Nach 88 u. s. w.". — S. 180, Z. 6 v. u. (177, Z. 1 v. o.): $\alpha[Bp]$ statt $[\alpha B \,.\, p]$. — S. 181, Z. 1, 2 v. o. (177, Z. 7 v. o): „dessen Länge $(p+q)$ die Summe aus den Längen". — S. 181, Z. 23 v. u. (177, Z. 13, 12 v. u.): „gleichbezeichnet dem eines Parallelogrammes $ABCD$ ist". Diese, der Nr. 239 widersprechende, Bezeichnung des Parallelogramms findet sich noch einige Male und ist jedesmal verbessert. — S. 181, Z. 3 v. u. (178, Z. 7 v. o.): $[CD]$ statt $[DC]$. — S. 182, Z. 2, 5, 7 v. o. (178, Z. 13, 16, 17 v. o.): „sei", $[DC]$, $[CD]$ statt „ist", $[CD]$, $[DC]$. — S. 183, Z. 9, 18 v. o. (179, Z. 12, 2 v. u.): „wo A ein Produkt, b und c" und: „welche von diesen letzteren im Verhältnisse". — S. 183, Z. 13, 10, 5 v. u. (180, Z. 9, 12, 17 v. o.): „ausserhalb der beiden Ebenen der Summanden"; 277 statt 280: „Prisma's" statt „Spates". — S. 185, Z. 18 und 9—7 v. u. (182, Z. 11 und 20 v. o.): „Ersteres giebt (nach 222 und 258) einen Linientheil" und: $[SS]=[ABAB]=0$ [60]". — S. 186, Z. 20, 12, 7 v. u. (184, Z. 10, 20, 24 v. o.): 104; 221; 104 statt 103; 230a; 103. — S. 187, Z. 7 v. o., 13, 9, 4 v. u. (184, Z. 4 v. u., 185, Z. 21, 16, 11 v. u.): 255; 287; (s. o.); 287 statt 257; 119c; (nach 289); 119c. — S. 188, Z. 3 v. o. (185, Z. 4 v. u.): 104 statt 103. — S. 189, Z. 19 v. o. (187, Z. 18 v. o.): 287 statt 119c. — S. 190, Z. 9 v. u. (188, Z. 4 v. u.): „Ausdehnungen" statt „Ausweichungen". — S. 191, Z. 10—14 v. o. (189, Z. 16—18 v. o.): „Die Gleichung einer geraden Linie X, die mit den geraden Linien A und B durch denselben Punkt geht, ist $[XAB]=0$". — S. 191, Z. 15 v. o., 14 v. u. (189, Z. 18, 7 v. u.): 301; „drückt" statt 295; „sagt". — S. 192, Z. 8 v. o. (190, Z. 18 v. u.): „nicht identisch $=0$ ist". — S. 194, Z. 9 v. o., 13 v. u. (192, Z. 9 v. u., 193, Z. 11 v. o.): 119a statt 119. — S. 196, Z. 7, 3 v. u. (195, Z. 14, 19 v. o.): „heisset", „Punkte p" statt „heisse", „Punkte a". — S. 197, Z. 8—11 v. o. (195, Z. 10—8 v. u.): „in der Form

$$[xeDc_1Bax]=0 \qquad [104]$$

schreibt. Wird $x\equiv c$, so wird $[ca(cd)]\equiv[cad]c$, und dies". — S. 197, Z. 13—18 v. o. (195, Z. 5—1 v. u.): fünfmal ce statt ec, zweimal bc statt (bc). — S. 197, Z. 18, 14, 1 v. u. (196, Z. 2, 6, 20 v. o.): 104; 123; „ihr" statt 103; 316; „der Gleichung". — S. 198, Z. 1 v. o. (196, Z. 16 v. u.): „liegt" statt „liege". — S. 199, Z. 9 v. o. (197, Z. 15 v. o.): „können" statt „kann". — S. 201, Z. 2 v. o. (199, Z. 1 v. o.): $[dc]\equiv C$ statt $[dc]=C$. — S. 201, Z. 10 v. u. (199, Z. 16 v. u.): dreimal C statt $[cd]$. — S. 202, Z. 9 v. o. (199, Z. 1 v. u.): „dann" statt „ferner". — S. 203, Z. 7, 5 v. u. (201, Z. 15, 17 v. o.): 323; 324 statt 325; 326. — S. 204, Z. 5, 10 v. o. (201, Z. 13, 7 v. u.): * und *** statt ** und ****. — S. 204, Z. 15, 10 v. u. (202, Z. 6, 11 v. o.): 325 statt 327. — S. 205, Z. 16, 15 v. u. (203, Z. 10, 11 v. o.): 1; —1 statt —1; +1. — S. 207, Z. 13, 15 v. o. (205, Z. 13, 15 v. o.): „Grades liefert von der Form"; „und welche bei jeder". — S. 208, Z. 7 v. u. (206, Z. 10 v. u.): 101 statt 90. — S. 209, Z. 5, 8, 11f. v. o. (207, Z. 3, 6, 10 v. o.): „d. h." statt „also wirklich"; „d. h. (nach 254)"; „parallel ist, also $[a\,|\,b]$ gleich null, also a zu b normal ist. Der Begriff". — S. 209, Z. 14 v. u. (207, Z. 18 v. u.): „Beweis 1" statt „Beweis 2 und 3". — S. 211, Z. 10, 11 v. o. (209, Z. 19, 18 v. u.): „von der Länge n bilden". — S. 211, Z. 15, 13 v. u. (209, Z. 3, 1 v. u.): 86; 137 statt 70; 167. — S. 211, Z. 12, 11 v. u. (210, Z. 1 v. o.): $\alpha[abc]$ statt $\alpha\sqrt{[abc]}$; „aber"

statt „ferner". — S. 212, Z. 7, 8 v. o. (210, Z. 19, 18 v. u.): A statt a. — S. 213, Z. 20, 13, 3 v. u. (211, Z. 15, 8 v. u., 212, Z. 3 v. o.): 99 statt 97; „einen vierten endlich"; c statt $[cd]$. — S. 214, Z. 9—14 v. o. (212, Z. 14—16 v. o.): „Sie liefert hier, wie oben (164) angedeutet wurde, die senkrechte Projektion, was ich hier jedoch nicht weiter darlegen will. Ueberhaupt werde ich". — S. 216, Z. 16 v. o. (214, Z. 16 v. u.): 338 statt 193. — S. 217, Z. 2, 7, 17 v. o. (215, Z. 5, 11f., 23 v. o.): „konstanten"; „dieser Strecke"; „so ist" statt „festen"; „dieses Abstandes"; „es wird daher". — S. 218, Z. 6, 5; 3; 1 v. u. (217, Z. 6; 8; 10f. v. o.): „einen Flächenraum an, dessen numerischer Werth 1 ist, und welcher"; „dieses Flächenraums"; „Diese Flächenräume, aufgefasst als Theile der betreffenden Ebenen, d. h. als Grössen dritter Stufe". — S. 219, Z. 4f. v. o. (217, Z. 16f. v. o.): „Punkt x geht, also gleich A' mal der Höhe, oder da A' numerisch gleich 1 ist, gleich der Höhe". — S. 219, Z. 13 v. o. (217, Z. 13 v. u.): „und R numerisch gleich 1, ϱ aber". — S. 219, Z. 25—20 v. u. (217, Z. 7—2 v. u.): „Flächentheile A', B', ... annimmt, welche numerisch gleich 1 sind und mit Punkten, die auf der ... Seite ... positives Produkt ..., und ϱ der numerische Werth dieses Flächentheiles. Sollte jedoch". — S. 219, Z. 19, 18 v. u. (218, Z. 1 v. o.): ϱR; $[\varrho Rx]$ statt $[Rx]$; $\varrho[Rx]$. —

S. 220, Z. 3f. und 11f. v. o. (218, Z. 16, 15 und 7 v. u.): „festen Kreisen, deren Mittelpunkte" und: „$\varphi\sigma$ oder um $(\alpha+\beta+\cdots)\varphi$". — S. 221, Z. 1 v. o. (219, Z. 16 v. u.): „die konstante Grösse". — S. 221, Z. 18, 16, 15 v. u. (220, Z. 6, 8, 9 v. o.): ϱ; „auf"; „liegen" statt φ; „nach"; „gerichtet sind". — S. 222, Z. 18 und 17, 16 v. u. (221, Z. 6 und 8 v. o.): „senkrecht stehen soll. Da a' ein Punkt" und: „also soll der Fächenraum auf b senkrecht". — S. 222, Z. 15 v. u. (221, Z. 9 v. o.): „333) $[(db+c)\ b]=0$, oder". — S. 223, Z. 8—10 v. o. (221, Z. 6, 5 v. u.): „dreier Strecken, so ist $|b$ ein Produkt zweier Strecken, also $[|b\,.\,U]=0$ u. s. w." — S. 223, Z. 1 v. u. (222, Z. 1 v. u.): 122 statt 121.

S. 224, Z. 10 v. u. (223, Z. 4, 3 v. u.): „wenn auch ausser den ursprünglichen Variabeln noch der Werth". — S. 226, Z. 9 v. o. (225, Z. 14 v. u.): Im Original fehlt: $y=y_1e_1+\cdots+y_me_m$. — S. 227, Z. 7f., 15f. v. o. (226, Z. 15, 7, 6 v. u.): „und diejenigen, aus welchen sich die abhängigen Variabeln"; „indem man hierin die obigen Werthe". — S. 233, Z. 11 v. u. (233, Z. 20 v. u.): „Bedingungsgleichungen" statt „Bestimmungsgleichungen" und so noch mehrmals. — S. 236, Z. 7f., 13 v. o. (236, Z. 4f., 11f. v. o.): „Jede aus ihnen ableitbare Gleichung"; „alle Glieder einer solchen abgeleiteten Gleichung". — S. 239, Z. 14—18 v. o. (239, Z. 4 —1 v. u.): „Erklärung. Unter dem algebraischen Quotienten $A:B$ verstehe ich denjenigen Ausdruck, welcher mit B algebraisch multiplicirt A giebt, d. h. $(A:B)\,.\,B=A$". — S. 240, Z. 16 v. o. (241, Z. 4 v. o.): „die" statt „und". — S. 241, Z. 13f. v. o. (242, Z. 7 v. o.): „austauschen. Ich werde deshalb auch die Zähler". — S. 243, Z. 10, 14 v. o. (244, Z. 19, 15 v. u.): 177; $F_{\mathfrak{rb}}$ statt 377; $E_{\mathfrak{rb}}$. — S. 244, Z. 1, 5 v. o. (245, Z. 9, 14 v. o.): „sie"; 153 statt „beide Ausdrücke"; 350. — S. 245, Z. 3, 19 v. o. (246, Z. 24, 7 v. u.): 360; 60 statt 362; 55. — S. 245 Z. 18 und 11 v. u. (247, Z. 6 und 12 v. o.): „$=[ab\ldots][AB\ldots]$" und: „$E_1[AB\ldots]=A_1$, $E_2[AB\ldots]=A_2$, ...". Die Umstellung ist vorgenommen worden, weil Grassmann in A_2 sonst immer Qe_1 schreibt, wenn Q ein Quotient ist, und weil er selbst nachher schreibt: $[A'''][ab\ldots]$. — S. 246, Z. 4 v. u. (248, Z. 10 v. o.): 380 statt 378. — S. 248, Z. 12, 2, 1 v. u. (250, Z. 3, 13, 15 v. o.): 380; pQ; pQ statt 378; Qp; Qp. — S. 250, Z. 14—16 und 20 v. o. (251, Z. 9—7 und 3 v. u.): „ableitbar sind; dann aber lässt sich der Bruch $\varrho - Q$, dessen zu den Nennern $e_1, \ldots e_n$ gehörigen Zähler (nach a) $c_1, \ldots c_n$ sind, (nach 386) auf," und: „sei" statt „ist". —

S. 250, Z. 4 v. u. (252, Z. 18 v. o.): „diese" statt „solche". — S. 251, Z. 6 v. u. (253, Z. 17 v. u.): 389 statt 388. — S. 252, Z. 6—8, 10 v. o. (253, Z. 5, 3 v. u.): „eingesetzt werden; dann wird $c_1 = (\varrho - Q)a_1 = \varrho a_1 - Qa_1$" u. s. w.; „Gleichung (a) verwandelt sich in". — S. 252, Z. 12—10 v. u. (254, Z. 14—17 v. o.): „genügen, so ist aus der Theorie ... bekannt, dass, wenn man ... darbieten müsse, d. h. es muss noch". — S. 252, Z. 3 v. u. (254, Z. 15 v. u.): „ist. Diese Gleichung g sagt aus". — S. 253, Z. 8—17 v. o. (254, Z. 3—1 v. u.): „in die Gleichungen (c) und (d) eingesetzt werden, so dass also nun $c_{r+1} = (\varrho - Q)a_{r+1}$ gesetzt werden kann. Ferner ist dann". — S. 253, Z. 14, 12, 9, 4 v. u. (255, Z. 10, 12, 16, 22 v. o.): c_{r+1}; c_{r+1}; (c); „und zwar" statt c'_{r+1}; c'_{r+1}; (c'); „etwa". — S. 254, Z. 5 v. u. (256, Z. 20 v. u.): „die obige Gleichung". — S. 257, Z. 6f., 16—18, 21—24 v. o. (259, Z. 6f., 17f., 21f. v. o.): „welche durch jene Quotienten ... können, vier Punkte dar, von denen keine drei in einer Ebene liegen, und welche mit den ihnen"; „entsprechen. Ferner die Gleichheit durch die Annahme"; „sein sollen (d. h. entweder $= 1$, oder $= -1$, oder $= \cos a + i \sin a$), die Kongruenz verwandelt sich". — S. 258, Z. 10, 21 v. o. (260, Z. 9f., 22 v. o.): „Wir setzen der Kürze wegen $Qc_r = k_r$, so zeige ich zunächst, dass"; 25 statt 26. — S. 259, Z. 20—3 v. u. (261, Z. 16 v. u. bis 262, Z. 6 v. o.): In der Originalausgabe lautet diese Stelle so:

„Es zeigt sich nun, dass ein solcher Verein bei circulärer Aenderung der darin vorkommenden Grössen wiederum ein solcher Verein bleibt, und zwar so, dass die Anzahl der reellen unter den n Grössen in dem einen Verein eben so gross ist wie in dem andern. Hierbei will ich unter circulärer Aenderung zweier Grössen a_1 und a_2, wenn beide reell, oder beide einfach imaginär sind, den Uebergang derselben in zwei andere Grössen b_1 und b_2 verstehen, von denen

(h) $$b_1 = xa_1 + ya_2, \quad b_2 = xa_2 - ya_1$$

ist, während x und y beide reell sind, und die Summe ihrer Quadrate eins ist, also $x^2 + y^2 = 1$. Hingegen wenn von den beiden Grössen a_1 und a_2 die eine reell, die andere imaginär ist, so soll

262 $$b_1 = xa_1 + yia_2, \quad b_2 = xa_2 - yia_2$$

sein, wo $i = \sqrt{-1}$, x und y beide reell sind, und $x^2 - y^2$, d. h. $x^2 + (yi)^2 = 1$ ist, oder anders ausgedrückt, die Gleichungen (h) stellen jede circuläre Aenderung von a_1 und a_2 dar, wenn" u. s. w. — S. 261, Z. 5 v. u. (264, Z. 11f. v. o.): $(\alpha_1 \alpha_2)^2 < (\beta_1 \beta_2)^2$ und $\alpha_1 \alpha_2 < \beta_1 \beta_2$. — S. 262, Z. 10—5 v. u. (265, Z. 5—10 v. o.): „so werden also die zugehörigen Zähler $\varrho_1 r_1$, $\varrho_2 r_2$, ... $\varrho_n r_n$, und die Zähler ... Potenzwerth des Bruches $\varrho - Q$ ist (nach 383) gleich dem ... seiner Nenner, also gleich ...". — S. 264, Z. 20f., 26f. v. o. (267, Z. 8f., 15 v. o.): „n-ten" statt „m-ten"; „in der Ebene, und sind f_1, f_2, f_3, f_4" u. s. w. — S. 267, Z. 3 und 11 v. o. (270, Z. 5 und 11 v. o.): „lineären Abstandes" und „Abstandes" statt „Doppelabstandes". — S. 267, Z. 4 v. u. (270, Z. 1 v. u., 271, Z. 1 v. o.): „Kreisumfänge" statt „Ebene". — S. 268, Z. 24, 22, 19, 16 v. u. (271, Z. 16, 14, 11, 7 v. u.): „Linien"; β; 392; „Definition" statt „Linie"; β_s; 22; „Erklärung". — S. 269, Z. 2, 20 v. o. (272, Z. 13 v. o., 7 v. u.): $r\,]\overline{-1}$; „dem" statt $s\,]\overline{-1}$; „einem". — S. 269, Z. 15—12, 3 v. u. (273, Z. 3—5, 12 v. o.): „dass er aus den n Mittelpunkten durch die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ numerisch ableitbar ist. Dann ist $\Sigma\alpha_a \,|\, a_a = 0$ und das zweite Glied fällt weg. Dann wird"; „den Radius (β) desselben erhält man". — S. 270, Z. 8 v. u. (274, Z. 15 v. o.): 400 statt 401. — S. 272, Z. 5, 8 v. o. (275, Z. 5, 1 v. u.): 400; 46 statt 401; 45. — S. 273, Z. 7 v. o. (277, Z. 3f. v. o.): „des andern, mit Ausnahme eines für alle". — S. 274, Z. 17 v. o. (278, Z. 16 v. o.): „d. h. q ist mit

Ausnahme eines konstanten Faktors λ genau". — S. 277, Z. 7 v. u. (282, Z. 12 v. o.): „Setzen wir dann $\frac{a}{b} = \mu^2$, so entsprechen sich". — S. 278, Z. 18 v. u. (283, Z. 1 v. o.): „ist" statt „lautet". — S. 279, Z. 19, 7, 2 v. u. (284, Z. 12, 21, 27 v. o.): „Kreises"; „die des"; „den unendlich" statt „Hauptkreises"; „der des"; „der unendlich". — S. 281, Z. 1 v. u. (286, Z. 4 v. u.): nach 413 Anm. — S. 283, Z. 2f. v. o. (287, Z. 2 v. u.): „grösser als Null, also auch die linke, d. h.". — S. 283, Z. 13 v. u. bis S. 284, Z. 14 v. u. Diese Stelle steht in der Originalausgabe auf S. 310, Z. 5 v. u. bis S. 311, Z. 13 v. u. — S. 284, Z. 20, 27 v. o. (311, Z. 16, 23 v. o.): $<$ statt $\overline{<}$. — S. 284 (288): Hier schreibt Grassmann $f(q)$, während er im Folgenden fast immer bei Funktionszeichen die Klammer weglässt; wir haben überall die Klammer setzen lassen. — S. 284, Z. 4 v. u. (288, Z. 6, 5 v. u.): „und könnte dennoch $f(q)$". — S. 287, Z. 11f. v. o. (291, Z. 13 v. u.): „für jedes endliche a die Differenz". — S. 288, Z. 4 v. u. (293, Z. 20 v. o.): „beifüge" statt „beifügte".

S. 291, Z. 17, 16 v. u. (296, Z. 10, 11 v. o.): dy; dz statt $d_x y$; $d_x z$. — S. 294, Z. 10, 13—18 v. o. (299, Z. 4, 7—9 v. o.): „q eine reelle Zahl"; „null wird. Wenden wir dies auf $d_y f(x)$ an, und setzen, da in $\varphi(x + q dx)$ das dx willkürlich war, dafür das obige dz, so erhalten wir". — S. 294, Z. 19, 14 v. u. (299, Z. 10, 14 v. o.): $+N_2$ statt $-N_2$. — S. 295, Z. 3, 2 v. u. (300, Z. 4, 3 v. u.): „also da (nach Hyp.) $d_x f(x)$ also auch $\frac{d_x f(x)}{dx}$ (wenn $dx \gtrless 0$ ist) stetig ist, so ist auch". — S. 296, Z. 1 v. o. (300, Z. 3, 2 v. u.): $q = 0$; 427 statt $q' = 0$; 425. — S. 296, Z. 13, 20 v. o., 11 v. u. (301, Z. 10, 16 v. o., 12 v. u.): „im Satze"; „Nun sind nach Bew. 1 die Grössen"; „und $f'(x)$ ist als derjenige" statt „in jenem Satze"; „Nach Beweis 1 . . . aber die Grössen"; „Damit ist $f'(x)$ als derjenige". — S. 297, Z. 2, 3, 8, 10 v. o. (302, Z. 2, 4, 11f. v. o.): „reelle"; $zf'x$; $dx.f'x$ statt „positive"; $f'(x)z$; $f'(x)dx$. — S. 298, Z. 6 v. o. (303, Z. 10 v. o.): $[f'(x)]^n$ statt $[f'(x)^n]$ und entsprechend im Folgenden. — S. 299, Z. 13 v. o. (304, Z. 10 v. u.): 429 statt 440. — S. 300, Z. 15 v. o. (305, Z. 3 v. u): 435 statt 436, 428. — S. 301, Z. 16, 14—12 v. u. (307, Z. 1, 3f. v. o.): 448 statt 444; „da nach der Annahme der Beweis für den angenommenen Werth m gilt; da nun (nach 443)". — S. 303, Z. 2, 1 v. u. (309, Z. 15, 14 v. u.): „positive Zahl < 1 von der Art, dass für jeden Index r, $u_r : t^r$, was wir mit a_r". — S. 305, Z. 7, 4 v. u. (312, Z. 14, 17 v. o.): 458; „Vergleichung" statt 419c; „Vergleichungen". — S. 306, Z. 7—10 v. o. (312, Z. 9—7 v. u.): „Der nach der Zahlgrösse x genommene Differenzialquotient . . . ist wieder eine ächte Reihe. — S. 306, Z. 8 v. u. (313, Z. 6 v. o.): 459 statt 419c. — S. 308, Z. 3, 5, 9, 13 v. o. (314, Z. 24, 22, 18, 14 v. u.): $< M$; 458; 360; „kleiner als" statt num. $< M$; 419c; 460; „gleich". — S. 308, Z. 15—17 v. o. (314, Z. 11—9 v. u.): „müssen. Und es kommt darauf an, ob diese . . . in einer ächten Reihe entwickeln lasse". Diese Ausdrucksweise „in einer Reihe entwickeln" kommt noch mehrmals vor. — S. 309ff. (S. 315ff.): In der Originalausgabe ist das C in dem Zeichen $C[f(x)]$ nicht durch den Druck ausgezeichnet; es schien aber eine schärfere Hervorhebung für das Auge wünschenswerth. — S. 317, Z. 6, 5 v. u. (324, Z. 5 v. o.): „so erhält man". — S. 319, Z. 13, 17 v. o. (325, Z. 5, 2 v. u.): 458; 462 statt 419c; 468. — S. 319, Z. 12 v. u. (326, Z. 6f. v. o.): „da er noch numerisch kleiner". —

S. 322, Z. 4, 6 v. o. (328, Z. 12, 10 v. u.): „verschwindet" statt „null wird". — S. 322, Z. 14, 13 v. u. (329, Z. 12f. v, o.): „streitet; es müsste also $f'(t)$ dauernd negativ sein; allein dann wäre $f(t_1) < f(t_2)$ (nach 471), was gleichfalls" u. s. w. — S. 325, Z. 20, 16 v. u. (332, Z. 15, 17 v. o.): „**Zusatz.** Es ist"; „Wenn $f(0) = 0$

ist, so ist für jedes t, was zwischen". — S. 326, Z. 7 v. u. (333, Z. 14 v. u.): 440 statt 435. – S. 327, Z. 13 v. o. (334, Z. 3 v. o.): „verschwindende" statt „null werdende". — S. 327, Z. 5, 4, 3 v. u. (334, Z. 14, 13, 12 v. u.): $f_a(x)$ statt $f_a(et)$. — S. 328, Z. 17 v. o. (335, Z. 8 v. o.): 433, 431c statt: 433. — S. 328, Z. 17 v. u. bis S. 330, Z. 14 v. o. (335, Z. 11—21 v. o.): Die Anmerkung lautet in der Originalausgabe folgendermassen:

„Anm. Es versteht sich von selbst, dass, wenn eine der Grössen a oder x (also auch dx) eine Zahlgrösse ist, die zugehörige Lücke wegfällt und daher die Unterscheidung der Lücken überflüssig wird; ebenso wenn die beiden Lücken vertauschbar sind, d. h. wenn stets dasselbe Resultat hervorgeht, sobald von zwei beliebigen Grössen (hier a und dx) die eine in die erste, die andere in die zweite Lücke eintritt, oder umgekehrt jene in die zweite, diese in die erste. Noch bemerke ich nachträglich, dass in dem ganzen vorhergehenden Abschnitte überall, wo von einem Lückenausdrucke mit n Lücken die Rede ist, ohne dass eine nähere Bestimmung hinzugefügt ist, stets die n Lücken als vertauschbar gesetzt sind."

S. 330, Z. 20 v. o. (335, Z. 6 v. u.) „verschwindende" statt „null werdende". Dieselbe Aenderung ist S. 330, Z. 24 v. o. (335, Z. 2 v. u.) anzubringen. — S. 330, Z. 11, 10 v. u. (336, Z. 2, 3 v. o.): „also auch das ihnen gleiche $f'(x)$." statt „also gilt dasselbe ... gleich $F''(x)$ ist". — S. 331, Z. 9—13 v. o. (336, Z. 12—15 v. o.): „Da y und t von einander unabhängig sind, so ist, wenn d_y und d_t die auf den Verein dieser beiden Variabeln bezüglichen Differenziale sind, (nach 437)" statt „Da y und t von ... sind, (nach 442)". — S. 331, Z. 1 v. u. bis S. 332, Z. 1 v. o. (336, Z. 9—7 v. u.): „Hier sind y und t Funktionen von x (nämlich $t = \sqrt{x^2}$, $y = x : \sqrt{x^2}$), also ist $F(y, t)$ auch als Funktion von x zu fassen und sei als solche mit $F(x)$ bezeichnet; so haben wir also in jedem Falle" statt „Bezeichnen wir endlich ... in jedem Falle". — S. 332, Z. 4 v. o. (336, Z. 4, 3 v. u.): „verschwindende" statt „null werdende". — S. 332, Z. 10 v. o. (337, Z. 4 v. o.): „verschwindet" statt „null wird". — S. 333, Z. 13, 5 v. u. (338, Z. 13, 20 v. o.): 487; „was wir" statt 477; „das wir". — S. 335, Z. 19 v. u. (340, Z. 15 v. o.): „das Differenzial" statt „den Differenzialquotienten". — S. 336, Z. 11 v. u. (341, Z. 10 v. u.): 484 statt 432, 433. — S. 336, Z. 5—1 v. u. (341, Z. 4 v. u. bis 342, Z. 2 v. o.): „ist, und man überall mit δ den allgemeinen Differenzialquotienten nach t (auch x als von t abhängig gedacht), hingegen unter ... die letztere eine Zahlgrösse darstellt, bezeichnet: so ist" statt „ist, und man überall ... darstellt, so ist". — S. 338, Z. 16, 14 und 11, 10 v. u. (343, Z. 10, 8 und 5, 4 v. u.): $n!$; „Gleichung" und „der allgemeine Differenzialquotient" statt $r!$; „Differenzialgleichung" und „den totalen Differenzialquotienten". — S. 339, Z. 16 v. u. (344, Z. 5 v. u.): „Gleichung" statt „Differenzialgleichung". — S. 339, Z. 3, 2 v. u. (345, Z. 10f. v. o.): „bestimmt und die n Grössen $a_1, \ldots a_n$ durch die Gleichung

(d) $$a_r \ldots [(A - m_r)^{n-1}]\text{“.}$$

Wir haben diese Stelle geändert, weil die Formel (d) so, wie sie im Originale lautet, unverständlich ist. In der That, es kommt Alles auf die Bedeutung des Ausdruckes $[(A - m_r)^{n-1}]$ an. Die bisherigen Entwickelungen lassen nur eine Auffassung dieses Ausdrucks zu, die nämlich, dass er ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner Grössen $(n-1)$-ter Stufe sind (nach 383 Anm.); ein solcher Bruch kann aber nicht der Grösse a_r, die von erster Stufe ist, kongruent sein. Ebensowenig lässt sich aus den späteren Entwickelungen eine Deutung der Gleichung (d) ableiten; denn auch die späteren Erklärungen (es kommen hier nur die Nummern

504 und 506 in Betracht) erlauben nicht, den Ausdruck $[(A - m_r)^{n-1}]$ so zu deuten, dass er eine Grösse erster Stufe wird.

S. 340, Z. 3 f. v. o. (345, Z. 14 f. v. o.): „Gleichung" statt „Gleichungen"; 388 und 389 statt 388. — S. 340, Z. 9—7, 3, 1 v. u. (346, Z. 6—9, 12 f., 15 v. o.): „**499.** Wenn

$$\delta x + \mathbf{A}x = f(t) \tag{a}$$

ist, wo δ, x, A, t die Bedeutung wie in 498 haben, so wird die obige Gleichung, wenn" u. s. w.; „ist, und $d^{-1} f_r e^{m_r t} dt = y_r$ gesetzt wird, integrirt durch die Gleichung"; „in welcher $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ willkürliche Konstanten sind". — Noch ist zu bemerken, dass in den Nr. 498 und 499 der Buchstabe A, der als Zeichen für einen Bruch dient, durch fetten Druck ausgezeichnet ist, was in der Originalausgabe nicht der Fall ist. Diese Art der Hervorhebung extensiver Brüche hätte eigentlich schon in den Nrn. 377 ff. eingeführt werden sollen. — S. 341, Z. 2, 5, 10, 19 v. o. (346, Z. 21, 18, 12, 4 v. u.): „lassen"; 389; „verschwindet", 497 statt „lässt"; 387; „null wird"; 496. —

S. 343, Z. 6 f. v. o. (348, Z. 11, 10 v. u.): „bis zur m-ten Ordnung hin sich darstellen lassen in der Form". — S. 344, Z. 7 v. o. (349, Z. 10 v. u.): „sind" statt „wird". — S. 344, Z. 2, 1 v. u. (350, Z. 22—20 v. u.): „Man erhält damit, indem wir die Bezeichnung der Unbekannten ändern," u. s. w. — S. 345, Z. 14 v. u. (351, Z. 12 v. o.): „konstant" statt „willkürliche Konstanten". — S. 346, Z. 8 v. u. (352, Z. 19 v. o.): „oben" statt „eben". — S. 349, Z. 4 v. o. (355, Z. 1 f. v. o.): „über Lückenausdrücke mit nicht vertauschbaren Lücken aufzustellen". — S. 349 ff. (355 ff.): In den Nrn. 504—510 sind in der gegenwärtigen Ausgabe alle Buchstaben, die Lückenausdrücke bezeichnen sollen, fett gedruckt. — S. 349, Z. 14—1 v. u. (355, Z. 11, 10 v. u.): „hervorgeht. Hierdurch ist dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt". — S. 350, Z. 5 v. u. (356, Z. 18 f. v. o.): „unterscheiden" statt „unterscheidet". — S. 351, Z. 19 v. o. (357, Z. 7 f. v. o.): „wiederholt eine einfache lineale Aenderung erfährt". — S. 352, Z. 5, 6 und 11 v. o. (357, Z. 13, 12 und 7 v. u.): „Definition" statt „Erklärung" und: „Theiles" statt „Abschnittes". — S. 353, Z. 11 v. u. (359, Z. 19 v. u.): „dieser" statt „jener". — S. 354, Z. 3, 2 v. u. (360, Z. 11, 10 v. u.): „eintreten. Dasselbe drückt aber die Formel . . . aus, also".

S. 355, Z. 9 v. o. (361, Z. 1 v. o.): $\Sigma U_a du_a = \sum U_a \frac{d}{dx} u_a dx$. — S. 355, Z. 10 v. u. (361, Z. 15 v. u.): $\left(\sum \frac{d}{dx} U_a \frac{d}{dx} u_a\right)^n$. — S. 356, Z. 5, 3 v. u. (362, Z. 7, 5 v. u.): $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ statt $X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n$. — S. 356, Z. 2 v. u. bis 357, Z. 1 v. o. (362, Z. 4 v. u.): „also (nach 506) selbst null ist". — S. 357, Z. 4—9 v. o. (363, Z. 1 v. o.): „$Xe_r = X_r$, also $\frac{d}{dx} Xe_r e_s = \frac{d}{dx} X_r e_s = \frac{d}{dx_s} X_r$ (nach 451), folglich". — S. 360, Z. 1 v. u. (366, Z. 4 v. u.). In der Gleichung (h) fehlt im Original auf der rechten Seite der Faktor 2, dessen Hinzufügung durch die Erklärung in Nr. 504 nothwendig wird. Dieser Faktor fehlt im Original auch in den aus 514h abgeleiteten Gleichungen und ist daher in der gegenwärtigen Ausgabe überall hinzugefügt worden. — S. 363, Z. 15 v. u. (369, Z. 8 v. u.): (nach 509) statt (nach 504 und 506). — S. 363, Z. 2 v. u. bis 364, Z. 4 v. o. (370, Z. 5—8 v. o.): „so können wir, ohne die Bedeutung desselben zu ändern, ihm noch eine Lücke l hinzufügen (nach 504). Diese Lücke sei mit den übrigen von gleicher Gattung, so wird (nach

504)". — S. 365, Z. 4—12 v. o. (371, Z. 13—19 v. o.): **es lässt sich diese Determinante aber als Produkt eines Quadrates und einer neuen Determinante, welche nur die einfache Anzahl der erforderlichen Faktoren enthält, darstellen; jenes Quadrat fällt dann schliesslich aus den Ausdrücken für $\delta x_1, \ldots \delta x_{2n}$ hinweg, und diese neue Determinante stimmt mit dem oben mitgetheilten Ausdrucke $\left[\left(\frac{d}{dx} X\right)^n\right]$ überein. Alle diese" u. s. w.** — S. 365, Z. 16, 15 v. u. (371, Z. 8, 7 v. u.): **516 statt 515.** — **S. 366, Z. 11—14 v. o. (372, Z. 16 v. u.): „Es ist aber $\frac{d}{dx} X\delta x = \delta X$ und $\frac{d}{dx} X\delta' x = \delta' X$; also hat man".** — **S. 366, Z. 13, 12 v. u. (372, Z. 7, 6 v. u.): „also, da (nach 504) $Xdx = X\delta' x + X\delta x$ war, und".** — **S. 367, Z. 7f. v. o. (373, Z. 12 v. o.): „zu lösen ist, wenn die Bedingungsgleichung (a) wegfällt".** — **S. 367, Z. 13 v. o. (373, Z. 17 v. u.): „das Verhältniss" statt „die Verhältnisse".** — **S. 367, Z. 17, 16 v. u. (373, Z. 9 v. u.): „setzt man hierin statt δx_{2n}".** — **S. 367, Z. 5 v. u. (374, Z. 2 v. o.): „noch wieder eine Funktion von y und t".** — S. 367, Z. 1 v. u. (374, Z. 7 v. o.): „bedeutet" statt „bedeutete". — S. 369, Z. 16—14 v. u. (375, Z. 8 v. u.): „Dieser Ausdruck ist aber (nach 509)". — S. 369, Z. 10, 9 v. u. (375, Z. 5 v. u.): „$[a_{\mathfrak{a}} F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}] = F_{\mathfrak{b}}$ ist, und also $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{b}$ verschieden ist und daher". — S. 370, Z. 9 v. u. (376, Z. 9 v. u.): $\left[\frac{d}{dx} X a_r a_s\right]$ statt $\frac{d}{dx} X . a_r a_s$. — S. 371, Z. 9 und 12 v. o. (377, Z. 4 und 7 v. o.): X statt $[X]$ und: $\left[X\left(\frac{d}{dx} X\right)^n\right]$ statt $X\left(\frac{d}{dx} X\right)^n$. — S. 371, Z. 18 v. o. (377, Z. 13 v. o.): „1 und $\frac{m-1}{2}$" statt „1 und $\frac{m+1}{2}$". — S. 372, Z. 18 v. o. (378, Z. 14 v. o.). In der Originalausgabe fehlt im ersten Gliede der Faktor δx. — S. 372, Z. 6, 5 v. u. (378, Z. 7, 6 v. u.): „deren Verhältnisse durch die Gleichungen $G_1, \ldots G_m = 0$ bestimmt sind, die Grössen". — S. 375, Z. 17, 16 v. u. (381, Z. 11. 10 v. u.): X, $>$ statt $[X]$, $<$. — S. 376, Z. 12 v. u. (382, Z. 7, 6 v. u.): „wenn diese Anzahl $= 2n$ ist. Wendet man dann dies Verfahren noch einmal an, so reducirt". — S. 377, Z. 17 v. u. (383, Z. 9 v. u.): $A da$ statt $A da = 0$. — S. 378, Z. 14 v. u. (384, Z. 2 v. u.): „sei" statt „wäre". — S. 379, Z. 10 v. o. (385, Z. 12 v. u.): „also" statt „auch". —

S. 380f. (386—388) sind in dem Verzeichnisse der gebrauchten Kunstausdrücke verschiedene Druckfehler der Originalausgabe verbessert, die anzuführen sich nicht lohnt.

In dem Inhaltsverzeichnisse, S. 382f., das in der Originalausgabe gleich hinter der Vorrede, auf S. XI und XII steht, haben wir die Kapitel- und Paragraphenüberschriften in genauere Uebereinstimmung mit denen des Textes gebracht; ausserdem haben wir auch bei jedem Paragraphen die zugehörige Seitenzahl hinzugefügt.

Anmerkungen

zur Ausdehnungslehre von 1862.

(Die Seitenzahlen beziehen sich auf die vorliegende Ausgabe.)

Die Ausdehnungslehre von 1862, die wir nach Grassmanns Vorgange kurz als A_2 bezeichnen, trägt unter der Vorrede das Datum des 29. August 1861 und ist auch im Jahre 1861 erschienen. Grassmann hatte sie auf eigene Kosten, in einer Auflage von 300 Exemplaren, drucken lassen und gab sie bei der Verlagshandlung von Enslin in Berlin in Kommission; die Jahreszahl 1862 auf dem Titel ist jedenfalls aus buchhändlerischen Rücksichten gewählt worden.

Was das Verhältniss der Ausdehnungslehre von 1862 zu der von 1844 anlangt, so verweisen wir auf die Vorbemerkungen zu dem gegenwärtigen Theile.

S. 3, Z. 14, 13 v. u. Die Abhandlungen im Crelleschen Journale beziehen sich auf die Erzeugung algebraischer Kurven und Flächen, auf die sogenannte höhere Projectivität in der Ebene und im Raume und auf die verschiedenen Arten der Multiplikation. Sie werden im zweiten Bande dieser Ausgabe zum Abdruck gelangen.

S. 3, Z. 5 v. u. Diese Anzeige ist später als Anhang zur zweiten Auflage der A_1 wieder abgedruckt worden (diese Ausgabe I, 1, S. 297—312).

S. 5, Z. 8 v. o. Das Lehrbuch der Arithmetik war ursprünglich 1860 bei R. Grassmann in Stettin erschienen, wurde aber dann bei Enslin in Kommission gegeben und erhielt einen neuen Titel mit der Jahreszahl 1861. Deshalb ist die Jahreszahl 1860, die in der Originalausgabe der A_2 steht, geändert worden.

S. 8, Z. 11—14 v. o. Die geplante Bearbeitung der wichtigsten Zweige der Physik ist nicht erschienen. Da nämlich die Ausdehnungslehre auch in ihrem neuen Gewande bei den Fachgenossen zunächst so gut wie keine Beachtung fand, so wandte sich Grassmann für eine Reihe von Jahren ganz seinen schon früher begonnenen sprachlichen Arbeiten zu. Auf physikalische Fragen beziehen sich von seinen späteren Arbeiten nur zwei Aufsätze über Mechanik und je einer über Electrodynamik und Akustik. Diese werden nebst einigen Aufsätzen aus dem Nachlasse im zweiten und dritten Bande dieser Ausgabe abgedruckt werden.

S. 9, Z. 1—4 v. o. Der Gausssche Brief ist datirt: Göttingen, den 14. December 1844. Wir theilen daraus nur Folgendes mit:

. . . „in einem Gedränge von andren heterogenen Arbeiten Ihr Buch durchlaufend glaube ich zu bemerken, dass die Tendenzen desselben theilweise denjenigen Wegen begegnen, auf denen ich selbst nun seit fast einem halben Jahr-

hundert gewandelt bin, und wovon freilich nur ein kleiner Theil 1831 in den Comment. der Göttingischen Societät und noch mehr in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen (1831, Stück 64) gleichsam im Vorbeigehen erwähnt ist, nemlich die concentrirte Metaphysik der complexen Grössen, während von der unendlichen Fruchtbarkeit dieses Princips für Untersuchungen räumliche Verhältnisse betreffend zwar vielfältig in meinen Vorlesungen gehandelt, aber Proben davon nur hin und wieder, und, als solche nur dem aufmerksamen Auge erkennbar, bei andren Veranlassungen mitgetheilt sind. Indessen scheint dies nur eine partielle und entferntere Aehnlichkeit in der Tendenz zu sein; und ich sehe wohl, dass um den eigentlichen Kern Ihres Werkes herauszufinden, es nöthig sein wird, sich erst mit Ihren eigenthümlichen Terminologien zu familiarisiren. Da aber dazu, bei mir, nothwendig eine von andren Beschäftigungen freiere Zeit erforderlich sein wird, so darf ich jetzt nicht länger anstehen, Ihnen meinen ergebensten Dank für die gefällige Uebersendung Ihres Werkes auszusprechen," ....

Die Stelle aus den Göttingischen Anzeigen, auf die sich Gauss bezieht, steht in den gesammelten Werken Bd. II, S. 175 ff.

S. 9, Z. 8f., 16 v. o. Der genaue Titel der Zeitschrift lautet: Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto. Opera periodica di alcuni collaboratori. Padova, seit 1831. Von Bellavitis sind darin zahlreiche Aufsätze enthalten, von denen jedoch hier nur folgende in Betracht kommen:

Bd. II, 1831, S. 250: „Sulla Geometria derivata", enthält die Darstellung der Summe zweier Geraden durch die Diagonale und die bekannte Deutung der imaginären Grössen; vermöge dieser lässt sich aus jedem Satze über Punkte in einer Geraden ein solcher über Punkte in einer Ebene herleiten, daher das derivata.

Bd. V, 1835, S. 244—259. Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica (Calcolo delle Equipollenze); Memoria di Giusto Bellavitis di Bassano. Der Verfasser hatte die Methode bereits im September 1832 dem „Ateneo veneto" vorgelegt und zur Ableitung von Eigenschaften der Kegelschnitte benutzt, veröffentlicht im „Poligrafo di Verona, Gennajo 1833".

Bd. VI, 1836, S. 126. „Teoria delle figure inverse e loro uso nella Geometria elementare". Die Theorie der reciproken Radien-Vectoren und die Aequipollenzen werden als besondere Fälle eines allgemeinen Uebertragungsprincips (Geometria derivata) aufgefasst.

Bd. VII, 1837, S. 243—261, Bd. VIII, 1838, S. 17—37, 85—121: „Memoria sul Metodo delle equipollenze". Ausführliche Darstellung der in Bd. V skizzirten Theorie.

S. 9, Z. 15—13 v. u. Diese Abhandlung hat den Titel: „Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la Mécanique".

S. 9, Z. 1 v. u. Die ersten beiden Abhandlungen haben den Titel: „Sur les clefs algébriques", die dritte: „Sur les avantages que présente, dans un grand nombre de questions, l'emploi des clefs algébriques". Hierzu kommt in Bd. 36 noch eine Abhandlung: „Sur la théorie des moments linéaires et sur les moments linéaires des divers ordres" und in Bd. 37 (1853) eine Abhandlung: „Mémoire sur les différentielles et les variations employées comme clefs algébriques", auf S. 38—45 und 57—68.

S. 10, Z. 2—5 v. o. Die betreffende Sitzung der Akademie war am 17. April 1854. Man liest in den Comptes Rendus a. a. O. Folgendes:

„Analyse mathématique. Extrait d'un Mémoire de M. Grassmann.

„„Je prie l'Académie des Sciences de vouloir bien prendre connaissance de

la réclamation que je me trouve dans le cas de faire à l'occasion des articles, *Sur les clefs algébriques,* par M. Cauchy, et *De l'interprétation {géométrique} des clefs algébriques et des déterminants,* par M. de Saint-Venant*), insérés dans les *Comptes Rendus,* tome XXXVI, pages 70, 129, 582. J'ai, dès l'année 1844, publié les principes établis dans ces articles, et les résultats qu'en déduisent les deux géomètres que je viens de nommer. J'ai l'honneur de faire hommage à l'Académie de l'ouvrage dans lequel ces idées sont contenues (1), et de quelques Mémoires publiés ultérieurement sur le même sujet (2), et je serais heureux si l'Académie des Sciences voulait bien accepter ces ouvrages. Pour appuyer ma réclamation, je prends la liberté de vous communiquer un extrait de mes recherches qui se rapportent à ce sujet, et qui sont contenues dans les ouvrages nommés, en citant à chaque question les endroits où elles se trouvent.

„„Toutes ces recherches sont fondées sur des quantités que j'ai nommées *quantités extensives,* et qui ne sont, au fond, autre chose que les *facteurs symboliques* et que les *clefs algébriques* de M. Cauchy. Mais comme le point de vue sous lequel j'ai envisagé ces quantités est tout différent de celui de M. Cauchy, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails. Tel est l'objet de la Note que j'ai l'honneur de soumettre aujourd'hui au jugement de l'Académie.""

„Cette note, par sa nature peu susceptible d'analyse, n'a pu, à raison de sa longueur, être reproduite ici *in extenso.* Elle est renvoyée à l'examen d'une Commission composée de MM. Cauchy, Lamé et Binet."

Möbius hatte Grassmann in einem Briefe vom 2. Sept. 1853 auf die genannten Arbeiten von Cauchy und Saint-Venant aufmerksam gemacht und ihn aufgefordert, seine Priorität zu wahren.

Nr. **2,** Anm. S. 11, Z. 2, 1 v. u. s. barycentrischer Calcul, Cap. 2, § 15; gesammelte Werke Bd. I, S. 39.

Nr. **48—51.** S. 33—38. Durch das „Princip", das Grassmann hier zu Grunde legt (s. S. 37, Z. 15—17 v. o.), schliesst er von vornherein die Betrachtung von Zahlbeziehungen zwischen den Einheitsprodukten und den ursprünglichen Einheiten aus und beschränkt sich auf Zahlbeziehungen zwischen Einheitsprodukten von gleich vielen Faktoren. Er versperrt sich auf diese Weise den Weg zu den Systemen von höheren complexen Zahlen, deren Begriff Hamilton schon 1853 in seinen „Lectures on Quaternions" in voller Allgemeinheit aufgestellt hatte und deren Theorie in neuerer Zeit von verschiedenen Mathematikern weiter entwickelt worden ist.

Es ist ferner merkwürdig, dass Grassmann bei dieser allgemeinen Untersuchung über die verschiedenen Arten von Produktbildungen nur Produkte aus zwei Faktoren betrachtet, nicht auch solche aus drei Faktoren. Er erwähnt nicht einmal, dass die Produktbildungen, bei denen je drei Einheiten die Gleichung

$$(e_i e_k) e_j = e_i (e_k e_j)$$

erfüllen, bei denen also das sogenannte associative Gesetz gilt, ebenfalls zu den linealen Produktbildungen gehören, und erst später, nämlich in Nr. 78, führt er das associative Gesetz ein, aber ohne auf dessen Bedeutung hinzuweisen. Das

*) In der genannten Abhandlung nennt Saint-Venant zwar den Namen Grassmanns auf S. 584 in einer Anmerkung, aber nur im Hinblick auf den Begriff des innern Produkts, den Grassmann in der geometrischen Analyse entwickelt hatte.

muss um so mehr auffallen, als er in der A_1 das associative Gesetz oder, wie er es nennt, das Gesetz der Vereinbarkeit der Glieder einer Verknüpfung, gleich im Anfang (in § 3, diese Ausg. I, 1, S. 35, s. auch S. 406) mit der grössten Schärfe und Klarheit entwickelt.

Hätte Grassmann versucht, auch bei Produkten aus drei Faktoren alle möglichen Gattungen von linealen Produktbildungen zu bestimmen, so hätte er vielleicht eine andre Auffassung von der Tragweite seines „Princips" bekommen, denn er wäre dann auf ganz neue Produktbildungen gestossen, die er in seinem Systeme nicht hätte unterbringen können. Wir dürfen uns hier natürlich nicht darauf einlassen, die angedeutete Aufgabe zu behandeln, wir wollen daher nur zwei Arten von linealen Produktbildungen erwähnen, die bei Produkten aus drei Faktoren auftreten.

Die Bestimmungsgleichungen der ersten Art haben die Form:

$$(1) \qquad (e_i e_k) e_j = \mathfrak{a} e_i (e_k e_j) \quad (i, k, j = 1, \dots n),$$

die der zweiten lauten so:

$$(2) \qquad \begin{cases} (e_i e_k) e_j + (e_k e_j) e_i + (e_j e_i) e_k = 0 \\ (e_i e_k) e_j = \mathfrak{b} e_j (e_i e_k), \end{cases}$$

unter $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Zahlgrössen verstanden. Im ersten Falle erhält man für $\mathfrak{a} = 1$ die associativen Produktbildungen. Im zweiten Falle erhält man, wenn man $\mathfrak{b} = -1$ setzt und ausserdem noch die Bestimmungsgleichungen

$$(3) \qquad e_i e_k + e_k e_i = 0 \quad (i, k = 1 \dots n)$$

hinzunimmt, eine lineale Produktbildung von ganz andrer Art, die in der Lieschen Theorie der Transformationsgruppen eine grosse Rolle spielt. Bei dieser Produktbildung sind die Einheiten $e_1, \dots e_n$ unabhängige infinitesimale Transformationen eines beliebigen Raumes und das Produkt $e_i e_k$ ist der aus zwei infinitesimalen Transformationen gebildete Poissonsche Klammerausdruck; die erste der Gleichungen (2) ist dann nichts andres als die berühmte Jacobische Identität. Man vgl. hierzu Sophus Lie, Theorie der Transformationsgruppen, unter Mitwirkung von F. Engel, Bd. III, S. 747 ff.)

Nr. **62**, Anm. S. 43. Die von Grassmann gewählte Zeichenbestimmung stimmt mit der von Cramer aufgestellten Zeichenregel überein, s. dessen Introduction à l'analyse des lignes courbes, Genf 1750. Appendice S. 657 f. Die Cauchysche Zeichenbestimmung findet man z. B. in Baltzers Determinanten.

Nr. **63.** S. 43. Aus diesem Satze folgt der Multiplikationssatz der Determinanten ganz unmittelbar. Setzt man nämlich:

$$a_k = \beta_1^{(k)} b_1 + \cdots + \beta_n^{(k)} b_n,$$

so kann man nach Nr. 63 beide Seiten der Endgleichung dieser Nr. durch das kombinatorische Produkt $[b_1 \dots b_n]$ ausdrücken, und wenn dieses nicht verschwindet, erhält man bei Berücksichtigung von Nr. 32 eine Gleichung, die nichts andres ist als der Multiplikationssatz der Determinanten. In seiner „Theorie der complexen Zahlensysteme", Leipzig 1867, hat Hankel auf S. 122 f. diesen Beweis des Multiplikationssatzes, vermuthlich auf Grund brieflicher Mittheilungen von Grassmann, zum ersten Male veröffentlicht.

Nr. **71.** S. 49. Der Begriff der einfachen linealen Aenderung wird im Folgenden immer auf den Fall angewandt, dass die lineal geänderte Grössenreihe von n extensiven Grössen $a_1, \dots a_n$ gebildet wird, die aus den n ursprünglichen Einheiten $e_1, \dots e_n$ ableitbar sind und in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen.

Unter dieser Voraussetzung ist die einfache lineale Aenderung gleichbedeutend mit einer linearen homogenen Substitution von besonderer Form.

In der That, der Inbegriff aller aus $a_1, \dots a_n$ ableitbaren Grössen bildet ein Gebiet n-ter Stufe, das (nach 21 und 24) mit dem durch $e_1, \dots e_n$ bestimmten Gebiete n-ter Stufe zusammenfällt; die allgemeine Form einer Grösse dieses Gebietes ist: $x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$. Unterwirft man nun diese Grössenreihe $a_1, \dots a_n$ einer einfachen linealen Aenderung, etwa, indem man a_m durch $a_m + \alpha a_{m+1}$ ersetzt und die übrigen a_k ungeändert lässt, so verwandelt sich jede Grösse $\Sigma x_i a_i$ unsers Gebietes n-ter Stufe in eine Grösse $\Sigma x_i a_i + \alpha x_m a_{m+1}$, die ebenfalls diesem Gebiete angehört. Schreiben wir diese neue Grösse in der Form $\Sigma x_i' a_i$, so erhalten wir (nach 29) zwischen den x_i und den x_i' die Beziehungen:

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1' = x_1, \; \dots, \; x_m' = x_m, \; x_{m+1}' = x_{m+1} + \alpha x_m, \\ \qquad x_{m+2}' = x_{m+2}, \; \dots, \; x_n' = x_n. \end{cases}$$

Das ist aber augenscheinlich eine lineare homogene Transformation von der Determinante Eins, die angiebt, in welcher Weise die Grössen unsers Gebietes n-ter Stufe bei jener einfachen linealen Aenderung unter einander vertauscht werden. Wendet man mehrere einfache lineale Aenderungen nach einander an, so ist das gleichbedeutend mit der Ausführung mehrerer derartiger linearer homogener Transformationen nach einander, und die lineale Aenderung, bei der die erste Reihe in die letzte umgewandelt wird, kommt demnach ebenfalls auf eine lineare homogene Substitution von der Determinante Eins hinaus.

Ausdrücklich sei hervorgehoben, dass die ∞^1 linearen homogenen Transformationen von der besonderen Form (*) zusammengenommen eine eingliedrige Gruppe im Lieschen Sinne bilden.

Nr. 71, Anm. S. 49. Dass sich die lineale Aenderung in der Geometrie mittelst des Lineals bewerkstelligen lässt, wird in Nr. 254 gezeigt. Ueber die circuläre Aenderung vgl. man Nr. 154 und 331.

Nr. 76. S. 53. Es sei $[a_1 \dots a_m] = [b_1 \dots b_m] \gtrless 0$, dann lassen sich $b_1, \dots b_m$ nach Nr. 70 aus $a_1, \dots a_m$ ableiten, es ist also:

$$b_k = \alpha_{k1} a_1 + \cdots + \alpha_{km} a_m \quad (k = 1, \dots m),$$

wo die Determinante der $\alpha_{k\nu}$ sicher von Null verschieden ist und überdies wegen der Gleichung $[a_1 \dots a_m] = [b_1 \dots b_m]$ nach Nr. 63 und 32 den Werth Eins hat. Zugleich ist das durch $a_1, \dots a_m$ bestimmte Gebiet m-ter Stufe mit dem durch $b_1, \dots b_m$ bestimmten Gebiete identisch. Ersetzt man daher in einer beliebigen Grösse $\Sigma x_\nu a_\nu$ dieses Gebiets die a_ν durch die b_ν, so werden die Grössen des Gebietes unter einander vertauscht und zwar, wie man leicht sieht, durch eine lineare homogene Substitution von der Determinante Eins; denn wir können ja setzen: $\Sigma x_\nu b_\nu = \Sigma x_\nu' a_\nu$ und erhalten hieraus zwischen den x und den x' die Beziehung:

$$x_\nu' = \alpha_{1\nu} x_1 + \cdots + \alpha_{m\nu} x_m \quad (\nu = 1, \dots m),$$

also wirklich eine lineare homogene Substitution dieser Art.

Erinnert man sich jetzt der vorletzten Anmerkung, so erkennt man, dass der Satz 76 gleichbedeutend ist mit dem folgenden: Jede lineare homogene Substitution von der Determinante Eins kann dadurch erhalten werden, dass man nach einander eine Anzahl Substitutionen dieser Art von besonderer Form ausführt, nämlich Substitutionen von der besonderen Form (*), die nach der vorletzten Anmerkung einer einfachen linealen Aenderung entspricht.

Nr. **77.** S. 56, Z. 10f. v. o. Dieser Zusatz war nöthig, weil die Zahlen in Nr. 84 und 95 ohne Weiteres als Grössen nullter Stufe behandelt werden und weil in Nr. 95 insbesondere auf Nr. 77 verwiesen wird. Wir bemerken noch, dass auch das Produkt aus einer einfachen Grösse und einer Zahl wieder eine einfache Grösse ist. Denn nach 46 kann man die Zahl zu irgend einem Faktor erster Stufe des Produktes ziehen, wobei dieser Faktor eine Grösse erster Stufe bleibt.

Nr. **77b,** Anm. S. 56. Hier wird $[(pq)(pq)] = [pqpq]$ gesetzt, obgleich bisher die Multiplikation von zwei Grössen höherer Stufe nicht so weit definirt ist, dass man weiss, ob die Klammern weggelassen werden dürfen oder nicht; erst in Nr. 78 wird darüber eine Festsetzung getroffen. Wahrscheinlich hat Grassmann dieses Versehen später bemerkt und deshalb die ganze Betrachtung in Nr. 88 Anm., S. 62 wiederholt.

Nr. **88.** S. 61. Aus diesem Satze folgt sehr leicht der nachstehende:

Satz 1. *In einem Hauptgebiete n-ter Stufe ist jede Grösse $(n-1)$-ter Stufe einfach.*

In der That, nach Nr. 88 ist zunächst offenbar jede Summe von beliebig vielen einfachen Grössen $(n-1)$-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe wieder eine einfache Grösse. Da sich nun jede Grösse $(n-1)$-ter Stufe als eine Summe von einfachen Grössen $(n-1)$-ter Stufe darstellen lässt, nämlich als Summe von Produkten aus je einer Einheit $(n-1)$-ter Stufe und einer Zahlgrösse, und da (nach 77) diese Einheiten und (nach der Anmerkung zu Nr. 77) auch diese Produkte einfache Grössen sind, so ist überhaupt jede Grösse $(n-1)$-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe einfach.

In der Anmerkung zu Nr. 88 (S. 62) erwähnt Grassmann zwar, dass eine Grösse m-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe im Allgemeinen nicht einfach ist, sobald $1 < m < n-1$ ist, er zeigt das aber blos für den einfachsten Fall: $n = 4$, $m = 2$ und übergeht den Fall $n > 4$ mit Stillschweigen. Nur noch an einer späteren Stelle der A_2 berührt Grassmann die in Rede stehende Frage, nämlich in Nr. 286, wo er zeigt, wie man erkennen kann, ob eine vorgelegte Summe von Linientheilen im Raume wieder ein Linientheil ist oder nicht, oder mit andern Worten, ob eine vorgelegte Grösse zweiter Stufe in einem Gebiete vierter Stufe einfach ist oder nicht.

Genau dieselbe Lücke findet sich übrigens schon in der A_1 (vgl. da § 51, diese Ausgabe I, 1, S. 108); auch dort wird nur der Fall $n = 4$, $m = 2$ behandelt (a. a. O. § 124, S. 205; vgl. auch S. 407).

Später, in seiner letzten mathematischen Abhandlung*), die durch die Arbeiten von Reye angeregt worden war, ist Grassmann noch einmal auf die Frage zurückgekommen und hat sie auch erledigt, indem er die Bedingungen aufstellt, denen eine durch die Einheiten q-ter Stufe ausgedrückte Grösse q-ter Stufe in einem Hauptgebiete $(q+s)$-ter Stufe genügen muss, wenn sie einfach sein soll. Die Bedingungen, zu denen er gelangt, sind gewisse Gleichungen zweiten, dritten, ... q-ten Grades zwischen den Koefficienten der betrachteten Grösse q-ter Stufe. Hier wollen wir einen andern Weg einschlagen, der ebenfalls ein Kriterium dafür liefert, ob eine vorgelegte Grösse m-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe einfach ist oder nicht, und der mehr mit dem sonst in der A_2

*) „Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren und den Zusammenhang algebraischer Gebilde", Crelles Journal, Bd. 84, S. 273—283; vgl. namentlich S. 281 f.

üblichen Verfahren übereinstimmt. Freilich müssen wir dabei den wesentlichen Inhalt des ganzen dritten Kapitels der A_2 als bekannt voraussetzen.

Dass es zunächst für $n > 3$ und $1 < m < n-1$ in einem Hauptgebiete n-ter Stufe stets Grössen m-ter Stufe giebt, die nicht einfach sind, ist leicht zu zeigen. Man braucht zu diesem Zwecke nur nachzuweisen, dass es Grössen m-ter Stufe giebt, die einem Hauptgebiete $(m+2)$-ter Stufe angehören und die nicht einfach sind. Da Grassmann eine nicht einfache Grösse zweiter Stufe in einem Hauptgebiete vierter Stufe angegeben hat, nämlich $[e_1 e_2] + [e_3 e_4] = A_2$, so kann man sofort auch eine derartige Grösse m-ter Stufe bilden, und zwar wird:

$$[e_1 e_2 e_5 e_6 \ldots e_{m+2}] + [e_3 e_4 e_5 e_6 \ldots e_{m+2}] = [A_2 e_5 e_6 \ldots e_{m+2}]$$

eine solche Grösse sein. Wäre nämlich diese Grösse einfach, so müsste sie sich augenscheinlich in der Form:

$$[A_2 e_5 e_6 \ldots e_{m+2}] = [a b e_5 e_6 \ldots e_{m+2}]$$

darstellen lassen, wo a und b dem Gebiete e_1, e_2, e_3, e_4 angehörten, dann aber ergäbe sich aus Nr. 81 die Gleichung $A_2 = [ab]$, es wäre also auch A_2 einfach, was nicht der Fall ist.

Wir kommen jetzt zu der schwierigeren Frage nach den Kriterien, an denen man erkennen kann, ob eine vorgelegte Grösse m-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe $(n > 3,\ 1 < m < n-1)$ einfach ist oder nicht. Zuerst behandeln wir den einfachsten Fall: $m = 2$.

Die allgemeine Form einer Grösse zweiter Stufe im Hauptgebiete n-ter Stufe $(n > 3)$ ist:

$$A_2 = \sum_{i,k}^{1,\ldots n} \alpha_{ik} [e_i e_k],$$

wo die α_{ik} Zahlgrössen sind, die wir noch der Bedingung $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$ unterwerfen können. Die Grösse A_2 wird dann und nur dann einfach sein, wenn sie sich in der Form $[ab]$ darstellen lässt, unter a und b Grössen erster Stufe verstanden. Ist aber dies der Fall, so ist das äussere Produkt:

$$[A_2 A_2] = [ab \,.\, ab] = [abab] = 0 \qquad [79,\ 60],$$

demnach ist $[A_2 A_2] = 0$ eine nothwendige Bedingung, wenn A_2 einfach sein soll*). Wir behaupten, dass diese nothwendige Bedingung zugleich auch hinreichend ist.

Um diese Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, sie sei für Grössen zweiter Stufe in einem Hauptgebiete $(n-1)$-ter Stufe schon bewiesen, und zeigen, dass sie dann auch in einem Hauptgebiete n-ter Stufe gilt. Damit ist sie dann allgemein bewiesen, denn für $n = 3$ fällt die ganze Bedingung weg, da alle Grössen zweiter Stufe in einem Hauptgebiete dritter Stufe nach Satz 1 so wie so einfach sind.

Es sei also $[A_2 A_2] = 0$; zu zeigen ist, dass A_2 einfach ist.

Wir schreiben A_2 in der Form:

$$A_2 = \mathfrak{A}_2 + [e_n a],$$

wo $\mathfrak{A}_2$ und a Grössen zweiter und erster Stufe in dem Hauptgebiete $(n-1)$-ter Stufe $e_1, \ldots e_{n-1}$ sind. Aus $[A_2 A_2] = 0$ folgt nunmehr:

$$(1) \qquad [\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_2] + 2[e_n a \mathfrak{A}_2] + [e_n a e_n a] = 0,$$

*) Das Verfahren Grassmanns in Nr. 88 Anm. hat natürlich hierbei als Vorbild gedient.

wo das letzte Glied links offenbar verschwindet. Bildet man ferner die Zurückleitung der Gleichung (1) auf das Gebiet $e_1, \dots e_{n-1}$ unter Ausschluss des Gebietes e_n, so erkennt man auf Grund von Nr. 130 und 131, dass sich (1) in die beiden Gleichungen:

$$(2) \qquad [\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_2] = 0, \quad [e_n a \mathfrak{A}_2] = 0$$

zerlegt, die also eine Folge von $[A_2 A_2] = 0$ sind. Für $n = 4$ ist übrigens die Gleichung $[\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_2] = 0$ schon an und für sich, auch ohne Rücksicht auf $[A_2 A_2] = 0$ erfüllt, weil in diesem Falle $\mathfrak{A}_2$ als Grösse zweiter Stufe in einem Gebiete dritter Stufe sicher einfach und demnach als Produkt zweier Grössen erster Stufe darstellbar ist.

Unter den gemachten Voraussetzungen sagt nun die Gleichung $[\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_2] = 0$ aus, dass $\mathfrak{A}_2$ einfach, also in der Form $[bc]$ darstellbar ist, wo b, c Grössen erster Stufe des Gebietes $e_1, \dots e_{n-1}$ sind. Die zweite der Gleichungen (2) zieht ferner auf Grund von Nr. 79 und 81 die Gleichung

$$[a \mathfrak{A}_2] = [abc] = 0$$

nach sich, und diese sagt nach Nr. 66 aus, dass zwischen a, b, c eine Zahlbeziehung herrscht. Ist daher $\mathfrak{A}_2$ nicht null, so ist: $a = \lambda b + \mu c$ und somit

$$A_2 = [bc] + [e_n(\lambda b + \mu c)] = [(b + \mu e_n)(c - \lambda e_n)],$$

also wirklich einfach. Ist aber $\mathfrak{A}_2 = 0$, so ist $A_2 = [e_n a]$, also ebenfalls einfach.

Damit haben wir den

Satz 2. *Eine Grösse zweiter Stufe, A_2, in einem Hauptgebiete n-ter Stufe ist, sobald $n > 3$ ist, dann und nur dann einfach, wenn sie der Gleichung $[A_2 A_2] = 0$ genügt.*

Es ist nicht schwer die Bedingung $[A_2 A_2] = 0$ durch Zahlgleichungen zu ersetzen. In der That, man findet:

$$[A_2 A_2] = \sum_{ikj\mu}^{1, \dots n} \alpha_{ik} \alpha_{j\mu} [e_i e_k e_j e_\mu]$$

oder, da sich das Produkt $[e_i e_k e_j e_\mu]$ bei cyklischer Vertauschung von i, k, j nicht ändert:

$$[A_2 A_2] = \frac{1}{3} \sum_{ikj\mu}^{1, \dots n} (\alpha_{ik} \alpha_{j\mu} + \alpha_{kj} \alpha_{i\mu} + \alpha_{ji} \alpha_{k\mu}) [e_i e_k e_j e_\mu].$$

Hier sieht man sofort, dass jedes Glied unter dem Summenzeichen bei allen Vertauschungen von je zweien der Indices i, k, j, μ und also überhaupt bei allen Vertauschungen von i, k, j, μ ungeändert bleibt, die Gleichung $[A_2 A_2] = 0$ wird daher ersetzt durch die folgenden:

$$(3) \qquad \alpha_{ik} \alpha_{j\mu} + \alpha_{kj} \alpha_{i\mu} + \alpha_{ji} \alpha_{k\mu} = 0 \quad (i, k, j, \mu = 1, \dots n).$$

Das sind die bekannten Gleichungen, die zwischen den $\frac{1}{2} n(n-1)$ homogenen Koordinaten einer Geraden im Raume von $n - 1$ Dimensionen bestehen.

Bevor wir dieselbe Untersuchung für Grössen beliebiger Stufe durchführen, wollen wir einen Hülfssatz einschalten:

Hülfssatz. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beliebige Grössen des Gebietes $e_1, \dots e_{n-1}$, deren Stufenzahlen α und β der Bedingung $\alpha + \beta \gtreqless n - 1$ genügen, und bezeichnet man das Produkt in Bezug auf das Hauptgebiet $e_1, \dots e_n$ durch Anhängung des Index*

n an die scharfe Klammer und das in Bezug auf das Hauptgebiet $e_1, \ldots e_{n-1}$ durch Anhängung des Index $n - 1$, so ist das regressive Produkt:

$$[e_n \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}]_n = (-1)^{n-1} [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_{n-1}$$

und ebenso

$$[\mathfrak{B} \,.\, e_n \mathfrak{A}]_n = (-1)^{\alpha} [\mathfrak{B}\mathfrak{A}]_{n-1}.$$

Beweis. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zunächst einfach. Das Produkt $[e_n \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}]_n$ ist nach Nr. 109 dann und nur dann $\gtrless 0$, wenn das gemeinsame Gebiet der Grössen $[e_n \mathfrak{A}]_n$ und $\mathfrak{B}$ gerade von $(\alpha + 1 + \beta - n)$-ter, nicht aber von höherer Stufe ist. Da ferner das gemeinsame Gebiet von $[e_n \mathfrak{A}]_n$ und $\mathfrak{B}$ augenscheinlich mit dem gemeinsamen Gebiete von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zusammenfällt, so ist auch das Produkt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_{n-1}$ nur in dem eben bezeichneten Falle $\gtrless 0$. Es sei nun $\mathfrak{F}$ ein gemeinsamer Faktor $(\alpha + 1 + \beta - n)$-ter Stufe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; sollten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ein Gebiet von höherer Stufe gemein haben, so werde $\mathfrak{F} = 0$ angenommen. Dann können wir, sobald $\mathfrak{F} \gtrless 0$ ist, nach Nr. 79b setzen:

$$\mathfrak{A} = [\mathfrak{A}'\mathfrak{F}], \quad \mathfrak{B} = [\mathfrak{B}'\mathfrak{F}],$$

Formeln, die sowohl im Hauptgebiete $e_1, \ldots e_n$ als im Hauptgebiete $e_1, \ldots e_{n-1}$ gelten, und wir erhalten nach Nr. 107:

$$[e_n \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}]_n = \mathfrak{F}[e_n \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{F}]_n$$

und:

$$[\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}]_{n-1} = \mathfrak{F}[\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{F}]_{n-1},$$

wo die Faktoren von $\mathfrak{F}$ nach 94 beide Male Zahlen sind Da diese Formeln auch in dem Falle gelten, wo $\mathfrak{F}$ gleich Null angenommen werden sollte, so gelten sie allgemein.

Nun aber ist nach Nr. 58 und 94:

$$[e_n \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{F}]_n = (-1)^{n-1} [\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{F} e_n]_n = (-1)^{n-1} [\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{F}]_{n-1},$$

also wird:

$$[e_n \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}]_n = (-1)^{n-1} [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_{n-1}.$$

Das gilt, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einfach sind. Sind sie es nicht, so setzen wir $\mathfrak{A} = \Sigma \mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B} = \Sigma \mathfrak{B}_j$ und erhalten:

$$[e_n \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}]_n = \sum_{kj} [e_n \mathfrak{A}_k \,.\, \mathfrak{B}_j]_n = (-1)^{n-1} \sum_{kj} [\mathfrak{A}_k \mathfrak{B}_j]_{n-1},$$

nach dem eben Bewiesenen, demnach auch jetzt wieder:

$$[e_n \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}]_n = (-1)^{n-1} [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_{n-1},$$

wie behauptet.

Die zweite Formel des Hülfssatzes ergiebt sich in derselben Weise.

Nunmehr sei A_m eine beliebige Grösse m-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe ($n > 3$, $1 < m < n - 1$). Ist A_m einfach, so ergiebt es mit einer andern einfachen Grösse B multiplicirt stets wieder eine einfache Grösse*). Wir haben also hier eine nothwendige Bedingung für die Einfachheit von A_m: die, dass es mit jeder einfachen Grösse B multiplicirt eine einfache Grösse liefern muss. Um nun den vorliegenden Fall auf den vorhin erledigten Fall der Grössen zweiter Stufe zurückzuführen, wählen wir unter den sämmtlichen einfachen Grössen B alle die aus, bei denen das Produkt $[A_m B]$ regressiv und von zweiter Stufe

*) Nach dem Satze 1 in der Anm. zu Nr. 103, S. 412.

wird; dazu haben wir nach Nr. 95 für B eine beliebige einfache Grösse $(n - m + 2)$-ter Stufe B_{n-m+2} zu setzen und wir können nunmehr sagen:

Soll die Grösse A_m einfach sein, so ist jedenfalls nothwendig, dass die Grösse zweiter Stufe: $[A_m B_{n-m+2}]$ stets einfach ist, welche einfache Grösse $(n - m + 2)$-ter Stufe man auch für B_{n-m+2} setzen mag, mit andern Worten (s. Satz 2, S. 404), es ist nothwendig, dass die Gleichung

$$(4) \qquad [A_m B_{n-m+2} \cdot A_m B_{n-m+2}] = 0$$

für jede einfache Grösse B_{n-m+2} dieser Art erfüllt ist.

Wir behaupten, dass diese nothwendige Bedingung zugleich auch hinreichend ist*).

Für $m = 2$ und $m = n - 1$ ist diese Behauptung sicher richtig, denn im ersten Falle ist die einfache Grösse B_{n-m+2} eine Zahl und unsre Bedingung (4) reducirt sich somit auf die Bedingung des Satzes 2, S. 404, im zweiten Falle aber ist unsre Bedingung (4) sogar überflüssig, da nach Satz 1, S. 402 alle Grössen $(n-1)$-ter Stufe im Hauptgebiete n-ter Stufe einfach sind. *Wenn wir daher annehmen, dass unsre Behauptung für alle Grössen $(m-1)$-ter und m-ter Stufe in einem Hauptgebiete $(n-1)$-ter Stufe gilt, und zeigen, dass sie unter dieser Voraussetzung auch für die Grössen m-ter Stufe im Hauptgebiete n-ter Stufe richtig ist, so ist sie damit allgemein bewiesen.* Denn die gemachte Annahme ist für $n = 5$ und $m = 3$ erfüllt, also ist dann unsre Behauptung für $n = 5$ und $m = 2, 3, 4$ richtig, also auch für $n = 6$ und $m = 2, 3, 4, 5$ und so weiter.

Wir nehmen also jetzt an, dass die vorgelegte Grösse A_m die Gleichungen (4) befriedigt, welche einfache Grösse $(n - m + 2)$-ter Stufe auch B_{n-m+2} sein mag, und setzen überdies voraus, dass jede Grösse $(m-1)$-ter oder m-ter Stufe eines Hauptgebietes $(n-1)$-ter Stufe, die den entsprechenden Gleichungen genügt, einfach ist. Zu zeigen ist, dass dann auch A_m selbst einfach ist.

Wenn wir alle Grössen, die dem Gebiete $(n-1)$-ter Stufe $e_1, \dots e_{n-1}$ angehören, mit grossen deutschen Buchstaben schreiben und ihre Stufenzahlen, wie bisher, durch Indices andeuten, so können wir setzen:

$$A_m = \mathfrak{A}_m + [e_n \mathfrak{A}_{m-1}],$$

während B_{n-m+2} die Form erhält:

$$B_{n-m+2} = \mathfrak{B}_{n-m+2} + \lambda [e_n \mathfrak{B}_{n-m+1}],$$

wo λ eine beliebige Zahlgrösse ist, wo ferner wegen der Einfachheit von B_{n-m+2} sowohl $\mathfrak{B}_{n-m+2}$ als $\mathfrak{B}_{n-m+1}$ eine einfache Grösse ist, und wo endlich, aus demselben Grunde, $\mathfrak{B}_{n-m+1}$ dem $\mathfrak{B}_{n-m+2}$ untergeordnet und somit als Faktor von $\mathfrak{B}_{n-m+2}$ darstellbar ist.

Werden die Hauptgebiete der einzelnen Produkte wie auf S. 405 durch Indices angedeutet, so ergiebt sich nunmehr:

---

*) Man könnte auf den Gedanken kommen, zu vermuthen, dass A_m schon dann einfach sei, wenn es nur bei der Multiplikation mit jeder beliebigen Einheit $(n - m + 2)$-ter Stufe eine einfache Grösse zweiter Stufe liefert. Dem ist aber nicht so, denn zum Beispiel die Grösse

$$[e_1 e_2 e_3] + [e_4 e_5 e_6]$$

des Hauptgebietes $e_1, \dots e_6$ ist nicht einfach, liefert aber doch, wenn sie mit einer der Einheiten fünfter Stufe in diesem Hauptgebiete multiplicirt wird, stets eine einfache Grösse zweiter Stufe.

$$[A_m B_{n-m+2}]_n = \lambda[\mathfrak{A}_m \cdot e_n \mathfrak{B}_{n-m+1}]_n + [e_n \mathfrak{A}_{m-1} \cdot \mathfrak{B}_{n-m+2}]_n + \\ + \lambda[e_n \mathfrak{A}_{m-1} \cdot e_n \mathfrak{B}_{n-m+1}]_n,$$

weil das Produkt $[\mathfrak{A}_m \mathfrak{B}_{n-m+2}]_n$ nach Nr. 109 verschwindet, und hieraus folgt nach unserm Hülfssatze und nach Nr. 107, Anm., erste Formel (S. 77):

$$[A_m B_{n-m+2}]_n = (-1)^{n-m+1}\lambda[\mathfrak{A}_m \mathfrak{B}_{n-m+1}]_{n-1} + \\ + (-1)^{n-1}[\mathfrak{A}_{m-1}\mathfrak{B}_{n-m+2}]_{n-1} + (-1)^{n-1}\lambda\left[e_n \cdot [\mathfrak{A}_{m-1}\mathfrak{B}_{n-m+1}]_{n-1}\right],$$

wo die scharfe Klammer ohne Index ein äusseres Produkt anzeigt.

Denken wir uns jetzt die Gleichung (4) gebildet, die nach unsrer Voraussetzung von der Grösse A_m für jede beliebige einfache Grösse B_{n-m+2} erfüllt wird.

Wegen des Auftretens von e_n und wegen der Willkürlichkeit von λ zerlegt sich diese Gleichung ähnlich wie auf S. 404 in die folgenden:

$$(5)\quad \begin{cases} \left[[\mathfrak{A}_{m-1}\mathfrak{B}_{n-m+2}]_{n-1}[\mathfrak{A}_{m-1}\mathfrak{B}_{n-m+2}]_{n-1}\right] = 0 \\ \left[[\mathfrak{A}_m \quad \mathfrak{B}_{n-m+1}]_{n-1}[\mathfrak{A}_m \quad \mathfrak{B}_{n-m+1}]_{n-1}\right] = 0 \end{cases}$$

$$(6)\quad \left[[\mathfrak{A}_{m-1}\mathfrak{B}_{n-m+2}]_{n-1}[\mathfrak{A}_{m-1}\mathfrak{B}_{n-m+1}]_{n-1}\right] = 0$$

$$(7)\quad \left[[\mathfrak{A}_m \quad \mathfrak{B}_{n-m+1}]_{n-1}[\mathfrak{A}_{m-1}\mathfrak{B}_{n-m+1}]_{n-1}\right] = 0$$

$$(8)\quad \left[[\mathfrak{A}_m \quad \mathfrak{B}_{n-m+1}]_{n-1}[\mathfrak{A}_{m-1}\mathfrak{B}_{n-m+2}]_{n-1}\right] = 0,$$

wobei schon berücksichtigt ist, dass der eine Faktor von λ^2 von selbst gleich Null wird, weil er e_n zweimal enthält.

Unter den gefundenen Gleichungen wählen wir die aus, in denen jedesmal nur eine der beiden Grössen $\mathfrak{B}_{n-m+1}$ und $\mathfrak{B}_{n-m+2}$ enthalten ist, also die Gleichungen (5) und (7). In diesen können wir für $\mathfrak{B}_{n-m+1}$ und $\mathfrak{B}_{n-m+2}$ jede beliebige einfache Grösse von der betreffenden Stufenzahl in dem Hauptgebiete $e_1, \dots e_{n-1}$ einsetzen.

Die Gleichungen (5) sind aber für die Grössen $\mathfrak{A}_{m-1}$ und $\mathfrak{A}_m$ in dem Hauptgebiete $e_1, \dots e_{n-1}$ ganz dasselbe, was (4) für die Grösse A_m in dem Hauptgebiete $e_1, \dots e_n$ ist, das heisst, sie sind die nothwendigen und, wie auf S. 406 vorausgesetzt wurde, auch die hinreichenden Bedingungen für die Einfachheit der Grössen $\mathfrak{A}_{m-1}$ und $\mathfrak{A}_m$. Wir dürfen demnach setzen:

$$\mathfrak{A}_m = [u_1 \dots u_m], \quad \mathfrak{A}_{m-1} = [v_1 \dots v_{m-1}],$$

wo die u_k und v_j Grössen erster Stufe des Gebietes $e_1, \dots e_{n-1}$ sind.

Die Gleichung (6) ist nunmehr von selbst erfüllt. Da nämlich $\mathfrak{B}_{n-m+1}$ dem $\mathfrak{B}_{n-m+2}$ untergeordnet ist, so ist auch das gemeinsame Gebiet von $\mathfrak{A}_{m-1}$ und $\mathfrak{B}_{n-m+1}$ dem gemeinsamen Gebiete von $\mathfrak{A}_{m-1}$ und $\mathfrak{B}_{n-m+2}$ untergeordnet und folglich das äussere Produkt auf der linken Seite von (6) null. Es bleibt somit nur noch festzustellen, was sich aus den Gleichungen (7) und (8), insbesondere aus der Gleichung (7) über die Beschaffenheit von $\mathfrak{A}_m$ und $\mathfrak{A}_{m-1}$ schliessen lässt. Dabei können wir annehmen, dass $\mathfrak{A}_{m-1}$ und $\mathfrak{A}_m$ beide $\gtrless 0$ sind, denn wäre eine dieser beiden Grössen null, so wäre es schon sicher, dass A_m einfach ist. Demnach dürfen wir voraussetzen, dass weder zwischen $u_1, \dots u_m$, noch zwischen $v_1, \dots v_{m-1}$ eine Zahlbeziehung besteht.

Da die beiden durch $u_1, \dots u_m$ und durch $v_1, \dots v_{m-1}$ bestimmten Gebiete nicht alle Grössen des Gebietes $e_1, \dots e_{n-1}$ enthalten, so können wir in dem

Gebiete $e_1, \ldots e_{n-1}$ immer eine Grösse w_m von erster Stufe finden, die sich weder aus $u_1, \ldots u_m$, noch aus $v_1, \ldots v_{m-1}$ ableiten lässt; ebenso eine Grösse w_{m+1}, die sich weder aus $u_1, \ldots u_m, w_m$ noch aus $v_1, \ldots v_{m-1}, w_m$ ableiten lässt. Setzen wir dieses Verfahren fort, so gelangen wir schliesslich zu $n-m-1$ Grössen erster Stufe $w_m, w_{m+1}, \ldots w_{n-2}$ von solcher Beschaffenheit, dass weder zwischen den u_μ und den w_k noch zwischen den v_ν und den w_k eine Zahlbeziehung besteht. Zu diesen Grössen können wir jetzt noch eine Grösse erster Stufe w_{n-1} hinzufügen, so dass auch noch $v_1, \ldots v_{m-1}, w_m, \ldots w_{n-1}$ in keiner Zahlbeziehung stehen, während dann zwischen $u_1, \ldots u_m, w_m, \ldots w_{n-1}$ nothwendig eine aber auch nur eine Zahlbeziehung besteht.

Unter diesen Voraussetzungen haben die beiden Gebiete $u_1, \ldots u_m$ und $w_m, \ldots w_{n-1}$ ein Gebiet erster aber keines von höherer Stufe gemein, während die beiden Gebiete $v_1, \ldots v_{m-1}$ und $w_m, \ldots w_{n-1}$ überhaupt kein Gebiet gemein haben. Ist daher v_μ eine beliebige der Grössen $v_1, \ldots v_{m-1}$, so wird durch $v_\mu, w_m, \ldots w_{n-1}$ ein Gebiet $(n-m+1)$-ter Stufe bestimmt sein, das mit dem Gebiete $v_1, \ldots v_{m-1}$ nur das Gebiet erster Stufe v_μ, aber keines von höherer Stufe gemein hat, und das mit dem Gebiete $u_1, \ldots u_m$ (nach 26) ein Gebiet zweiter Stufe, etwa das Gebiet u_1', u_2', aber nach dem Obigen keines von höherer Stufe gemein hat.

Wir setzen nun

$$\mathfrak{B}_{n-m+1} = [v_\mu w_m \ldots w_{n-1}],$$

wo das Produkt auf der rechten Seite unter den gemachten Voraussetzungen sicher nicht gleich Null ist. Dann wird nach Nr. 109 und 118:

$$[\mathfrak{A}_m \mathfrak{B}_{n-m+1}]_{n-1} = \varrho[u_1' u_2'], \quad [\mathfrak{A}_{m-1} \mathfrak{B}_{n-m+1}] = \sigma \cdot v_\mu,$$

wo ϱ und σ von Null verschiedene Zahlen sind. Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (7) ein, so kommt:

$$[u_1' u_2' v_\mu] = 0,$$

mithin müssen u_1', u_2' und v_μ nach 66 in einer Zahlbeziehung stehen, oder, da zwischen u_1' und u_2' keine Zahlbeziehung stattfinden kann, so muss v_μ aus u_1' und u_2' ableitbar sein, das heisst, v_μ muss dem Gebiete $u_1, \ldots u_m$ angehören. Da endlich v_μ eine beliebige der Grössen $v_1, \ldots v_{m-1}$ war, so erkennen wir, dass $\mathfrak{A}_{m-1}$ selbst dem Gebiete $u_1, \ldots u_m$ angehört und also der Grösse $\mathfrak{A}_m$ untergeordnet ist. Nach Nr. 79b lässt sich daher $\mathfrak{A}_m$ in der Form:

$$\mathfrak{A}_m = [u_m' \mathfrak{A}_{m-1}] = [u_m' v_1 \ldots v_{m-1}]$$

darstellen und es ergiebt sich somit:

$$A_m = [(u_m' + e_n) v_1 \ldots v_{m-1}].$$

Also ist A_m wirklich einfach.

Erwähnt sei noch, dass die Gleichung (8) jetzt von selbst erfüllt ist. Da nämlich $\mathfrak{A}_{m-1}$ dem $\mathfrak{A}_m$ und $\mathfrak{B}_{n-m+1}$ dem $\mathfrak{B}_{n-m+2}$ untergeordnet ist, so haben die beiden einfachen Grössen zweiter Stufe:

$$[\mathfrak{A}_m \mathfrak{B}_{n-m+1}]_{n-1}, \quad [\mathfrak{A}_{m-1} \mathfrak{B}_{n-m+2}]_{n-1}$$

ein Gebiet erster Stufe gemein, nämlich das gemeinsame Gebiet von $\mathfrak{A}_{m-1}$ und $\mathfrak{B}_{n-m+1}$, ihr Produkt ist daher sicher null.

Damit ist unsre Behauptung, dass die Bedingung (4) nicht blos nothwendig sondern auch hinreichend sei, bewiesen, und wir haben den

Satz 3. *Eine Grösse m-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe ist, sobald $1 < m < n - 1$, dann und nur dann einfach, wenn sie mit jeder einfachen Grösse $(n - m + 2)$-ter Stufe multiplicirt eine einfache Grösse zweiter Stufe liefert.*

Wir müssen jetzt noch zeigen, wie man das gefundene Kriterium durch Zahlgleichungen ausdrücken kann.

Sind $E_1, \ldots E_M$ die Einheiten m-ter Stufe des Hauptgebietes $e_1, \ldots e_n$, so ist

$$A_m = \sum_1^M{}^\mu \alpha_\mu E_\mu$$

die allgemeine Form einer Grösse m-ter Stufe dieses Gebietes; es wird also:

$$[A_m B_{n-m+2}] = \sum_\mu \alpha_\mu [E_\mu B_{n-m+2}]$$

und:

$$[A_m B_{n-m+2} \cdot A_m B_{n-m+2}] = \sum_{\mu\nu} \alpha_\mu \alpha_\nu [E_\mu B_{n-m+2} \cdot E_\nu B_{n-m+2}].$$

Soll A_m einfach sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass dieser Ausdruck für jede einfache Grösse B_{n-m+2} verschwindet. Diese Bedingung kommt darauf hinaus, dass die Koefficienten $\alpha_1, \ldots \alpha_M$ einer Reihe von quadratischen Gleichungen genügen müssen, deren Aufstellung jedenfalls theoretisch keine Schwierigkeiten hat. B_{n-m+2} hat ja die Form:

$$B_{n-m+2} = \prod_1^{n-m+2}{}^\tau (\lambda_{\tau 1} e_1 + \cdots + \lambda_{\tau n} e_n),$$

wo die $\lambda_{\tau k}$ willkürliche Parameter sind; man hat daher blos die Gleichungen zwischen den α_μ aufzustellen, die bestehen müssen, damit der vorhin angegebene Ausdruck für alle Werthe der $\lambda_{\tau k}$ verschwindet.

Uebrigens braucht man diese Untersuchung nicht für alle Werthe $m = 2, 3, \ldots n - 2$ durchzuführen, sondern nur für die Werthe $2, 3, \ldots E\left(\frac{n}{2}\right)$, wo $E\left(\frac{n}{2}\right)$ die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet. Es folgt dies daraus, dass die Ergänzung einer einfachen Grösse m-ter Stufe eine einfache Grösse $(n - m)$-ter Stufe ist (s. Nr. 90, Zusatz und die Anm. zu Nr. 103, S. 412, Satz 2).

Die einfachen Grössen m-ter Stufe eines Hauptgebietes n-ter Stufe sind nichts anderes als die ebenen $(m - 1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten eines ebenen $(n - 1)$-fach ausgedehnten Raumes; die Grössen $\alpha_1, \ldots \alpha_M$ sind die homogenen Koordinaten der betreffenden Mannigfaltigkeiten. Es ist also hier die Aufgabe gelöst, alle Gleichungen zwischen den Grössen $\alpha_1, \ldots \alpha_M$ aufzustellen, die bestehen müssen, wenn $\alpha_1, \ldots \alpha_M$ die homogenen Koordinaten einer solchen ebenen Mannigfaltigkeit sein sollen. (Man vgl. hierzu auch die Nachträge.)

Nr. **89.** S. 62. Das Ergänzungszeichen | wird von Grassmanns Söhnen gelesen: „in", was vermuthlich auf Grassmann selbst zurückgeht.

Nr. **90.** S. 62. Der Uebergang von den Grössen eines Hauptgebietes zu deren Ergänzungen ist eine Operation, die vom Standpunkte der projectiven Geometrie aus betrachtet zu den Reciprocitäten (dualistischen Transformationen) gehört und zwar zu den speciellen Reciprocitäten, die man als Polarsysteme bezeichnet.

Ist $a = \Sigma x_k e_k$ eine beliebige Grösse erster Stufe, so ist die Ergänzung: $|a = \Sigma \{ x_k |e_k \}$ eine Grösse $(n - 1)$-ter Stufe, die nach Nr. 88 und der Anmerkung

dazu (s. S. 402) sicher einfach ist. Das Gebiet dieser Grösse besteht aus allen Grössen erster Stufe: $b = \Sigma y_k e_k$, die ihr untergeordnet sind, die also der Gleichung $[b \,|\, a] = 0$ genügen. Nun ist aber nach Nr. 143:

$$[\Sigma y_k e_k \,|\, \Sigma x_j e_j] = \Sigma x_k y_k,$$

also besteht das Gebiet von $|\Sigma x_j e_j$ aus allen Grössen erster Stufe: $\Sigma y_k e_k$, für die $\Sigma x_k y_k = 0$ ist. Deuten wir daher die Einheiten $e_1, \dots e_n$ als n nicht in einer $(n-2)$-fach ausgedehnten Ebene liegende Punkte eines $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes und demnach $x_1, \dots x_n$ als homogene Koordinaten der Punkte dieses Raumes (vgl. Nr. 232 und 238), so wird das Gebiet der Ergänzung von $\Sigma x_k e_k$ nichts anderes als die $(n-2)$-fach ausgedehnte Polarebene des Punktes $x_1, \dots x_n$ in Bezug auf die Mannigfaltigkeit zweiten Grades: $\Sigma x_k^2 = 0$.

Eine andre Deutung der Ergänzung erhalten wir, wenn wir $e_1, \dots e_n$ als n solche Strecken (unendlich ferne Punkte) eines n-fach ausgedehnten Raumes auffassen, die nicht einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Ebene dieses Raumes parallel sind (vgl. Nr. 229), und wenn wir gleichzeitig die Zahlen $x_1, \dots x_n$ als recht- oder schiefwinklige Parallelkoordinaten deuten. Dann ist die Ergänzung von $\Sigma x_k e_k$ ein Produkt von $n - 1$ Strecken, die parallel sind zu der $(n-1)$-fach ausgedehnten Polarebene des unendlich fernen Punktes der Strecke $\Sigma x_k e_k$ in Bezug auf eine beliebige der ∞^1 Mannigfaltigkeiten zweiten Grades:

$$\Sigma x_k^2 = \text{const.}$$

Von diesen beiden, allerdings nicht wesentlich verschiedenen, Deutungen wendet Grassmann in der A_2 nur die zweite an und auch diese nur für den Fall rechtwinkliger Parallelkoordinaten. Man vgl. Nr. 93 Anm. und die Nrn. 330, 331, 335. Die erste Deutung findet sich in der schon auf S. 402 angeführten Abhandlung Grassmanns in Bd. 84 des Crelleschen Journals. Vgl. auch die Bemerkungen R. Sturms in dem Nachrufe auf Grassmann, Math. Ann. Bd. 14, S. 16.

Nr. **94.** S. 65. Durch diese Erklärung werden äussere Produkte von zwei Faktoren, deren Stufensumme die Stufenzahl des Hauptgebietes übertrifft, von der Betrachtung ausgeschlossen. Das erscheint auch zweckmässig, da alle solchen Produkte den Werth Null haben würden.

Nr. **94,** Anm. S. 65, Z. 18—16 v. u. Das dürfte doch etwas zu viel behauptet sein; vgl. die Anmerkung zu Nr. 48—51, S. 399.

Nr. **95.** S. 66, Z. 21 f. v. o. Bei der Berufung auf Nr. 79 liegt ein Gedanke zu Grunde, der verdient hätte, als ein besonderer Satz zwischen Nr. 94 und 95 ausgesprochen zu werden; etwa so:

94**a.** *Sind die Stufenzahlen der beiden einfachen Grössen A und B zusammen nicht grösser als die Stufenzahl n des Hauptgebietes, so erhält man das progressive Produkt von A und B, indem man die Reihe der einfachen Faktoren von A mit den einfachen Faktoren von B kombinatorisch multiplicirt, also für* $q + r \leqq n$:

$$[(a_1 a_2 \dots a_q)(b_1 b_2 \dots b_r)] = [a_1 a_2 \dots a_q b_1 b_2 \dots b_r].$$

Beweis. Nach Nr. 94 ist das progressive Produkt von A und B ein äusseres Produkt dieser Grössen; das übrige folgt aus Nr. 79.

Nr. **101.** S. 70 f. Der Zusatz auf S. 71, Z. 5 v. o. war deshalb nothwendig, weil die darin ausgesprochene Umkehrung des Satzes 101 später mehrmals benutzt wird, zum Beispiel in Nr. 119, 119b, 120 und 124.

Nr. **101,** Anm. S. 71, Z. 10, 9 v. u., nämlich in Nr. 112, 116b, 119b, 127—131, 306—322, 377, 383 Anm.

Nr. **102.** S. 72, Z. 3 f. v. o. Das Produkt $[QR]$ ist nämlich progressiv. In der That, bezeichnet man die Stufenzahlen von E, F, G, Q, R mit den entsprechenden kleinen Buchstaben, so wird:

$$q = n - (e + f), \quad r = n - (e + g),$$

demnach:

$$q + r = 2n - 2e - f - g$$

oder, da $e + f + g = n$ ist, $q + r = n - e$, das heisst:

$$q + r < n,$$

woraus folgt, dass das Produkt $[QR]$ wirklich progressiv ist.

Nr. **103.** S. 72—75. Der Anfang des Beweises von Nr. 103 (S. 72, Z. 6—4 v. u.) passt nicht ganz zu dem Folgenden, denn nachher (s. S. 73, Z. 1 v. o., 15 v. u.) wird offenbar vorausgesetzt, dass jeder der n Faktoren erster Stufe: $a_1, a_2, \ldots$ nur in *einer* der drei Grössen A, B, C enthalten sei, was sich aus den einleitenden Worten nicht gut herauslesen lässt. Dieser Uebelstand wird vermieden, wenn man dem Anfange des Beweises folgende Fassung giebt: „Es sei $a_1, \ldots a_n$ irgend eine gegebene Reihe von n Grössen erster Stufe und es werde angenommen, dass die Formel 103 immer dann gilt, wenn die n in A, B und C enthaltenen einfachen Faktoren, in irgend einer Reihenfolge genommen, mit der Reihe der Grössen $a_1, \ldots a_n$ übereinstimmen, so zeige ich“ u. s. w. Man muss dabei beachten, dass $a_1, \ldots a_n$ ganz beliebig sind, also auch in Zahlbeziehungen zu einander stehen können, ja nicht einmal von einander verschieden zu sein brauchen.

Der Beweis von Nr. 103 ist deshalb besonders bemerkenswerth, weil er den invarianten Charakter der Gleichung:

$$[AB \,.\, AC] = [ABC]\,A$$

auf das Klarste hervortreten lässt. Er beruht ja darauf, dass diese Gleichung auch dann noch bestehen bleibt, wenn man die einfachen Faktoren von A, B, C durch beliebige aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen ersetzt, und da die Gleichung in Nr. 102 für Produkte von Einheiten bewiesen ist, so ist sie damit allgemein bewiesen. Erinnern wir uns der Anmerkung zu Nr. 76, S. 401, so können wir offenbar auch sagen: *Die obige Gleichung bleibt invariant, wenn man die Grössen $\Sigma x_k e_k$ des Hauptgebietes $e_1, \ldots e_n$ einer beliebigen linearen homogenen Transformation: $x_i' = \Sigma \alpha_{ik} x_k$ unterwirft.*

Wir müssen es dem Leser überlassen, sich diesen invarianten Charakter der Gleichungen der Ausdehnungslehre in jedem einzelnen Falle klar zu machen. Wir wollten nur hier an einem besonders auffallenden Beispiele darauf hinweisen.

Nicht unerwähnt bleiben darf der Umstand, dass die Gleichung von Nr. 103 in der A_1 in ganz anderer Weise eingeführt wird als in der A_2. In der A_1 dient diese Gleichung zur Definition des eingewandten (regressiven) Produktes (A_1, § 132 und 133, diese Ausg. I, 1, S. 217—219). In der A_2 dagegen wird das regressive Produkt auf Grund eines neuen Begriffes, des Begriffes der *Ergänzung,* in Nr. 94 in der denkbar einfachsten Weise definirt, und dann wird die Gleichung von Nr. 103 *bewiesen,* wodurch der Begriff des regressiven Produktes wieder von dem der Ergänzung unabhängig gemacht ist.

Man kann die Formel von Nr. 103:

$$[AB \,.\, AC] = [ABC]\,A,$$

wo die Summe der Stufenzahlen von A, B, C gleich der Stufenzahl des Hauptgebietes ist, zur Ableitung einer Reihe von Sätzen benutzen, die Grassmann

zwar nirgends ausdrücklich ausgesprochen hat, die aber eigentlich in sein System gehören, und die er auch zum Theile stillschweigend benutzt hat. Wir wollen diese Sätze hier aufstellen und beweisen.

Satz 1. *Ein Produkt von beliebig vielen einfachen Grössen ist stets wieder eine einfache Grösse.*

Wir brauchen diesen Satz offenbar nur für ein Produkt aus zwei Faktoren zu beweisen. Es seien also L und M zwei nicht verschwindende einfache Grössen mit den Stufenzahlen λ und μ. Ist n die Stufenzahl des Hauptgebietes und $\lambda + \mu \leq n$, so ist das Produkt $[LM]$ progressiv und daher sicher eine einfache Grösse*). Ist andrerseits $\lambda + \mu > n$, so lassen sich L und M nach Nr. 87 in der Form:

$$L = [AL_1], \quad M = [AM_1]$$

darstellen, wo A, L_1, M_1 einfache Grössen sind und A insbesondere von $(\lambda + \mu - n)$-ter Stufe ist. Es wird nunmehr:

$$[LM] = [AL_1 \,.\, AM_1] = [AL_1 M_1]A,$$

da die Voraussetzungen von Nr. 103 erfüllt sind, und hier ist $[AL_1 M_1]$ ein progressives Produkt n-ter Stufe, also eine Zahl. Somit ist das Produkt $[LM]$ auch im Falle $\lambda + \mu > n$ eine einfache Grösse. Damit ist unser Satz bewiesen.

Satz 2. *Die Ergänzung einer einfachen Grösse ist stets wieder eine einfache Grösse.*

Beweis. Dass die Ergänzung einer Grösse *erster Stufe* wieder eine einfache Grösse ist, liegt auf der Hand; denn diese Ergänzung ist von $(n - 1)$-ter Stufe, und nach Nr. 88 (S. 61) und nach der Anmerkung dazu (S. 402) ist überhaupt jede Grösse $(n - 1)$-ter Stufe einfach.

Ist andrerseits A eine einfache Grösse *m-ter Stufe*, so kann man setzen: $A = [a_1 \ldots a_m]$, wo $a_1, \ldots a_m$ Grössen erster Stufe sind. Nach Nr. 98 wird daher:

$$|A = [\,|a_1\, |a_2 \ldots |a_m\,].$$

Hier sind $|a_1$, $|a_2, \ldots$ wie eben gezeigt, einfache Grössen $(n - 1)$-ter Stufe, nach dem vorhin bewiesenen Satze 1 ist daher auch ihr Produkt, das heisst die Ergänzung von A eine einfache Grösse.

Der dritte Satz, den wir hier beweisen wollen, ist das Gegenstück zu Nr. 79b und kann folgendermassen ausgesprochen werden**):

Satz 3. *Sind A und B zwei von Null verschiedene einfache Grössen und ist A dem B untergeordnet, so lässt sich A in der Form:*

$$A = [BC]$$

darstellen, wo C eine einfache Grösse und wo das Produkt $[BC]$ regressiv ist.

Beweis. Es seien α und β die Stufenzahlen von A und B, und B sei nach 79b als progressives Produkt in der Form: $B = [AL]$ dargestellt, wo L eine einfache Grösse $(\beta - \alpha)$-ter Stufe ist. Ferner sei D eine einfache Grösse $(n - \beta)$-ter Stufe, die mit B und folglich auch mit A kein Gebiet erster Stufe gemein hat, so dass also $[BD]$ eine von Null verschiedene Zahl und $[AD]$ ein von Null ver-

*) Für $\lambda + \mu = n$ ist das Produkt eine Zahl; die Zahlen müssen aber auch zu den einfachen Grössen gerechnet werden.

**) In A_1 findet sich dieser ganz beiläufig in einer Anm. zu § 153 (diese Ausg. I, 1, S. 256, 1. Anm.).

schiedenes progressives Produkt ist. Wir wollen uns D insbesondere so gewählt denken, dass $[BD] = 1$ wird. Die Summe der Stufenzahlen von A, L, D ist dann gleich n und es wird somit nach Nr. 103:

$$[B\,.\,AD] = [AL\,.\,AD] = [ALD]A = [BD]A = A,$$

oder, wenn man das progressive Produkt $[AD]$ gleich C setzt:

$$A = [BC].$$

Damit ist die behauptete Darstellung von A geleistet, denn das Produkt $[BC]$ ist augenscheinlich regressiv, da C die Stufenzahl $\alpha + n - \beta$ hat.

Aus der letzten Gleichung folgt nach 97:

$$|A = [|B\,|C],$$

wo $|A$, $|B$, $|C$ nach Satz 2 wieder einfache Grössen sind, und wo jetzt das Produkt $[|B\,|C]$ (nach 115) progressiv ist. Hierin liegt:

Satz 4. *Sind A und B einfache Grössen und ist A dem B untergeordnet, so ist die Ergänzung $|A$ der Ergänzung $|B$ übergeordnet.*

Aus Satz 2 und 4 folgt endlich der

Satz 5. *Die Ergänzungen zweier incidenter einfacher Grössen sind wieder incidente einfache Grössen.*

Nr. **107.** S. 77, Z. 2, 3 v. o. Es ist hier vorausgesetzt, dass

$$[ACD] = [A\,.\,CD] \quad \text{und} \quad [A\,.\,BC] = [ABC]$$

sei, was nicht so ohne Weiteres erlaubt ist. Man kann indes diesen Einwand beseitigen, wenn man wieder, wie beim Beweise der Formel 105, die beiden Fälle unterscheidet, wo die Summe der Stufenzahlen von A, B, C gleich n, und wo sie gleich $2n$ ist.

Im *ersten* Falle lässt sich der Beweis genau wie im Texte von 107 führen; denn setzt man $[BC] = [CD]$, so ist D von gleicher Stufe mit B, also

$$[AC\,.\,BC] = [AC\,.\,CD] = [ACD]C.$$

Hier sind nun die Produkte $[AC]$ und $[ACD]$ progressiv, weil bei beiden der Voraussetzung zufolge die Stufensumme ihrer Faktoren nicht grösser als n ist. Es ist daher (nach 80)

$$[ACD] = [A\,.\,CD]$$

oder, da $[CD] = [BC]$ ist,

$$[ACD] = [A\,.\,BC] = [ABC],$$

und es wird somit wirklich

$$[AC\,.\,BC] = [ABC]C.$$

Ist *zweitens* die Summe der Stufenzahlen von A, B, C gleich $2n$, so verfahre man ebenso wie in dem Beweise von Nr. 105.

Nr. **105—107,** Anm. S. 77, Z. 4—11 v. o. Es seien wie vorher α, β, γ die Stufenzahlen der einfachen Grössen A, B, C. Da die beiden Fälle $\alpha + \beta + \gamma = n$ und $= 2n$ schon in Nr. 105—107 erledigt sind, so brauchen wir nur noch die Fälle: $\alpha + \beta + \gamma < n$, $n < \alpha + \beta + \gamma < 2n$ und $\alpha + \beta + \gamma > 2n$ zu behandeln. Von diesen drei Fällen kommt aber vermöge Nr. 101 der letzte ohne Weiteres auf den ersten zurück, wenn man auf beiden Seiten der zu erweisenden Gleichungen die Ergänzungen nimmt. Denn die Ergänzungen $|A$, $|B$, $|C$ sind ja nach Satz 2 der Anmerkung zu Nr. 103, S. 412 wieder einfache Grössen, und zwar mit den Stufenzahlen $n - \alpha$, $n - \beta$, $n - \gamma$, und aus $\alpha + \beta + \gamma > 2n$ folgt, dass

$$n - \alpha + n - \beta + n - \gamma < n$$

ist. Es bleiben also nur die beiden ersten Fälle zu behandeln.

Wir beginnen mit dem Beweis der ersten Formel (S. 77, Z. 7 v. o.):

$$[AB \,.\, AC] = [A \,.\, ABC].$$

I. Fall. $\alpha + \beta + \gamma < n$. Ist $2\alpha + \beta + \gamma \leqq n$, so sind die Produkte $[AB \,.\, AC]$ und $[A \,.\, ABC]$ beide progressiv und nach Nr. 109 beide null, da jedesmal die Gebiete beider Faktoren ein Gebiet α-ter Stufe gemein haben. Ist dagegen $2\alpha + \beta + \gamma > n$, so sind jene Produkte beide regressiv und wiederum nach 109 beide null, da die einfachen Grössen A, $[AB]$, $[AC]$, $[ABC]$ sämmtlich von einem Gebiete von höchstens $(\alpha + \beta + \gamma)$-ter Stufe umfasst werden.

II. Fall. $n < \alpha + \beta + \gamma < 2n$. Wenn $[AB]$ verschwindet, so sind beide Seiten der zu erweisenden Gleichung null; ist andrerseits $\alpha + \beta = n$, so ist $[AB]$ eine Zahl, die in dem Produkte beliebig gestellt werden kann, und da

$$[ABC] = [(AB)C]$$

ist, so ist die zu erweisende Gleichung ebenfalls richtig. *Wir können daher annehmen, dass* $[AB] \gtrless 0$ *und* $\alpha + \beta \gtrless n$ *ist.*

Nunmehr müssen wir vier verschiedene Unterfälle einzeln behandeln, denn $\alpha + \beta$ kann $< n$ oder $> n$ sein und $\alpha + \gamma$ kann $\leqq n$ oder $\geqq n$ sein.

1. Unterfall. $\alpha + \beta < n$, $\alpha + \gamma \leqq n$, also $2\alpha + \beta + \gamma < 2n$. Werden A, B und C von einem Gebiete niederer als n-ter Stufe umfasst, so gilt dasselbe auch von den Grössen: C, $[AB]$ und $[AC]$, die regressiven Produkte $[AB \,.\, AC]$ und $[(AB)C] = [ABC]$ sind daher nach Nr. 109 beide null. Nehmen wir daher an, *dass* A, B, C *von keinem Gebiete von niederer als n-ter Stufe umfasst werden.*

Unter dieser Voraussetzung haben $[AB]$ und C ein Gebiet $(\alpha + \beta + \gamma - n)$-ter, aber keines von höherer Stufe gemein und lassen sich daher nach Nr. 87 in der Form:

$$[AB] = [DL], \quad C = [DC_1]$$

darstellen, wo die Summe der Stufenzahlen von D, L und C_1 gleich n ist. Nach Nr. 103 wird daher:

$$[ABC] = [DL \,.\, DC_1] = [DLC_1]D,$$

wo $[DLC_1] = [ABC_1]$ eine Zahl ist.

Nunmehr kommt es darauf an, ob A und C ein Gebiet gemein haben oder nicht.

Haben A und C ein Gebiet erster oder höherer Stufe gemein, so gilt dasselbe auch von A und D, nach Nr. 109 sind daher die progressiven Produkte $[AC]$ und $[AD]$ beide null, demnach wird:

$$[A \,.\, ABC] = [DLC_1][AD] = 0 = [AB \,.\, AC],$$

das heisst, die zu erweisende Gleichung ist erfüllt.

Haben dagegen A und C kein Gebiet erster oder höherer Stufe gemein, so gilt dasselbe auch von A und D, folglich sind $[AD]$ und $[AC]$ beide $\gtrless 0$ und zwar wird:

$$[AC] = [A(DC_1)] = [(AD)C_1],$$

da das Produkt $[A(DC_1)]$ rein progressiv ist (s. Nr. 116 und 119). Andrerseits werden $[AB]$ und $[AC]$ nach unsrer Voraussetzung von keinem Gebiete niederer als n-ter Stufe umfasst und haben daher ein Gebiet von $(2\alpha + \beta + \gamma - n)$-ter, aber keines von höherer Stufe gemein; zugleich ist klar, dass $[AD]$ eine Grösse

$(2\alpha + \beta + \gamma - n)$-ter Stufe dieses Gebietes ist. Demnach wird sich $[AB]$ in der Form:

$$[AB] = [(AD)B_1]$$

darstellen lassen und es ergiebt sich nach 103:

$$[AB\,.\,AC] = [(AD)B_1\,.\,(AD)C_1] = [(AD)B_1C_1][AD] = [ABC_1][AD],$$

während der vorhin gefundene Werth von $[ABC]$ ergiebt:

$$[A\,.\,ABC] = [DLC_1][AD] = [ABC_1][AD].$$

Folglich sind beide Ausdrücke gleich.

Damit ist der erste Unterfall vollständig erledigt.

2. Unterfall. $\alpha + \beta > n$, $\alpha + \gamma \leqq n$. Da $[AB] \gtrless 0$ sein soll, so werden die Gebiete von A und B ein Gebiet von $(\alpha + \beta - n)$-ter aber keines von höherer Stufe gemein haben. Ist M eine Grösse dieses Gebietes, so können wir setzen:

$$A = [MA_1], \quad B = [MB_1]$$

und es wird nach Nr. 103:

$$[AB] = [MA_1\,.\,MB_1] = [MA_1B_1]M,$$

wo $[MA_1B_1]$ eine Zahl ist, mithin:

$$[AB\,.\,AC] = [MA_1B_1][M\,.\,AC].$$

Andrerseits ergiebt sich:

$$[A\,.\,ABC] = [MA_1B_1][A\,.\,MC],$$

es ist aber $[A\,.\,MC] = [MA_1\,.\,MC]$ und hier ist die Summe der Stufenzahlen von M, A_1 und C gleich $\alpha + \gamma$, also $\leqq n$, somit kommen wir entweder auf den Fall I oder auf Nr. 103 zurück und finden:

$$[A\,.\,MC] = [MA_1\,.\,MC] = [M\,.\,MA_1C] = [M\,.\,AC],$$

es wird folglich wieder:

$$[AB\,.\,AC] = [A\,.\,ABC].$$

3. und 4. Unterfall. Die beiden noch übrigen Unterfälle: $\alpha + \beta > n$, $\alpha + \gamma \geqq n$ und $\alpha + \beta < n$, $\alpha + \gamma \geqq n$ kommen auf den 1. und 2. zurück, wenn man auf beiden Seiten der zu erweisenden Gleichung die Ergänzungen nimmt.

Die zweite Formel (S. 77, Z. 8 v. o.)

$$[AB\,.\,BC] = [B\,.\,ABC]$$

ist eine unmittelbare Folge der ersten. In der That, man hat: $[ABC] = [(AB)C]$ und $[AB] = \pm [BA]$, also ergiebt sich aus der ersten Formel:

$$[BA\,.\,AC] = [A\,.\,(BA)C] = [A\,.\,BAC],$$

was eben die zweite Formel ist.

Die dritte Formel (S. 77, Z. 9 v. o.):

$$[AC\,.\,BC] = [C\,.\,ABC]$$

kann in den Fällen $\alpha + \beta + \gamma \leqq n$ und $\geqq 2n$ genau so bewiesen werden wie die erste. *In dem Falle $n < \alpha + \beta + \gamma < 2n$ dagegen ist sie nicht mehr allgemein gültig,* wie man am Besten durch Betrachtung eines Beispiels erkennt.

Es sei $n = 5$ und:

$$A = [e_1e_2], \quad B = [e_1e_3], \quad C = [e_4e_5],$$

dann ist $[AB]$ und also auch $[ABC]$ null, andrerseits aber wird:

$$[AC] = [e_1e_2e_4e_5] = [e_1e_4e_5e_2], \quad [BC] = [e_1e_3e_4e_5] = [e_1e_4e_5e_3]$$

und somit:

$$
\begin{aligned}
[AC\,.\,BC] &= [e_1 e_4 e_5 e_2\,.\,e_1 e_4 e_5 e_3] \\
&= [e_1 e_4 e_5 e_2 e_3][e_1 e_4 e_5] && [103] \\
&= [e_1 e_4 e_5] && [58,\ 94],
\end{aligned}
$$

also nicht gleich Null, womit die Unrichtigkeit der dritten Formel in diesem Falle bewiesen ist.

Nr. **108.** S. 77, Z. 15 f. v. o. Beide Formeln sind auch dann noch gültig, wenn B dem A übergeordnet ist, also überhaupt, *wenn A und B incident sind.* Da die erste der beiden Formeln in Nr. 129 in dieser allgemeineren Bedeutung angewendet wird, so wollen wir gleich hier den Beweis beider Formeln auch für den im Texte nicht behandelten Fall erbringen.

Es seien also A, B, C einfache Grössen mit den Stufenzahlen α, β, γ, die Summe der Stufenzahlen von A und C, also $\alpha + \gamma$ sei n und A sei dem B untergeordnet. Dann sind nach der Anmerkung zu Nr. 103 (S. 412 f.) auch $|A$, $|B$, $|C$ einfache Grössen und es ist $|B$ dem $|A$ untergeordnet, überdies ist die Summe der Stufenzahlen von $|A$ und $|C$ gleich $n - \alpha + n - \gamma = 2n - n = n$. Demnach ist nach 108:

$$[|A\,.\,(|B|C)] = [|A|C]|B,$$

$$[|C|B\,.\,|A] = [|C|A]|B,$$

und hieraus folgt nach 101 das Bestehen der Gleichungen von Nr. 108 auch in dem jetzt betrachteten Falle.

Nr. **112.** S. 82 f. Vermöge dieses Satzes kann man jede einfache Grösse eines Hauptgebietes n-ter Stufe als ein rein regressives Produkt von einfachen Grössen $(n-1)$-ter Stufe darstellen. Ist nämlich eine einfache Grösse m-ter Stufe vorgelegt: $C = [a_1 \ldots a_m]$, so braucht man nur $n - m$ Grössen erster Stufe a_{m+1}, $\ldots a_n$ so zu bestimmen, dass sie unter einander und mit $a_1, \ldots a_m$ in keiner Zahlbeziehung stehen und dass $[a_1 a_2 \ldots a_n] = 1$ wird. Definirt man dann die Grössen $A_1, \ldots A_n$ so wie in Nr. 112, so hat man: $C = [A_n A_{n-1} \ldots A_{m+1}]$. Zugleich ist hierdurch die Möglichkeit gegeben, die Ergänzung von C in einfacher Weise als ein kombinatorisches Produkt von Grössen erster Stufe darzustellen. Nach Nr. 98 wird ja:

$$C = [|A_n|A_{n-1} \ldots A_{m+1}],$$

wo die A_k Grössen erster Stufe sind, die sofort hingeschrieben werden können, sobald man ermittelt hat, in welcher Weise $A_1, \ldots A_n$ aus den n Einheiten $(n-1)$-ter Stufe abgeleitet sind.

Es leuchtet ein, dass man hierdurch in den Stand gesetzt ist, nach Belieben bald Grössen erster, bald Grössen $(n-1)$-ter Stufe zu Grunde zu legen. In der Sprache der modernen projectiven Geometrie kommt das darauf hinaus, dass man bald mit Punkt- bald mit Ebenenkoordinaten rechnet.

Uebrigens hätten in dem Satze Nr. 112 zwei besondere Fälle der darin bewiesenen allgemeinen Formel ausdrücklich erwähnt werden sollen. Es sind das die beiden Formeln:

$$[A_n A_{n-1} \ldots A_2] = a_1$$

und:

$$[A_n A_{n-1} \ldots A_1] = 1,$$

die nachher (vgl. Nr. 292, 299 und 300) mehrfach benutzt werden.

Der Satz 112 ist später von Clebsch in den Göttinger Abh. Bd. XVII (1872) und von F. Meyer in seinem Buche: „Apolarität und rationale Curven“ Tübingen 1883 benutzt worden und zwar in der Form eines Satzes über Matrices.

Nr. **113.** S. 83. Da A die Stufenzahl α hat, so ist $n - \alpha$ die Stufenzahl der D_r und $m - (n - \alpha) = m + \alpha - n$ die der C_r; demnach ist $m + \alpha$ nothwendig $> n$ und somit das Produkt $[AB]$ regressiv. Da nun die $[AD_r]$ Zahlen sind und die C_r dem Gebiete der einfachen Grösse B angehören, so kommt der ganze Satz auf Folgendes hinaus: *Wird eine beliebige Grösse A mit einer einfachen Grösse B multiplicirt und ist das Produkt $[AB]$ regressiv, so ist $[AB]$ eine dem Gebiete von B angehörige Grösse, für die in dem Satze eine explicite Darstellung gegeben wird.*

Zur Fassung des Satzes ist zu bemerken, dass in dem Falle, wo die Stufenzahl der C_r gleich $m - 1$ ist, jedes D_r nur einen der einfachen Faktoren von B enthält, und dass man dann die Gleichung $[C_r D_r] = B$ unter Umständen nur durch Aenderung des Vorzeichens des betreffenden einfachen Faktors befriedigen kann.

Der Beweis von Nr. 113 enthält eine Lücke. Bildet man nämlich nach Anleitung von S. 83, Z. 13—11 v. u. alle Kombinationen $A_1, A_2, \ldots$ von der Beschaffenheit, dass A_r jedesmal aus den Grössen $b_1, \ldots b_n$ besteht, die in D_r fehlen, so erhält man keineswegs alle Kombinationen von $b_1, \ldots b_n$ zur α-ten Klasse, während doch A im Allgemeinen erst aus allen diesen Kombinationen numerisch ableitbar ist. Diese Lücke lässt sich jedoch leicht ausfüllen.

Wir können A immer in der Form:

$$A = \Sigma \alpha_r A_r + \Sigma \alpha_a' A_a'$$

schreiben, wo jedes A_r gerade $m - (n - \alpha)$ und nicht mehr von den m Faktoren $b_1, \ldots b_m$ enthält, während jedes A_a' mindestens $m - (n - \alpha) + 1$ von diesen m Faktoren enthält. Dann hat jedes A_a' mit jedem D_r mindestens einen Faktor erster Stufe gemein und die progressiven Produkte $[A_a' D_r]$ sind daher alle null; ferner hat B mit jedem A_a' ein Gebiet von höherer als $(m + \alpha - n)$-ter Stufe gemein, es sind daher auch die regressiven Produkte $[A_a' B]$ alle null. Bilden wir nun das Produkt $[AB]$, so wird wie im Texte:

$$[AB] = \Sigma \alpha_r [A_r B] = \Sigma \alpha_r [A_r D_r] C_r = \sum_{rs} \alpha_s [A_s D_r] C_r,$$

wofür man wegen $[A_a' D_r] = 0$ auch schreiben kann:

$$[AB] = \sum_r [(\Sigma \alpha_s A_s + \Sigma \alpha_a' A_a') D_r] C_r = \Sigma [AD_r] C_r.$$

Nr. **120.** S. 89. Der Begriff der Kongruenz wird von dieser Nummer ab in etwas allgemeinerer Bedeutung gebraucht, als der in Nr. 2 aufgestellten Erklärung des Kongruenzbegriffes entspricht. Während nämlich dort nur zwei von Null verschiedene Grössen kongruent genannt wurden, wenn sie einer Zahlbeziehung unterliegen, wird von jetzt ab auch von zwei verschwindenden Grössen gesagt, sie seien kongruent. (Vgl. namentlich den zweiten Theil des Beweises von Nr. 121 und Nr. 313 Anm.)

Nr. **125,** Anm. S. 96, Z. 16—4 v. u. Sind im Falle e) $q + r$ und $q + s$ beide $< n$, so wird:

$$[BAC] = (-1)^{qr} [ABC] \qquad [58]$$

$$= (-1)^{qr + (r-t)(s-t)} [ACB] \qquad [124\text{e}],$$

ferner:

$$[ACB] = (-1)^{(n-q-s)(n-r)} [B \,.\, AC] \qquad [120, \text{Bew. } 1]$$

und demnach, wegen: $n - q - s = r - t$ und $s - t + n - r = 2n - 2r - q$ wirklich:

$$[BAC] = (-1)^{qt}[B\,.\,AC].$$

Der Fall, wo $q+r$ und $q+s$ beide $> n$ sind, kommt auf den eben erledigten zurück, wenn man auf beiden Seiten die Ergänzungen nimmt.

Ist im Falle f) $q+r<n$ und $q+s>n$, so ist $q+s-n+r<n$, also:

$$[BAC] = (-1)^{qr}[ABC] = (-1)^{qr}[ACB] \qquad [124\text{f}]$$
$$= (-1)^{qr+(q+s-n)r}[B\,.\,AC] \qquad [95,\ 58]$$
$$= (-1)^{r(n-s)}[B\,.\,AC].$$

Der Fall, wo $q+r>n$ und $q+s<n$, kommt auf den eben erledigten zurück, wenn man auf beiden Seiten die Ergänzungen nimmt.

Wird eine der beiden Summen $q+r$ oder $q+s$ gleich n, so sind B und C auch im Falle e) incident und es besteht zwischen den beiden Fällen e) und f) kein Unterschied mehr. Daher fällt für $q+r=n$, wo $s=t$ wird, die erste Formel bei e) mit der zweiten bei f) zusammen, und die zweite Formel bei e) mit der ersten bei f). Wird $q+s=n$, so gilt entsprechendes.

Nr. **125**, Anm. S. 96, Z. 4 v. u. „Auch ist zu bemerken“ u. s. w. Man sehe Nr. 123 Beweis 2 und 3.

Nr. **129**. S. 99, Z. 4 v. u. Es ist von Interesse, diesen Ausdruck für die Zurückleitung (Abschattung) mit dem zu vergleichen, den Grassmann in der A_1 gegeben hat.

Die in Nr. 129 mit A, A', B, C bezeichneten Grössen heissen in A_1 der Reihe nach: A, A', G, L (A_1, § 149, diese Ausg. I, 1, S. 250f.) und der in Nr. 129 für A' gegebene Ausdruck erhält bei Benutzung dieser Buchstaben die Gestalt

$$A' = \frac{[G\,.\,AL]}{[GL]}.$$

Es seien nun p und m die Stufenzahlen von A und G und also $n-m$ die Stufenzahl von L. Im Falle der *progressiven* Zurückleitung ist dann (nach Nr. 128) $m \geq p$, also: $p+(n-m) \leq n$ und somit (nach 58 und 120, Beweis 1):

$$[GL] = (-1)^{m(n-m)}[LG], \quad [AL] = (-1)^{p(n-m)}[LA]$$
$$[G\,.\,LA] = (-1)^{(n-m)(m-p)}[LA\,.\,G].$$

Im Falle der *regressiven* Zurückleitung ist dagegen $m \leqq p$, also: $p+(n-m) \geqq n$, und somit:

$$[GL] = (-1)^{m(n-m)}[LG], \quad [AL] = (-1)^{(n-p)m}[LA]$$
$$[G\,.\,LA] = (-1)^{m(p-m)}[LA\,.\,G],$$

weil $[LA]$ nach Nr. 95 eine Grösse $(p-m)$-ter Stufe wird und $m+(p-m) \leqq n$, das Produkt $[G\,.\,LA]$ also progressiv ist. Es wird daher in beiden Fällen:

$$A' = \frac{[LA\,.\,G]}{[LG]},$$

was genau der in A_1 *am a. a. O. aufgestellte Ausdruck ist.*

Nr. **129**. S. 100, Z. 13 ff. v. o. „Die Produkte $[A_{u+1}C], \ldots [A_\varrho C]$ sind aber in Bezug auf die Faktoren $a_1, \ldots a_n$ reine (nach 114, {127, 128 und 119b})“. Bezeichnet man nämlich die Stufenzahlen von A, B, C mit α, β, γ und sind *zuerst* $a_1, \ldots a_n$ *Grössen erster Stufe,* so ist (nach 127) die Zurückleitung progressiv und also (nach 128)

$$\alpha \leqq \beta,$$

oder, da die Stufenzahl γ des ausgeschlossenen Gebietes C die Stufenzahl von B zu der des Hauptgebietes ergänzt, also $\beta = n - \gamma$ ist, so ergiebt sich

$$\alpha \leqq n - \gamma \quad \text{oder } \alpha + \gamma \leqq n.$$

Die Produkte $[A_{u+1}C], \ldots$ sind somit in Bezug auf die Faktoren A_{u+1} und $C, \ldots$ progressiv, und bleiben daher (nach 119b) auch rein progressiv, wenn man ihre Faktoren in lauter Faktoren erster Stufe auflöst.

Sind *hingegen* die Faktoren $a_1, \ldots a_n$ *Grössen* $(n-1)$*-ter Stufe*, so ist (nach 127) die Zurückleitung regressiv und also (nach 128)

$$\alpha \geqq \beta \quad \text{oder} \quad \alpha \geqq n - \gamma, \quad \text{das heisst} \quad \alpha + \gamma \geqq n.$$

Die Produkte $[A_{u+1}C], \ldots$ sind demnach in Bezug auf die Faktoren A_{u+1} und $C, \ldots$ regressiv und bleiben daher (nach 119b) auch dann rein regressiv, wenn man ihre Faktoren A_{u+1} und $C, \ldots$ in Produkte aus Grössen $(n-1)$-ter Stufe auflöst, das heisst, es sind die Produkte $[A_{u+1}C], \ldots$ auch in Bezug auf die Faktoren $a_1, \ldots a_n$ rein regressiv.

Nr. **129.** S. 100, Z. 17—15 v. u. Die hier benutzte Formel ist in 108 nur für den Fall bewiesen, dass B dem A *untergeordnet* ist, sie gilt jedoch wie in der Anmerkung zu Nr. 108 (S. 416) gezeigt ist, auch dann, wenn B dem A *übergeordnet* ist.

Nr. **127** bis **129.** Bei den im fünften Kapitel des ersten Abschnitts gegebenen Anwendungen auf die Geometrie ist der Begriff der Zurückleitung nicht berücksichtigt. Es erscheint aber wünschenswerth, diesen wichtigen Begriff durch geometrische Beispiele zu erläutern, da die Allgemeinheit und Abstraktheit der in den Nummern 127—129 gegebenen Darstellung, wie es scheint, das Verständniss der entwickelten Begriffe wesentlich erschwert hat. So bezeichnet Hagen, der in seiner Synopsis der Mathematik auch einen Ueberblick über die Ausdehnungslehre und verwandte Methoden giebt, die Theorie der Zurückleitung als dunkel. (Vgl. Hagen, Synopsis der höheren Mathematik Bd. II. S. 137.) Es möge daher im Folgenden eine Anwendung der allgemeinen Formel der Zurückleitung (aus Nr. 129) auf diejenigen Fälle gegeben werden, die sich darbieten, wenn man den Raum im Sinne von Nr. 216 als Gebiet vierter Stufe auffasst und die kombinatorische Multiplikation auf dieses Gebiet als Hauptgebiet bezieht.

Unter dieser Voraussetzung ergeben sich acht Fälle der Zurückleitung, von denen aber immer die beiden hinsichtlich des Grund- und Leitgebietes (vgl. A_1, § 82, diese Ausgabe I, 1, S. 145) dualistischen Fälle zusammen behandelt werden können. Dabei sind zwei von den acht Fällen zu sich selbst dualistisch. Die Darstellung zerfällt daher in fünf Abschnitte.

I. Die Zurückleitung y eines Punktes x auf einen Flächentheil α unter Ausschluss eines Punktes b wird (nach Nr. 129) analytisch durch den Bruch dargestellt

$$(1) \qquad y = \frac{[\alpha \, . \, x b]}{[\alpha b]}$$

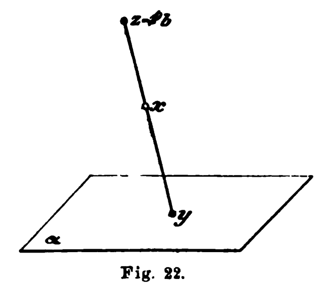


Fig. 22.

und bedeutet geometrisch (vgl. Fig. 22) den Punkt, der *erstens* der Ebene des Flächentheils α angehört, und der *zweitens* der Gleichung

$$(2) \qquad x = y + z$$

genügt, wo z ein mit b kongruenter Punkt ist, also

(3) $$z = \mathfrak{k} b$$

ist, unter $\mathfrak{k}$ einen Zahlfaktor verstanden.

Durch diese beiden Eigenschaften wird die Zurückleitung y eindeutig bestimmt. Denn aus der Gleichung (2), welche sich mit Rücksicht auf (3) auch in der Form $y + \mathfrak{k} b = x$ schreiben lässt, folgt durch bezügliche Multiplikation mit b

$$[yb] = [xb]$$

und hieraus durch bezügliche Multiplikation mit α

$$[\alpha \, . \, yb] = [\alpha \, . \, xb].$$

Die linke Seite dieser letzten Gleichung ist aber nach Nr. 108 $= [\alpha b] y$, denn die Stufensumme von α und b ist gleich der des Hauptgebietes, und nach der Voraussetzung soll y dem α untergeordnet sein. Die Gleichung verwandelt sich daher in

$$[\alpha b] y = [\alpha \, . \, xb],$$

aus der für y der in (1) angegebene Werth folgt

$$y = \frac{[\alpha \, . \, xb]}{[\alpha b]}.$$

Der in dieser Entwickelung verwendete Hülfspunkt z lässt sich ebenfalls als Zurückleitung des Punktes x auffassen, nämlich als Zurückleitung des Punktes x auf den Punkt b unter Ausschluss des Flächentheils α, und wird also (nach 129) durch den Bruch dargestellt

(4) $$z = \frac{b[x\alpha]}{[b\alpha]}.$$

In der That folgt aus der Gleichung (2) durch Multiplikation mit α, da (nach Nr. 121) $[y\alpha] = 0$ ist,

$$[z\alpha] = [x\alpha]$$

und hieraus durch Multiplikation mit b

$$b[z\alpha] = b[x\alpha].$$

Hier ist die linke Seite (nach Nr. 108) $= [b\alpha] z$, denn z ist dem b untergeordnet, und die Stufensumme von b und α ist $= 4$. Folglich geht die letzte Gleichung über in

$$[b\alpha] z = b[x\alpha],$$

woraus für z wirklich der Werth (4) folgt. Damit ist bewiesen, dass auch der Punkt z als Zurückleitung von x aufgefasst werden kann. Und zwar geht diese Zurückleitung aus der Zurückleitung y dadurch hervor, dass man das Gebiet, auf welches zurückgeleitet wird (das Grundgebiet nach A_1), mit dem ausgeschlossenen Gebiet (dem Leitgebiet) vertauscht. Diese Zurückleitung z hat dann zufolge der Gleichung (2) die Eigenschaft, zur ursprünglichen Zurückleitung y addirt die zurückgeleitete Grösse x zu ergeben. Aus diesem Grunde möge die Grösse z die zur Zurückleitung y gehörige *ergänzende Zurückleitung* von x genannt werden.

Setzt man schliesslich noch die Werthe (1) und (4) in die Gleichung (2) ein und stellt zugleich im Nenner von (4) die Faktoren um, wodurch ein Zeichenwechsel bedingt wird, so erhält man für x die Zerlegungsformel

(5) $$x = \frac{[\alpha \, . \, xb] - b[x\alpha]}{[\alpha b]},$$

durch welche der Punkt x als die Summe zweier Punkte (gleichsam zweier Komponenten) $\frac{[\alpha \, . \, xb]}{[\alpha b]}$ und $-\frac{b[x\alpha]}{[\alpha b]}$ dargestellt wird, von denen der eine in der Ebene α liegt und der andere mit dem Punkte b zusammenfällt.

II. Die Zurückleitung Y eines Linientheils X auf einen Flächentheil α unter Ausschluss eines Punktes b wird (nach Nr. 129) analytisch durch den Bruch dargestellt

$$Y = \frac{[\alpha \,.\, Xb]}{[\alpha b]}, \tag{6}$$

und bedeutet geometrisch (vgl. Fig. 23) den Linientheil, der *erstens* der Ebene des Flächentheils α angehört und der *zweitens* die Gleichung



$$X = Y + Z \tag{7}$$

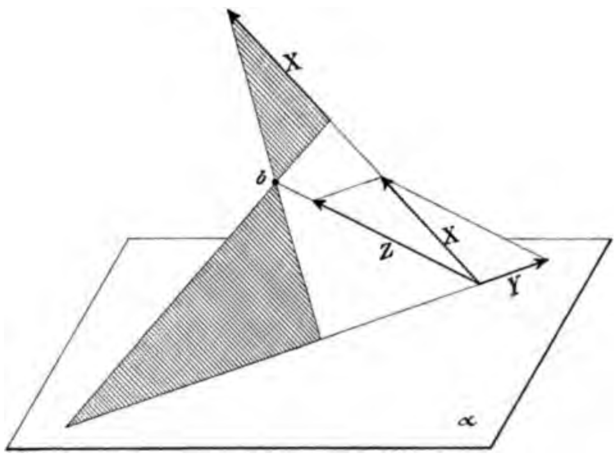


Fig. 23.

erfüllt, unter Z einen Linientheil verstanden, dessen Gerade durch den Punkt b hindurchgeht.

Diese beiden Eigenschaften bestimmen wieder den Linientheil Y eindeutig; denn aus der Gleichung (7) folgt durch Multiplikation mit b

$$[Yb] = [Xb]$$

und aus dieser durch Multiplikation mit α

$$[\alpha \,.\, Yb] = [\alpha \,.\, Xb].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber (nach Nr. 108) $= [\alpha b] Y$, denn die Stufensumme von α und b ist gleich der des Hauptgebietes, und nach der Voraussetzung soll Y dem α untergeordnet sein. Die letzte Gleichung verwandelt sich daher in $[\alpha b] Y = [\alpha \,.\, Xb]$, woraus für Y der in (6) angegebene Werth folgt.

Auch hier ist wieder die Hülfsgrösse Z die zu Y gehörige *ergänzende Zurückleitung* von X, das heisst, die Zurückleitung des Linientheils X auf den Punkt b unter Ausschluss des Flächentheils α und wird somit dargestellt durch den Bruch

$$Z = \frac{[b \,.\, X\alpha]}{[b\alpha]}. \tag{8}$$

In der That folgt aus der Gleichung (7) durch Multiplikation mit α, da (nach Nr. 121) $[Y\alpha] = 0$ ist,

$$[Z\alpha] = [X\alpha],$$

und hieraus durch Multiplikation mit b

$$[b \,.\, Z\alpha] = [b \,.\, X\alpha].$$

Hier ist die linke Seite nach der Verallgemeinerung von Nr. 108 (vgl. die Anmerkung auf S. 416) $= [b\alpha]Z$, denn Z ist dem b übergeordnet und die Stufensumme von b und α ist $= 4$. Die letzte Gleichung geht also über in

$$[b\alpha]Z = [b \,.\, X\alpha],$$

woraus für Z der Werth (8) folgt.

Setzt man schliesslich die Werthe (6) und (8) in die Gleichung (7) ein, so erhält man für X die Zerlegungsformel

$$X = \frac{[\alpha \,.\, Xb] - [b \,.\, X\alpha]}{[\alpha b]}, \tag{9}$$

durch die der Linientheil X in die Summe zweier Linientheile (in zwei Komponenten) $\frac{[\alpha \,.\, Xb]}{[\alpha b]}$ und $-\frac{[b \,.\, X\alpha]}{[\alpha b]}$ zerlegt ist, von denen der eine in der Ebene α liegt, während der andere durch den Punkt b hindurchgeht.

Es ist wichtig, dass eine entsprechende Zerlegung auch für eine beliebige Summe $S = X_1 + X_2$ zweier sich nicht schneidender Linientheile X_1 und X_2, das heisst, für eine *Schraube* (im Ballschen Sinne, vgl. die Anmerkung zu Nr. 346, S. 437) möglich ist. Stellt man nämlich die Zerlegungsformel (9) für jeden der beiden Linientheile X_1 und X_2 auf und addirt, so ergiebt sich ohne Weiteres

$$S = \frac{[\alpha \,.\, Sb] - [b \,.\, S\alpha]}{[\alpha b]}, \tag{10}$$

wodurch die Schraube S in zwei Linientheile $\frac{[\alpha \,.\, Sb]}{[\alpha b]}$ und $-\frac{[b \,.\, S\alpha]}{[\alpha b]}$ zerlegt ist, von denen der erste in der Ebene des Flächentheils α liegt, während der zweite durch den Punkt b geht (vgl. hierzu die Entwickelung in Nr. 285).

III. Die Zurückleitung η eines Flächentheils ξ auf einen Flächentheil α unter Ausschluss eines Punktes b wird (nach Nr. 129) analytisch dargestellt durch den Bruch

$$\eta = \frac{\alpha[\xi b]}{[\alpha b]} \tag{11}$$

und bedeutet geometrisch (vgl. Fig. 24) den Flächentheil, welcher *erstens* der Ebene des Flächentheils α angehört, und welcher *zweitens* der Gleichung

$$\xi = \eta + \zeta \tag{12}$$

genügt, in der ζ ein Flächentheil ist, dessen Ebene durch den Punkt b hindurchgeht. Dieser Flächentheil ζ ist dann wieder die zu η gehörige *ergänzende Zurückleitung* von ξ und wird also dargestellt durch die Gleichung

$$\zeta = \frac{[b \,.\, \xi\alpha]}{[b\alpha]}, \tag{13}$$

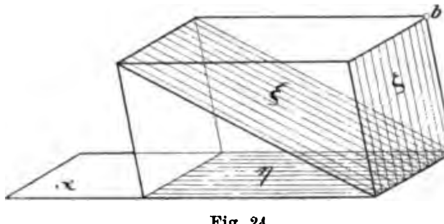


Fig. 24.

was sich ebenso wie in den beiden ersten Fällen begründen lässt. Ferner erhält man wieder durch Einführung der Werthe (11) und (13) in die Gleichung (12) für den Flächentheil ξ eine Zerlegungsformel

$$\xi = \frac{\alpha[\xi b] - [b \,.\, \xi\alpha]}{[\alpha b]}, \tag{14}$$

durch welche der Flächentheil ξ in die Summe zweier Flächentheile (Komponenten) $\frac{\alpha[\xi b]}{[\alpha b]}$ und $-\frac{[b\,.\,\xi\alpha]}{[\alpha b]}$ zerlegt wird, von denen der eine in der Ebene α liegt, während der andere durch den Punkt b geht.

IV. Die Zurückleitung y des Punktes x auf einen Linientheil A unter Ausschluss eines den ersten nicht schneidenden Linientheils B wird (nach Nr. 129) analytisch ausgedrückt durch den Bruch

$$y = \frac{[A\,.\,xB]}{[AB]} \tag{15}$$

und bedeutet geometrisch (vgl. Fig. 25) den Punkt, welcher *erstens* der Geraden des Linientheils A angehört, und welcher *zweitens* der Gleichung

$$x = y + z \tag{16}$$

genügt, in der z einen Punkt der Geraden B bedeutet. Dieser Punkt z ist dann wieder die zur Zurückleitung y gehörige *ergänzende Zurückleitung* von x und wird durch die Gleichung dargestellt

$$z = \frac{[B\,.\,xA]}{[BA]}. \tag{17}$$

Die Gleichungen (15) und (17) ergeben zugleich die Konstruktion der Punkte y und z als Durchschnitte der Geraden A und B mit den Ebenen $[xB]$ und $[xA]$. Die den beiden Gleichungen zugehörende Zerlegungsformel lautet

$$x = \frac{[A\,.\,xB] + [B\,.\,xA]}{[AB]}. \tag{18}$$

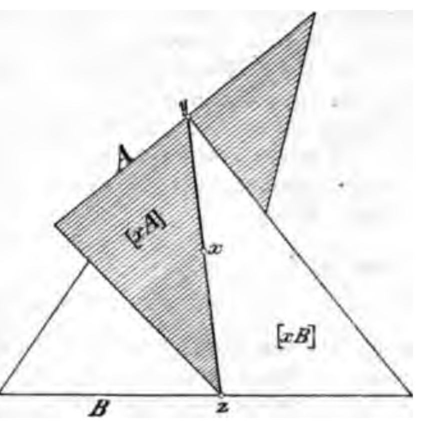


Fig. 25.

V. Die Zurückleitung η eines Flächentheils ξ auf den Linientheil A unter Ausschluss des Linientheils B wird (nach Nr. 129) analytisch durch den Bruch dargestellt

$$\eta = \frac{[A\,.\,\xi B]}{[AB]} \tag{19}$$

und bedeutet geometrisch (vgl. Fig. 26) den Flächentheil, dessen Ebene *erstens* den Linientheil A enthält und welcher *zweitens* der Gleichung genügt

$$\xi = \eta + \zeta, \tag{20}$$

unter ζ einen Flächentheil verstanden, dessen Ebene den Linientheil B enthält. Dieser Flächentheil ζ ist wieder die zu η gehörige *ergänzende Zurückleitung* von ξ und wird durch den Bruch ausgedrückt

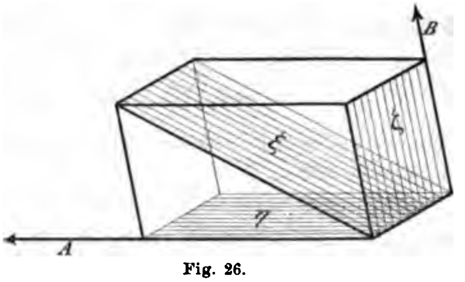


Fig. 26.

$$\zeta = \frac{[B\,.\,\xi A]}{[BA]}. \tag{21}$$

Aus den Gleichungen (19) und (21) entnimmt man zugleich die Konstruktion der Flächentheile η und ζ. Denn nach diesen Gleichungen werden ihre Ebenen

bestimmt durch je einen der beiden Linientheile A und B und den Schnittpunkt des andern mit der Ebene ξ. Die zu den Formeln (19) und (21) gehörende Zerlegungsformel lautet

$$\xi = \frac{[A \,.\, \xi B] + [B \,.\, \xi A]}{[AB]}. \tag{22}$$

Durch sie wird der Flächentheil ξ in zwei Komponenten, nämlich in zwei Flächentheile $\frac{[A \,.\, \xi B]}{[AB]}$ und $\frac{[B \,.\, \xi A]}{[AB]}$ zerlegt, von denen der eine durch den Linientheil A, der andere durch den Linientheil B hindurchgeht. H. Grassmann d. J.

Nr. **133.** S. 103, Z. 14—12 v. u. Wenn $m = n - 1$ ist, so enthält jedes F_k nur eine der Einheiten $e_1, \ldots e_n$ als Faktor; man kann daher dann die Gleichungen $[E_k F_k] = 1$ nicht immer durch geeignete Anordnung der Faktoren von F_k befriedigen, sondern muss unter Umständen für F_k eine negativ genommene Einheit setzen. Vgl. die Anmerkung zu Nr. 113, S. 417.

Nr. **134** Auflösung 1, Schluss. S. 106, Z. 10 v. u. Es bleibt noch zu beweisen, dass die angegebenen Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_r$ zusammen mit ganz willkürlichen Werthen von $x_{r+1}, \ldots x_n$ der Gleichung (c) auch wirklich Genüge leisten.

Es wurde bereits gezeigt, dass, falls die Gleichungen (a) nicht einen Widerspruch enthalten, sich die Grösse b aus $a_1, \ldots a_r$ müsse numerisch ableiten lassen. Es sei

$$b = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_r a_r;$$

ferner sei

$$x_{r+1} a_{r+1} + x_{r+2} a_{r+2} + \cdots + x_n a_n = d \tag{*}$$

gesetzt. Dann wird die Grösse d, da nach der Voraussetzung die Grössen a_{r+1}, $a_{r+2}, \ldots a_n$ aus $a_1, \ldots a_r$ numerisch ableitbar sind, sich ebenfalls aus diesen Grössen ableiten, also in der Form

$$d = z_1 a_1 + z_2 a_2 + \cdots + z_r a_r$$

darstellen lassen. Wegen (*) ist nun $c = b - d$, es wird also

$$c = (y_1 - z_1) a_1 + (y_2 - z_2) a_2 + \cdots + (y_r - z_r) a_r.$$

Setzt man aber diesen Werth von c in die unter (f) angegebenen Ausdrücke für $x_1, x_2, \ldots x_r$ ein, so erhält man

$$x_1 = y_1 - z_1, \quad x_2 = y_2 - z_2, \ldots, x_r = y_r - z_r;$$

und multipliciert man diese Gleichungen beziehlich mit $a_1, a_2, \ldots a_r$ und addiert, so ergiebt sich

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_r a_r = b - d,$$

das heisst, mit Rücksicht auf (*), die Gleichung

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_r a_r + x_{r+1} a_{r+1} + \cdots + x_n a_n = b. \tag{c}$$

Also wird der Gleichung (c) durch die Werthe (f) wirklich genügt.

Nr. **134.** S. 104—109. Die beiden Methoden der Auflösung eines Systems linearer Gleichungen lassen, falls $n < 4$ ist, eine *geometrische Deutung* zu, die für den Fall $n = 3$ entwickelt werden soll.

Um die *erste Auflösung* geometrisch zu deuten, fasse man die Grössen $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$ als drei nicht in Einer Ebene liegende Strecken auf. Die drei

Grössen a_1, a_2, a_3, welche den Gleichungen (b) zufolge durch die in den *Kolonnen* der Gleichungen (a) stehenden Koefficienten aus den Strecken $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$ numerisch abgeleitet sind, werden dann ebenfalls Strecken und liegen, falls zunächst wieder vorausgesetzt wird, dass $[a_1 a_2 a_3] \gtrless 0$ sei, nicht in Einer Ebene. Ferner besagt die Gleichung (c), dass sich die Strecke b aus den drei Strecken a_1, a_2, a_3 numerisch ableiten lasse, und ihre Ableitzahlen x_1, x_2, x_3 sind die gesuchten Unbekannten. Zerlegt man daher die Strecke b in drei Summanden b_1, b_2, b_3, welche beziehlich den Strecken a_1, a_2, a_3 parallel laufen (vgl. Fig. 27), was, solange $[a_1 a_2 a_3] \gtrless 0$ ist, nur auf Eine Art möglich ist, so sind die drei Verhältnisse aus den drei Paaren zusammengehöriger Strecken b_i und a_i die gesuchten Unbekannten x_i, das heisst, es ist

$$x_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad x_2 = \frac{b_2}{a_2}, \quad x_3 = \frac{b_3}{a_3}.$$

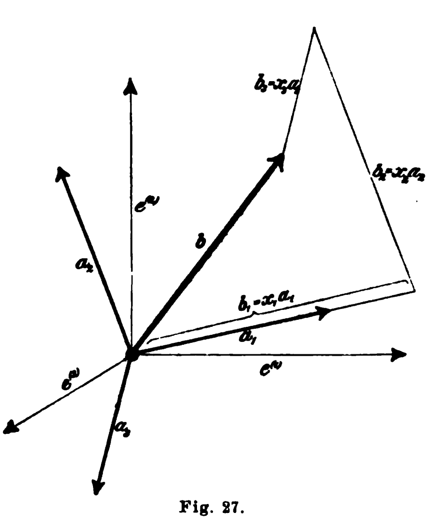


Fig. 27.

In dem Falle, wo das kombinatorische Produkt $[a_1 a_2 a_3] = 0$ ist, aber doch noch zwei von den Grössen a_1, a_2, a_3, etwa a_1 und a_2 in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, konstruire man wieder die vier Strecken a_1, a_2, a_3 und b entsprechend den Gleichungen (b). Dadurch erhält man, falls die Gleichungen (a) nicht einen Widerspruch enthalten, vier Strecken einer und derselben Ebene (vgl. Fig. 28). Dann nehme man die Grösse x_3 ganz willkürlich an, vermindere b um $x_3 a_3$ und setze $b - x_3 a_3 = c$. Schliesslich stelle man c als Vielfachensumme von a_1 und a_2 dar, das heisst, als Summe zweier Strecken c_1 und c_2, welche beziehlich zu a_1 und a_2 parallel laufen, so sind $x_1 = \frac{c_1}{a_1}$ und $x_2 = \frac{c_2}{a_2}$ die jenem beliebig angenommenen Werthe von x_3 entsprechenden Werthe von x_1 und x_2. Giebt man den Strecken a_1, a_2, a_3, b und c (wie in der Fig. 28 geschehen) einen gemeinsamen Anfangspunkt, so erhält man sämmtliche Werthe von x_1, x_2, x_3, welche den gegebenen Gleichungen (a) genügen, wenn man den Endpunkt der Strecke c parallel mit a_3 verschiebt und für jede Lage von c die Strecke b in die Summe $b = c + x_3 a_3$ und die Strecke c selbst in die Summe $c = x_1 a_1 + x_2 a_2$ zerlegt. Entsprechend verfährt man, wenn je zwei von den Grössen a_1, a_2, a_3 in einer Zahlbeziehung stehen.

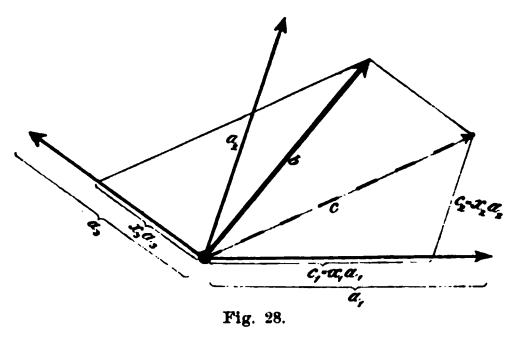


Fig. 28.

Um auch für die *zweite Auflösung* des Systems linearer Gleichungen eine geometrische Deutung zu finden, fasse man die vier Einheiten e_0, e_1, e_2, e_3, deren

kombinatorisches Produkt gleich Eins gesetzt war, als einfache Punkte auf, welche die Ecken eines Tetraeders bilden (vgl. Fig. 29). Dann sind die Grössen:

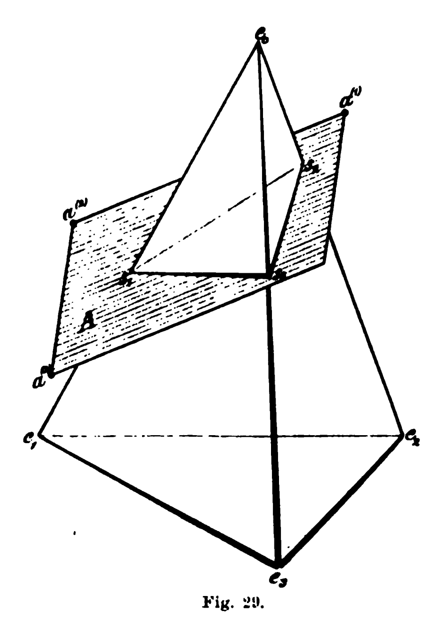


Fig. 29.

$$a^{(1)} = \alpha_0^{(1)} e_0 + \alpha_1^{(1)} e_1 + \alpha_2^{(1)} e_2 + \alpha_3^{(1)} e_3$$
$$a^{(2)} = \alpha_0^{(2)} e_0 + \alpha_1^{(2)} e_1 + \alpha_2^{(2)} e_2 + \alpha_3^{(2)} e_3$$
$$a^{(3)} = \alpha_0^{(3)} e_0 + \alpha_1^{(3)} e_1 + \alpha_2^{(3)} e_2 + \alpha_3^{(3)} e_3 ,$$

die aus den Einheiten e_0, e_1, e_2, e_3 durch die in den *Zeilen* der Gleichungen (α) auftretenden Koefficienten abgeleitet sind, wiederum Punkte und bestimmen, falls das Produkt $[a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)}] \gtrless 0$ ist, einen Flächentheil $A = [a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)}]$. Setzt man ferner wieder

$$X = x_0 | e_0 + x_1 | e_1 + x_2 | e_2 + x_3 | e_3 ,$$

wo also X einen Flächentheil darstellt, und wo $x_0 = 1$ ist, so werden die gegebenen Gleichungen (α) identisch mit den Gleichungen

$$(\delta) \qquad \begin{cases} [a^{(1)} X] = 0, \quad [a^{(2)} X] = 0, \\ \qquad [a^{(3)} X] = 0, \end{cases}$$

welche aussagen, dass die Ebene des Flächentheils X durch die drei Punkte $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ hindurchgeht. Dieser Flächentheil wird sich daher in der Form

$$(\varepsilon) \qquad X = \lambda [a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)}] = \lambda A$$

ausdrücken lassen, wo λ eine Zahl bedeutet, deren Werth sich mit Hülfe der Gleichung $[e_0 X] = x_0 = 1$ ermitteln lässt. Die aus der Gleichung (ε) für die Unbekannten x_1, x_2, x_3 hervorgehenden Ausdrücke

$$(\vartheta) \qquad x_1 = \frac{[e_1 A]}{[e_0 A]}, \quad x_2 = \frac{[e_2 A]}{[e_0 A]}, \quad x_3 = \frac{[e_3 A]}{[e_0 A]}$$

stellen dann die drei Unbekannten dar als Verhältnisse derjenigen vier Spate, die durch den Flächentheil A und je eine Ecke des Grundtetraeders bestimmt sind. Nun verhalten sich aber zwei solche Spate, zum Beispiel $[e_1 A]$ und $[e_0 A]$ zu einander wie die beiden Abschnitte $e_1 s_1$ und $e_0 s_1$, in welche die Tetraederkante $e_1 e_0$ durch ihren Schnittpunkt s_1 mit der Ebene A getheilt wird. Die Unbekannten x_1, x_2, x_3 sind daher nichts anderes als die Theilverhältnisse, welche die Ebene des Flächentheils A auf den Tetraederkanten $[e_1 e_0]$, $[e_2 e_0]$, $[e_3 e_0]$ hervorruft, vorausgesetzt, dass die Theile immer von der Tetraederecke aus nach dem Theilpunkte hin gerechnet werden. H. Grassmann d. J.

Nr. **136,** Anm. 2. S. 112, Z. 6 v. o. In der Originalausgabe steht irrthümlich 1845. Die Jahreszahl 1847 wird durch den Briefwechsel zwischen Grassmann und Saint-Venant, der erhalten ist, sicher gestellt.

Ebenda, Z. 11—14 v. o. Cauchy schliesst mehrfach solche Produkte, die im Sinne Grassmanns als äussere zu bezeichnen sind, zwischen zwei senkrechte Striche ein; auch scharfe Klammern wendet er in einer ähnlichen, wenn auch nicht ganz in derselben Bedeutung an.

Nr. **137** und **138.** S. 112f. Auf den Begriff der Ergänzung gestützt, kann Grassmann jetzt das innere Produkt zweier Grössen unmittelbar definiren, während er in der *geometrischen Analyse* immer nur äussere Produkte angegeben hatte, die den betrachteten inneren Produkten proportional waren (vgl. diese Ausg. I, 1, S. 421 unten).

Nr. **147.** S. 115. Der zweite Theil des Beweises dieser Nr. wird wesentlich kürzer, wenn man sich auf den in der Anmerkung zu Nr. 103 bewiesenen Satz 5 stützt (S. 413) und ausserdem Nr. 90 Zusatz benutzt.

Nr. **150.** S. 118, Z. 7. v. o. Die Formel gilt auch, wenn $q = r$ ist; dann ist nämlich $q(r-1)$ sicher gerade, also erhält die Formel von Nr. 150 die Gestalt: $[A|B] = |[B|A]$, was mit Nr. 141 und 144 stimmt.

Nr. **150,** Anm. S. 118, Z. 12, 11 v. u. „in den oben entwickelten Formeln", nämlich im Beweise von Nr. 147 und in Nr. 148.

Nr. **152.** S. 119, Z. 9 v. o. „wenn ihre Theile es sind". Der Ausdruck „Theil eines Gebietes" ist bisher noch nicht in einem bestimmten Sinne benutzt worden; was er bedeuten soll, kann man aber aus den später eingeführten Namen „Linientheil" und „Flächentheil" (s. Nr. 249 und 257) erschliessen. Unter einem Theile eines Gebietes q-ter Stufe versteht nämlich Grassmann offenbar eine einfache Grösse q-ter Stufe, die dem Gebiete angehört; es müsste daher eigentlich heissen:

Ein Gebiet m-ter und ein Gebiet q-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe heissen normal zu einander, wenn eine einfache Grösse m-ter Stufe des ersten Gebietes zu einer einfachen Grösse q-ter Stufe des zweiten Gebietes normal ist.

Man braucht nämlich hierbei nur Einen „Theil" des einen mit Einem „Theile" des andern Gebietes zu vergleichen, da nach Nr. 70 alle Theile eines Gebietes im Sinne von Nr. 2 kongruent sind.

Hat man zwei einfache Grössen A und B von bezüglich m-ter und q-ter Stufe und ist $m \leqq q$, so ist das Produkt $[A|B]$ progressiv*); ist dagegen $m \geqq q$, so wird das Produkt $[B|A]$ progressiv. *Nach* Nr. 109 *sind daher die beiden Grössen A und B dann und nur dann normal zu einander, wenn diejenige von ihnen, deren Stufenzahl nicht grösser als die der andern ist, mit der Ergänzung der andern ein Gebiet erster oder höherer Stufe gemein hat.*

Nr. **152.** S. 119, Z. 9—13 v. o. Dieser Erklärung liegt eine Voraussetzung zu Grunde, die eigentlich bewiesen werden sollte, die nämlich, dass zwei allseitig normale Gebiete oder Grössen auch normal sind in dem vorher erklärten Sinne. Da man die Richtigkeit dieser Voraussetzung nur beweisen kann, indem man sich auf einen Theil der Entwickelungen in Nr. 153 bis 167 stützt, so wäre es besser gewesen, die Erklärung allseitig normaler Gebiete und Grössen erst nach Nr. 167 zu bringen und dann einen Satz zu formuliren, etwa folgendermassen:

Satz 1. *Zwei allseitig normale Gebiete oder Grössen eines Hauptgebietes n-ter Stufe sind auch normal zu einander im Sinne von Nr. 152.*

Das wäre um so zweckmässiger gewesen, als der Begriff „allseitig normal" in den Nr. 153—167 überhaupt gar nicht vorkommt und erst in Nr. 171 und 172 eine Rolle spielt.

Um den Satz 1 zu beweisen, wollen wir zwei allseitig normale Gebiete von bezüglich m-ter und q-ter Stufe betrachten. Dann können wir nach Nr. 163 in jedem der beiden Gebiete ein Normalsystem von der betreffenden Stufenzahl und

---

*) Die Ergänzung $|B$ wird ja eine einfache Grösse $(n-q)$-ter Stufe; vgl. Nr. 90 Zusatz und die Anmerkung zu Nr. 103, Satz 2, S. 412.

vom numerischen Werthe Eins annehmen, und zwar seien $u_1, \dots u_m$ und $v_1, \dots v_q$ diese beiden Normalsysteme. Nach dem Begriffe des allseitig Normalen ist aber jede Grösse $\Sigma \alpha_k u_k$ zu jeder Grösse $\Sigma \beta_j v_j$ normal, also namentlich jedes u_k zu jedem v_j. Hieraus folgt, dass $u_1, \dots u_m, v_1, \dots v_q$ auch zusammengenommen ein Normalsystem vom numerischen Werthe Eins bilden, und (nach Nr. 157) zugleich, dass zwischen $u_1, \dots u_m, v_1, \dots v_q$ keine Zahlbeziehung besteht. Demnach können wir auf Grund von Nr. 161 zu $u_1, \dots u_m, v_1, \dots v_q$ noch $n-m-q$ Grössen $w_1, \dots w_{n-m-q}$ so hinzufügen, dass ein vollständiges Normalsystem vom numerischen Werthe Eins entsteht.

Nunmehr ist nach Nr. 167

$$(*) \qquad |[v_1 \dots v_q] = \pm [u_1 \dots u_m \cdot w_1 \dots w_{n-m-q}]$$

und somit:

$$[(u_1 \dots u_m) | (v_1 \dots v_q)] = 0 .$$

Denn, ist $m \leqq q$, so ist das Produkt $[(u_1 \dots u_m) | (v_1 \dots v_q)]$ progressiv (vgl. die vorige Anmerkung) und verschwindet daher wegen (*) nach Nr. 60; ist aber $m > q$, so ist das Produkt regressiv und verschwindet nach 109, weil wegen (*) das verbindende Gebiet seiner Faktoren von $(n-q)$-ter Stufe, also kleiner als n ist. Demnach sind die beiden allseitig normalen Grössen $[u_1 \dots u_m]$ und $[v_1 \dots v_q]$ und ebenso ihre Gebiete wirklich zu einander normal im Sinne von Nr. 152.

Aus den eben durchgeführten Betrachtungen geht hervor, dass von zwei allseitig normalen Grössen stets die eine der Ergänzung der andern untergeordnet ist. Ebenso ist umgekehrt klar, dass jede einfache Grösse, die der Ergänzung einer Grösse $[v_1 \dots v_q]$ untergeordnet ist, zu dieser Grösse allseitig normal ist. Somit können wir auch sagen:

Satz 2. *Zwei Grössen sind dann und nur dann allseitig zu einander normal, wenn die eine der Ergänzung der andern untergeordnet ist.*

Schliesslich wollen wir noch den folgenden, nunmehr selbstverständlichen Satz aussprechen:

Satz 3. *Sind zwei Gebiete allseitig zu einander normal, so ist jede Grösse des einen Gebietes zu jeder Grösse des andern normal.*

Durch diesen Satz wird die Benennung „allseitig normal" erst in das richtige Licht gerückt.

Nr. **152,** Anm. S. 119, Z. 16 v. o. „wie dies stets geschehen muss". Diese Worte befremden einigermassen, denn von einem „muss" kann doch keine Rede sein: man darf ebenso gut drei beliebige, nicht Einer Ebene parallele Strecken zu Einheiten wählen.

Nr. **154.** S. 119. Die circuläre Aenderung ist, ebenso wie die lineale (s. Nr. 71), mit einer linearen homogenen Substitution von besonderer Form gleichbedeutend. Unterwirft man nämlich die Reihe der n Grössen: $a_1, \dots a_n$; die in keiner Zahlbeziehung stehen mögen, einer *positiven* circulären Aenderung, indem man etwa a_1 und a_2 durch: $\cos\alpha \cdot a_1 + \sin\alpha \cdot a_2$ und $\cos\alpha \cdot a_2 - \sin\alpha \cdot a_1$ ersetzt, so werden die Grössen $\Sigma x_k a_k$ des aus $a_1, \dots a_n$ ableitbaren Gebietes n-ter Stufe durch die lineare homogene Transformation:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, \quad x_2' = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha, \\ \qquad x_3' = x_3, \; \dots, \quad x_n' = x_n \end{cases}$$

unter einander vertauscht. Diese Transformation hat die Determinante 1 und lässt offenbar die quadratische Form Σx_k^2 invariant, das heisst, sie ist eine *ortho-*

gonale Substitution. Der Inbegriff aller ∞^1 Transformationen von der Form (1) bildet eine eingliedrige Gruppe im Lieschen Sinne.

Bei einer *negativen* circulären Aenderung werden die Grössen a_1 und a_2 durch die Grössen $\cos\alpha \,.\, a_1 + \sin\alpha \,.\, a_2$ und $-(\cos\alpha \,.\, a_2 - \sin\alpha \,.\, a_1)$ ersetzt. Ihr entspricht eine lineare homogene Transformation von der Form:

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1' = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha, \quad x_2' = x_1 \sin\alpha - x_2 \cos\alpha, \\ x_3' = x_3, \ \ldots, \ x_n' = x_n . \end{cases}$$

Diese ist ebenfalls orthogonal, hat aber die Determinante -1. Hieraus folgt, dass der Inbegriff aller ∞^1 Transformationen (2) keine Gruppe bildet, dass dagegen die Transformationen (1) und (2) zusammengenommen eine nicht-continuirliche Gruppe bilden.

Nr. **154,** Anm. S. 119, Z. 5—2 v. u. Man vergleiche hierzu Nr. 220.

Nr. **155** bis **157.** S. 120f. Hat man in einem Gebiete m-ter Stufe zwei Normalsysteme m-ter Stufe: $a_1, \ldots a_m$ und $b_1, \ldots b_m$ von gleichem numerischen Werthe, so stehen nach Nr. 157*) weder $a_1, \ldots a_m$ noch $b_1, \ldots b_m$ in einer Zahlbeziehung, es lassen sich daher $b_1, \ldots b_m$ aus $a_1, \ldots a_m$ numerisch ableiten:

$$b_\mu = \alpha_{\mu 1} a_1 + \cdots + \alpha_{\mu m} a_m \quad (\mu = 1, \ldots m),$$

wo die Determinante der $\alpha_{\mu\nu}$ nach Nr. 63 $\gtrless 0$ ist. Ersetzt man nun in einer beliebigen Grösse $\Sigma x_\mu a_\mu$ des betrachteten Gebietes die Grössen $a_1, \ldots a_m$ durch $b_1, \ldots b_m$, so erhält man eine neue Grösse $\Sigma x_\mu b_\mu = \Sigma x_\mu' a_\mu$ des Gebietes. Demnach ist der Uebergang von dem einen Normalsysteme zu dem andern gleichbedeutend mit der linearen homogenen Transformation:

$$(1)\qquad x_\mu' = \alpha_{1\mu} x_1 + \ldots + \alpha_{m\mu} x_m \quad (\mu = 1, \ldots m),$$

vermöge deren die Grössen erster Stufe des betrachteten Gebietes unter einander vertauscht werden. Da überdies

$$[\Sigma x_\mu b_\mu]^2 = [\Sigma x_\mu' a_\mu]^2$$

ist und unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichungen:

$$b_1^2 = \cdots = b_m^2 = a_1^2 = \cdots = a_m^2$$

$$[b_\mu b_\nu] = 0, \ [a_\mu | a_\nu] = 0 \quad (\mu \gtrless \nu)$$

bestehen, so wird $\Sigma x_\nu'^2 = \Sigma x_\nu^2$. Also lässt die lineare homogene Transformation (1) die quadratische Form Σx_ν^2 invariant. Mit andern Worten, die Substitution (1) ist *orthogonal.*

Ebenso entspricht umgekehrt jeder reellen orthogonalen Substitution (1) der Uebergang von einem Normalsysteme m-ter Stufe zu einem andern, numerisch gleichen. Insbesondere wird daher nach der vorletzten Anmerkung auch eine circuläre Aenderung ein jedes Normalsystem in ein numerisch gleiches Normalsystem überführen müssen; und dies ist in 155 gezeigt.

Nr. **161.** S. 123. Wenn die beiden Normalsysteme von gleicher Stufe, etwa von der m-ten sind, so ist durch diesen Satz zugleich der folgende bewiesen:

Jede reelle lineare homogene Substitution:

$$x_\mu' = \alpha_{\mu 1} x_1 + \cdots + \alpha_{\mu m} x_m \quad (\mu = 1, \ldots m),$$

---

*) Die Nrn. 157—159 hätten ihren Platz besser vor Nr. 154 gefunden.

bei der die quadratische Form Σx_μ^2 invariant bleibt, kann dadurch erhalten werden, dass man eine Reihe von linearen homogenen Substitutionen von den beiden auf S. 428 f. *angegebenen besonderen Formen* (1) *und* (2) *nach einander ausführt. Hieraus folgt überdies, dass die Determinante der Substitution gleich* ± 1 *ist.*

Nr. **161.** S. 124, Z. 3 f. v. o. „die entgegengesetzte", nämlich statt einer positiven circulären Aenderung die entsprechende negative und umgekehrt.

Nr. **164,** Anm. S. 125, Z. 19 f. v. o. „Für die Geometrie ... Projektion." Das gilt nur, wenn die Einheiten a, b, c drei gleich lange und auf einander senkrechte Strecken sind. Vgl. die Anmerkung zu Nr. 152 Anm. (S. 428).

Nr. **165.** S. 125. Man beachte, dass die Zurückleitung progressiv oder regressiv ist, je nachdem die Stufenzahlen α und β von A und B in der Beziehung $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ stehen. Nimmt man auf beiden Seiten der Gleichung für A' die Ergänzung, so erkennt man, dass $|A'$ die normale Zurückleitung von $|A$ auf das Gebiet von $|B$ ist. War A' eine progressive Zurückleitung, so wird natürlich die Zurückleitung $|A'$ regressiv und umgekehrt.

Nr. **167.** S. 125 f. Durch diesen Satz wird zwar gezeigt, dass die im Beweise von Nr. 110 eingeführte Verallgemeinerung des Ergänzungsbegriffs mit der in Nr. 89 und 90 erklärten Ergänzung zusammenfällt, sobald $a_1, \ldots a_n$ ein vollständiges Normalsystem vom numerischen Werthe Eins bilden, es fehlt aber noch der Nachweis, dass die vollständigen Normalsysteme vom numerischen Werthe Eins die einzigen sind, bei denen das eintritt (vgl. S. 81, Z. 5—3 v. u.).

Dieser Nachweis ist leicht zu erbringen. Sind nämlich $a_1, \ldots a_n$ n Grössen des Hauptgebietes $e_1, \ldots e_n$, deren kombinatorisches Produkt den Werth Eins hat, so ist nach der Erklärung auf S. 79:

$$Ia_k = [a_k a_1 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_n] [a_1 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_n],$$

wo der erste Faktor einen der beiden Werthe ± 1 hat; demnach wird:

$$[a_k Ia_k] = 1, \quad [a_k Ia_j] = 0 \quad (j \gtrless k).$$

Soll nun für jede beliebige Grösse A immer $IA = |A$ sein, so ist jedenfalls nothwendig, dass immer $Ia_k = |a_k$ ist, dass also die Gleichungen:

$$[a_k|a_k] = 1, \quad [a_k\, a_j] = 0 \quad (j \gtrless k)$$

bestehen. Es ist also nothwendig, dass $a_1, \ldots a_n$ ein Normalsystem vom numerischen Werthe Eins bilden. Dass dies auch hinreichend ist, zeigt Nr. 167.

Nr. **169.** S. 128. Der Satz gilt natürlich auch noch, wenn B' die regressive normale Zurückleitung von B auf das Gebiet von A ist. Denn dann ist ja (vgl. die vorletzte Anmerkung) $|B'$ die progressive normale Zurückleitung von $|B$ auf das Gebiet von $|A$, also ist nach Nr. 169:

$$[|A|B] = [|A||B'], \quad [|B|A] = [|B'||A],$$

nach Nr. 101 gelten daher die Gleichungen von Nr. 169 auch in diesem Falle.

Nr. **171.** S. 129, Z. 14—16 v. o. Wie das gemacht werden kann, ist in dem Beweise des Satzes 1 der Anmerkung zu Nr. 152 (S. 427 f.) näher ausgeführt.

Nr. **188,** Anm. S. 141. Nach Nr. 148 und 150 (vgl. auch S. 427) ist nämlich:

$$[E\, EG] = (-1)^{p(q-1)} [EG\, E] = (-1)^{p(q-1)}\, G = [E'\, E'G],$$

unter p und q die Stufenzahlen von E und EG verstanden.

Nr. **195.** S. 142. Es ist leicht zu zeigen, dass der Werth des Ausdrucks für $\cos \angle AB$ zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegt, dass also $\angle AB$ reell wird. In der That, ist $A = \Sigma\alpha_k E_k$ und $B = \Sigma\beta_j E_j$, so wird nach Nr. 143, 151 und 146:

$$[A|B] = \Sigma \alpha_k \beta_k, \quad \alpha^2 = \Sigma \alpha_k^2, \quad \beta^2 = \Sigma \beta_k^2$$

und hieraus folgt bekanntlich:

$$[A|B]^2 \leqq \alpha^2 \beta^2.$$

Man vermisst hier und im Folgenden eine Erklärung des Winkels zwischen zwei Grössen von ungleicher Stufenzahl. Vielleicht hatte Grassmann bei der unverständlichen Anm. zu Nr. 213, die wir im Texte weggelassen haben*), etwas Derartiges im Sinne; doch lässt sich darüber nichts Sicheres feststellen.

Will man den Winkel zwischen zwei einfachen Grössen A und B von den Stufenzahlen α und β definiren, so stehen zwei Wege offen**). Man kann diesen Winkel entweder erklären als den Winkel zwischen A und der normalen Zurückleitung A' von A auf das Gebiet von B oder als den Winkel zwischen B und der normalen Zurückleitung B' von B auf das Gebiet von A. Es lässt sich nachweisen, dass diese beiden Erklärungen dasselbe aussagen und zugleich die Grassmannsche Erklärung des Winkels zwischen zwei Grössen gleicher Stufe umfassen.

In der That, nach Nr. 165 ist:

$$A' = \frac{[B(A|B)]}{B^2}, \quad B' = \frac{[A(B|A)]}{A^2},$$

also wird nach Nr. 195 und 98:

$$\cos \angle AA' = \frac{[A|A']}{\sqrt{A^2 A'^2}} = \frac{[A(B(A|B))]}{B^2 \sqrt{A^2 A'^2}}$$

$$\cos \angle B'B = \frac{[B'|B]}{\sqrt{B'^2 B^2}} = \frac{[(A(B|A))|B]}{A^2 \sqrt{B'^2 B^2}}.$$

Nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass $\alpha \leqq \beta$ ist, so haben die drei Grössen A, $|B$, $[A\|B]$ der Reihe nach die Stufenzahlen α, $n-\beta$, $\beta-\alpha$, ihr Produkt ist daher nach Nr. 116 rein progressiv, und es wird somit, nach Nr. 119 und 97:

$$[A(B(A\|B))] = [(A|B)|(A|B)] = [A|B]^2.$$

Ebenso ergiebt sich, bei Berücksichtigung von Nr. 124, Fall a:

$$[(A(B|A))|B] = (-1)^{(\beta-\alpha)(n-\beta)} [(A|B)(B|A)],$$

andrerseits ist aber nach 150 und 92:

$$[A|B] = (-1)^{\alpha(\beta-1)} \|[B|A]$$

$$= (-1)^{\alpha(\beta-1)+(\beta-\alpha)(n-\beta+\alpha)} [B|A],$$

demnach wird auch:

$$[(A(B|A))|B] = [(A|B)|(A|B)] = [A|B]^2,$$

so dass also die Zähler in den beiden Ausdrücken: $\cos \angle AA'$ und $\cos \angle B'B$ übereinstimmen.

Um auch die Uebereinstimmung der Nenner zu beweisen, müssen wir A'^2 und B'^2 berechnen.

---

*) Man findet sie auf S. 389, Z. 11—14 v. o.

**) Im gewöhnlichen Raume definirt man ja den Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene als den Winkel zwischen der Geraden und deren senkrechter Projektion auf die Ebene. Die nachfolgenden Betrachtungen sind nur die naturgemässe Verallgemeinerung dieser Definition auf ein Gebiet n-ter Stufe.

Es ist:

$$A'^2 = [A' A'] = \frac{[A'('B(A\|B))]}{B^2}.$$

Hier ist das Produkt der drei Grössen A', B, $[A\|B]$ rein progressiv, also wird

$$A'^2 = \frac{[(A' B)|(A|B)]}{B^2} = \frac{[A B]^2}{B^2},$$

weil nach Nr. 169 und der Anmerkung dazu (s. S. 430) $[A'|B] = [A|B]$ ist. Ebenso wird:

$$B'^2 = \frac{[B|A]^2}{A^2} = \frac{[A B]^2}{A^2}.$$

Auf Grund dieser Formeln erhält man jetzt sofort:

$$\cos \angle A A' = \cos \angle B' B = \sqrt{\frac{[A|B]^2}{A^2 B^2}},$$

wo der Wurzel das positive Vorzeichen zu ertheilen ist.

Man darf demnach, wenn A und B von beliebiger Stufe sind, den Winkel AB durch die Gleichung:

$$\cos \angle AB = \sqrt{\frac{[A|B]^2}{A^2 B^2}}$$

definiren. Hier kann man, so lange A und B von verschiedener Stufe sind, das Vorzeichen der Wurzel unbestimmt lassen; sind aber A und B von gleicher Stufe und wird also $[A|B]$ eine Zahl, so muss man die Quadratwurzel aus dem Zähler $= [A|B]$ setzen und die Quadratwurzel aus dem Nenner positiv wählen.

Nr. 195. S. 143, Z. 1—7 v. o. Auch hier muss noch gezeigt werden, dass der $\sin(abc\ldots)$ zu einem reellen Winkel gehört, dass also der numerische Werth von $[abc\ldots]$ nicht grösser ist als das Produkt $\alpha\beta\gamma\ldots$ der numerischen Werthe der einzelnen Faktoren $a, b, c, \ldots$. Im Stile Grassmanns kann der Beweis hierfür folgendermassen erbracht werden:

Wir denken uns jede der Grössen $a, b, c, \ldots$ durch ihren numerischen Werth dividirt, so dass ein Produkt: $[a_1 \ldots a_m]$ $(m \leq n)$ entsteht, dessen Faktoren erster Stufe: $a_1, \ldots a_m$ alle numerisch gleich Eins sind; dann brauchen wir nur zu zeigen, dass der numerische Werth von $[a_1 \ldots a_m]$ nicht grösser als Eins sein kann. Wir dürfen dabei voraussetzen, dass das Produkt $[a_1 \ldots a_m]$ nicht verschwindet, sonst wäre ja sein numerischer Werth gleich Null.

Sind $a_1, \ldots a_m$ zu einander normal, so ist nach Nr. 175

$$[(a_1 \ldots a_m)|(a_1 \ldots a_m)] = [a_1 \ldots a_m]^2 = 1.$$

Sind sie dagegen nicht zu einander normal, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass etwa a_1 nicht zu allen $m-1$ Grössen $a_2, \ldots a_m$ normal ist, und können ferner nach Nr. 160 und 163 ein Normalsystem m-ter Stufe: $a_1, u_2, \ldots u_m$ vom numerischen Werthe Eins aufstellen, dessen Gebiet mit dem Gebiete der Grössen $a_1, \ldots a_m$ zusammenfällt. Dann ist:

$$a_k = \lambda_k a_1 + \sum_2^m {}_\nu \lambda_{k\nu} u_\nu = \lambda_k a_1 + a_k' \quad (k = 2, \ldots m),$$

wo $\lambda_2, \ldots \lambda_n$ sicher nicht alle gleich Null sind; aus den Gleichungen:

$$a_k^2 = 1 = \lambda_k^2 + \sum_\nu \lambda_{k\nu}^2, \quad a_k'^2 = \sum_\nu \lambda_{k\nu}^2$$

ergiebt sich daher, dass das Produkt $\varrho_2 \ldots \varrho_n$ der numerischen Werthe $\varrho_2, \ldots \varrho_n$ von $a_2', \ldots a_n'$ kleiner als Eins ist. Setzen wir nun: $a_k' = \varrho_k a_k''$, so wird a_k'' numerisch gleich Eins und wir bekommen nach Nr. 67:

$$\begin{aligned}[a_1 \ldots a_m] &= [a_1 a_2' \ldots a_m'] \\ &= \varrho_2 \ldots \varrho_m [a_1 a_2'' \ldots a_m''].\end{aligned}$$

Da hier der numerische Werth des Produktes $[a_1 a_2'' \ldots a_m'']$ offenbar grösser ist als der von $[a_1 \ldots a_m]$, so können wir sagen: „Hat man ein nicht verschwindendes Produkt von m Grössen erster Stufe $(m \leqq n]$, die alle den numerischen Werth Eins haben, die aber nicht zu einander normal sind, so kann man in dem Gebiete dieser Grössen stets m Grössen erster Stufe vom numerischen Werthe Eins finden, deren Produkt einen grösseren numerischen Werth hat, als das gegebene Produkt." Man kann nun diese Vergrösserung des numerischen Werthes so lange fortsetzen, als man noch nicht zu einem Produkt gelangt, dessen Faktoren normal zu einander sind; da andrerseits ein Produkt von der betrachteten Beschaffenheit, dessen Faktoren zu einander normal sind, den numerischen Werth Eins besitzt, so ergiebt sich, dass der Satz gilt:

Satz. *Sind $a_1, \ldots a_m$ von Null verschiedene Grössen erster Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe $(m \leqq n)$, so ist der numerische Werth des Produktes $[a_1 \ldots a_m]$ nicht grösser als das Produkt der numerischen Werthe von $a_1, \ldots a_m$, und zwar ist er diesem Produkte dann und nur dann gleich, wenn $a_1, \ldots a_m$ zu einander normal sind.*

Nr. **198** und **199.** S. 143 f. Dass hier a, b, c, d Grössen *erster Stufe* sein sollen, ergiebt sich sowohl aus ihrer Bezeichnung durch kleine lateinische Buchstaben, als aus der Anwendung des Satzes Nr. 177.

Uebrigens ist es nicht ohne Interesse, dass die Sätze 175—182, 185—194, 196, 198—199, 201—205, 208—210, 213—215 auch dann noch gültig bleiben, wenn man die darin vorkommenden Grössen erster Stufe und ihre numerischen Werthe durch Grössen $(n-1)$-ter Stufe und deren numerische Werthe ersetzt. Erstens nämlich ist jede Grösse $(n-1)$-ter Stufe die Ergänzung einer ganz bestimmten Grösse erster Stufe. Zweitens ist nach Nr. 98 die Ergänzung eines Produktes gleich dem Produkte der Ergänzungen seiner Faktoren, also insbesondere die Ergänzung eines inneren Produktes gleich dem inneren Produkte der Ergänzungen seiner beiden Faktoren, woraus zugleich folgt, dass die Ergänzung einer Grösse stets denselben numerischen Werth hat, wie die Grösse selbst. Endlich ist offenbar auch $\cos \angle ab = \cos \angle |a|b$, weil $[a|b]$ eine Zahl und also $|[a|b] = [a\ b]$ ist. Berücksichtigt man nun noch, dass jede Gleichung der angeführten Nummern bestehen bleibt, wenn man auf beiden Seiten die Ergänzungen nimmt, so erkennt man sofort, dass genau dieselben Gleichungen auch für Grössen $(n-1)$-ter Stufe gelten.

Nr. **199,** Beweis. S. 144. Die Potenz mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ wird hier als Zeichen für den *positiven* Werth der Quadratwurzel verwendet.

Nr. **211.** S. 147. Wählt man im gewöhnlichen Raume zu Einheiten drei auf einander senkrechte Strecken von der Länge Eins, so sind a, b, c drei beliebige Strecken des Raumes, die man etwa von einem Punkte O ausgehen lassen kann, und $\sin(abc)$ ist genau der Ausdruck, den v. Staudt als den Sinus der Ecke a, b, c bezeichnet hat (Crelles Journal, Bd. **24**, S. 255. (1842).)

Nr. **151—215.** S. 118—147. Es empfiehlt sich, einige Worte über die Bedeutung der in Nr. 151—215 eingeführten Begriffe zu sagen.

Denkt man sich die Einheiten $e_1, \dots e_n$ in einem n-fach ausgedehnten Euklidischen Raume als n auf einander senkrechte Strecken, deren Längen sämmtlich der Längeneinheit gleich sind, so wird jede Grösse $\Sigma x_\nu e_\nu$ ebenfalls durch eine Strecke dargestellt, deren Länge gleich dem numerischen Werthe von $\Sigma x_\nu e_\nu$ ist. Zu einander normale Grössen erster Stufe werden durch auf einander senkrechte Strecken abgebildet, und jedes einfache Normalsystem durch n auf einander senkrechte Strecken; der Winkel zwischen zwei Grössen erster Stufe ist gleich dem Winkel zwischen den entsprechenden Strecken, und so weiter. Für den Fall $n = 3$ hat das Grassmann selbst in Nr. 330—340 näher ausgeführt.

Nun kommen, wie Lie hervorgehoben hat*), alle diese Betrachtungen im Grunde darauf hinaus, dass Grassmann nichteuklidische Geometrie treibt. Gilt nämlich in einem Raume von n Dimensionen die Euklidische Geometrie, so gilt in der Mannigfaltigkeit aller Strecken dieses Raumes oder, was damit gleichbedeutend ist, in der unendlich fernen $(n-1)$-fach ausgedehnten Ebene dieses Raumes die von Riemann entdeckte nichteuklidische Geometrie, und Grassmann entwickelt hier thatsächlich diese Geometrie.

Erinnern wir uns des Zusammenhangs zwischen den Normalsystemen und den orthogonalen Substitutionen (s. S. 429) und bedenken wir, dass in einem n-fach ausgedehnten Euklidischen Raume die orthogonalen Substitutionen von der Determinante Eins nichts andres sind, als die Drehungen um den Koordinatenanfang, so können wir mit Study (diese Ausgabe I, 1, S. 406) den Sachverhalt auch so ausdrücken: Die Untersuchungen der Nrn. 151—215 sind Beiträge zur Invariantentheorie der Gruppe aller Drehungen um einen Punkt.

Zu einer etwas allgemeineren, jedoch von der eben beschriebenen nicht wesentlich verschiedenen Auffassung gelangt man, wenn man die Koefficienten $x_1, \dots x_n$ der Grössen erster Stufe: $\Sigma x_\nu e_\nu$ als beliebige homogene Koordinaten in einem $(n-1)$-fach ausgedehnten ebenen Raume deutet. Der Begriff des numerischen Werthes hat dann keine geometrische Bedeutung mehr, weil sein analytischer Ausdruck nicht homogen von nullter Ordnung in den Koordinaten ist. Dagegen fällt zum Beispiel der Winkel zwischen zwei Grössen erster Stufe: $\Sigma x_\nu e_\nu$ und $\Sigma y_\nu e_\nu$ zusammen mit der Entfernung der beiden Punkte $x_1, \dots x_n$ und $y_1, \dots y_n$, wenn man beim Messen dieser Entfernung die Cayleysche Massbestimmung in Bezug auf die Fundamentalmannigfaltigkeit $\Sigma x_\nu^2 = 0$ zu Grunde legt. Allerdings ist diese Cayleysche Massbestimmung älter als die A_2, denn sie stammt schon aus dem Jahre 1859.

Nr. **222.** S. 151 f. Das Verständnis dieser Nummer wäre erleichtert worden, wenn der als Zusatz bezeichnete Specialsatz an die Spitze der Nummer gestellt worden wäre. Die Fassung des Hauptsatzes in Nr. 222 wird nämlich erst durch den Zusatz verständlich; denn sie setzt voraus, man wisse bereits, dass $A - R$, $B - R, \dots$ Strecken sind, was doch erst aus dem Zusatze hervorgeht. Die Umstellung hätte auch gar keine Bedenken gehabt, da der Beweis des Zusatzes von dem Hauptsatze durchaus unabhängig ist.

Nr. **227,** Anm. S. 154—157. Ueber Bellavitis vergleiche man die Anmerkung auf S. 398.

Der Nachweis, „dass es keine andere Addition der Punkte und Strecken giebt,

---

*) Theorie der Transformationsgruppen Bd. III, S. 534 f.

als die hier angegebene" kann nicht als erbracht gelten, denn der ganze folgende Beweis ist nur richtig, wenn man erstens die verschiedenen besonderen Annahmen macht, die Grassmann einführt und die der Natur der Sache nach keine Begründung zulassen, wenn man zweitens, wie im Texte geschehen, überall das Wörtchen „einfach" hinzufügt und wenn man endlich drittens von vornherein die Euklidische Geometrie voraussetzt. Bei andern Annahmen ergeben sich noch andre Arten der Addition von Punkten, vgl. Study, Wiener Berichte, Bd. 91 (1885), S. 111.

Nr. **254** und **262.** S. 169 und 173. Man erwartet nach den Nrn. 254 und 262 die Einführung eines Namens für die Produkte von zwei und drei Strecken, entsprechend den Namen, die in den Erklärungen 249, 257 und 265 für die Produkte von zwei, drei und vier Punkten eingeführt sind, etwa in der Form:

Wir nennen das Produkt $[ab]$ zweier Strecken a und b einen Flächenraum, den Flächeninhalt des Parallelogramms ab seinen Inhalt und die Stellung dieses Parallelogramms seine Stellung.

Ferner: *Wir nennen das Produkt $[abc]$ dreier Strecken a, b, c einen Körperraum und den Inhalt des Spates abc seinen Inhalt.*

In der That werden in den folgenden Nummern (vgl. 330, 346 und 347) für die genannten Produkte mehrfach die Ausdrücke Flächenraum und Körperraum gebraucht, jedoch ohne dass diese Namen geradezu als Kunstausdrücke eingeführt würden. Hierfür sind sie freilich auch wegen ihrer Aehnlichkeit mit den Ausdrücken Flächentheil und Körpertheil nicht besonders geeignet. R. Mehmke hat daher für das Produkt zweier Strecken eine neue Bezeichnung *„das Feld"* eingeführt*), und ihm haben sich G. Mahler und F. Kraft angeschlossen. Von anderer Seite ist für das Produkt dreier Strecken der Ausdruck *„das Fach"* in Vorschlag gebracht worden. H. Grassmann d. J.

Nr. **258,** Anm. S. 172, Z. 16, 15 v. u. „Man hätte . . . setzen können." Grassmann hatte das ursprünglich gethan. Nach der Ausdrucksweise der A_1 wäre nämlich der Inhalt des Dreiecks ABC als die „Ausdehnung" des äusseren Produktes $[ABC]$ zu bezeichnen. Andrerseits sagt Grassmann in seiner im Grunertschen Archiv veröffentlichten Anzeige der A_1 geradezu: „Das Produkt ABC bedeutet das Dreieck, dessen Ecken A, B, C sind, aufgefasst u. s. w." (s. diese Ausg. I, 1, S. 179, 184 f., 303).

Nr. **262.** S. 174. Z. 5—10 v. o. Die in Nr. 71 gegebene Erklärung des Begriffs der *einfachen* linealen Aenderung ist hier und auch später (vgl. Nr. 505) nicht streng festgehalten; denn es ist die Forderung fallen gelassen, dass die Grösse, deren Vielfaches addirt wird, der zu vermehrenden Grösse *benachbart* sei.

Nr. **270,** Anm. S. 178, Z. 7 v. u.: „der unendlich entfernte Linientheil". Damit ist natürlich ein Linientheil gemeint, der durch Multiplikation zweier unendlich entfernter Punkte entsteht, also das Produkt zweier Strecken.

Nr. **300.** S. 189. Beim Beweise vgl. die Anmerkung zu Nr. 112, S. 416.

Nr. **309.** S. 191 f. Beim Beweise hätte der Fall erwähnt werden sollen, dass die homogene Gleichung n-ten Grades zwischen x_1, x_2, x_3 eine Potenz von x_1, etwa die Potenz x_1^m, als Faktor enthält; dann bekommt man nämlich in den „gewöhnlichen Koordinaten" eine algebraische Kurve von $(n-m)$-ter Ordnung und erst, wenn man zu dieser Kurve die unendlich entfernte Gerade m-fach zählend hinzunimmt, erhält man das Gebilde n-ter Ordnung, das durch die Gleichung

*) Zuerst in einer Vorlesung am Stuttgarter Polytechnicum (Sommer 1881).

$\mathfrak{P}_{n,x} = 0$ dargestellt wird. Zu einer entsprechenden Bemerkung giebt der Beweis von Nr. 311 Anlass. Vgl. hierzu Nr. 329 Anm.

Nr. **323.** S. 196, Z. 8 v. u. Es hätte bemerkt werden sollen, dass das Produkt $[paBc_1 D] = q$ nach Nr. 320 sicher nicht verschwindet und dass aus demselben Grunde auch $[qe]$ nicht verschwindet.

Nr. **329.** S. 206, Z. 1 f. v. o.: „umgekehrt u. s. w." Die letzte Gleichung sagt nämlich aus, dass $[(g)L_k] = 0$ ist, und da $[(g)C]$ augenscheinlich verschwindet, so wird $(g) = [L_k C]$. Andrerseits ist auch $(h) = [L_k C]$, also $(g) \equiv (h)$, oder, da (g) und (h) einfache Punkte sind: $(g) = (h)$, woraus sofort $g = h$ folgt.

Nr. **329,** Anm. S. 207. Auf diese Ableitung der geometrischen Gleichung einer Kurve dritter Ordnung wird in den Anmerkungen zu den Abhandlungen über die Erzeugung von Kurven (im zweiten Bande dieser Ausgabe) näher eingegangen werden.

Nr. **337,** Anm. S. 213 f. Diese Anmerkung leidet schon im zweiten Absatze an Unklarheit, und der vierte Absatz lässt sich trotz der darin angebrachten Einschaltungen nur gezwungen aufrecht erhalten. Vielleicht wäre es besser gewesen, die Anmerkung ausser ihrem ersten und ihrem letzten Absatze ganz zu unterdrücken, denn die in der Anmerkung beschriebene Art der normalen Zurückleitung auf Punkte, Linien und Ebenen lässt sich nur dann verwirklichen, wenn man den bisher entwickelten Begriff der Ergänzung durch einen ganz anderen ersetzt.

Es wird nämlich nöthig, neben dem Systeme der ursprünglichen Einheiten a, b, c, d, das aus einem einfachen Punkte a und drei auf einander senkrechten Strecken b, c, d bestehen sollte, *für jeden einzelnen im Endlichen liegenden Punkt x des Raumes noch ein besonderes System von Einheiten anzunehmen*, *das für den Punkt x selbst und für die durch ihn gehenden Linien- und Flächentheile die Ergänzungen bestimmt*, und zwar muss das zu dem Punkte x gehörige besondere System von Einheiten ausser den für alle Punkte des Raumes festgehaltenen Streckeneinheiten b, c, d noch als erste Einheit *den mit dem Punkte x kongruenten einfachen Punkt* enthalten. Die auf dieses veränderliche System von Einheiten bezogene Ergänzung — sie möge für den Augenblick durch ein voranstehendes $\mathfrak{J}$ bezeichnet werden — liefert dann allerdings, auf Linien- und Flächentheile angewandt, die zu diesen Gebilden senkrechten Felder und Strecken, und die zu dieser Art der Ergänzung gehörende normale Zurückleitung gewinnt wirklich die im Texte der Anmerkung angegebene Bedeutung. Dagegen verliert für das neue Symbol $\mathfrak{J}$ sogar die Grundgleichung der Ergänzung:

$$\mathfrak{J}[AB] = [\mathfrak{J}A \,.\, \mathfrak{J}B]$$

ihre Gültigkeit, so dass man also genöthigt sein würde, zunächst die Rechengesetze für das Symbol $\mathfrak{J}$ ganz von Anfang an zu entwickeln.

Die Schwierigkeit, die hier zu Tage tritt, wenn man die Begriffe der Ergänzung und des Normalen auf die Punkte des Euklidischen Raumes anwenden will, beruht auf dem folgenden Umstande: Der Grassmannsche Kalkül, soweit er von den genannten Begriffen Gebrauch macht, ist auf die Gruppe zugeschnitten, die aus allen Drehungen eines Euklidischen Raumes um einen Punkt besteht (s. die erste Anmerkung auf S. 434). In der Geometrie des Euklidischen Raumes dagegen handelt es sich nicht bloss um diese Gruppe, sondern um die umfassendere Gruppe *aller* Bewegungen, die ausser den Drehungen auch noch die Parallelverschiebungen und die Schraubungen enthält. Da nun beide Gruppen die unend-

lich fernen Punkte, also die Strecken des Euklidischen Raumes in derselben Weise transformiren, so ist der Grassmannsche Kalkül in seinem ganzen Umfange auf die Strecken des Euklidischen Raumes anwendbar. Will man ihn jedoch auch auf die im Endlichen gelegenen Punkte des Euklidischen Raumes anwenden, so muss man ihn umgestalten, und das wird in den Entwickelungen des Textes dadurch erreicht, dass die Begriffe „Ergänzung" und „normal" stets nur bei Strecken und Streckenprodukten angewendet werden.

Nr. **340,** Anm. S. 215. Die hier angedeuteten Gedanken finden sich ausgeführt in Grassmanns Abhandlung über Quaternionen, Math. Ann. Bd. 12, S. 384—386, die im zweiten Bande dieser Ausgabe abgedruckt werden soll. Betreffs der Benutzung des Aussenwinkels des sphärischen Dreiecks anstatt der Innenwinkel vergleiche man auch die Darstellung Grassmanns in seinem „Lehrbuch der Trigonometrie für höhere Schulen". Berlin bei Enslin, 1865, S. 100—115. Uebrigens ist wohl Möbius der erste, der in der sphärischen Geometrie grundsätzlich die Aussenwinkel des Dreiecks statt der inneren benutzt hat (in der „analytischen Sphärik", 1846, und in den „Grundformeln der sphärischen Trigonometrie", 1860, ges. Werke Bd. II, S. 1 ff., 72 ff.).

Nr. **343.** S. 218: „Nämlich die Gleichung $\alpha a + \beta b + \cdots = 0$ schliesst (nach 222) schon die Gleichung $\alpha + \beta + \cdots = 0$ ein". Denn schreibt man die erste Gleichung in der Form $-\alpha a = \beta b + \gamma c + \cdots$, so erscheint der mit dem Koefficienten $-\alpha$ behaftete Punkt a als der Summenpunkt der vielfachen Punkte βb, γc, ... Nach 222 aber ist der Zahlkoefficient des Summenpunktes gleich der Koefficientensumme der Summandenpunkte, das heisst, es ist

$$-\alpha = \beta + \gamma + \cdots, \quad \text{also} \quad \alpha + \beta + \gamma + \cdots = 0.$$

Nr. **345,** Fussnote. S. 221. In der That stellt die Gleichung

$$(1) \qquad 2[(s - s')\,r] + \mu = 0$$

bei konstantem s und r und veränderlichem s' eine zu r senkrechte Ebene dar. Diese Ebene geht durch den Punkt

$$(2) \qquad s + \frac{\mu r}{2\varrho^2} = p$$

hindurch; aus der Gleichung (2) folgt nämlich zunächst, dass

$$2(s - p) + \mu\,\frac{r}{\varrho^2} = 0$$

ist, und hieraus durch innere Multiplikation mit r, wegen $r^{\underline{2}} = \varrho^2$, die Gleichung

$$2[(s - p)|r] + \mu = 0,$$

welche eben aussagt, dass die Ebene (1) durch den Punkt p hindurchgeht.

Nr. **346** und **347.** S. 221 ff. (vgl. auch Nr. 286). Eine Summe von Linientheilen, die sich nicht auf einen einzigen Linientheil zurückführen lässt, nennt Hyde im Anschluss an den Sprachgebrauch von Ball „*eine Schraube*" (screw) und die Darstellung einer solchen Summe als Summe eines Linientheils und eines dazu senkrechten Feldes die „*Normalform der Schraube*" *).

Hält man das Hydesche Kunstwort *Schraube* mit den schon oben (vgl. die Anmerkung zu Nr. 254 und 262) erwähnten kurzen Bezeichnungen „*Feld*" und

*) Vgl. E. W. Hyde, The directional theorie of screws. Annals of Mathematics. Bd. IV, Nr. 5. October 1888. S. 137 und das selbständige Werk desselben Verfassers: The directional calculus, based upon the methods of Hermann Grassmann. Boston 1890. Art. 61 und 67.

„*Fach*" zusammen und fügt noch die von dem Unterzeichneten für die Begriffe „Linientheil" und „Flächentheil" in Vorschlag gebrachten Ausdrücke „*Stab*" und „*Blatt*" hinzu*), so erhält man das folgende Schema von kurzen Namen für die bei der Anwendung der Ausdehnungslehre auf die Geometrie auftretenden Grundbegriffe:

Strecke,
Feld (Produkt zweier Strecken, Flächenraum),
Fach (Produkt dreier Strecken, Körperraum),
Punkt,
Stab (Produkt zweier Punkte, Linientheil),
Schraube (Summe von Stäben),
Blatt (Produkt von drei Punkten, Flächentheil),

wozu man vielleicht noch hinzufügen könnte:

Block (Produkt von vier Punkten, Körpertheil).

H. Grassmann d. J.

Nr. **353.** S. 228. Wegen des Ausdrucks „vertauschbare Lücken" vergleiche man Nr. 485, Anm. S. 328 ff.

Nr. **390,** Anm. 2. S. 257, Z. 16—18 v. o. Im Originale war diese besondere Art der Affinität nach dem Vorgange von Möbius als „Gleichheit" bezeichnet (s. barycentrischer Calcul Cap. 4, ges. Werke Bd. I, S. 194. ff).

Nr. **377—390.** S. 240—257 (vgl. auch Nr. 401 und 404). Die in diesen Nummern entwickelte analytische Theorie der geometrischen Verwandtschaften ist bisher nicht genügend beachtet worden. Es möge daher im Folgenden versucht werden, die Anwendung der allgemeinen Theorie auf die *Kollineationen des Raumes* im Einzelnen durchzuführen. Dabei sollen die Andeutungen in den beiden Anmerkungen zu Nr. 390 als Richtschnur dienen.

Es seien $e_0, \ldots e_3$ und ebenso $b_0, \ldots b_3$ vier beliebige, aber nicht in Einer Ebene liegende, vielfache Punkte des Raumes. Dann wird durch den Bruch

$$(1) \qquad \mathfrak{q} = \frac{b_0, \ldots b_3}{e_0, \ldots e_3}$$

der Raum in allgemeinster Weise kollinear auf sich bezogen. Ordnet man nämlich einem jeden Punkte des Raumes den aus ihm durch Multiplikation mit $\mathfrak{q}$ hervorgehenden Punkt zu, so werden dadurch zunächst den vier Punkten des Nenners die vier Punkte des Zählers zugewiesen. Denn nach dem Begriff des extensiven Bruches ist**)

$$(2) \qquad e_s \mathfrak{q} = b_s.$$

Ferner aber wird einem jeden beliebigen Punkte x des Raumes, der aus den vier *Nennern* des Bruches $\mathfrak{q}$ durch die Zahlen $\mathfrak{x}_0, \ldots \mathfrak{x}_3$ abgeleitet sein möge, das heisst, dem Punkte

*) Vgl. H. Grassmann, Punktrechnung und projektive Geometrie. Erster Teil: Punktrechnung. Halle a/S. 1894. Beitrag für die Festschrift der Lateinischen Hauptschule zur zweihundertjährigen Jubelfeier der Universität Halle. S. 81 und 92, Separatabzug S. 7 und 18.

**) In allen den Fällen, wo man auch *Folgen von Verwandtschaften* in Betracht zu ziehen hat, erscheint es bequemer, den Verwandtschaftsbruch $\mathfrak{q}$ bei der Multiplikation *hinter* die umzuwandelnde Grösse zu stellen. Vgl. die Abhandlung Grassmanns über Quaternionen. Math. Ann. Bd. 12. S. 382 u. 383.

(3) $$x = \mathfrak{x}_0 e_0 + \cdots + \mathfrak{x}_3 e_3,$$
der Punkt
(4) $$x\mathfrak{q} = \mathfrak{x}_0 b_0 + \cdots + \mathfrak{x}_3 b_3$$
zugeordnet, welcher durch dieselben Zahlen aus den vier *Zählern* von $\mathfrak{q}$ numerisch abgeleitet ist.

Die beiden auf diese Weise auf einander bezogenen Punktvereine x und $x\mathfrak{q}$ haben dann die Eigenschaft, dass jede Zahlbeziehung, welcher die Punkte des ersten Vereins unterliegen, auch für die entsprechenden Punkte des zweiten Vereins gilt, und umgekehrt. Es bedarf nämlich nur einer Multiplikation mit $\mathfrak{q}$ oder $\frac{1}{\mathfrak{q}}$, um aus der einen Zahlbeziehung die andere abzuleiten. Die beiden Vereine sind daher im Sinne von Nr. 401 *verwandt*. Sie sind aber auch *kollinear verwandt*, denn aus dem Fortbestehen einer jeden Zahlbeziehung folgt insbesondere, dass je vier in Einer Ebene liegenden Punkten des einen Vereins auch im andern Vereine vier Punkte Einer Ebene entsprechen; und durch diese Eigenschaft wird die Verwandtschaft als kollineare Verwandtschaft charakterisirt. Endlich aber ist diese Kollineation zugleich die *allgemeinste kollineare Verwandtschaft*.

In der That kann man durch den Bruch $\mathfrak{q}$ *fünf* beliebig gelegenen Punkten des Raumes, von denen keine vier in Einer Ebene liegen, fünf ebensolche beliebig gelegene Punkte zuweisen, nämlich neben den vier Grundpunkten $e_0, \ldots e_3$ und $b_0, \ldots b_3$ beider Vereine etwa noch dem Einheitspunkte $e = e_0 + \cdots + e_3$ des ersten Vereins den Einheitspunkt $b = b_0 + \cdots + b_3$ des zweiten Vereins. Diese Punkte e und b sind aber wirklich noch ganz beliebig gelegene Punkte des Raumes, da die Grundpunkte $e_0, \ldots e_3$ und $b_0, \ldots b_3$, als deren Summen sich die Einheitspunkte darstellen, oben als *vielfache Punkte* vorausgesetzt worden sind, aber bisher nur über deren Lage, nicht auch über ihre Gewichte verfügt worden ist. Durch räumliche Festlegung der beiden Einheitspunkte werden dann diese Gewichte der Grundpunkte beider Systeme bis auf je einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt (vgl. Nr. 404).

Dabei wird sich in jedem der beiden Systeme eine gerade oder ungerade Zahl positiver (also auch negativer) Gewichte ergeben, je nachdem der Einheitspunkt von dem Innern des Grundtetraeders durch eine gerade oder ungerade Anzahl Tetraederflächen getrennt ist. Das heisst, man wird eine gerade Anzahl positiver Gewichte erhalten, wenn der Einheitspunkt im Innern des Grundtetraeders oder in einem der sechs keilförmigen Scheitelräume des Tetraeders liegt, in die man eintritt, wenn man von seinem Innern ausgehend eine seiner Kanten überschreitet. Liegt der Einheitspunkt hingegen in einem der acht Räume, in die man gelangt, wenn man aus dem Innern kommend eine Fläche oder Ecke des Tetraeders durchdringt, so ist die Zahl der positiven Gewichte ungerade.

Hat man endlich noch eine Bestimmung über den Sinn des positiven Tetraeders getroffen, so kann man über den Proportionalitätsfaktor der Nennerpunkte $e_0, \ldots e_3$ etwa in der Weise verfügen, dass
(5) $$[e_0 \ldots e_3] = +1$$
wird. Dieser Werth $+1$ lässt sich *auch bei der Beschränkung auf reelle Gewichte* stets erzielen, da ja noch die *Reihenfolge* der Nennerpunkte willkürlich geblieben ist, so dass man ein sich bei der Bildung des Produktes $[e_0 \ldots e_3]$ etwa zunächst ergebendes Minuszeichen durch Umstellung der Nenner von $\mathfrak{q}$ und Aenderung der Bezeichnung beseitigen kann. Damit ist dann freilich auch über die Reihenfolge

der Zähler verfügt; und es wird daher bei der Beschränkung auf reelle Gewichte nicht mehr möglich sein, den Proportionalitätsfaktor der Zählerpunkte immer so zu bestimmen, dass auch *deren* Produkt $= +1$ wird. Man wird sich auf die Forderung beschränken müssen, er solle so gewählt werden, dass das Produkt den Werth

$$(6)\qquad [b_0 \ldots b_3] = \pm 1$$

annimmt. Dabei wird dann das Pluszeichen gelten, wenn bei positivem Sinn des durch die *Lage* der Punkte $b_0, \ldots b_3$ bestimmten Tetraeders die Anzahl ihrer negativen Gewichte gerade, und wenn bei negativem Sinn jenes Tetraeders die Anzahl der negativen Gewichte ungerade ist. In den andern Fällen gilt das Minuszeichen. Durch diese Forderungen sind auch die beiden Proportionalitätsfaktoren bis auf ihre Vorzeichen, die willkürlich bleiben, eindeutig bestimmt.

Aus den Gleichungen (5) und (6) folgt noch, dass in denselben Fällen wie das Produkt (6) auch der *Potenzwerth* des Bruches $\mathfrak{q}$ (vgl. Nr. 383 und 384), das heisst, der Ausdruck

$$(7)\qquad [\mathfrak{q}^4] = \frac{[b_0 b_1 b_2 b_3]}{[e_0 e_1 e_2 e_3]} = \pm 1$$

wird.

Aus dem Fortbestehen einer jeden Zahlbeziehung ergeben sich übrigens auf das Leichteste die allgemeinen Grundeigenschaften der Kollineation:

So *zunächst* die Thatsache, dass durch die Transformation *das Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden nicht geändert wird.* Zum Beweise dieser Eigenschaft stelle man vier beliebig gegebene Punkte einer Geraden in der Form dar

$$x,\ y,\quad u = x + y,\quad v = \mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y,$$

was immer möglich ist, da man die Gewichte der beiden ersten Punkte x und y stets so wählen kann, dass der dritte Punkt ihr Schwerpunkt wird. Dann wird das Doppelverhältniss der vier Punkte*):

$$\frac{[xu]}{[uy]} : \frac{[xv]}{[vy]} = \frac{[xy]}{[xy]} : \frac{\mathfrak{y}[xy]}{\mathfrak{x}[xy]} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\,.$$

Es ist also gleich dem Verhältniss der Ableitzahlen des vierten Punktes. Sind nun x', y', u', v' die vier entsprechenden Punkte des zweiten Systems, also $x' = x\mathfrak{q}$, $y' = y\mathfrak{q}, \ldots$, so wird wegen des Fortbestehens einer jeden Zahlbeziehung $u' = x' + y'$ und $v' = \mathfrak{x}x' + \mathfrak{y}y'$. Das Doppelverhältniss der durch die Transformation entstandenen vier Punkte wird daher wieder gleich $\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$.

Zweitens folgt aus dem Fortbestehen jeder Zahlbeziehung, dass *den unendlich fernen Punkten* (den Strecken) des einen Systems im andern Systeme entweder wieder lauter unendlich ferne Punkte (Strecken) oder *die Punkte einer Ebene entsprechen.*

Nach Nr. 229 lässt sich nämlich eine jede beliebige Strecke g des Raumes aus drei Strecken g_1, g_2, g_3, die nicht Einer Ebene parallel sind, numerisch ableiten. Nun entspricht bei der Kollineation jeder Strecke entweder wieder eine Strecke oder ein im Endlichen liegender Punkt. Denn jede Strecke lässt sich als die Differenz zweier Punkte von gleichem Gewicht darstellen; ordnet daher die

*) Vgl. hierzu G. Peano, Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann. Turin 1888. S. 72 oder auch Die Ausdehnungslehre von 1844, § 165 diese Ausgabe I, 1 S. 272.

Kollineation diesen beiden Punkten *wieder Punkte von gleichem Gewichte* zu, so ordnet sie auch jener Strecke wieder eine Strecke zu, im entgegengesetzten Falle aber einen im Endlichen liegenden Punkt. Sind demnach p, p_1, p_2, p_3 die unendlich oder endlich entfernten Punkte des zweiten Systems, die den vier Strecken g, g_1, g_2, g_3 entsprechen, so wird sich, wegen des Fortbestehens jeder Zahlbeziehung, der Punkt p genau ebenso aus den drei Punkten p_1, p_2, p_3 numerisch ableiten lassen, wie sich die Strecke g aus den drei Strecken g_1, g_2, g_3 numerisch ableiten liess. Mit anderen Worten: wenn die drei Punkte p_1, p_2, p_3 unendlich entfernt sind, so gilt dasselbe auch von dem Punkte p. Sind aber die Punkte p_1, p_2, p_3 nicht alle drei zugleich unendlich entfernt, so liegt der Punkt p (nach Nr. 236) in der durch sie bestimmten Ebene. Somit gehören dann die Bilder aller unendlich fernen Punkte des ersten Systems der Ebene $\pi = [p_1 p_2 p_3]$ an, die durch die Punkte p_1, p_2, p_3 bestimmt ist. Diese Ebene π heisst die *Fluchtebene* des zweiten Systems.

Die *Hauptzahlen* $\mathfrak{r}_s$ und die *Hauptgebiete* (Doppelelemente) a_s des Kollineationsbruches $\mathfrak{q}$ ergeben sich aus der Gleichung

$$a\mathfrak{q} = \mathfrak{r}a, \tag{8}$$

in der $\mathfrak{r}$ eine Zahl bedeutet, oder also aus der Gleichung

$$0 = a(\mathfrak{r} - \mathfrak{q}),$$

für die man, wenn man noch

$$a = \mathfrak{a}_0 e_0 + \cdots + \mathfrak{a}_3 e_3$$

setzt, auch schreiben kann

$$0 = \mathfrak{a}_0 \,.\, e_0(\mathfrak{r} - \mathfrak{q}) + \cdots + \mathfrak{a}_3 \,.\, e_3(\mathfrak{r} - \mathfrak{q}). \tag{9}$$

Nach dieser Gleichung liegen die vier Punkte $e_0(\mathfrak{r} - \mathfrak{q}), \ldots e_3(\mathfrak{r} - \mathfrak{q})$ in Einer Ebene; folglich verschwindet ihr äusseres Produkt, (der durch sie bestimmte Spat), das heisst, man erhält für die Hauptzahlen $\mathfrak{r}_s$ des Bruches $\mathfrak{q}$ die Gleichung vierten Grades

$$[e_0(\mathfrak{r} - \mathfrak{q}) \ldots e_3(\mathfrak{r} - \mathfrak{q})] = 0$$

oder, bei Benutzung der in den Nummern 504 und 506 eingeführten Bezeichnung, die Gleichung

$$[(\mathfrak{r} - \mathfrak{q})^4] = 0,$$

die man auch in der Form schreiben kann

$$\mathfrak{r}^4 - 4[\mathfrak{q}]\mathfrak{r}^3 + 6[\mathfrak{q}^2]\mathfrak{r}^2 - 4[\mathfrak{q}^3]\mathfrak{r} + [\mathfrak{q}^4] = 0. \tag{10}$$

Aus ihr folgt insbesondere, dass das Produkt der vier Wurzeln

$$\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 = [\mathfrak{q}^4] = \pm 1 \tag{11}$$

ist (vgl. Gleichung 7).

Hat man aus der Gleichung (10) die vier Hauptzahlen $\mathfrak{r}_s$ des Bruches $\mathfrak{q}$ bestimmt, so hängt alles Weitere davon ab, ob die Wurzeln der Gleichung alle von einander verschieden sind oder nicht.

(1)*) *Erster Hauptfall: Alle vier Hauptzahlen sind von einander verschieden.* Dann gehört (nach Nr. 389) zu jeder Hauptzahl $\mathfrak{r}_s$ ein Hauptgebiet a_s von erster Stufe. Um dieses zu finden, setze man noch

*) Am Rande sollen die in Betracht kommenden Fälle *fortlaufend* numerirt werden.

(12) $$a_s = \mathfrak{a}_{s,0} e_0 + \cdots + \mathfrak{a}_{s,3} e_3 .$$

Dann verwandelt sich die Gleichung (9), in der man zugleich $\mathfrak{r}_s$ statt $\mathfrak{r}$ zu schreiben hat, in

$$0 = \mathfrak{a}_{s,0} \cdot e_0(\mathfrak{r}_s - \mathfrak{q}) + \cdots + \mathfrak{a}_{s,3} \cdot e_3(\mathfrak{r}_s - \mathfrak{q})$$

oder, falls man noch die Punkte

(13) $$e_t(\mathfrak{r}_s - \mathfrak{q}) = c_{s,t}$$

setzt, in die Gleichung

$$0 = \mathfrak{a}_{s,0} c_{s,0} + \cdots + \mathfrak{a}_{s,3} c_{s,3} .$$

Um die Koefficienten $\mathfrak{a}_{s,t}$ in dieser Zahlbeziehung zwischen den vier Punkten $c_{s,0}, \ldots c_{s,3}$ zu ermitteln, multiplicire man die Gleichung mit $[c_{s,2} c_{s,3}]$, wodurch sich die Gleichung ergiebt

$$0 = \mathfrak{a}_{s,0}[c_{s,2} c_{s,3} c_{s,0}] + \mathfrak{a}_{s,1}[c_{s,1} c_{s,2} c_{s,3}] .$$

Aus dieser und aus den beiden analogen Gleichungen folgt aber, da die vier auftretenden Flächentheile Einer Ebene angehören, die Proportion

(14) $$\mathfrak{a}_{s,0} : \mathfrak{a}_{s,1} : \mathfrak{a}_{s,2} : \mathfrak{a}_{s,3} = \\ = [c_{s,1} c_{s,2} c_{s,3}] : - [c_{s,2} c_{s,3} c_{s,0}] : [c_{s,3} c_{s,0} c_{s,1}] : - [c_{s,0} c_{s,1} c_{s,2}] .$$

Für jeden Werth von s bestimmt diese Proportion die vier Ableitzahlen $\mathfrak{a}_{s,t}$ des zugehörigen Doppelpunktes a_s bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig. Die so gewonnenen vier Doppelelemente stehen (nach 389) in keiner Zahlbeziehung zu einander, liegen also nicht in Einer Ebene, und man erhält daher den Satz: *Hat die Gleichung* (10) *lauter ungleiche Wurzeln, so besitzt die Kollineation* $\mathfrak{q}$ *vier getrennte, nicht Einer Ebene angehörende Doppelpunkte* $a_0, \ldots a_3$, *die durch Multiplikation mit dem Bruche* $\mathfrak{q}$ *nur um einen Zahlfaktor geändert werden, sie multipliciren sich nämlich der Reihe nach mit den Wurzeln* $\mathfrak{r}_0, \ldots \mathfrak{r}_3$ *der Gleichung* (10).

Führt man die Doppelpunkte $a_0, \ldots a_3$ statt der Punkte $e_0, \ldots e_3$ als Nenner in den Bruch $\mathfrak{q}$ ein, was nach Nr. 380 möglich ist, da die Doppelelemente in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so erhält der Bruch $\mathfrak{q}$ die Form

(15) $$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{r}_0 a_0, \ldots \mathfrak{r}_3 a_3}{a_0, \ldots a_3} .$$

Will man dann zu einem beliebigen Punkte x des Raumes den entsprechenden Punkt $x\mathfrak{q}$ konstruiren, so lege man durch drei ein Dreieck bildende Kanten des Doppelpunkttetraeders, etwa durch die drei Kanten $[a_2 a_3]$, $[a_3 a_1]$, $[a_1 a_2]$ und durch den Punkt x die Ebenen und bezeichne ihre Schnittpunkte mit den jedesmal gegenüberliegenden Tetraederkanten $[a_0 a_1]$, $[a_0 a_2]$, $[a_0 a_3]$ mit u, v, w. Endlich suche man zu diesen drei Punkten die entsprechenden Punkte $u\mathfrak{q}$, $v\mathfrak{q}$, $w\mathfrak{q}$ auf, so schneiden sich die drei Ebenen $[a_2 a_3 \,.\, u\mathfrak{q}]$, $[a_3 a_1 \,.\, v\mathfrak{q}]$, $[a_1 a_2 \,.\, w\mathfrak{q}]$ in dem gesuchten Punkte $x\mathfrak{q}$.

Ist ein Wurzelpaar der Gleichung (10) conjugirt komplex, also etwa $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{a} - i\mathfrak{b}$, $\mathfrak{r}_3 = \mathfrak{a} + i\mathfrak{b}$, so müssen auch die zugehörigen Hauptgebiete conjugirt complex sein, also etwa die Form haben $a_2 = a + ib$, $a_3 = a - ib$. Der Bruch lautet dann

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{r}_0 a_0, \ \mathfrak{r}_1 a_1, \ (\mathfrak{a} - i\mathfrak{b})(a + ib), \ (\mathfrak{a} + i\mathfrak{b})(a - ib)}{a_0, \ a_1, \ a + ib, \ a - ib} .$$

Will man dem Bruche wieder eine reelle Form geben, so bestimme man diejenigen Punkte $a\mathfrak{q}$ und $b\mathfrak{q}$, welche den Punkten a und b zugeordnet sind. Es wird

$$\begin{aligned} a\mathfrak{q} &= \frac{1}{2}\left\{(a+ib)\mathfrak{q} + (a-ib)\mathfrak{q}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(\mathfrak{a}-i\mathfrak{b})(a+ib) + (\mathfrak{a}+i\mathfrak{b})(a-ib)\right\} \\ &= \mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b, \\ b\mathfrak{q} &= \frac{1}{2i}\left\{(a+ib)\mathfrak{q} - (a-ib)\mathfrak{q}\right\} \\ &= \frac{1}{2i}\left\{(\mathfrak{a}-i\mathfrak{b})(a+ib) - (\mathfrak{a}+i\mathfrak{b})(a-ib)\right\} \\ &= \mathfrak{a}b - \mathfrak{b}a. \end{aligned}$$

Man erhält daher für den Bruch $\mathfrak{q}$ die reelle Darstellung

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{r}_0 a_0,\ \mathfrak{r}_1 a,\ \mathfrak{a}a+\mathfrak{b}b,\ \mathfrak{a}b-\mathfrak{b}a}{a_0,\ a_1,\ a,\ b}.$$

Ihr zufolge geht die Gerade $[ab]$, die durch den reellen und den imaginären Theil der beiden konjugirt komplexen Doppelelemente bestimmt ist, vermöge des Bruches $\mathfrak{q}$ in sich über, ohne dass irgend ein reeller Punkt dieser Geraden sich selbst entspräche. Um die Veränderung, welche die Punkte der Geraden $[ab]$ durch die Kollineation $\mathfrak{q}$ erfahren, besser übersehen zu können, führe man statt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Polarcoordinaten ein, setze also $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}\cos\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}\sin\mathfrak{d}$. Dann nimmt der Bruch $\mathfrak{q}$ die Form an

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{r}_0 a_0,\ \mathfrak{r}_1 a_1,\ \mathfrak{c}(a\cos\mathfrak{d}+b\sin\mathfrak{d}),\ \mathfrak{c}(b\cos\mathfrak{d}-a\sin\mathfrak{d})}{a_0,\ a_1,\ a,\ b}, \tag{16}$$

aus der ersichtlich ist, dass die Punkte a und b durch den Bruch $\mathfrak{q}$ eine circuläre Aenderung erfahren, ausserdem aber noch eine Multiplikation mit einem gemeinschaftlichen Faktor $\mathfrak{c}$ *).

---

*) Mit der circulären Aenderung des Punktepaares a, b ist eine durch den Bruch $\mathfrak{q}$ bewirkte Umwandlung der ganzen Punktreihe der Geraden $[ab]$ verknüpft, von der man sich auf die folgende Weise eine Anschauung verschaffen kann: Man schlage innerhalb einer beliebigen durch die Gerade $[ab]$ gelegten Halbebene über den Abständen der beiden Punktepaare a, b und $a+b$, $a-b$ Halbkreise, die sich im Punkte s schneiden mögen (vgl. Fig. 30). Dann projicire man die Punktreihe der Geraden $[ab]$ von s aus durch ein Strahlbüschel und drehe dieses in seiner Ebene von a nach b hin um den Winkel $\mathfrak{d}$. Alsdann schneidet das Strahlbüschel in seiner neuen Lage aus der Geraden $[ab]$ die Punktreihe aus, in welche die ursprüngliche Punktreihe durch der Bruch $\mathfrak{q}$ übergeführt wird. Dieser Zusammenhang zwischen der Drehung eines Strahlbüschels und der durch den Bruch $\mathfrak{q}$, oder was geometrisch betrachtet auf dasselbe hinauskommt, der durch den Bruch

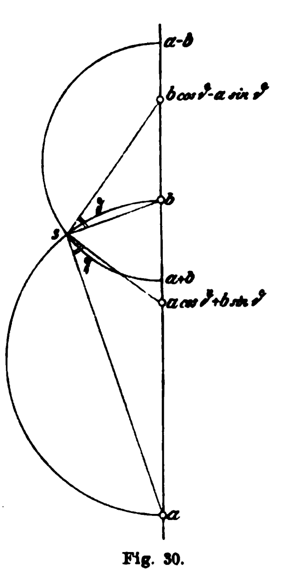


Fig. 30.

Zweiter Hauptfall: Die Gleichung (10) besitzt eine Doppelwurzel, das heisst, es sind *zwei Hauptzahlen einander gleich,* etwa gleich $\mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{a}$ eine reelle Zahl bedeutet. Dann sind (nach 390) zwei Unterfälle möglich:

(2) *Erstens* kann *das zu dieser Hauptzahl gehörende Hauptgebiet von zweiter Stufe* sein; dann gestattet der Bruch $\mathfrak{q}$ die Darstellung:

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a}a_0,\ \mathfrak{a}a_1,\ \mathfrak{r}_2 a_2,\ \mathfrak{r}_3 a_3}{a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3}, \tag{17}$$

aus der in der That hervorgeht, dass nicht nur die Punkte a_0 und a_1 in ihr $\mathfrak{a}$-faches verwandelt werden, sondern, dass dasselbe überhaupt bei jedem Punkte $x = \mathfrak{x}_0 a_0 + \mathfrak{x}_1 a_1$ der Geraden $[a_0 a_1]$ eintritt; denn es wird

$$x\mathfrak{q} = (\mathfrak{x}_0 a_0 + \mathfrak{x}_1 a_1)\mathfrak{q} = \mathfrak{a}(\mathfrak{x}_0 a_0 + \mathfrak{x}_1 a_1) = \mathfrak{a}x,$$

und es wird daher jeder Punkt der Geraden $[a_0 a_1]$ durch die Kollineation auf sich selbst bezogen.

(3) *Zweitens* aber kann es (nach Nr. 390) auch vorkommen, dass die Doppelwurzel $\mathfrak{a}$ der biquadratischen Gleichung (10) nur *ein Hauptgebiet erster Stufe* a_1 besitzt. Dann hat der Bruch $\mathfrak{q}$ (nach Nr. 390) die Form

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a}a_0 + \mathfrak{g}a_1,\ \mathfrak{a}a_1,\ \mathfrak{r}_2 a_2,\ \mathfrak{r}_3 a_3}{a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3}, \tag{18}$$

und es geht zwar noch immer die Gerade $[a_0 a_1]$ in sich über, aber auf ihr bewahrt nur der Punkt a_1 seine Lage, denn er multiplicirt sich bloss mit dem Zahlfaktor $\mathfrak{a}$. Jeder andere Punkt der Geraden hingegen verwandelt sich in sein $\mathfrak{a}$-faches noch vermehrt um ein gewisses Vielfaches von a_1. In der That wird ein beliebiger Punkt x der Geraden $[a_0 a_1]$ übergeführt in den Punkt

$$x\mathfrak{q} = (\mathfrak{x}_0 a_0 + \mathfrak{x}_1 a_1)\mathfrak{q} = \mathfrak{a}(\mathfrak{x}_0 a_0 + \mathfrak{x}_1 a_1) + \mathfrak{g}\mathfrak{x}_0 a_1 = \mathfrak{a}x + \mathfrak{g}\mathfrak{x}_0 a_1.$$

Um von dieser Umwandlung der Punktreihe x eine geometrische Anschauung zu gewinnen, bilde man die beiden Punktreihen x und $x\mathfrak{q}$ in solcher Weise perspektiv auf einer durch den Punkt a_0 gehenden Hülfsgeraden ab (vgl. Fig. 31), dass dem Punkte a_1 der unendlich ferne Punkt dieser Hülfsgeraden entspricht.

$$\mathfrak{s} = \frac{a\cos\mathfrak{d} + b\sin\mathfrak{d},\ b\cos\mathfrak{d} - a\sin\mathfrak{d}}{a \qquad\qquad b}$$

bewirkten Abbildung der Punktreihe auf der Geraden $[ab]$ zeigt zugleich, dass die Punkte a und b bei der Umwandlung der Punktreihe keinerlei ausgezeichnete Stellung einnehmen. In der That werden durch den Bruch $\mathfrak{s}$ nicht nur die Punkte a, b circulär um den Winkel $\mathfrak{d}$ geändert, sondern zugleich sämmtliche Punktepaare a', b' derjenigen Involution, welche sich aus dem Punktepaare a, b durch die eingliedrige Gruppe *aller* positiven circulären Aenderungen (vgl. Nr. 154) ableiten lässt, die also dargestellt wird durch die Gleichungen

$$a' = a\cos\mathfrak{t} + b\sin\mathfrak{t},$$
$$b' = b\cos\mathfrak{t} - a\sin\mathfrak{t},$$

in denen $\mathfrak{t}$ den Parameter der Gruppe bezeichnet.

Diese Involution bildet also das geometrische Abbild der konjugirt imaginären Doppelelemente $a + ib$ und $a - ib$ des Bruches $\mathfrak{q}$, während die Grösse des Drehwinkels $\mathfrak{d}$ und der Gewichtsfaktor $\mathfrak{c}$ die zugehörigen Hauptzahlen $\mathfrak{a} - i\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} + i\mathfrak{b}$ versinnbildlichen.

Dazu bezeichne man den mit a_0 zusammenfallenden *einfachen* Punkt mit a_0' und eine beliebige *Strecke* der Hülfsgeraden mit a_1'. Dann bewirkt der Bruch

$$\mathfrak{s} = \frac{a_0',\ a_1'}{a_0,\ a_1}$$

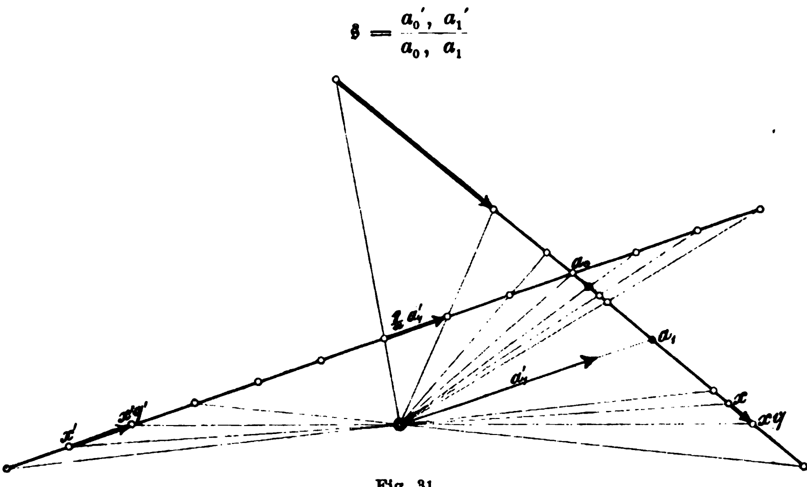


Fig. 31.

die gewünschte perspektive Abbildung und führt zugleich die Verwandtschaft $\mathfrak{q}$ (so fern sich diese auf die Punkte der Geraden $[a_0 a_1]$ erstreckt) über in eine Verwandtschaft

$$\mathfrak{q}' = \frac{\mathfrak{a} a_0' + \mathfrak{g} a_1',\ \mathfrak{a} a_1'}{a_0',\ a_1'},$$

welche den dem Punkte x der Geraden $[a_0 a_1]$ entsprechenden Punkt

$$x' = \mathfrak{x}_0 a_0' + \mathfrak{x}_1 a_1'$$

der Geraden $[a_0' a_1']$ umwandelt in den Punkt

$$x'\mathfrak{q}' = (\mathfrak{x}_0 a_0' + \mathfrak{x}_1 a_1')\mathfrak{q}' = \mathfrak{a}(\mathfrak{x}_0 a_0' + \mathfrak{x}_1 a_1') + \mathfrak{g}\mathfrak{x}_0 a_1' = \mathfrak{a} x' + \mathfrak{g}\mathfrak{x}_0 a_1'$$
$$= \mathfrak{a}\mathfrak{x}_0\left(\frac{x'}{\mathfrak{x}_0} + \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}} a_1'\right).$$

Hier ist x' ein Punkt vom Gewichte $\mathfrak{x}_0$, also $\frac{x'}{\mathfrak{x}_0}$ ein Punkt vom Gewichte 1. Der Ausdruck in der Klammer: $\frac{x'}{\mathfrak{x}_0} + \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}} a_1'$ stellt somit einen einfachen Punkt dar, der vom Punkte x' um die konstante, das heisst, von der Lage des Punktes x' unabhängige, Strecke $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}} a_1'$ absteht. Der Bruch $\mathfrak{q}'$ verschiebt daher alle Punkte der Geraden $[a_0' a_1']$ um ein gleich grosses Stück und stellt also eine Schiebung der Punktreihe x' in ihrer eigenen Linie dar.

Nun war aber die Verwandtschaft $\mathfrak{q}$ das perspektive Abbild der Verwandtschaft $\mathfrak{q}'$, in dem Sinne, dass sich der unendlich ferne Punkt der Hülfsgeraden $[a_0' a_1']$ in den Punkt a_1 der Geraden $[a_0 a_1]$ projicirte. Die durch den Bruch $\mathfrak{q}$ bewirkte Umwandlung der Punktreihe x kann somit als eine projektive Verallgemeinerung der Schiebung einer Punktreihe in ihrer eigenen Linie aufgefasst werden, bei der an die Stelle des unendlich fernen Punktes der im Endlichen liegende Punkt (das Centrum) a_1 getreten ist. Sie möge daher *„eine centrische Schiebung der Punktreihe x mit dem Zielpunkte a_1“* genannt werden. Auf der

einen Seite des Zielpunktes a_1 verschieben sich alle Punkte der Geraden $[a_0 a_1]$ nach dem Zielpunkte hin, auf der andern von ihm fort.

Dritter Hauptfall: Sind zwei Paare gleicher reeller) Hauptzahlen vorhanden,* so ergeben sich drei Unterfälle.

(4) ***Erstens*** kann *jede von ihnen ein Hauptgebiet zweiter Stufe besitzen.* Dann hat der Bruch $\mathfrak{q}$ die Form

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a}a_0, \ \mathfrak{a}a_1, \ \mathfrak{b}a_2, \ \mathfrak{b}a_3}{a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3}. \tag{19}$$

Durch ihn wird jeder Punkt der beiden Geraden $[a_0 a_1]$ und $[a_2 a_3]$ auf sich selbst bezogen, und es bleibt daher auch eine jede Gerade in Ruhe, welche die beiden „Stützlinien“ $[a_0 a_1]$ und $[a_2 a_3]$ schneidet, während die Punkte auf ihr mit Ausnahme der Schnittpunkte s und t mit den beiden Stützlinien ihre Lage verändern. Hieraus folgt: Ein jeder beliebige Punkt x des Raumes verschiebt sich auf der durch ihn und die beiden Stützlinien gelegten Geraden (vgl. Fig. 32). Diese Art der Kollineation heisst (nach F. Klein) *windschiefe Perspektive**)*.

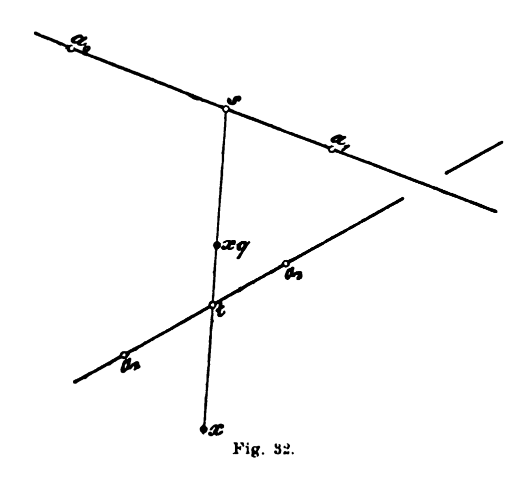


Fig. 32.

Sucht man die geometrische Bedeutung der Hauptzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, oder vielmehr die Bedeutung ihres *Verhältnisses,* dem ja allein ein geometrischer Sinn zukommen kann, so stelle man einen beliebigen Punkt x des Raumes als Vielfachensumme der beiden Punkte s und t dar, in denen die durch ihn und die beiden Stützlinien gelegte Gerade die Stützlinien schneidet. Es sei

$$x = \mathfrak{s}s + \mathfrak{t}t; \tag{20}$$

dann wird

$$x\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \, . \, s\mathfrak{q} + \mathfrak{t} \, . \, t\mathfrak{q}$$

oder, da die Punkte s und t der beiden Stützlinien bei der Multiplikation mit $\mathfrak{q}$ in ihr $\mathfrak{a}$- und $\mathfrak{b}$-faches übergehen,

$$x\mathfrak{q} = \mathfrak{a} \, . \, \mathfrak{s}s + \mathfrak{b} \, . \, \mathfrak{t}t. \tag{21}$$

Das Doppelverhältniss der vier Punkte s, t, x und $x\mathfrak{q}$ wird daher (vgl. S. 440)

$$\frac{[sx]}{[xt]} : \frac{[s \, . \, x\mathfrak{q}]}{[x\mathfrak{q} \, . \, t]} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}, \tag{22}$$

*) Um nicht zu weitläufig zu werden, will ich die Behandlung des Falles zweier gleicher konjugirt komplexer Hauptzahlen dem Leser überlassen.

**) Die Abbildung $\mathfrak{q}$ hat nämlich mit der gewöhnlichen (centrischen) Perspektive (vgl. S. 448) die Eigenschaft gemein, dass bei wiederholter Anwendung der Abbildung auf einen Punkt x und sein erstes, zweites Bild und so weiter, sich stets Punkte einer und derselben Geraden ergeben, dass also die Bahnkurven der zugehörigen infinitesimalen Transformation gerade Linien sind.

wodurch die geometrische Bedeutung des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ der beiden Hauptzahlen gefunden ist. Zugleich hat man den Satz gewonnen:

Bei der windschiefen Perspektive ist das Doppelverhältniss aus zwei zugeordneten Punkten und den zugehörigen Stützpunkten konstant, nämlich gleich dem Verhältniss der beiden Hauptzahlen beider Stützlinien.

Sind die beiden Stützlinien gegeben, so reicht die Angabe des genannten Doppelverhältnisses, also des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, aus, um die Verwandtschaft eindeutig zu definiren. Dies Doppelverhältniss heisst daher (nach W. Fiedler) die *Charakteristik* der windschiefen Perspektive. Da ferner die Charakteristik festgelegt ist, sobald ausser den beiden Stützlinien noch zwei zugeordnete Punkte ihrer Lage nach bekannt sind, so ist die Verwandtschaft auch eindeutig bestimmt durch die beiden Stützlinien und ein Paar zugeordnete Punkte, die noch beliebig auf einer durch die beiden Stützlinien gehenden Geraden angenommen werden dürfen.

Hat die Charakteristik den besonderen Werth -1, ist also das Verhältniss der beiden Hauptzahlen

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = -1, \tag{23}$$

so werden je zwei zugeordnete Punkte x und $x\mathfrak{q}$ durch die beiden Stützlinien harmonisch getrennt, und der Bruch $\mathfrak{q}$ nimmt die Form an

$$\mathfrak{q} = \frac{a_0,\ a_1,\ -a_2,\ -a_3}{a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3}. \tag{24}$$

Aus der Gleichung (11) folgt nämlich für die beiden Hauptzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die weitere Gleichung

$$\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 = \pm 1, \tag{25}$$

und diese liefert zusammen mit (23) für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, falls man sich auf reelle Werthe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beschränkt (siehe oben), nur die Werthe $\mathfrak{a} = 1$ und $\mathfrak{b} = -1$ oder umgekehrt, und also für $\mathfrak{q}$ die Form (24).

Die windschiefe Perspektive mit der Charakteristik -1 hat nun die besondere Eigenschaft, dass ihre nochmalige Anwendung auf den aus x durch die Abbildung entstandenen Punkt $x\mathfrak{q}$ diesen Punkt wieder nach x zurückführt (und zwar unter Wahrung seines Gewichtes). Diese besondere Verwandtschaft ist also involutorisch und heisst (nach H. Wiener) die *Spiegelung am Geradenpaar* $[a_0 a_1]$, $[a_2 a_3]$.

Ausser dem Falle der windschiefen Perspektive ergeben sich bei zwei Paaren gleicher Hauptzahlen, das heisst, bei zwei Doppelwurzeln der Gleichung (10), als weitere Unterfälle noch die *beiden Fälle,* wo *die eine Doppelwurzel ein Hauptgebiet zweiter und die andere ein Hauptgebiet erster Stufe* besitzt, (5)

und wo *jeder der beiden Doppelwurzeln nur ein Hauptgebiet erster Stufe zugehört,* wo also der zugehörige Bruch die Form hat (6)

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a}a_0 + \mathfrak{g}a_1,\ \mathfrak{a}a_1,\ \mathfrak{b}a_2,\ \mathfrak{b}a_3}{a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3} \tag{26}$$

und andererseits die Form

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a}a_0 + \mathfrak{g}a_1,\ \mathfrak{a}a_1,\ \mathfrak{b}a_2 + \mathfrak{h}a_3,\ \mathfrak{b}a_3}{a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3}. \tag{27}$$

Im ersten dieser beiden Fälle geht jeder Punkt der Geraden $[a_2 a_3]$ in sich über, während in der Geraden $[a_0 a_1]$ eine centrische Schiebung mit dem Zielpunkte a_1 erfolgt. Im zweiten Falle finden in beiden Geraden centrische Schiebungen statt, beziehlich nach den Zielpunkten a_3 und a_1.

Vierter Hauptfall: Die Gleichung (10) besitzt eine dreifache Wurzel, das heisst, es sind ***drei Hauptzahlen des Bruches*** $\mathfrak{q}$ ***einander gleich.*** Er liefert vier Unterfälle:

(7) Ist ***erstens das zu der dreifachen Wurzel*** ($\mathfrak{b}$) ***gehörende Hauptgebiet von dritter Stufe,*** so lässt sich (nach Nr. 390) der Bruch auf die Form bringen

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a} a_0,\ \mathfrak{b} a_1,\ \mathfrak{b} a_2,\ \mathfrak{b} a_3}{a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3}. \tag{28}$$

Durch ihn wird jeder Punkt der Ebene $\alpha = [a_1 a_2 a_3]$ in sein $\mathfrak{b}$-faches verwandelt; die Ebene α geht also punktweise in sich über. Es bleibt daher auf jeder durch den isolirt liegenden Doppelpunkt a_0 gehenden Geraden ausser dem Punkte a_0 selbst auch noch ihr Schnittpunkt t mit der Ebene α fest. Eine jede solche Gerade bleibt somit bei der Abbildung $\mathfrak{q}$ ebenfalls in Ruhe, wenn auch ihre Punkte, mit Ausnahme der beiden genannten, ihre Lage auf ihr verändern. Die durch diese Eigenschaft gekennzeichnete Kollineation heisst *centrische Perspektive des Raumes*, der Punkt a_0 ihr *Mittelpunkt* und die Ebene α ihre *Spurebene* (vgl. Fig. 33).

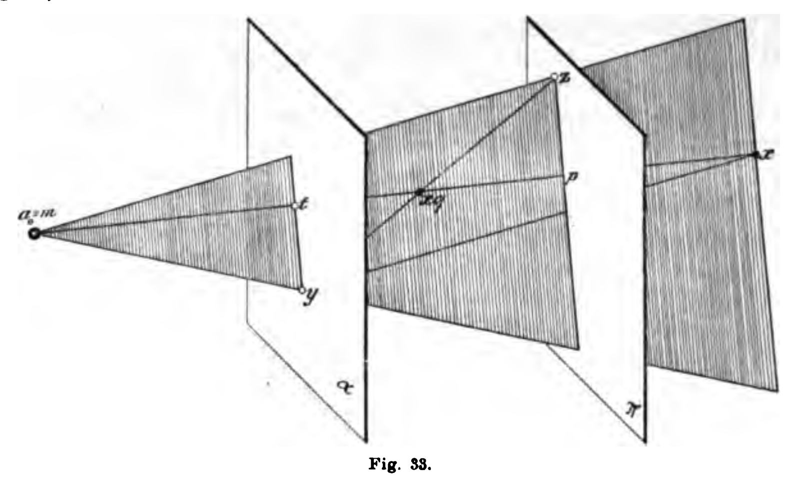


Fig. 33.

Auch bei der centrischen Perspektive ist wieder das Verhältniss $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ der beiden Hauptzahlen ein für die Verwandtschaft charakteristisches Doppelverhältniss. Denn, ist x ein beliebiger Punkt des Raumes und t der Schnittpunkt der Mittelpunktsgeraden $[a_0 x]$ mit der Spurebene α, so lässt sich x als Vielfachensumme von a_0 und t, das heisst, in der Form

$$x = \mathfrak{s} a_0 + \mathfrak{t} t$$

darstellen. Der zugeordnete Punkt $x\mathfrak{q}$ wird daher

$$x\mathfrak{q} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{s} a_0 + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{t} t,$$

und man erhält somit für das Doppelverhältniss der vier Punkte a_0, t, x, $x\mathfrak{q}$ wieder den Werth

$$\frac{[a_0 x]}{[xt]} : \frac{[a_0 . x\mathfrak{q}]}{[x\mathfrak{q} . t]} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$$

und damit den Satz:

Bei der centrischen Perspektive des Raumes ist das durch den Mittelpunkt, die Spurebene und ein Paar zugeordnete Punkte bestimmte Doppelverhältniss konstant, nämlich gleich dem Verhältniss der beiden dem Mittelpunkte und der Spurebene zugehörenden Hauptzahlen.

Auch hier wieder bestimmt dies Doppelverhältniss zusammen mit den beiden Hauptgebieten (dem Mittelpunkte und der Spurebene) die Verwandtschaft eindeutig und heisst daher (nach W. Fiedler) die *Charakteristik* der centrischen Perspektive. Da aber wiederum die Charakteristik festgelegt ist durch Angabe zweier zugeordneter Punkte, so wird die centrische Perspektive auch eindeutig bestimmt durch den Mittelpunkt, die Spurebene und ein Paar zugeordneter Punkte, die noch beliebig auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden angenommen werden dürfen.

Will man eine vollständige Anschauung von der Abbildung der centrischen Perspektive gewinnen, so betrachte man noch die durch sie bewirkte Umwandlung der unendlich fernen Elemente des ersten Systems, das heisst, die Lage der Fluchtebene des zweiten Systems. Dazu bezeichne man den mit dem Mittelpunkte a_0 der Verwandtschaft zusammenfallenden einfachen Punkt mit m und einen beliebigen einfachen Punkt der Spurebene mit t. Dann wird der unendlich ferne Punkt g der Geraden $[mt]$ dargestellt durch die Differenz

$$g = t - m;$$

für den ihm zugeordneten Punkt $p = g\mathfrak{q}$, (das heisst, den Fluchtpunkt der Geraden $[mt]$), erhält man also den Ausdruck

$$p = g\mathfrak{q} = \mathfrak{b}t - \mathfrak{a}m.$$

Diese Gleichung aber sagt aus: Dem unendlich fernen Punkte g der Mittelpunktsgeraden $[mt]$ wird ein Punkt p derselben Geraden zugeordnet, welcher das Geradenstück zwischen dem Mittelpunkte und der Spurebene algebraisch im Verhältniss $\mathfrak{b} : -\mathfrak{a}$ theilt, das heisst, innerlich oder äusserlich im Verhältniss der absoluten Werthe von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$, je nachdem das Verhältniss $\mathfrak{b} : -\mathfrak{a}$ positiv oder negativ ist. Hieraus folgt: Die Fluchtebene π des zweiten Systems ist der Spurebene α der centrischen Perspektive parallel und theilt den Abstand des Mittelpunktes m von der Spurebene α in dem angegebenen Verhältniss. Ist also zum Beispiel die Charakteristik $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ positiv und zugleich < 1, so liegt die Fluchtebene π, vom Mittelpunkte der Abbildung aus gerechnet, jenseits der Spurebene α, und ihr Abstand von dieser Ebene verhält sich zu dem des Mittelpunktes von der Spurebene wie $\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$. Der ganze Halbraum jenseits der Spurebene wird dann bei der Abbildung reliefartig auf die Raumschicht zwischen den parallelen Ebenen α und π zusammengedrängt.

Ist der Mittelpunkt, die Spur- und Fluchtebene gegeben, so kann man zu jedem Punkte x des Raumes den zugeordneten Punkt $x\mathfrak{q}$ konstruiren. Man lege dazu durch x eine beliebige Gerade, welche die Spurebene α in y schneide, und konstruire zu dem unendlich fernen Punkte dieser Geraden den zugeordneten Punkt z, indem man zu der Geraden $[yx]$ durch m die Parallele zieht und diese

mit der Fluchtebene π zum Durchschnitt bringt. Dann ist die Gerade $[yz]$ der Geraden $[yx]$ zugeordnet und schneidet daher die Gerade $[mx]$ in dem gesuchten Punkte $x\mathfrak{q}$.

Ist die Charakteristik der centrischen Perspektive gleich -1, also $\mathfrak{a} = 1$ und $\mathfrak{b} = -1$ oder umgekehrt, hat der Bruch $\mathfrak{q}$ somit eine der beiden geometrisch gleichwerthigen Formen

$$(29)\qquad \mathfrak{q} = \frac{a_0,\ -a_1,\ -a_2,\ -a_3}{a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q} = \frac{-a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3}{a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3},$$

so wird die centrische Perspektive involutorisch und heisst (nach H. Wiener) *Spiegelung an dem Punkte a_0 und der Ebene α.*

(8) Ist *zweitens das der Hauptzahl $\mathfrak{b}$ zugehörige Hauptgebiet von zweiter Stufe,* so lässt sich der Bruch $\mathfrak{q}$ (nach Nr. 390) auf die Form bringen

$$(30)\qquad \mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a}a_0,\ \mathfrak{b}a_1 + a',\ \mathfrak{b}a_2,\ \mathfrak{b}a_3}{a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3},$$

wo a' eine Vielfachensumme von a_2 und a_3, das heisst,

$$(31)\qquad a' = \mathfrak{g}a_2 + \mathfrak{h}a_3$$

ist. Dieser Bruch $\mathfrak{q}$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, der in ihm enthaltene „Unterbruch"

$$\mathfrak{q}_0 = \frac{\mathfrak{b}a_1 + a',\ \mathfrak{b}a_2,\ \mathfrak{b}a_3}{a_1,\ a_2,\ a_3},$$

bildet zwar immer noch die Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ in sich ab, lässt auf ihr aber nur die Gerade $[a_2 a_3]$ in Ruhe; diese heisst daher die *Spurgerade* der Ebene $[a_1 a_2 a_3]$.

Jeder Punkt y dieser Ebene, der ausserhalb der Spurgeraden $[a_2 a_3]$ liegt, das heisst, jeder Punkt

$$y = \mathfrak{y}_1 a_1 + \mathfrak{y}_2 a_2 + \mathfrak{y}_3 a_3,$$

für welchen $\mathfrak{y}_1 \gtrless 0$ ist, wird durch den Bruch $\mathfrak{q}$ übergeführt in den Punkt

$$\begin{aligned} y\mathfrak{q} &= (\mathfrak{y}_1 a_1 + \mathfrak{y}_2 a_2 + \mathfrak{y}_3 a_3)\mathfrak{q} \\ &= \mathfrak{b}(\mathfrak{y}_1 a_1 + \mathfrak{y}_2 a_2 + \mathfrak{y}_3 a_3) + \mathfrak{y}_1 a' \\ &= \mathfrak{b}y + \mathfrak{y}_1 a', \end{aligned}$$

also verwandelt in sein $\mathfrak{b}$-faches, noch vermehrt um ein nicht verschwindendes Vielfaches des Punktes a'. Ein jeder nicht auf der Spurgeraden liegender Punkt y der Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ wird daher auf der von ihm nach dem *Zielpunkte a'* führenden Geraden $[ya']$ verschoben (vgl. Fig. 34). Eine jede solche *Zielgerade* $[ya']$ der Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ entspricht somit sich selbst.

Um die Grösse der Verrückung des Punktes y auf seiner Zielgeraden $[ya']$ zu bestimmen, das heisst, seinen Bildpunkt $y\mathfrak{q}$ zu konstruiren, hat man nur zu beachten, dass sich je zwei einander zugeordnete Geraden der Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ auf der Spurgeraden $[a_2 a_3]$ schneiden müssen. Ist daher w der Punkt, in dem die Gerade $[ya_1]$ die Spurgerade $[a_2 a_3]$ trifft, so wird die der Geraden $[wa_1]$ zugeordnete Gerade $[w\,.\,a_1\mathfrak{q}]$ die Zielgerade $[ya']$ des Punktes y in dem gesuchten Bildpunkte $y\mathfrak{q}$ schneiden.

Man kann daher sagen: Die Punkte der Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ erfahren eine *centrische Schiebung in der Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ mit dem Zielpunkte a'*, welcher die Schiebungsrichtung einer gewöhnlichen Schiebung vertritt *und mit der Spurgeraden* $[a_2 a_3]$, welche die Rolle der unendlich fernen Geraden spielt.

Eine solche centrische Schiebung in der Ebene ist geometrisch durch Angabe der Spurgeraden und der Verrückung *eines* Punktes eindeutig bestimmt. Die

centrische Schiebung geht in eine gewöhnliche Schiebung über, wenn die Doppelelemente a_2 und a_3 Strecken sind.

Damit ist die in der Doppelebene $[a_1 a_2 a_3]$ erfolgende Abbildung erledigt. Die Kollineation besitzt aber noch eine zweite Doppelebene, nämlich die Ebene $[a_0 a_2 a_3]$. Denn der Bruch $\mathfrak{q}$ oder der in ihm enthaltene Unterbruch

$$\mathfrak{q}_1 = \frac{\mathfrak{a} a_0, \ \mathfrak{b} a_2, \ \mathfrak{b} a_3}{a_0, \ a_2, \ a_3}$$

bewirkt *in der Ebene* $[a_0 a_2 a_3]$ (wie aus der auf S. 448 f. gegebenen Darstellung der entsprechenden Verwandtschaft des Raumes unmittelbar hervorgeht) ***eine centrisch-perspektive Abbildung mit dem Mittelpunkte*** a_0, ***der Spurgeraden*** $[a_2 a_3]$ ***und der Charakteristik*** $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$. Diese Charakteristik wird wieder geometrisch festgelegt, sobald ausser den Doppelelementen der Verwandtschaft $\mathfrak{q}_1$ noch zu einem Punkte u der Ebene $[a_0 a_2 a_3]$ der entsprechende Punkt $u\mathfrak{q}_1 = u\mathfrak{q}$ gegeben ist. Dann ist zu jedem Punkte z der Ebene sein entsprechender Punkt $z\mathfrak{q}$ linear konstruirbar, da sich die Geraden $[uz]$ und $[u\mathfrak{q} \,.\, z\mathfrak{q}]$ in einem Punkte v der Geraden $[a_2 a_3]$ schneiden müssen.

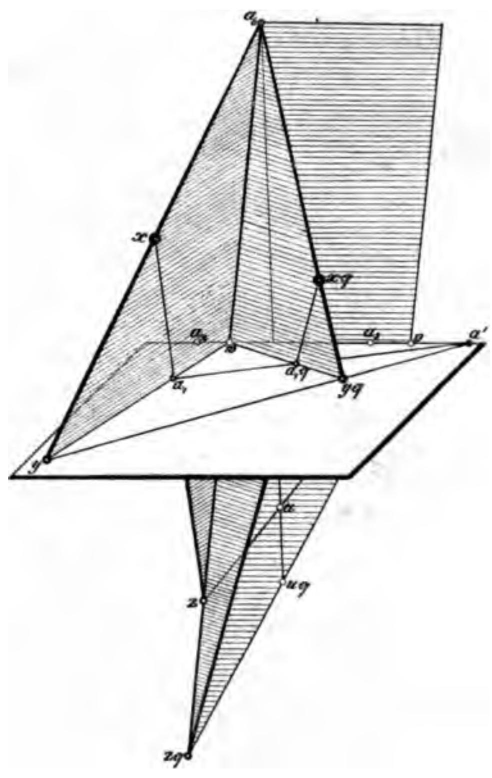


Fig. 34.

Kann man aber zu jedem Punkte y der Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ sein Bild $y\mathfrak{q}$ und ebenso zu jedem Punkte z der Ebene $[a_0 a_2 a_3]$ sein Bild $z\mathfrak{q}$ konstruiren, so lässt sich auch zu jedem beliebigen Punkte x des Raumes der entsprechende Punkt $x\mathfrak{q}$ angeben. Bezeichnet man nämlich den Schnittpunkt der Geraden $[x a_0]$ und der Doppelebene $[a_1 a_2 a_3]$ mit y und den Schnittpunkt der Geraden $[x a_1]$ und der Doppelebene $[a_0 a_2 a_3]$ mit z, so ist der Schnittpunkt der Geraden $[a_0 \,.\, y\mathfrak{q}]$ und $[a_1 \mathfrak{q} \,.\, z\mathfrak{q}]$ der gesuchte Punkt $x\mathfrak{q}$. Die Kollineation $\mathfrak{q}$ erscheint also gleichsam als eine Art Resultante der beiden Abbildungen $\mathfrak{q}_0$ und $\mathfrak{q}_1$.

Ist endlich *drittens das zu der Hauptzahl* $\mathfrak{b}$ *gehörende Hauptgebiet von erster Stufe,* so hat der Bruch $\mathfrak{q}$ (nach Nr. 390) die Form (9)

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a} a_0, \ \mathfrak{b} a_1 + \mathfrak{g} a_2 + \mathfrak{h} a_3, \ \mathfrak{b} a_2 + \mathfrak{k} a_3, \ \mathfrak{b} a_3}{a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3}. \tag{32}$$

Er bildet zwar immer noch die Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ in sich ab, lässt aber in ihr nur den Punkt a_3 in Ruhe und ruft *in der Geraden* $[a_2 a_3]$ ***eine centrische Schiebung nach dem Zielpunkte*** a_3 hervor (vgl. Fig. 35); ausserdem aber bewirkt er in dieser Ebene eine Abbildung des Strahlbüschels mit dem Mittelpunkte a_3, die als Projektion der Schiebung einer Punktreihe aufgefasst werden kann. Multiplicirt man

nämlich den zweiten und dritten Zähler und Nenner des Bruches $\mathfrak{q}$ äusserlich mit dem in sich übergehenden Punkte a_3, so findet man, dass

$$\begin{array}{lll} \text{die Strahlen} & [a_1 a_3] & \text{und} \quad [a_2 a_3] \\ \text{in die Strahlen} & \mathfrak{b}[a_1 a_3] + \mathfrak{g}[a_2 a_3] & \text{und} \quad \mathfrak{b}[a_2 a_3] \end{array}$$

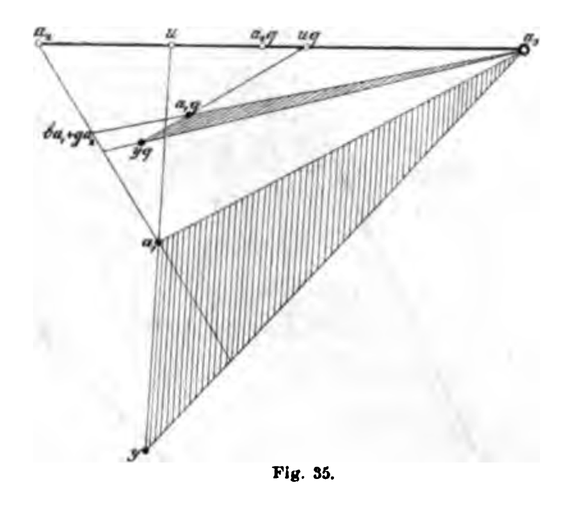


Fig. 35.

übergeführt werden, welche die Scheine der Punkte

$$\mathfrak{b}a_1 + \mathfrak{g}a_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}a_2,$$

vom Punkte a_3 aus gesehen, darstellen. Bezeichnet man aber den Bruch, der die obigen Nenner a_1 und a_2 in die eben genannten Punkte

$$\mathfrak{b}a_1 + \mathfrak{g}a_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}a_2$$

verwandelt, mit $\mathfrak{s}$, setzt also

$$\mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{b}a_1 + \mathfrak{g}a_2,\ \mathfrak{b}a_2}{a_1,\qquad a_2},$$

so bewirkt $\mathfrak{s}$ eine centrische Schiebung in der Geraden $[a_1 a_2]$ nach dem Zielpunkte a_2. Der aus $\mathfrak{s}$ durch äussere Erweiterung mit dem Punkte a_3 entstehende Bruch

$$\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{b}[a_1 a_3] + \mathfrak{g}[a_2 a_3],\ \mathfrak{b}[a_2 a_3]}{[a_1 a_3],\qquad [a_2 a_3]},$$

welcher die durch den Bruch $\mathfrak{q}$ vermittelte kollineare Abbildung des Strahlbüschels mit dem Scheitel a_3 analytisch ausdrückt, stellt daher eine *„Strahlbüschelschiebung“* dar, die aus der centrischen Schiebung $\mathfrak{s}$ der Geraden $[a_1 a_2]$ durch Projektion vom Punkte a_3 aus hervorgeht und also den Strahl $[a_2 a_3]$ zum „Zielstrahl“ hat. Sie ist vollständig festgelegt, wenn ausser dem Zielstrahl $[a_2 a_3]$ noch ein Paar zugeordnete Strahlen gegeben sind, etwa die beiden Strahlen, die den Punkt a_1 und seinen zugeordneten Punkt $a_1\mathfrak{q} = \mathfrak{b}a_1 + \mathfrak{g}a_2 + \mathfrak{h}a_3$ von a_3 aus projiciren. Die beiden Schiebungen in der Punktreihe a_2, a_3 und dem Strahlbüschel mit dem Scheitel a_3 stehen zu einander in der Beziehung, dass der Träger des einen Gebildes (das heisst der Punktreihe oder des Strahlbüschels) das Zielelement des andern ist. Sie bestimmen zusammen mit der Lage der beiden zugeordneten Punkte a_1 und $a_1\mathfrak{q}$ die Abbildung der Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ eindeutig. In der That findet man zu einem beliebigen Punkte y dieser Ebene den entsprechenden Punkt $y\mathfrak{q}$, indem man die Gerade $[y a_1]$ mit der Geraden $[a_2 a_3]$ schneidet, zu dem Schnittpunkte u den entsprechenden Punkt $u\mathfrak{q}$ in der Punktreihe a_2, a_3 aufsucht und schliesslich die Gerade $[a_1\mathfrak{q} \,.\, u\mathfrak{q}]$ mit demjenigen Strahle zum Durchschnitt bringt, in den der Strahl $[a_3 y]$ durch die Strahlbüschelschiebung übergeführt wird.

Will man schliesslich zu einem beliebigen Punkte x des Raumes sein Bild $x\mathfrak{q}$ konstruiren, so projicire man den Punkt x von dem Doppelpunkte a_0 aus durch den Strahl $[a_0 x]$ und von der Doppelgeraden $[a_2 a_3]$ aus durch die Ebene $[a_2 a_3 x]$, das heisst, man fasse den Punkt x auf als Durchschnitt des dem Strahlbündel mit dem Scheitel a_0 angehörenden Strahles $[a_0 x]$ und der dem Ebenenbüschel mit der Axe $[a_2 a_3]$ angehörenden Ebene $[a_2 a_3 x]$. Konstruirt man dann

zu jenem Strahl und dieser Ebene die zugeordneten Gebilde, so ist ihr Schnittpunkt der gesuchte Punkt $x\mathfrak{q}$.

Die Transformation des Strahlbündels mit dem Scheitel a_0 ist nun aber nichts anderes als die Projektion der oben (S. 451 f.) betrachteten Abbildung in der Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ vom Punkte a_0 aus, und die Verwandtschaft im Ebenenbüschel mit der Axe $[a_2 a_3]$ lässt sich auffassen als Projektion einer leicht angebbaren projektiven Transformation der Punktreihe a_0, a_1 von der Geraden $[a_2 a_3]$ aus. Da nämlich die Gerade $[a_2 a_3]$ eine Doppelgerade der Kollineation ist, so folgt, wenn man die beiden ersten Nenner und Zähler des Bruches $\mathfrak{q}$ mit dem Produkte $[a_2 a_3]$ multiplicirt, dass die Ebenen

$$[a_0 a_2 a_3] \quad \text{und} \quad [a_1 a_2 a_3]$$

des Ebenenbüschels durch die Verwandtschaft $\mathfrak{q}$ in die Ebenen

$$\mathfrak{a}[a_0 a_2 a_3] \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}[a_1 a_2 a_3]$$

übergeführt werden. Dadurch aber ist die Abbildung des Ebenenbüschels bestimmt, denn sie erweist sich als die Projektion der durch den Bruch

$$\mathfrak{t} = \frac{\mathfrak{a} a_0, \ \mathfrak{b} a_1}{a_0, \ a_1}$$

bewirkten Umwandlung der Punktreihe a_0, a_1 von der Axe $[a_2 a_3]$ aus.

Die Konstruktion des dem Punkte x zugeordneten Punktes $x\mathfrak{q}$ gestaltet sich daher folgendermassen: Man schneide die Gerade $[a_0 x]$ mit der Doppelebene $[a_1 a_2 a_3]$ in y und suche zu y den entsprechenden Punkt $y\mathfrak{q}$ auf (nach der Vorschrift von S. 452). Ferner schneide man die Ebene $[a_2 a_3 x]$ mit der Geraden $[a_0 a_1]$ in z und konstruire zu z den durch den Bruch $\mathfrak{t}$ zugeordneten Punkt $z\mathfrak{t}$. Dann schneidet die Gerade $[a_0 \,.\, y\mathfrak{q}]$ aus der Ebene $[a_2 a_3 \,.\, z\mathfrak{t}]$ den gesuchten Punkte $x\mathfrak{q}$ aus.

Fünfter Hauptfall: Die Gleichung (10) besitzt eine vierfache Wurzel, das heisst, es sind ***alle vier Hauptzahlen des Bruches $\mathfrak{q}$ einander gleich,*** etwa gleich $\mathfrak{a}$, wo übrigens wegen (11) $\mathfrak{a}$, da es zugleich reell sein muss, nothwendig den Werth $+1$ oder -1 haben wird. Hier bieten sich fünf Unterfälle:

Ist ***erstens das zu der vierfachen Wurzel $\mathfrak{a}$ gehörende Hauptgebiet von vierter Stufe,*** so hat der Bruch $\mathfrak{q}$ die Form (10)

$$(33) \qquad \mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a} a_0, \ \mathfrak{a} a_1, \ \mathfrak{a} a_2, \ \mathfrak{a} a_3}{a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3},$$

und verwandelt somit überhaupt jeden Punkt des Raumes in sein $\mathfrak{a}$-faches. Die Kollineation wird also zur vollständigen Deckung beider Systeme.

Ist ***zweitens das zur Hauptzahl $\mathfrak{a}$ gehörende Hauptgebiet von dritter Stufe,*** so lässt sich der Bruch $\mathfrak{q}$ auf die Form bringen (11)

$$(34) \qquad \mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a} a_0 + a', \ \mathfrak{a} a_1, \ \mathfrak{a} a_2, \ \mathfrak{a} a_3}{a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3},$$

wo

$$(35) \qquad a' = \mathfrak{g} a_1 + \mathfrak{h} a_2 + \mathfrak{k} a_3$$

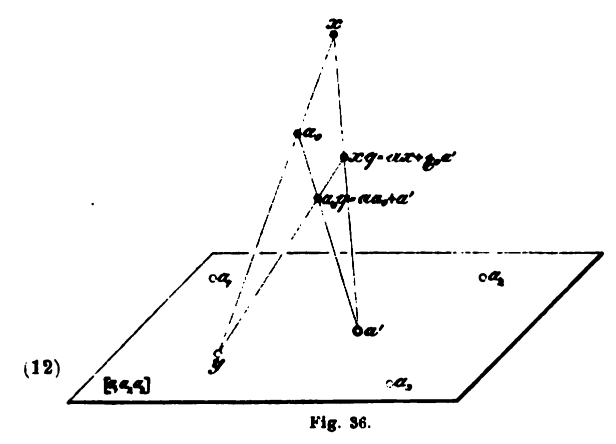
ist. Er lässt die Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ punktweise in Ruhe und verwandelt einen beliebigen Punkt

$$x = \mathfrak{x}_0 a_0 + \cdots + \mathfrak{x}_3 a_3$$

ausserhalb dieser Ebene in den Punkt

$$x\mathfrak{q} = \mathfrak{a} x + \mathfrak{x}_0 a',$$

bewirkt also (vgl. die entsprechende Entwickelung auf S. 450) eine *centrische Schiebung des Raumes mit dem Zielpunkte a' und der Spurebene* $[a_1 a_2 a_3]$ (vgl. Fig. 36). Sie wird zur gewöhnlichen Schiebung, sobald a_1, a_2, a_3 Strecken sind, wenn also der Zielpunkt durch eine Richtung und die Spurebene durch die unendlich ferne Ebene vertreten wird.



(12)

Fig. 36.

In dem *dritten* Falle, wo *das zur Hauptzahl* $\mathfrak{a}$ *gehörende Hauptgebiet von zweiter Stufe* ist, sei *zunächst der Sonderfall* betrachtet, dass der Bruch $\mathfrak{q}$ die Form besitzt

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a} a_0 + a'', \ \mathfrak{a} a_1 + a''', \ \mathfrak{a} a_2, \ \mathfrak{a} a_3}{a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3}, \tag{36}$$

wo

$$a'' = \mathfrak{g} a_2 + \mathfrak{h} a_3 \quad \text{und} \quad a''' = \mathfrak{k} a_2 + \mathfrak{l} a_3 \tag{37}$$

ist, wo also die Punkte a'' und a''' *beide* dem Hauptgebiete zweiter Stufe $[a_2 a_3]$ angehören. Durch diesen Bruch werden die Punkte der Geraden $U = [a_0 a_1]$ in die Punkte der Geraden $V = [(\mathfrak{a} a_0 + a'')(\mathfrak{a} a_1 + a''')]$ übergeführt, während die Gerade $W = [a_2 a_3]$ punktweise in Ruhe bleibt (vgl. Fig. 37).

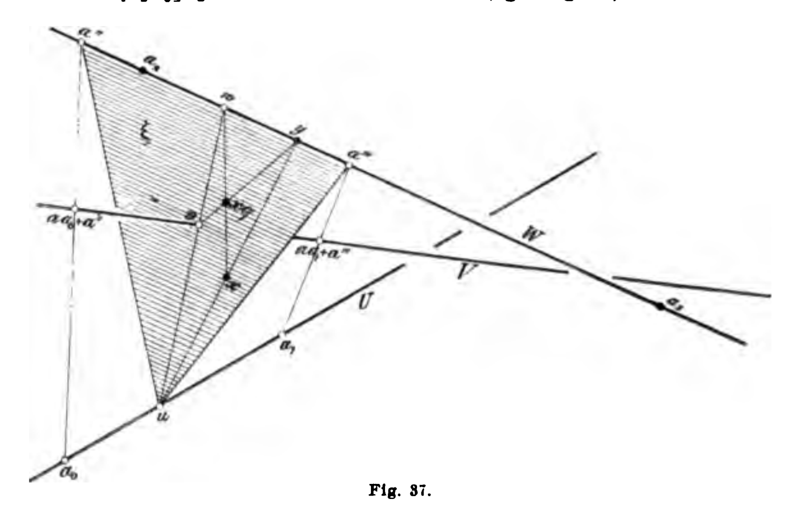


Fig. 37.

Um den Punkt zu bestimmen, in den ein beliebiger Punkt x des Raumes übergeht, lege man durch ihn und die „Spurgerade" W die Ebene $\xi = [xW]$, welche die Geraden U und V in den Punkten u und v schneiden mag. Dann wird dem Punkte u durch den Bruch $\mathfrak{q}$ der Punkt v zugewiesen; denn setzt man noch $u = \mathfrak{u}_0 a_0 + \mathfrak{u}_1 a_1$, so wird

$$u\mathfrak{q} = \mathfrak{a}u + \mathfrak{u}_0 a'' + \mathfrak{u}_1 a''',$$

das heisst, der Punkt $u\mathfrak{q}$ liegt auf einer Geraden, die durch u geht und die Gerade $W = [a_2 a_3] = [a'' a''']$ schneidet. Er liegt aber andererseits auf der Geraden V, da diese der Geraden U zugeordnet ist, und ist somit wirklich der Punkt v. Setzt man ferner noch $\mathfrak{u}_0 a'' + \mathfrak{u}_1 a''' = w$, wo dann also w den Schnittpunkt der Geraden $[uv]$ und W darstellt, so erhält man für die durch den Bruch $\mathfrak{q}$ bewirkte Abbildung der Ebene $\mathfrak{x}$ die Darstellung

$$\mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{a}u + w,\ \mathfrak{a}a_2,\ \mathfrak{a}a_3}{u,\ \ a_2,\ \ a_3},$$

wo w eine Vielfachensumme von a'' und a''', somit auch von a_2 und a_3 ist. Nach S. 450 erfährt daher diese Ebene eine centrische Schiebung in sich, die den Punkt w zum Zielpunkte und die Gerade W zur Spurgeraden hat und den Punkt u in den Punkt v überführt. Alle Ebenen $\mathfrak{x} = [xW]$, in denen eine solche centrische Schiebung erfolgt, bilden ein Ebenenbüschel mit der Axe W, und während sich die Schiebungsebene $\mathfrak{x}$ um die Axe des Büschels dreht, rückt ihr Zielpunkt w, der aus W durch die veränderliche Gerade $[uv]$ ausgeschnitten wird, auf der Geraden W fort. Die sämmtlichen Zielgeraden $[xw]$ bilden daher ein lineares Strahlsystem in demjenigen linearen Komplex, welcher durch die Geraden U, V als konjugirte Gerade und die Gerade W als Komplexgerade bestimmt wird. Man erhält das Strahlsystem aus dem Komplex, wenn man aus ihm alle die Komplexgeraden entnimmt, welche die feste Gerade W schneiden.

Die auf diese Weise gekennzeichnete Abbildung des Raumes möge als *windschiefe Schiebung* bezeichnet werden.

Es bleibt sodann noch der *vierte, allgemeinere Fall* zu behandeln, in dem (13) *das zur Hauptzahl* $\mathfrak{a}$ *gehörende Hauptgebiet* zwar immer noch *von zweiter Stufe* ist der Bruch $\mathfrak{q}$ aber die Form hat

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a}a_0 + \mathfrak{f}a_1 + a'',\ \mathfrak{a}a_1 + a''',\ \mathfrak{a}a_2,\ \mathfrak{a}a_3}{a_0,\ \ a_1,\ \ a_2,\ \ a_3}, \tag{38}$$

wo wieder

$$a'' = \mathfrak{g}a_2 + \mathfrak{h}a_3 \quad \text{und} \quad a''' = \mathfrak{k}a_2 + \mathfrak{l}a_3 \tag{39}$$

ist. Bei dieser Kollineation bewirkt der durch Abscheidung des ersten Nenners und Zählers hervorgehende „Unterbruch"

$$\mathfrak{q}_0 = \frac{\mathfrak{a}a_1 + a''',\ \mathfrak{a}a_2,\ \mathfrak{a}a_3}{a_1,\ \ a_2,\ \ a_3}$$

eine centrische Schiebung der Ebene $[a_1 a_2 a_3]$, welche den Punkt a''' zum Zielpunkte und die Gerade $[a_2 a_3]$ zur Spurgeraden hat Von der ausserhalb dieser Ebene erfolgenden Abbildung des Raumes erhält man eine Vorstellung, wenn man noch die Umwandlung des Ebenenbüschels mit der Axe $[a_2 a_3]$ ins Auge fasst. Diese Umwandlung lässt sich als eine *„Ebenenbüschelschiebung"* bezeichnen, da sie als Projektion der Schiebung einer Punktreihe betrachtet werden kann. Multiplicirt man nämlich die beiden ersten Nenner und Zähler von $\mathfrak{q}$ äusserlich mit dem Produkte der in Ruhe bleibenden Punkte a_2 und a_3, so findet man, dass die Ebenen $[a_0 a_2 a_3]$ und $[a_1 a_2 a_3]$ in die Ebenen $\mathfrak{a}[a_0 a_2 a_3] + \mathfrak{f}[a_1 a_2 a_3]$ und $\mathfrak{a}[a_1 a_2 a_3]$ übergehen, durch welche die Punkte $\mathfrak{a}a_0 + \mathfrak{f}a_1$ und $\mathfrak{a}a_1$ von der Axe $[a_2 a_3]$ aus projicirt werden. Nun stellt aber der Bruch

$$\mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{a}a_0 + \mathfrak{f}a_1,\ \mathfrak{a}a_1}{a_0,\ \ a_1}$$

eine centrische Schiebung der Punktreihe a_0, a_1 nach dem Zielpunkte a_1 dar, folglich ruft der Bruch $\mathfrak{q}$ (vgl. die Entwickelung auf S. 452) in dem Ebenenbüschel mit der Axe $[a_2 a_3]$ eine Schiebung hervor, welche die Projektion dieser centrischen Schiebung in der Geraden $[a_0 a_1]$ ist, welche also insbesondere die Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ zur „Zielebene" hat. Diese Ebenenbüschelschiebung bestimmt zusammen mit der centrischen Schiebung der Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ die betrachtete Kollineation des Raumes eindeutig. Der punktweise in sich übergehenden Punktreihe a_2, a_3 dualistisch entsprechend, enthält die Verwandtschaft $\mathfrak{q}$ übrigens auch noch ein ebenenweise in sich übergehendes Ebenenbüschel, dessen Axe durch die Gerade $[a_1 a'']$ gebildet wird und also den Träger $[a_2 a_3]$ jener Punktreihe schneidet, was sich wieder leicht durch die Methode der äusseren Erweiterung des Bruches $\mathfrak{q}$ beweisen lässt.

(14) In dem *fünften* und letzten Falle, wo *das zur Hauptzahl* $\mathfrak{a}$ *gehörende Hauptgebiet von erster Stufe* ist, lässt sich der Bruch $\mathfrak{q}$ auf die Form bringen

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a} a_0 + \mathfrak{f} a_1 + \mathfrak{g} a_2 + \mathfrak{h} a_3, \ \mathfrak{a} a_1 + \mathfrak{k} a_2 + \mathfrak{l} a_3, \ \mathfrak{a} a_2 + \mathfrak{m} a_3, \ \mathfrak{a} a_3}{a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3}. \tag{40}$$

Er bewirkt in der Geraden $[a_2 a_3]$ eine centrische Punktreihenschiebung mit dem Zielpunkte a_3, in der Ebene $[a_1 a_2 a_3]$ eine Strahlbüschelschiebung mit dem Scheitel a_3 und dem Zielstrahl $[a_2 a_3]$, und endlich im Raume eine Ebenenbüschelschiebung mit der Axe $[a_2 a_3]$ und der Zielebene $[a_1 a_2 a_3]$.

Mit diesen 14 Fällen sind die Kollineationen des Raumes erschöpft, welche sich nur durch das Auftreten einfacher oder mehrfacher Hauptzahlen und die Stufe der zugehörigen Hauptgebiete unterscheiden. Es ist beachtenswerth, dass diese 14 Fälle, welche die Methode von Nr. 390 ungezwungen ergiebt, abgesehen von dem Falle (10) der vollständigen Deckung, mit den 13 Fällen übereinstimmen, welche von Staudt in seinen *Beiträgen zur Geometrie der Lage* (Drittes Heft, Nürnberg 1860, S. 328 und ff.) aus einem andern Principe entwickelt hat*).

Eine besondere Behandlung erfordern schliesslich noch diejenigen speciellen Kollineationen, bei denen der unendlich ferne Kugelkreis oder auch nur die unendlich ferne Ebene eine ausgezeichnete Stellung einnimmt, das heisst, die Verwandtschaften der Kongruenz und Symmetrie, der Aehnlichkeit und Affinität.

Kongruenz. Um den Fall kongruenter, das heisst, durch Bewegung in einander überführbarer räumlicher Systeme erschöpfend behandeln zu können, wird es nöthig, noch einmal auf die ursprüngliche Form (1) des Bruches $\mathfrak{q}$, also auf die Darstellung

$$\mathfrak{q} = \frac{b_0, \ b_1, \ b_2, \ b_3}{e_0, \ e_1, \ e_2, \ e_3} \tag{41}$$

zurückzugreifen. Ein solcher Bruch wird die Beziehung zweier kongruenten Systeme darstellen, wenn der erste Nenner e_0 und der erste Zähler b_0 einfache Punkte sind, und die drei letzten Nenner und Zähler e_1, e_2, e_3 und b_1, b_2, b_3 zwei gleichsinnige, einfache Normalsysteme je dreier Strecken bilden. Setzt man dann wieder das äussere Produkt aller vier Nenner

*) Diese Bemerkung verdanke ich meinem Freunde H. Wiener, dem ich überhaupt für manche werthvolle Anregung bei der Abfassung dieser Anmerkung verpflichtet bin. H. Grassmann d. J.

$$(42)\qquad [e_0 e_1 e_2 e_3] = +1,$$

so wird auch das entsprechende Produkt der Zähler

$$(43)\qquad [b_0 b_1 b_2 b_3] = +1,$$

und also auch der Potenzwerth des Bruches $\mathfrak{q}$

$$(44)\qquad [\mathfrak{q}^4] = +1;$$

ferner wird

$$(45)\qquad [b_1 b_2 b_3] = [e_1 e_2 e_3].$$

Endlich lassen sich die b_i aus den e_i durch Gleichungen von der Form ableiten

$$(46)\qquad \begin{cases} b_0 = e_0 + \mathfrak{b}_{0,1} e_1 + \mathfrak{b}_{0,2} e_2 + \mathfrak{b}_{0,3} e_3 \\ b_1 = \qquad \mathfrak{b}_{1,1} e_1 + \mathfrak{b}_{1,2} e_2 + \mathfrak{b}_{1,3} e_3 \\ b_2 = \qquad \mathfrak{b}_{2,1} e_1 + \mathfrak{b}_{2,2} e_2 + \mathfrak{b}_{2,3} e_3 \\ b_3 = \qquad \mathfrak{b}_{3,1} e_1 + \mathfrak{b}_{3,2} e_2 + \mathfrak{b}_{3,3} e_3, \end{cases}$$

in denen die Ableitzahlen $\mathfrak{b}_{0,k}$ $(k = 1, 2, 3)$ die Projektionen der Strecke $b_0 - e_0$ auf die Nennerstrecken e_k und die $\mathfrak{b}_{i,k}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ die Richtungscosinus der Zählerstrecken b_i gegen die Nennerstrecken e_k sind. Hieraus folgt dann noch, dass sich umgekehrt die Nennerstrecken durch die Zählerstrecken ausdrücken vermöge der Gleichungen

$$(47)\qquad \begin{cases} e_1 = \mathfrak{b}_{1,1} b_1 + \mathfrak{b}_{2,1} b_2 + \mathfrak{b}_{3,1} b_3 \\ e_2 = \mathfrak{b}_{1,2} b_1 + \mathfrak{b}_{2,2} b_2 + \mathfrak{b}_{3,2} b_3 \\ e_3 + \mathfrak{b}_{1,3} b_1 + \mathfrak{b}_{2,3} b_2 + \mathfrak{b}_{3,3} b_3, \end{cases}$$

deren Koefficienten aus denen der drei letzten Gleichungen (46) durch Transposition hervorgehen.

Um die Doppelelemente der Verwandtschaft zu ermitteln, berücksichtige man, dass durch den Bruch $\mathfrak{q}$ die unendlich fernen Elemente (Strecken) wieder in unendlich ferne Elemente (Strecken) verwandelt werden, dass also die unendlich ferne Ebene kollinear in sich übergeführt wird. Man bestimme daher zunächst diejenigen drei Doppelelemente der Verwandtschaft $\mathfrak{q}$, welche der unendlich fernen Ebene angehören, das heisst, diejenigen *Strecken*, die durch die Verwandtschaft $\mathfrak{q}$ höchstens um einen Zahlfaktor geändert werden, welche also der Gleichung genügen

$$a\mathfrak{q} = \mathfrak{r} a \quad \text{oder} \quad 0 = a(\mathfrak{r} - \mathfrak{q}).$$

Setzt man in dieser Gleichung $a = \mathfrak{a}_1 e_1 + \mathfrak{a}_2 e_2 + \mathfrak{a}_3 e_3$, so verwandelt sie sich in

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{a}_1 \,.\, e_1(\mathfrak{r} - \mathfrak{q}) + \mathfrak{a}_2 \,.\, e_2(\mathfrak{r} - \mathfrak{q}) + \mathfrak{a}_3 \,.\, e_3(\mathfrak{r} - \mathfrak{q}) \\ &= \mathfrak{a}_1(\mathfrak{r} e_1 - b_1) + \mathfrak{a}_2(\mathfrak{r} e_2 - b_2) + \mathfrak{a}_3(\mathfrak{r} e_3 - b_3) \end{aligned}$$

oder in

$$[(\mathfrak{r} e_1 - b_1)(\mathfrak{r} e_2 - b_2)(\mathfrak{r} e_3 - b_3)] = 0,$$

das heisst, in

$$(48)\qquad \gamma_0 \mathfrak{r}^3 - \gamma_1 \mathfrak{r}^2 + \gamma_2 \mathfrak{r} - \gamma_3 = 0,$$

wo die Koefficienten $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ unendlich ferne Flächentheile darstellen; denn es wird

$$(49)\qquad \begin{cases} \gamma_0 = [e_1 e_2 e_3] \\ \gamma_1 = [b_1 e_2 e_3] + [e_1 b_2 e_3] + [e_1 e_2 b_3] = (\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3})[e_1 e_2 e_3] \qquad \text{[Gl. 46]} \\ \gamma_2 = [e_1 b_2 b_3] + [b_1 e_2 b_3] + [b_1 b_2 e_3] = (\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3})[b_1 b_2 b_3] \qquad \text{[Gl. 47]} \\ \gamma_3 = [b_1 b_2 b_3]. \end{cases}$$

Wegen (45) sind nun aber die symmetrischen Koefficienten gleich gross, nämlich $\gamma_3 = \gamma_0$ und $\gamma_2 = \gamma_1$. Dividirt man daher noch die Gleichung (48) mit dem Flächentheil γ_0, wodurch sie sich in eine Zahlgleichung verwandelt, und stellt zugleich die symmetrischen Glieder zusammen, so erhält man

$$\mathfrak{r}^3 - 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_0}\mathfrak{r}(\mathfrak{r} - 1) = 0,$$

oder wegen (49)

(50) $$\mathfrak{r}^3 - 1 - (\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3})\mathfrak{r}(\mathfrak{r} - 1) = 0.$$

Diese Gleichung besitzt die Wurzel $\mathfrak{r}_1 = 1$. In dem zugehörigen Hauptgebiete erster Stufe sei a_1 eine Strecke von der Länge 1; dann wird also $a_1\mathfrak{q} = a_1$, das heisst, die Strecke a_1 wird unter Wahrung ihrer Länge, ihrer Richtung und ihres Sinnes in sich übergeführt.

Die beiden andern Wurzeln der Gleichung (50) ergeben sich aus der nach der Division mit $\mathfrak{r} - 1$ verbleibenden Gleichung

$$\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r} + 1 - (\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3})\mathfrak{r} = 0,$$

das heisst, aus der Gleichung

(51) $$\mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3} - 1)\mathfrak{r} + 1 = 0.$$

Diese ergiebt die Werthe

(52) $$\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3} - 1 \pm \sqrt{(\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3} - 1)^2 - 4}\right);$$

man erhält also, da $\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3}$ nicht grösser als 3 sein kann, für $\mathfrak{r}$ reelle Werthe, wenn entweder

(53) $$\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3} = 3,$$

oder

(54) $$\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3} \leqq -1$$

ist.

Im *ersten Fälle* sind die Richtungscosinus $\mathfrak{b}_{1,1}$, $\mathfrak{b}_{2,2}$, $\mathfrak{b}_{3,3}$ nothwendig alle drei gleich $+1$, und es fallen daher die drei Axenrichtungen des ersten Systems mit denen des zweiten zusammen. Ferner werden dann auch die beiden Hauptzahlen $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ gleich $+1$. Der Bruch $\mathfrak{q}$ hat somit die Form

(55) $$\mathfrak{q} = \frac{b_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3}{e_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3},$$

wo die Strecken a_1, a_2, a_3 ein einfaches Normalsystem bilden. Er lässt eine jede Strecke des Raumes nach Länge, Richtung und Sinn unverändert und stellt also eine blosse *Schiebung des Raumes* oder die *vollständige Deckung* dar, je nachdem $b_0 \gtrless e_0$ oder $= e_0$ ist.

Um den *zweiten Fall* übersehen zu können, bemerke man noch, dass sich an den Hauptzahlen und Hauptgebieten des Bruches $\mathfrak{q}$ nichts ändern kann, wenn man (nach Nr. 380) als Nenner des Bruches anstatt der drei Strecken e_1, e_2, e_3 irgend ein anderes gleichsinniges, einfaches Normalsystem einführt. Man wähle nun statt der Strecke e_1 die Strecke a_1, die nach dem Obigen in sich übergeführt wird. Dann wird der zugehörige neue Zähler ebenfalls gleich a_1. Behält man daher für die Ableitzahlen der neuen Zähler aus den neuen Nennern die alten Bezeichnungen bei, so wird $\mathfrak{b}_{1,1} = +1$, während $\mathfrak{b}_{1,2}$ und $\mathfrak{b}_{1,3}$ gleich Null sind. Nun ist aber der kleinste Werth, den die Grössen $\mathfrak{b}_{2,2}$ und $\mathfrak{b}_{3,3}$ annehmen können,

gleich -1; bei der von uns getroffenen Wahl des Systems der Nenner kann daher die oben auftretende Summe $\mathfrak{b}_{1,1}+\mathfrak{b}_{2,2}+\mathfrak{b}_{3,3}$ überhaupt nicht kleiner werden als -1, das heisst, in der Vergleichung (54) hat nur das Gleichheitszeichen einen geometrischen Sinn. Ihm gehört aber die Doppelwurzel $\mathfrak{r}_2=\mathfrak{r}_3=-1$ zu; und, da diese nur eintreten kann, wenn $\mathfrak{b}_{2,2}=\mathfrak{b}_{3,3}=-1$ ist, wenn also die zu den beiden letzten Nennern gehörenden Zählerstrecken sich von ihren Nennerstrecken nur dem Sinne nach unterscheiden, so hat in diesem Falle der Bruch $\mathfrak{q}$ die Form

$$\mathfrak{q}=\frac{b_0,\ a_1,\ -a_2,\ -a_3}{e_0,\ a_1,\ \ a_2,\ \ a_3} \tag{56}$$

und führt eine jede Strecke des Raumes in diejenige Strecke über, welche hervorgeht, wenn man das ganze System, dem sie angehört, um eine Axe mit der Richtung a_1 eine halbe Umdrehung beschreiben lässt.

Mit diesen beiden Fällen sind die Möglichkeiten, unter denen $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ reell sein können, erschöpft; in allen andern Fällen sind $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ *konjugirt komplex*.

Aber auch dann kann man die durch den Bruch $\mathfrak{q}$ bewirkte Umwandlung der Strecken des Systems leicht übersehen. Nach Nr. 161 lässt sich nämlich aus dem einfachen Normalsysteme a_1, e_2, e_3 das einfache Normalsystem a_1, b_2, b_3 durch eine einzige circuläre Aenderung ableiten, und nach Nr. 156 muss diese circuläre Aenderung positiv sein, da nach Gleichung (45) die kombinatorischen Produkte der Grössen beider Normalsysteme einander gleich sind. Folglich besitzen (nach Nr. 154) die Ausdrücke für die Strecken b_2 und b_3 die Form

$$b_2=e_2\cos\mathfrak{b}+e_3\sin\mathfrak{b} \quad \text{und} \quad b_3=e_3\cos\mathfrak{b}-e_2\sin\mathfrak{b},$$

und es wird

$$\mathfrak{b}_{2,2}=\mathfrak{b}_{3,3}=\cos\mathfrak{b}.$$

Die Gleichung (52) geht also über in $\mathfrak{r}=\cos\mathfrak{b}\pm i\sin\mathfrak{b}$ und der Bruch $\mathfrak{q}$ nimmt die Gestalt an

$$\mathfrak{q}=\frac{b_0,\ a_1,\ e_2\cos\mathfrak{b}+e_3\sin\mathfrak{b},\ e_3\cos\mathfrak{b}-e_2\sin\mathfrak{b}}{e_0,\ a_1,\ \qquad e_2, \qquad\qquad\qquad e_3}. \tag{57}$$

Er bewirkt eine Drehung aller Strecken des Raumes um die Strecke a_1 als Axe und den Winkel $\mathfrak{b}$ als Drehwinkel. Der Sinn dieser Drehung stimmt mit dem des rechten Winkels $\angle(e_2e_3)$ überein oder nicht, je nachdem der Drehwinkel $\mathfrak{b}$ positiv oder negativ ist.

Dieser Fall der Drehung um einen Winkel $\mathfrak{b}$ umfasst auch die beiden schon im voraus behandelten Fälle reeller Hauptzahlen, welche sich aus ihm für $\mathfrak{b}=0$ und $\mathfrak{b}=\pi$ ergeben, und *es bewirkt daher überhaupt jede kongruente Umwandlung eines räumlichen Systems für* s e i n e S t r e c k e n *nur eine Drehung um eine gewisse Axe.*

Um aber auch die Lagenänderung der im Endlichen liegenden Systempunkte zu ermitteln, wird es nöthig, auch noch die vierte Hauptzahl $\mathfrak{r}_0$ des Bruches $\mathfrak{q}$ zu bestimmen. Dazu hat man auf die auf S. 441 entwickelte biquadratische Gleichung

$$\mathfrak{r}^4-4[\mathfrak{q}]\mathfrak{r}^3+6[\mathfrak{q}^2]\mathfrak{r}^2-4[\mathfrak{q}^3]\mathfrak{r}+[\mathfrak{q}^4]=0 \tag{10}$$

zurückzugreifen. Sie ist im Falle kongruenter Systeme eine reciproke Gleichung. Denn es ist zunächst (nach Gl. 44) $[\mathfrak{q}^4]=1$; aber andererseits ist auch $4[\mathfrak{q}^3]=4[\mathfrak{q}]$. In der That wird

$$\begin{aligned} 4[\mathfrak{q}] &= 4[\mathfrak{q}e_0e_1e_2e_3]=[e_0e_1e_2b_3]+\cdots+[b_0e_1e_2e_3] \quad \text{[Nr. 506, 504]}\\ &= \mathfrak{b}_{3,3}+\mathfrak{b}_{2,2}+\mathfrak{b}_{1,1}+1 \quad \text{[Gl. 46, 42]}, \end{aligned} \tag{58}$$

(59) $$4[\mathfrak{q}^4] = 4[\mathfrak{q}^4 e_0 e_1 e_2 e_3] = [e_0 b_1 b_2 b_3] + \cdots + [b_0 b_1 b_2 e_3] \quad \text{[Nr. 506, 504]}$$
$$= 1 + \mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3} \quad \text{[Gl. 45, 42, 47, 43]}.$$

Die Gleichung (10) nimmt daher die Form an

$$\mathfrak{r}^4 - 4[\mathfrak{q}]\mathfrak{r}^3 + 6[\mathfrak{q}^2]\mathfrak{r}^2 - 4[\mathfrak{q}]\mathfrak{r} + 1 = 0$$

oder

$$\mathfrak{r}^2 + \frac{1}{\mathfrak{r}^2} - 4[\mathfrak{q}]\left(\mathfrak{r} + \frac{1}{\mathfrak{r}}\right) + 6[\mathfrak{q}^2] = 0$$

oder

(60) $$\left(\mathfrak{r} + \frac{1}{\mathfrak{r}}\right)^2 - 4[\mathfrak{q}]\left(\mathfrak{r} + \frac{1}{\mathfrak{r}}\right) = 2 - 6[\mathfrak{q}^2].$$

Hier lässt sich dann auch noch die rechte Seite durch $[\mathfrak{q}]$ ausdrücken; es wird nämlich

(61) $$6[\mathfrak{q}^2] = 6[\mathfrak{q}^2 e_0 e_1 e_2 e_3] = [e_0 e_1 b_2 b_3] + [e_0 b_1 e_2 b_3] + [e_0 b_1 b_2 e_3]$$
$$+ [b_0 b_1 e_2 e_3] + [b_0 e_1 b_2 e_3] + [b_0 e_1 e_2 b_3]$$
$$= 2(\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3}) \quad \text{(Gl. 47, 46, 45, 42, 43)}$$
$$= 2(4[\mathfrak{q}] - 1).$$

Man erhält somit für die rechte Seite der Gleichung (60) den Werth

$$2 - 6[\mathfrak{q}^2] = 4 - 8[\mathfrak{q}].$$

Setzt man daher noch $\mathfrak{r} + \frac{1}{\mathfrak{r}} = \mathfrak{s}$, so verwandelt sich die Gleichung (60) in

$$\mathfrak{s}^2 - 4[\mathfrak{q}]\mathfrak{s} = 4 - 8[\mathfrak{q}]$$

und ergiebt also für $\mathfrak{s}$ die Werthe

$$\mathfrak{s}_1 = 2,$$
$$\mathfrak{s}_2 = 4[\mathfrak{q}] - 2 = \mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3} - 1.$$

Für die gesuchten vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung (60) bekommt man demnach die beiden quadratischen Gleichungen

$$\begin{cases} \mathfrak{r} + \frac{1}{\mathfrak{r}} = 2 \\ \text{und} \\ \mathfrak{r} + \frac{1}{\mathfrak{r}} = \mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3} - 1, \end{cases}$$

das heisst, die Gleichungen

(62) $$\begin{cases} \mathfrak{r}^2 - 2\mathfrak{r} + 1 = 0 \\ \text{und} \\ \mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3} - 1)\mathfrak{r} + 1 = 0, \end{cases}$$

von denen die zweite mit (51) genau übereinstimmt und wieder die alten Wurzelwerthe $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ ergiebt. Die erste Gleichung liefert neben der schon oben gefundenen Wurzel $\mathfrak{r}_1 = 1$ auch für die vierte Wurzel den Werth $\mathfrak{r}_0 = 1$. Bei der Aufsuchung des zu der Doppelwurzel $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_1 = 1$ gehörigen Hauptgebietes hat man daher nach der Methode von Nr. 390 zwei Fälle zu unterscheiden.

Entweder ergiebt sich für diese Doppelwurzel *ein Hauptgebiet zweiter Stufe*, indem ausser der Strecke a_1 auch noch ein im Endlichen liegender Punkt a_0 ohne Hinzutreten eines Zahlfaktors in sich übergeführt wird. In diesem Falle bleibt dann die ganze Gerade $[a_0 a_1]$ punktweise in Ruhe, und der Bruch $\mathfrak{q}$ hat die Form

$$(63)\qquad \mathfrak{q}=\frac{a_0,\ a_1,\ e_2\cos\mathfrak{b}+e_3\sin\mathfrak{b},\ e_3\cos\mathfrak{b}-e_2\sin\mathfrak{b}}{a_0,\ a_1,\qquad e_2,\qquad\qquad e_3},$$

wo die Strecken a_1, e_2, e_3 ein einfaches Normalsystem bilden. Der Bruch $\mathfrak{q}$ bewirkt also eine Drehung des Systems um die Axe $[a_0 a_1]$ und den Winkel $\mathfrak{b}$. Dabei ist auch der Fall vollständiger Deckung beider Systeme (für $\mathfrak{b}=0$) mit eingeschlossen.

Oder aber das Wurzelpaar $\mathfrak{r}_0=\mathfrak{r}_1=1$ besitzt nur ein Hauptgebiet erster Stufe. Dann gehört dieses Hauptgebiet nach S. 458 sicher der unendlich fernen Ebene an. Ist daher wieder a_1 eine Strecke von der Länge 1 in diesem Gebiete, so lässt sich der Bruch $\mathfrak{q}$ nach Nr. 390 auf die Form bringen

$$(64)\qquad \mathfrak{q}=\frac{a_0+\mathfrak{g}a_1,\ a_1,\ e_2\cos\mathfrak{b}+e_3\sin\mathfrak{b},\ e_3\cos\mathfrak{b}-e_2\sin\mathfrak{b}}{a_0,\qquad a_1,\qquad e_2,\qquad\qquad e_3}.$$

Er verschiebt einen jeden Punkt der Geraden $[a_0 a_1]$ um die Strecke $\mathfrak{g}a_1$. Jeder andere Punkt des Raumes erleidet ausser einer Verschiebung um dieselbe Strecke noch eine Drehung um die Axe $[a_0 a_1]$, deren Drehwinkel $=\mathfrak{b}$ ist. *Der ganze Raum erfährt also eine Schraubung um die Axe* $[a_0 a_1]$.

Symmetrie. Aendert man bei irgend einem der vier Zähler des Kongruenzbruches das Vorzeichen, was ein Ueberspringen seines Potenzwerthes $[\mathfrak{q}^4]$ in den Werth -1 zur Folge hat, so tritt an die Stelle der Kongruenz die Symmetrie, das heisst, der Bruch $\mathfrak{q}$ stellt dann *die Verwandtschaft zweier beliebig gelegener symmetrischer Systeme* dar. In der That, ersetzt man zum Beispiel den einfachen Punkt b_0 durch den Punkt $c_0=-b_0$, das heisst, durch einen Punkt vom Gewichte -1, bildet also den Bruch

$$(65)\qquad \mathfrak{q}=\frac{-b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3}{e_0,\ e_1,\ e_2,\ e_3},$$

wo die e_s und b_s dieselbe Bedeutung haben sollen wie bisher, so lässt sich die durch den Bruch $\mathfrak{q}$ vermittelte Abbildung als Folge der beiden Verwandtschaften

$$\mathfrak{q}_1=\frac{b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3}{e_0,\ e_1,\ e_2,\ e_3}$$

und

$$\mathfrak{q}_2=\frac{-b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3}{b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3}$$

darstellen. Denn, setzt man $x\mathfrak{q}_1=y$ und $y\mathfrak{q}_2=z$, und ist $x=\mathfrak{x}_0 e_0+\cdots+\mathfrak{x}_3 e_3$, so wird $y=x\mathfrak{q}_1=\mathfrak{x}_0 b_0+\cdots+\mathfrak{x}_3 b_3$ und

$$z=y\mathfrak{q}_2=x\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2=-\mathfrak{x}_0 b_0+\mathfrak{x}_1 b_1+\mathfrak{x}_2 b_2+\mathfrak{x}_3 b_3=x\mathfrak{q},$$

also wirklich $x\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2=x\mathfrak{q}$ für jeden beliebigen Punkt x des Raumes, und man kann daher den Bruch $\mathfrak{q}$ als eine Art Produkt, als „Folgeprodukt" der Verwandtschaftsbrüche $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ auffassen. Die geometrische Bedeutung der beiden Abbildungen $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ lässt sich leicht angeben. Denn der Bruch $\mathfrak{q}_1$ stellt nach dem Obigen eine beliebige Bewegung des Raumes dar und verwandelt das System der *einfachen* Punkte $x=e_0+\mathfrak{x}_1 e_1+\mathfrak{x}_2 e_2+\mathfrak{x}_3 e_3$ in das kongruente aber beliebig gelegene System der einfachen Punkte $y=x\mathfrak{q}_1$. Um die Bedeutung der Abbildung $\mathfrak{q}_2$ zu finden, bezeichne man noch die von dem Punkte b_0 nach dem Punkte y gezogene Strecke mit v, setze also $y=b_0+v$. Dann wird die Strecke v als Vielfachensumme der drei letzten Nenner durch die Verwandtschaft $\mathfrak{q}_2$ nicht geändert, der Punkt y also übergeführt in den Punkt

$$z=y\mathfrak{q}_2=-b_0+v=-(b_0-v),$$

das heisst, in denjenigen Punkt, den man erhält, wenn man die Linie $y b_0$ über b_0 hinaus um sich selbst verlängert. Das ganze System der Punkte y erfährt also bei der Multiplikation mit $\mathfrak{q}_2$ eine „Spiegelung am Punkte b_0" und verwandelt sich somit in ein zu sich selbst und zu dem Systeme der x symmetrisches System. Durch eine ganz willkürliche Bewegung $\mathfrak{q}_1$ und eine darauf folgende Punktspiegelung $\mathfrak{q}_2$ lässt sich nun aber jedes räumliche System in ein symmetrisches System von ganz beliebiger Lage überführen, und der Bruch $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2$ ist somit wirklich der analytische Ausdruck für die Verwandtschaft zweier beliebig gelegener zu einander symmetrischer Systeme.

Aehnlichkeit. Ersetzt man ferner in dem Kongruenzbruche (41) den einfachen Punkt b_0 durch den kongruenten Punkt vom Gewichte $\mathfrak{m}$, das heisst, durch den Punkt $c_0 = \mathfrak{m} b_0$, wo

$$\mathfrak{m} \text{ num} \gtrless 1 \tag{66}$$

ist, bildet also den Bruch

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{m} b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3}{e_0,\ e_1,\ e_2,\ e_3}\text{*)}, \tag{67}$$

so hat man den Ausdruck für die Verwandtschaft zweier ähnlicher Systeme von beliebiger Lage. Um dies zu zeigen, stelle man die Abbildung $\mathfrak{q}$ als Folge der beiden Verwandtschaften

$$\mathfrak{q}_1 = \frac{b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3}{e_0,\ e_1,\ e_2,\ e_3}$$

und

$$\mathfrak{q}_2 = \frac{\mathfrak{m} b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3}{b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3}$$

dar, so dass wieder $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2$ wird. Dabei ist die erste Verwandtschaft $\mathfrak{q}_1$ wieder eine Bewegung allgemeinster Art und führt das System der einfachen Punkte x über in das System der einfachen Punkte $y = x\mathfrak{q}_1$. Die Verwandtschaft $\mathfrak{q}_2$ hingegen verwandelt jeden einfachen Punkt in einen $\mathfrak{m}$-fachen Punkt, lässt aber wieder die Strecken v unverändert. Den einfachen Punkt $y = b_0 + v$ ersetzt sie durch den $\mathfrak{m}$-fachen Punkt

$$z = y\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{m} b_0 + v = \mathfrak{m}\left(b_0 + \frac{v}{\mathfrak{m}}\right),$$

welcher auf der Geraden $[b_0 y]$ so gelegen ist, dass sich sein Abstand vom Punkte b_0 zum Abstande des Punktes y von demselben Punkte wie 1 zu $\mathfrak{m}$ verhält. Die Systeme der Punkte z und y sind also zu einander ähnlich und ähnlich gelegen, haben den Punkt b_0 zum Aehnlichkeitspunkt und das Grössenverhältniss $1 : \mathfrak{m}$, das heisst, die Abbildung $\mathfrak{q}_2$ ist eine „*perspektive Aehnlichkeitstransformation*" (eine „*Streckung*") mit dem Mittelpunkte b_0 und dem Maassstabe $1 : \mathfrak{m}$.

Die Verwandtschaft $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2$, welche die Punkte x direkt in die Punkte z verwandelt, erweist sich somit als die Folge einer ganz beliebigen Bewegung und einer perspektiven Aehnlichkeitstransformation und ist also „*die allgemeinste Beziehung zweier ähnlicher Systeme von beliebiger Lage*".

Die Frage nach den Doppelelementen beider Systeme erfordert noch eine besondere Untersuchung. Für die drei Hauptgebiete der unendlich fernen Ebene freilich kann sich an den Ergebnissen für kongruente Systeme nichts ändern, da

*) Für diese Form des Bruches $\mathfrak{q}$ gilt dann freilich nicht mehr die Gleichung (7), denn es wird $[\mathfrak{q}'] = \mathfrak{m}$; doch ist diese Form für die Deutung der durch den Bruch bewirkten Abbildung geeigneter.

die Voraussetzungen über die Umwandlung der unendlich fernen Gebilde dieselben geblieben sind; man erhält also wieder für die drei der unendlich fernen Ebene zugehörenden Hauptzahlen die Werthe $\mathfrak{r}_1 = 1$ und $\left.\begin{matrix}\mathfrak{r}_2\\ \mathfrak{r}_3\end{matrix}\right\} = \cos\mathfrak{b} \pm i \sin\mathfrak{b}$, das heisst, drei Zahlen vom numerischen Werthe 1. Um die vierte Hauptzahl zu finden, muss man auf die Gleichung (10) zurückgehen. Diese Gleichung ist jetzt nicht mehr reciprok, denn, ersetzt man in den Gleichungen (58), (59), (61) überall den einfachen Punkt b_0 durch den $\mathfrak{m}$-fachen Punkt $\mathfrak{m}b_0$, so erhält man

$$4[\mathfrak{q}] = \mathfrak{b}_{3,3} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{m} = \mathfrak{b} + \mathfrak{m}$$

$$4[\mathfrak{q}^3] = 1 + (\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3})\mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{b}\mathfrak{m}$$

$$6[\mathfrak{q}^2] = \mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3} + \mathfrak{m}(\mathfrak{b}_{1,1} + \mathfrak{b}_{2,2} + \mathfrak{b}_{3,3}) = \mathfrak{b}(1 + \mathfrak{m});$$

dazu kommt noch

$$[\mathfrak{q}^4] = \mathfrak{m}.$$

Die Gleichung (10) verwandelt sich daher in

$$\mathfrak{r}^4 - (\mathfrak{b} + \mathfrak{m})\mathfrak{r}^3 + \mathfrak{b}(1 + \mathfrak{m})\mathfrak{r}^2 - (1 + \mathfrak{b}\mathfrak{m})\mathfrak{r} + \mathfrak{m} = 0. \tag{68}$$

Diese Gleichung aber besitzt, wie man sofort sieht, die Wurzel $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{m}$; denn substituirt man diesen Werth, so heben sich die Glieder auf ihrer linken Seite paarweise fort. Wegen (66) ist aber diese Wurzel $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{m}$ von den drei andern Wurzeln, deren numerischer Werth $= 1$ war, sicher verschieden, und die Abbildung $\mathfrak{q}$ besitzt daher auch bestimmt ein im Endlichen liegendes Hauptgebiet erster Stufe, das heisst, einen im Endlichen liegenden Doppelpunkt a_0, der durch den Bruch $\mathfrak{q}$ in sein $\mathfrak{m}$-faches verwandelt wird. Der Bruch $\mathfrak{q}$ lässt sich also auf die Form bringen

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{m}a_0,\ a_1,\ e_2\cos\mathfrak{b} + e_3\sin\mathfrak{b},\ e_3\cos\mathfrak{b} - e_2\sin\mathfrak{b}}{a_0,\ a_1,\ e_2,\ e_3}. \tag{69}$$

Sie zeigt, dass die Aehnlichkeit $\mathfrak{q}$ *als Folge einer* **blossen Drehung** um die Axe $[a_0a_1]$ *und einer Streckung* vom Mittelpunkte a_0 aus aufgefasst werden kann. Setzt man nämlich noch

$$\mathfrak{q}_3 = \frac{a_0,\ a_1,\ e_2\cos\mathfrak{b} + e_3\sin\mathfrak{b},\ e_3\cos\mathfrak{b} - e_2\sin\mathfrak{b}}{a_0,\ a_1,\ e_2,\ e_3} \tag{70}$$

und

$$\mathfrak{q}_4 = \frac{\mathfrak{m}a_0,\ a_1,\ e_2\cos\mathfrak{b} + e_3\sin\mathfrak{b},\ e_3\cos\mathfrak{b} - e_2\sin\mathfrak{b}}{a_0,\ a_1,\ e_2\cos\mathfrak{b} + e_3\sin\mathfrak{b},\ e_3\cos\mathfrak{b} - e_2\sin\mathfrak{b}}, \tag{71}$$

so wird $\mathfrak{q}_4 = \mathfrak{q}_3\mathfrak{q}$, wo wirklich $\mathfrak{q}_3$ eine Drehung um die Axe $[a_0a_1]$ und $\mathfrak{q}_4$ eine perspektive Aehnlichkeitstransformation (eine Streckung) mit dem Mittelpunkte a_0 darstellt. Damit ist der Satz bewiesen:

Jede Aehnlichkeitstransformation, die sich nicht auf eine blosse Kongruenz oder Symmetrie reducirt (vgl. die Ungleichung 66) *besitzt einen im Endlichen liegenden Punkt und eine durch ihn gehende Axe, welche bei der Abbildung in Ruhe bleiben.*

Man nennt jenen Punkt und diese Axe den *Situationspunkt* und die *Situationsaxe der ähnlichen Räume.* Auf der Situationsaxe verändern alle Punkte ihre Lage mit Ausnahme des Situationspunktes und des unendlich fernen Punktes. Jeder der beiden ähnlichen Räume lässt sich durch eine Drehung um die Situationsaxe in eine zum andern Raume perspektive Lage überführen.

Affinität. Ist wieder der erste Nenner e_0 und der erste Zähler b_0 des Bruches $\mathfrak{q}$ ein im Endlichen liegender Punkt und sind seine drei letzten Nenner e_1, e_2, e_3

und seine drei letzten Zähler b_1, b_2, b_3 *beliebige* unendlich ferne Punkte, das heisst, beliebige Strecken, *so weist der Bruch*

$$\mathfrak{q} = \frac{b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3}{e_0,\ e_1,\ e_2,\ e_3} \tag{72}$$

immer noch jedem unendlich fernen Punkte des einen Systems einen unendlich fernen Punkt im andern zu, aber im allgemeinen nicht mehr einem Normalsystem der Strecken des einen ein Normalsystem von Strecken des andern, und die Verwandtschaft wird zur Affinität. Dabei kann man dann wieder über die Gewichte der Punkte e_0 und b_0 und über die Längen der Strecken e_1, e_2, e_3, b_1, b_2, b_3 so verfügen, dass die Gleichungen (5), (6) und (7) erfüllt werden, dass also ins Besondere

$$[\mathfrak{q}^4] = \frac{[b_0 b_1 b_2 b_3]}{[e_0 e_1 e_2 e_3]} = \pm 1 \tag{73}$$

wird.

Zwei besondere Arten der Affinität, die zu der allgemeinen Affinität in derselben Beziehung stehen wie die Kongruenz und Symmetrie zur Aehnlichkeit, ergeben sich noch, wenn man *die Gewichte der Punkte e_0 und b_0 gleich gross wählt.* Dann wird überhaupt jedem Punkte des ersten Systems ein Punkt von gleichem Gewicht im zweiten Systeme zugewiesen, namentlich also einem einfachen Punkte wieder ein einfacher Punkt. Besitzt dann noch *ausserdem der Bruch $\mathfrak{q}$ den Potenzwerth* $[\mathfrak{q}^4] = +1$, ist also

$$[b_0 b_1 b_2 b_3] = [e_0 e_1 e_2 e_3], \tag{74}$$

so entspricht einem jeden durch vier einfache Punkte des ersten Systems bestimmten Spate ein Spat von gleichem Rauminhalt und gleichem Sinn im zweiten System. Denn ist Δ die Determinante der Zahlen, durch welche die vier einfachen Punkte w, x, y, z aus den Nennern e_0, e_1, e_2, e_3 abgeleitet sind, so wird (nach Nr. 63) das Produkt

$$[wxyz] = \Delta[e_0 e_1 e_2 e_3],$$

und, da die entsprechenden Punkte $w\mathfrak{q}$, $x\mathfrak{q}$, $y\mathfrak{q}$, $z\mathfrak{q}$ des zweiten Systems durch dieselben Ableitzahlen aus den Zählern b_0, b_1, b_2, b_3 hervorgehen, so wird das Produkt aus den entsprechenden Punkten dieses Systems

$$[w\mathfrak{q} \,.\, x\mathfrak{q} \,.\, y\mathfrak{q} \,.\, z\mathfrak{q}] = \Delta[b_0 b_1 b_2 b_3].$$

Wegen der Gleichung (74) wird daher

$$[w\mathfrak{q} \,.\, x\mathfrak{q} \,.\, y\mathfrak{q} \,.\, z\mathfrak{q}] = [wxyz],$$

und, da ausserdem auch die Punkte $w\mathfrak{q}, \ldots$ des zweiten Systems einfache Punkte sind, so haben (nach Nr. 263) die beiden durch die Punkte w, x, y, z und durch die Punkte $w\mathfrak{q}$, $x\mathfrak{q}$, $y\mathfrak{q}$, $z\mathfrak{q}$ bestimmten Spate gleichen Rauminhalt und gleichen Sinn. Die Verwandtschaft $\mathfrak{q}$ ist also eine *raumtreue Affinität.*

Ist der Potenzwerth $[\mathfrak{q}^4] = -1$, bleiben aber sonst die Bedingungen der raumtreuen Affinität erfüllt, so entspricht jedem Spate des ersten Systems ein Spat von gleichem Rauminhalt aber entgegengesetztem Sinn im zweiten System und die Affinität wird *symmetrisch-raumtreu.* H. Grassmann d. J.

Nr. **391.** S. 257—263. Es seien $e_1, \ldots e_n$ die ursprünglichen Einheiten und:

$$Qe_\varkappa = \sum_\nu^{1\ldots n} \alpha_{\varkappa\nu} e_\nu \quad (\varkappa = 1, \ldots n),$$

wo die $\alpha_{\varkappa\nu}$ *reelle* Zahlen bedeuten sollen. Setzt man dann: $a = \Sigma x_\varkappa e_\varkappa$ und $b = \Sigma y_j e_j$, so erhält der Ausdruck $[Qab]$ die Gestalt:

$$[Qa|b] = \sum_{\varkappa,\nu,j} \alpha_{\varkappa\nu} x_\varkappa y_j [e_\nu|e_j] = \sum_{\varkappa,j} \alpha_{\varkappa j} x_\varkappa y_j,$$

und die Forderung, dass für beliebige a und b immer $[Qa|b] = [Qb|a]$ sein soll, kann daher durch die Gleichungen $\alpha_{\varkappa j} = \alpha_{j\varkappa}$ $(\varkappa, j = 1, \ldots n)$ ersetzt werden. Diese letzteren wiederum sagen aus, dass $[Qa|b] = \Sigma\alpha_{\varkappa j} x_\varkappa y_j$ die erste Polare von b in Bezug auf die quadratische Form: $[Qa|a] = \Sigma\alpha_{\varkappa j} x_\varkappa x_j$ ist.

Die andre Forderung, dass $[Qa|a]$ bei beliebigem a von Null verschieden sein soll, kommt darauf hinaus, dass die quadratische Form $\Sigma\alpha_{\varkappa j} x_\varkappa x_j$ für reelle x nur dann verschwinden kann, wenn alle x null sind, dass sie also eine beständig positive oder eine beständig negative Form ist. Diese Voraussetzung wird von Grassmann beim Beweise von Nr. 391 mehrfach benutzt, sie würde aber, wie sich nachher zeigen wird, zur Folge haben, dass die Hauptzahlen des Quotienten Q alle positiv oder alle negativ wären, sie muss also, wenn man den Satz 391 in seiner jetzigen allgemeinen Fassung beibehalten will, durch eine andere ersetzt werden, nämlich durch die, *dass die Determinante der quadratischen Form* $\Sigma\alpha_{i\varkappa} x_i x_\varkappa$ *oder*, was auf dasselbe hinauskommt, *der Potenzwerth des Bruches* Q *von Null verschieden sei.*

Wir werden nachher zeigen, wie sich der Beweis des Satzes 391 gestaltet, wenn man die Grassmannsche Voraussetzung durch die eben angegebene ersetzt. Vorerst wollen wir uns jedoch klar machen, was eigentlich der Sinn und der Zweck des Satzes ist. Dabei nehmen wir gleich an, dass der Potenzwerth des Bruches Q, das heisst, die Determinante der $\alpha_{\varkappa j}$, von Null verschieden ist.

Ausser mit Q steht die quadratische Form $\Sigma\alpha_{\varkappa j} x_\varkappa x_j$ noch mit einem andern Quotienten in Beziehung, nämlich mit dem Quotienten P, der durch die Gleichungen:

$$Pe_\varkappa = \sum_\nu^{1\ldots n} \alpha_{\varkappa\nu}|e_\nu \quad (\varkappa = 1, \ldots n)$$

definirt ist und dessen Zähler von $(n-1)$-ter Stufe sind, während die Nenner, wie bei Q, von erster Stufe sind.

Dieser Quotient P hat eine einfache geometrische Bedeutung. Denken wir uns nämlich $e_1, \ldots e_n$ in einem n-fach ausgedehnten Euklidischen Raume als n auf einander senkrechte Strecken von der Länge Eins durch einen Punkt O und fassen wir dementsprechend $x_1, \ldots x_n$ als rechtwinklige Koordinaten dieses Raumes auf, mit O als Anfangspunkt, so ordnet P jeder durch O gehenden Strecke die $(n-1)$-fach ausgedehnte Ebene zu, die alle conjugirten Durchmesser dieser Strecke in Bezug auf die ∞^1 Mannigfaltigkeiten zweiten Grades: $\Sigma\alpha_{\varkappa j} x_\varkappa x_j = \text{const.}$ enthält*).

Die Beziehung zwischen dem Bruche P und der quadratischen Form $\Sigma\alpha_{\varkappa j} x_\varkappa x_j$ ist von der Wahl der Einheiten $e_1, \ldots e_n$ unabhängig. Es seien nämlich $c_1, \ldots c_n$ n Grössen erster Stufe, deren kombinatorisches Produkt gleich Eins ist, also

---

*) Deutet man $x_1, \ldots x_n$ als homogene Koordinaten in einem R_{n-1}, so führt P jeden Punkt $x_1, \ldots x_n$ über in seine $(n-2)$-fach ausgedehnte Polarebene in Bezug auf die Mannigfaltigkeit: $\Sigma\alpha_{\varkappa j} x_\varkappa x_j = 0$, dagegen verwandelt Q den Punkt $x_1, \ldots x_n$ in den Pol der eben erwähnten Ebene in Bezug auf die Mannigfaltigkeit: $\Sigma x_\nu^2 = 0$.

Weg

und.
sind,
die Pu
Sinn.
Ist
raumtreu
Spat von
und die A
Nr. 3

wo die
$b = \Sigma y$

dazu, S. 430), wenn $c_1, \ldots c_n$ ein vollständiges Normalsystem vom numerischen Werthe Eins bilden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn die Transformation: $x_\nu = \Sigma \lambda_{\varkappa\nu} x_\varkappa'$ orthogonal ist*) (vgl. die Anmerkung zu Nr. 155, S. 429).

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt den Inhalt des Satzes 391 in einer von den Symbolen der Ausdehnungslehre unabhängigen Form aussprechen.

Zunächst wird in dem Satze behauptet, dass man immer n Grössen $c_1, \ldots c_n$ bestimmen kann, die in keiner Zahlbeziehung stehen und für die $[Qc_\varkappa | c_j] = 0$ ist, sobald $\varkappa \gtrless j$. Denken wir uns nun, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist, $c_1, \ldots c_n$ so gewählt, dass ihr kombinatorisches Produkt gleich Eins ist, so gilt für die $c_\varkappa$ die Gleichung (*), und da nach dem Früheren $|Qc_\varkappa = Pc_\varkappa$ und nach Nr. 144 $[Qc_\varkappa | c_j] = [c_j | Qc_\varkappa]$ ist, so wird:

$$[Qc_\varkappa | c_j] = [c_j \,.\, Pc_\varkappa] = \sum_\nu \alpha'_{\varkappa\nu} [c_j \,.\, Ic_\nu] = \alpha'_{\varkappa j}.$$

Da aber die Ausdrücke $[Qc_\varkappa | c_j]$ für $\varkappa \gtrless j$ sämmtlich verschwinden, so ergiebt sich aus (*):

$$Pc_\varkappa = \alpha'_{\varkappa\varkappa} Ic_\varkappa,$$

und die quadratische Form $\Sigma \alpha_{\varkappa j} x_\varkappa x_j$ erhält beim Uebergange zu den Einheiten $c_1, \ldots c_n$ die Gestalt: $\Sigma \alpha'_{\varkappa\varkappa} x_\varkappa'^2$. Hier kann endlich von den Grössen $\alpha'_{\varkappa\varkappa}$ keine verschwinden, denn nach Nr. 92 ist:

$$|Pc_\varkappa = \|Qc_\varkappa = (-1)^{n-1} Qc_\varkappa,$$

also wird:

$$\begin{aligned}[Qc_1 \,.\, Qc_2 \ldots Qc_n] &= (-1)^{n(n-1)} [Pc_1 \ldots Pc_n] && [98]\\ &= \alpha'_{11} \ldots \alpha'_{nn} | I [c_1 \ldots c_n] && [110]\\ &= \alpha'_{11} \ldots \alpha'_{nn},\end{aligned}$$

dieser Ausdruck aber kann nicht verschwinden, weil er den Potenzwerth von Q darstellt.

Wenn man daher $c_1, \ldots c_n$ in der angegebenen Weise bestimmt, so löst man im Grunde die Aufgabe, *die quadratische Form $\Sigma \alpha_{\varkappa\nu} x_\varkappa x_\nu$ durch eine reelle lineare homogene Substitution von der Determinante Eins auf eine Summe von n Quadraten zurückzuführen***). Die Zahl der positiven unter diesen n Quadraten ist dabei

---

*) Man kann das auch so ausdrücken: Der Quotient Q ist eine simultane Kovariante der beiden quadratischen Formen: $X = \Sigma \alpha_{\varkappa j} x_\varkappa x_j$ und $U = \Sigma u_\nu^2$, unter den x und u kontragrediente Veränderliche verstanden. In der That, wenn man die x als Punkt- und die u als Ebenenkoordinaten auffasst, so stellt die Kovariante

$$\frac{1}{2} \sum \frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial u_j} = \Sigma \alpha_{j\varkappa} x_\varkappa u_j$$

gleich Null gesetzt gerade die lineare homogene Substitution dar, deren Symbol der Quotient Q ist. Man vgl. hierzu: Gundelfinger, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von Dingeldey, Leipzig, Teubner, 1895. S. 70 ff.

**) Der Uebergang zu den Koordinaten x' ist natürlich gleichbedeutend damit, dass man die ∞^1 Mannigfaltigkeiten $\Sigma \alpha_{\varkappa j} x_\varkappa x_j = \text{const.}$ auf ein System konjugirter Durchmesser bezieht, daher der Ausdruck: „konjugirter Verein“ auf S. 259, Z. 18 f. v. o.

gleich der Zahl der positiven unter den n von Null verschiedenen reellen Zahlen: $[Qc_\varkappa|c_\varkappa] = \alpha'_{\varkappa\varkappa}$.

In unserm Satze wird weiter behauptet, dass es immer ein Normalsystem $e_1, \dots e_n$ von der Art giebt, dass $Qe_r = \varrho_r e_r$ ist, wo die ϱ_r reell und unter ihnen so viele positiv sind, wie unter den Grössen $[Qc_\varkappa|c_\varkappa] = \alpha'_{\varkappa\varkappa}$. Wählen wir, was immer angeht, das Normalsystem $e_1, \dots e_n$ so, dass sein numerischer Werth gleich Eins wird, so ergiebt sich aus dem früher Gesagten, dass die quadratische Form $\Sigma\alpha_{\varkappa j}x_\varkappa x_j$ beim Uebergang zu den neuen Einheiten $e_1, \dots e_n$ die Gestalt: $\Sigma\varrho_r x_r^2$ erhält*). Demnach wird durch die Bestimmung eines solchen Normalsystems $e_1, \dots e_n$ im Grunde die Aufgabe gelöst, *die quadratische Form $\Sigma\alpha_{\varkappa j}x_\varkappa x_j$ durch eine reelle Substitution, bei der die Form Σx_ν^2 invariant bleibt, das heisst, durch orthogonale Substitution auf eine Summe von Quadraten zurückzuführen.* Man kann aber auch sagen, dass hier die Aufgabe gelöst wird, *die Hauptaxen der ∞^1 Mannigfaltigkeiten zweiten Grades $\Sigma\alpha_{\varkappa j}x_\varkappa x_j =$ const. des R_n zu bestimmen,* zugleich ist hiermit der bekannte Satz bewiesen, dass die Gleichung n-ten Grades, von der die Bestimmung dieser Hauptaxen abhängt, lauter reelle Wurzeln hat. (Vgl. S. 263, Z. 16—18 v. o., wo hinter „zweiter Ordnung" eigentlich noch eingeschaltet werden sollte: „mit Mittelpunkt".)

Die Thatsache endlich, dass unter den ϱ_r, den Hauptzahlen des Quotienten Q, genau so viele positive vorkommen, wie unter den Grössen $[Qc_\varkappa|c_\varkappa] = \alpha'_{\varkappa\varkappa}$, ist offenbar gleichbedeutend mit dem Sylvesterschen *Trägheitsgesetze der quadratischen Formen* (s. S. 263, Z. 13 f. v. o.). Dieses Trägheitsgesetz aber kann man bekanntlich benutzen, um zu ermitteln, wie viele reelle Wurzeln einer Gleichung zwischen zwei gegebenen Gränzen liegen (s. Hermite, Comptes Rendus Bd. 36, S. 294 (1853)), und damit ist zugleich der Zusammenhang mit dem Sturmschen Satze klargestellt (s. S. 263, Z. 14 f. v. o.).

Es bleibt uns jetzt noch zu zeigen, wie sich der Beweis von Nr. 391 gestaltet, wenn man die Voraussetzung, dass $[Qa|a]$ für jedes beliebige a von Null verschieden sei, durch die andere ersetzt, dass der Potenzwerth von Q, also die Determinante der $\alpha_{\varkappa j}$, nicht verschwinden soll.

Wir suchen zunächst n Grössen $c_1, \dots c_n$, die in keiner Zahlbeziehung stehen, und für die $[Qc_\varkappa|c_j] = 0$ ist, sobald $\varkappa \gtrless j$. Giebt es n solche Grössen, so sind nach dem Früheren die n Ausdrücke $[Qc_\varkappa|c_\varkappa]$ alle von Null verschieden, wir müssen deshalb bei der Wahl der $c_\varkappa$ von vornherein darauf achten, dass diese Bedingung erfüllt wird.

Wir wollen annehmen, wir hätten schon m Grössen $c_1, \dots c_m$ gefunden, die in keiner Zahlbeziehung stehen und die den Gleichungen $[Qc_\mu|c_\nu] = 0$ für $\mu \gtrless \nu$ genügen, während alle $[Qc_\mu|c_\mu] \gtrless 0$ sind. Wir behaupten, dass dann immer eine nicht aus $c_1, \dots c_m$ ableitbare Grösse c_{m+1} bestimmt werden kann, die den m Gleichungen: $[Qc_\mu|c_{m+1}] = 0$ $(\mu = 1, \dots m)$ und also auch den m Gleichungen: $[Qc_{m+1}|c_\mu] = 0$ genügt, während $[Qc_{m+1}|c_{m+1}] \gtrless 0$ ist.

Um unsre Behauptung zu beweisen, setzen wir: $Qc_\mu = k_\mu$ $(\mu = 1, \dots m)$, dann stehen sicher auch $k_1, \dots k_m$ in keiner Zahlbeziehung, weil sonst der Potenzwerth von Q nicht von Null verschieden sein könnte. Nunmehr bestimmen wir

*) Setzt man $a = \Sigma x_r e_r$, so wird $[Qa|a] = \Sigma\varrho_r x_r^2$, ein Ausdruck, der nur dann, wenn die ϱ_r alle positiv oder alle negativ sind, für jedes beliebige a von Null verschieden ausfällt. Hierdurch bestätigt sich das auf S. 465 Gesagte.

$n-m$ Grössen erster Stufe: $b_{m+1}, \ldots b_n$ so, dass sie in keiner Zahlbeziehung stehen und die Gleichungen:

$$[k_\mu | b_{m+j}] = 0 \quad (\mu = 1, \ldots m; \; j = 1, \ldots n-m)$$

erfüllen. Nach Nr. 163 und 159 ist das immer möglich, denn wir brauchen nur in dem Gebiete von $k_1, \ldots k_m$ irgend ein Normalsystem $k_1', \ldots k_m'$ von m-ter Stufe anzunehmen und dieses zu einem vollständigen Normalsysteme: $k_1', \ldots k_m', b_{m+1}, \ldots b_n$ zu ergänzen, dann sind $b_{m+1}, \ldots b_n$ Grössen von der verlangten Beschaffenheit und sogar zu einander normal. Zwischen $c_1, \ldots c_m$ und den gefundenen Grössen $b_{m+1}, \ldots b_n$ kann keine Zahlbeziehung:

$$\gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_m c_m + \beta_{m+1} b_{m+1} + \cdots + \beta_n b_n = 0,$$

bestehen, sonst müsste nämlich:

$$\sum_\mu \gamma_\mu [k_\nu | c_\mu] + \sum_j \beta_{m+j} [k_\nu | b_{m+j}] = \gamma_\nu [k_\nu \, c_\nu] = 0$$

sein für $\nu = 1, \ldots m$, es müssten also $\gamma_1, \ldots \gamma_m$ verschwinden und zwischen $b_{m+1}, \ldots b_n$ allein eine Zahlbeziehung herrschen, was nicht der Fall ist. Ferner kann die Gleichung $[Qb|b] = 0$ nicht für jede Grösse: $b = \Sigma \lambda_{m+j} b_{m+j}$ erfüllt sein, sonst wäre nämlich:

$$[Qb|b] = \sum_{\varkappa, j}^{1 \ldots n-m} \lambda_{m+\varkappa} \lambda_{m+j} [Q b_{m+\varkappa} | b_{m+j}] = 0$$

für alle Werthe der $\lambda_{m+\varkappa}$, damit aber auch $[Qb_{m+\varkappa} | b_{m+j}] = 0$ für $\varkappa, j = 1, \ldots n-m$, es wäre also jede der Grössen $Qb_{m+\varkappa}$ zu allen Grössen $b_{m+1}, \ldots b_n$ normal und hieraus würde nach Nr. 159 folgen, dass alle Qb_{m+j} dem Gebiete der Grössen $k_1', \ldots k_m'$ oder, was dasselbe ist, dem Gebiete der Grössen $k_1, \ldots k_m$ angehörten:

$$Qb_{m+j} = \sum_\mu^{1 \ldots m} \delta_{\mu j} k_j,$$

woraus wiederum folgte, dass der Potenzwerth von Q null wäre. Wir können daher $c_{m+1} = \Sigma \lambda_{m+j} b_{m+j}$ immer so wählen, dass $[Qc_{m+1} \, c_{m+1}] \gtrless 0$ wird, und es wird dann c_{m+1} mit $c_1, \ldots c_m$ in keiner Zahlbeziehung stehen und ausserdem die Gleichungen: $[Qc_\mu | c_{m+1}] = [Qc_{m+1} | c_\mu] = 0$ für $\mu = 1, \ldots m$ erfüllen.

Damit ist unsre Behauptung bewiesen. Da nun die vorhin gemachte Annahme für $m = 1$ sicher zulässig ist, weil man c_1 stets so wählen kann, dass $[Qc_1 | c_1] \gtrless 0$ wird, so ist damit offenbar gezeigt, dass es immer möglich ist, n Grössen $c_1, \ldots c_n$ von der verlangten Beschaffenheit zu bestimmen. Wir denken uns das ausgeführt und denken uns überdies der Einfachheit wegen $c_1, \ldots c_n$ so gewählt, dass ihr kombinatorisches Produkt gleich Eins ist. Setzen wir dann wie früher*): $[Qc_\nu | c_\nu] = \alpha'_{\nu\nu}$, so ist der Potenzwerth unsers Bruches Q gleich dem Produkte: $\alpha'_{11} \ldots \alpha'_{nn}$.

Durch das Vorstehende sind die Entwickelungen auf S. 258, Z. 4 v. o. bis S. 259, Z. 5 v. o. ersetzt. Der Rest des Grassmannschen Beweises braucht nicht geändert zu werden und bietet nur noch an zwei Stellen zu Bemerkungen Anlass.

*) Grassmann setzt auf S. 259, Z. 6 v. o. $[Qc_r \, c_r] = \alpha_r$, benutzt aber nachher, auf S. 261 f. denselben Buchstaben α_r in ganz andrer Bedeutung.

S. 261, Z. 2—10 v. o. Hier fehlt noch der Nachweis, dass sich auch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ immer befriedigen lässt, dass also y nicht gleich i werden kann. Um das noch zu zeigen, beachte man, dass für $y = i$ entweder $(r + r')^2$ oder $(r - r')^2$ gleich Null werden muss, oder, da r und r' reell sind, entweder $r + r'$ oder $r - r'$ gleich Null. Das ist aber unmöglich, denn jede der Grössen r und r' ist aus einer der Grössen $c_1, \ldots c_n$ durch Multiplikation mit einer reellen Zahl entstanden und zwischen $c_1, \ldots c_n$ besteht sicher keine Zahlbeziehung.

S. 262, Z. 2f. v. o.: „Da es nun ein Minimum ... geben muss". Die Grössen $a_1, \ldots a_n$ haben nach unsrer Bezeichnung: $[Qc_\varkappa\, c_\varkappa] = \alpha'_{\varkappa\varkappa}$ die Werthe:

$$a_\varkappa = c_\varkappa : \sqrt{\alpha'_{\varkappa\varkappa}} \quad (\varkappa = 1, \ldots n),$$

demnach wird das Produkt $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ ihrer numerischen Werthe gleich dem Produkte der numerischen Werte von $c_1, \ldots c_n$ dividirt durch $\sqrt{\pm\, \alpha'_{11} \ldots \alpha'_{nn}}$, wo das Zeichen unter der Wurzel so zu wählen ist, dass die Wurzel reell wird, und die Wurzel selbst positiv zu nehmen ist. Nun aber ist (vgl. die Anmerkung zu Nr. 195, S. 482f.) das Produkt der numerischen Werthe von $c_1, \ldots c_n$ sicher nicht kleiner als der numerische Werth des Produktes $[c_1 \ldots c_n]$, der gleich Eins ist, andrerseits ist das Produkt $\alpha'_{11} \ldots \alpha'_{nn}$ gleich dem Potenzwerthe von Q, hat also immer denselben Zahlenwerth, demnach giebt es für den Werth des Produktes $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ eine untere Gränze, die durch den Potenzwerth von Q bestimmt ist.

Nr. **399**, Anm. S. 269, Z. 10—12 v. o. „In diesem Sinne stellt also der letztgenannte Kreis jenes Gebiet, das heisst, das aus Kreisen erzeugbare Gebiet dritter Stufe dar." E. Müller macht in seiner Abhandlung: Die Kugelgeometrie nach den Principien der Grassmannschen Ausdehnungslehre (Monatshefte für Mathematik und Physik, Jahrgang 3 und 4, 1892 und 1893) darauf aufmerksam, dass es zweckmässiger ist, den Orthogonalkreis dreier Kreise *als das zu dem Gebiete jener Kreise ergänzende Gebiet* aufzufassen.

Nr. **401—404.** S. 270—274. Man vgl. hierzu die Darstellung in A_1, § 154ff., diese Ausg. I, 1, S. 259ff.

Nr. **406**, Anm. S. 276. Der Begriff der syncyklischen Verwandtschaft von Kreisen ist deshalb beachtenswerth, weil er von Grassmann auf Grund eines allgemeinen Uebertragungsprincipes aufgestellt wird. Dagegen ist seine praktische Bedeutung gering, weil beim Uebergang von einem Vereine von Kreisen zu einem syncyklisch verwandten Vereine im Allgemeinen berührende Kreise nicht wieder in berührende Kreise übergehen.

Nr. **409**, Anm. S. 279, Z. 12—14 v. o. Heutzutage ist für diese Verwandtschaft der Name „Transformation durch reciproke Radien" eingebürgert.

Nr. **420.** S. 284. Diese Benennungen sind nicht sehr glücklich gewählt; statt: „$f(q)$ verschwindet mit q" würde man besser sagen: „$f(q)$ wird mit q unendlich klein".

Nr. **454.** S. 303. Nach dieser Erklärung ist zwar jede ächte Reihe unbedingt konvergent, nicht aber umgekehrt jede unbedingt konvergente Reihe ächt.

Nr. **460.** S. 306. Man vermisst hier den Nachweis, dass jede Potenzreihe, solange sie ächt ist, eine stetige Funktion ihres Argumentes ist*) und dass die gliedweise differentiirte Reihe wirklich der Differentialquotient der Reihe ist. Es

*) In der Anmerkung zu Nr. 461 S. 308, Z. 9—11 v. o. setzt Grassmann das als selbstverständlich voraus.

kann nicht unsre Aufgabe sein, diese und ähnliche Lücken in der Grassmannschen Begründung der Differentialrechnung und Funktionentheorie auszufüllen, doch mag erwähnt werden, dass sich im Nachlasse Grassmanns Beweise für die erwähnten beiden Sätze finden, dass also Grassmann selbst die Nothwendigkeit eines Beweises dafür empfunden hat.

Nr. **462.** S. 309, Z. 12 v. u. Hier hätte bemerkt werden müssen, dass die linke Seite auch für ein unendliches n null bleibt, weil nämlich

$$\lim_{n=\infty} n(\Theta - 1) = 2\pi i$$

ist.

Nr. **470.** S. 321, Z. 11—9 v. u. Ersetzt man nämlich y durch $y + x_1 \tau$, wo x_1 eine beliebige Grösse erster Stufe und τ eine beliebige Zahl ist, so erkennt man sofort, dass auch

$$f^{(n)}(0) x_1 y^{n-1} = n!\, a_n x_1 y^{n-1}$$

ist, und durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man schliesslich:

$$f^{(n)}(0) x_1 \ldots x_n = n!\, a_n x_1 \ldots x_n,$$

worauf sich Nr. 357 unmittelbar anwenden lässt.

Nr. **483.** S. 327. Ist x eine aus $n > 1$ Einheiten ableitbare extensive Grösse, so hat das Integral von $f(x)dx$ an und für sich keinen bestimmten Sinn, sondern es muss noch der Integrationsweg vorgeschrieben werden. Von Grassmann wird hier der Integrationsweg so gewählt, dass er, wenn man $x_1, \ldots x_n$ als rechtwinklige Koordinaten eines R_n deutet, mit der Geraden vom Koordinatenanfange nach dem Punkte x zusammenfällt. Auf diese Weise bekommt $d^{-1} f(x) dx$ einen bestimmten Werth, der wegen: $t = \sqrt{x^2}$ und $e = x : \sqrt{x^2}$ wieder als eine Funktion von x allein dargestellt werden kann. — Die Forderung der allseitigen Integrirbarkeit des Differentials $f(x)dx$ ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass der Werth des Integrals von $f(x)dx$ nur von dem Anfangs- und dem Endpunkte, nicht aber von der Gestalt des Integrationsweges abhänge.

Nr. **485.** S. 328, Z. 20 v. u. Hier wird im Original ausser auf Nr. 433 auch auf Nr. 431c verwiesen, ein Citat, das gar nicht passt, denn der Ausdruck $\frac{a}{l}$ ist kein Lückenausdruck, in dessen Lücke eine Grösse eintreten soll, sondern er soll gerade umgekehrt andeuten, dass a in die Lücke l eintreten soll. Man muss daher vielmehr so schliessen: Weil a konstant ist, so ist es gleichgültig, ob es vor oder nach der Differentiation in die Lücke l eintritt.

Nr. **495.** S. 338. Der Beweis dieses Satzes hat sich im Nachlasse vorgefunden, er ist aber zu lang und der ganze Satz von zu geringer praktischer Bedeutung, als dass es sich verlohnte, diesen Beweis mitzutheilen.

Nr. **500,** Anm. S. 342. Der äusserst fruchtbare Gedanke, die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion auf das allgemeinere Problem der Integration einer Gleichung von der Form:

$$(*) \qquad X_1(x_1, \ldots x_n) dx_1 + \cdots + X_n(x_1, \ldots x_n) dx_n = 0$$

zurückzuführen, findet sich zuerst in der berühmten Abhandlung von Pfaff: „Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium . . . primi ordinis, inter quotcumque variabiles complete integrandi", Abhandlungen der Berliner Akademie 1814—15, S. 76—136. Es ist daher jetzt allgemein üblich eine solche Gleichung (*) als eine Pfaffsche Gleichung zu bezeichnen. — Die beiden im Texte angeführten

Abhandlungen von Jacobi haben folgende Titel: „Ueber die Pfaff'sche Methode, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren“ und: „Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ... auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen“. Sie sind in den Jahren 1827 und 1837 erschienen.

Nr. **501**, Anm. 1. S. 344, Z. 3 v. u. bis 345, Z. 7 v. o. Denkt man sich die gegebene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung nach t aufgelöst: $t = F(x, y, z, p, q, r, s)$, so hat man zu setzen:

$$\begin{aligned} u &= e_1 x + e_2 y + e_3 z + e_4 p + e_5 q + e_6 r + e_7 s, \\ U_1 &= [l|e_3] - p[l|e_1] - q[l|e_2], \\ U_2 &= [l|e_4] - r[l|e_1] - s[l|e_2], \\ U_3 &= [l|e_5] - s[l|e_1] - F[l|e_2], \\ U &= e_1 U_1 + e_2 U_2 + e_3 U_3 \end{aligned}$$

und erhält auf diese Weise die Gleichung:

$$Udu = 0,$$

wo das Produkt Udu so zu verstehen ist, dass du in die Lücke von U eintreten soll.

Nr. **502**. S. 345, Z. 14 v. u. Im Originale steht hier bloss: „wo $c_1, \dots c_n$ konstant sind“, es kann aber keinem Zweifel unterliegen, dass sich Grassmann die c_ν als *willkürliche Konstanten* gedacht hat. In dem nachfolgenden Beweise (s. S. 345, Z. 9—2 v. u.) setzt er nämlich offenbar voraus, dass die Gleichungen: $u_1 = c_1, \dots, u_n = c_n$ einen integrirenden Verein darstellen, welche Werthe auch die Konstanten $c_1, \dots c_n$ haben mögen, sonst könnte er nicht schliessen, dass der Ausdruck Xdx *identisch* gleich Null wird, sobald man n von den Differentialen dx_ν durch die $m - n$ übrigen ausdrückt.

Nr. **503**. S. 346 f. Dieser Satz ist in der Allgemeinheit, wie er hier ausgesprochen wird, nicht richtig. In der That bietet gleich der Anfang des Beweises (S. 347, Z. 12—15 v. o.) Anlass zur Kritik.

Aus Nr. 502 folgt nämlich bloss, dass $Xdx = 0$ unter der Voraussetzung von Nr. 503 nicht durch einen Verein von $n' < n$ Gleichungen integrirt werden kann, der n' willkürliche Konstanten enthält *und nach diesen Konstanten auflösbar ist*. Dagegen ist es sehr gut denkbar, dass ein integrirender Verein von $n' < n$ Gleichungen vorhanden ist, aus dem sich eine von willkürlichen Konstanten freie Gleichung ableiten lässt. Dieser Fall tritt zum Beispiel ein, wenn in dem Ausdrucke: $Xdx = X_1 dx_1 + \cdots + X_m dx_m$ die Funktionen $X_1, \dots X_{m-1}$ für $x_m = 0$ sämmtlich verschwinden, während X_m für $x_m = 0$ nicht identisch null wird, denn dann ist: $x_m = 0$ augenscheinlich eine Integralgleichung von $Xdx = 0$.

Man kann nicht sagen, dass Grassmann überhaupt nicht an die Möglichkeit des Auftretens derartiger integrirender Vereine gedacht hat, denn in Nr. 503 bemerkt er ja ausdrücklich, dass: $U_1 = 0, \dots, U_n = 0$ ein integrirender Verein ist: es war ihm also keineswegs entgangen, dass man unter Umständen durch Nullsetzen aller Koefficienten des betrachteten Differentialausdrucks einen integrirenden Verein erhält. Er hat aber nicht beachtet, dass man auf diese Weise, auch unter der in Nr. 503 gemachten Voraussetzung, zuweilen integrirende Vereine von weniger als n unabhängigen Gleichungen finden kann, und zwar liegt

das wohl hauptsächlich an einem andern Umstande, den er übersehen hat, an dem Umstande nämlich, dass ein integrirender Verein verloren gehen kann, wenn man die vorgelegte Gleichung $Xdx = 0$ durch die Gleichung:

$$U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n = 0$$

ersetzt. Diese Möglichkeit liegt aber jedenfalls dann vor, wenn einzelne der Grössen: $u_1, \ldots u_n$, $U_1, \ldots U_n$ für alle Werthsysteme $x_1, \ldots x_m$, die dem betreffenden integrirenden Vereine genügen, unendlich grosse Werthe annehmen.

Der eben erwähnte, von Grassmann übersehene Umstand hat zur Folge, dass der Beweis von Nr. 503 selbst dann nicht ganz einwandfrei ist, wenn man die etwa vorhandenen integrirenden Vereine, die weniger als n von einander unabhängige Gleichungen enthalten, ganz von der Betrachtung ausschliesst. Ist nämlich: $v_1 = 0, \ldots v_n = 0$ ein integrirender Verein mit n unabhängigen Gleichungen, so kann man immer noch nicht wissen, ob die Funktionen $u_1, \ldots u_n$ für die Werthsysteme: $x_1, \ldots x_m$, die den Gleichungen: $v_1 = 0, \ldots, v_n = 0$ genügen, endlich bleiben, und es ist daher keineswegs sicher, dass sich das Gleichungensystem: $v_1 = 0, \ldots, v_n = 0$ durch einen Verein von Gleichungen zwischen $u_1, \ldots u_n$ und $m - n$ von den x ersetzen lässt, wie das auf S. 347, Z. 17—13 v. u. angenommen wird.

Im Grunde ist daher der Grassmannsche Beweis nur dann anwendbar, wenn man sich von vornherein auf integrirende Vereine von der Form: $v_1 = c_1, \ldots, v_n = c_n$ beschränkt, wo $c_1, \ldots c_n$ willkürliche Konstanten sind. Aendert man die Betrachtungen auf S. 347, Z. 19 v. u. bis S. 348, Z. 20 v. u. in diesem Sinne ab, so werden sie vollständig streng und zeigen, dass sich jeder integrirende Verein von der angegebenen Form auf die Gestalt (b), S. 347 bringen lässt, wo r eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ ist und wo die willkürlichen Konstanten $c_1, \ldots c_n$ nur in den Funktionen $\varphi_1, \ldots \varphi_r$ auftreten. Man kann dann noch bemerken, dass die Gleichungen (b) einen integrirenden Verein darstellen, welche Funktionen man auch für $\varphi_1, \ldots \varphi_r$ setzen mag, und dass auch der Fall $r = 0$ einen integrirenden Verein liefert.

Trotz dieser Ausstellungen, die wir an dem Satze 503 und seinem Beweise haben machen müssen, bleibt der Satz und sein Beweis doch immer noch beachtenswerth. Erstens bedeutet der Satz sicher einen gewissen Fortschritt gegenüber dem, was Jacobi in der auf S. 348, Z. 14 v. u. angeführten Abhandlung ausgesprochen hatte, obgleich natürlich Grassmanns Behauptung, „dass es ausser den Gleichungsvereinen (b) keinen Verein integrirender Gleichungen gebe", einer Einschränkung bedarf. Zweitens aber ist es bemerkenswerth, dass durch den Beweis von Nr. 503 implicite eine Aufgabe gelöst wird, die später in den Untersuchungen von Lie über partielle Differentialgleichungen und Berührungstransformationen als „Hülfsproblem" eine gewisse Rolle spielt, es ist das die Aufgabe, alle Vereine von höchstens n Gleichungen zwischen den $2n$ unabhängigen Veränderlichen $u_1, \ldots u_n$, $U_1, \ldots U_n$ zu bestimmen, vermöge deren die Gleichung: $U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n = 0$ integrirt wird. Die Betrachtungen in Nr. 503 zeigen in der That, dass ein derartiger integrirender Verein mindestens n Gleichungen enthält und dass er, wenn er gerade n Gleichungen enthält, die Form (b) erhalten kann, wo r eine der Zahlen: $0, 1, \ldots n$ ist. Lie hat bei verschiedenen Gelegenheiten hierauf aufmerksam gemacht, s. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. 2, S. 341, Kristiania 1877 und Abh. d. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, math.-phys. Klasse, Bd. XIV, Nr. XII, S. 539 (1888). An der letztern Stelle erwähnt Lie auch,

„dass Grassmanns Beweis unrichtig und sein Satz nicht allgemein gültig ist"; inwiefern das der Fall ist, haben wir soeben gesehen.

Nr. **504.** S. 349 f. Hat L gerade n Lücken und wird es nach Ausfüllung dieser Lücken eine Zahlgrösse, so kann man den Ausdruck: $[La_1 \dots a_n]$ folgendermassen schreiben:

$$[La_1 \dots a_n] = \frac{1}{n!} \Sigma \pm \varphi(i_1, \dots i_n).$$

Hier hat man für $i_1, \dots i_n$ nach und nach alle Vertauschungen der Zahlen $1, 2, \dots n$ zu setzen und das Plus- oder Minuszeichen zu wählen, je nachdem die betreffende Vertauschung gerade oder ungerade ist; endlich bedeutet $\varphi(i_1, \dots i_n)$ die Zahlgrösse, die man erhält, wenn man die Grössen $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots a_{i_n}$ der Reihe nach in die erste, zweite, ... n-te Lücke von L eintreten lässt, es ist also (vgl. 485, Anm., S. 328 f.):

$$La_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} = \varphi(i_1, \dots i_n).$$

Ist L insbesondere ein Produkt von n Ausdrücken mit je einer Lücke, die nach Ausfüllung ihrer Lücken sämmtlich Zahlgrössen werden, so hat die Funktion φ die Form:

$$\varphi(i_1, \dots i_n) = \varphi_1(i_1) \dots \varphi_n(i_n)$$

und der Ausdruck $[La_1 \dots a_n]$ wird eine gewöhnliche Determinante, die allerdings durch $n!$ dividirt ist.

Das Grassmannsche Symbol $[La_1 \dots a_n]$ ist demnach eine Verallgemeinerung des Determinantenbegriffs und zwar in der Hauptsache eben die Verallgemeinerung, von der Cayley schon 1848 bei seiner Untersuchung über das Jacobische*) Symbol $(1, 2, \dots, 2n)$ ausgegangen war (s. die kurze Abhandlung: „Sur les déterminants gauches", Crelles Journal Bd. 38, S. 93—96 und The collected mathematical papers of Cayley, Bd. I, S. 410—413).

Nr. **510.** S. 354. Der Beweis dieses Satzes ist nicht ganz befriedigend, weil keine Rücksicht auf den Zahlfaktor genommen ist, der nach Nr. 504 bei der Entwickelung jedes bezüglichen Lückenproduktes hinzugefügt werden muss. Wir wollen daher den Beweis des Satzes 510 etwas ausführlicher entwickeln.

Es seien $a_1, \dots a_{2n}$ Grössen erster Stufe und es seien $A_\varkappa$ und $A_{\varkappa\nu}$ ($\varkappa \gtrless \nu$) solche Produkte von je $2n - 1$ und $2n - 2$ dieser Grössen, dass

$$[a_\varkappa A_\varkappa] = [a_\varkappa a_\nu A_{\varkappa\nu}] = [a_1 a_2 \dots a_{2n}]$$

ist; sollte das Produkt $[a_1 a_2 \dots a_{2n}] = 0$ sein, so hat man sich $A_\varkappa$ und $A_{\varkappa\nu}$ so gebildet zu denken, dass jedes der beiden Produkte: $[a_\varkappa A_\varkappa]$ und $[a_\varkappa a_\nu A_{\varkappa\nu}]$ aus dem Produkte: $[a_1 a_2 \dots a_{2n}]$ durch eine *gerade* Anzahl von Vertauschungen je zweier der Grössen: $a_1, a_2, \dots a_{2n}$ entsteht.

Bei diesen Festsetzungen ist nach Nr. 504:

$$(1) \qquad [C^n a_1 \dots a_{2n}] = \frac{n}{2n(2n-1)} \sum_2^{2n} {}_\nu (Ca_1 a_\nu - Ca_\nu a_1)[C^{n-1} A_{1\nu}],$$

wo $Ca_\iota a_\varkappa$ bedeutet, dass a_ι in die erste und $a_\varkappa$ in die zweite Lücke von C ein-

*) Cayley hat später für dieses Symbol die Bezeichnung: „Pfaffian" eingeführt; wir werden von dieser Bezeichnung keinen Gebrauch machen, da wir mit Lie der Ansicht sind, dass der Name „Pfaffscher Ausdruck" unbedingt für die Ausdrücke von der Form $\Sigma X_\nu dx_\nu$ aufgespart werden muss.

treten soll, und wo im Zähler der Faktor n hinzugefügt ist, weil a_1 nach und nach in jede der beiden Lücken jedes der n Faktoren von C^n eintreten muss und weil infolgedessen bei der Entwickelung des Ausdrucks $[C^n a_1 \dots a_{2n}]$ jedes Glied n-mal vorkommt. Wegen

$$\frac{1}{2}(Ca_1 a_\nu - Ca_\nu a_1) = [Ca_1 a_\nu]$$

folgt nun aus (1) sofort:

$$(2) \qquad [C^n a_1 \dots a_{2n}] = \frac{1}{2n-1} \sum_2^{2n} {}^\nu [Ca_1 a_\nu][C^{n-1} A_{1\nu}].$$

Andrerseits ist aber nach Nr. 504:

$$[C^{n-1} A_1] = \frac{1}{2n-1} \sum_2^{2n} {}^\nu [C^{n-1} A_{1\nu}] a_\nu,$$

wo der Faktor von a_ν eine Zahlgrösse ist, folglich wird:

$$(3) \qquad \left[Ca_1 [C^{n-1} A_1]\right] = \frac{1}{2n-1} \sum_2^{2n} {}^\nu [Ca_1 a_\nu][C^{n-1} A_{1\nu}].$$

Damit ist die erste der Gleichungen von Nr. 510 bewiesen. Die zweite ergiebt sich, wenn man noch die unmittelbar einleuchtenden Gleichungen:

$$\left[C[C^{n-1} A_1] a_1\right] = -\left[Ca_1 [C^{n-1} A_1]\right], \quad [C^n a_1 A_1] = -[C^n A_1 a_1]$$

hinzunimmt.

Wir knüpfen hieran gleich noch einige Auseinandersetzungen über das Rechnen mit dem Symbole $[C^n a_1 \dots a_{2n}]$. Wir hoffen dadurch das Verständniss der Nummern, in denen das Pfaffsche Problem behandelt wird, wesentlich zu erleichtern.

Es seien jetzt $e_1, \dots e_{2n}$ lauter verschiedene Einheiten erster Stufe, so dass also das Produkt: $[e_1 \dots e_{2n}]$ sicher $\gtrless 0$ ist; ferner denken wir uns $E_\varkappa$ und $E_{\varkappa\nu}$ in derselben Weise definirt, wie vorhin $A_\varkappa$ und $A_{\varkappa\nu}$. Dann ist nach (2):

$$(4) \qquad [C^n e_1 \dots e_{2n}] = \frac{1}{2n-1} \sum_2^{n} {}^\nu [Ce_1 e_\nu][C^{n-1} E_{1\nu}].$$

Da nun das Produkt $[e_\nu E_{1\nu}] = E_1$ eine ungerade Anzahl von Faktoren enthält, so bleibt es ungeändert, wenn man seine Faktoren cyklisch vertauscht; demnach können wir die übrigen Glieder der Summe auf der rechten Seite von (4) aus dem Gliede

$$[Ce_1 e_2][C^{n-1} e_3 e_4 \dots e_{2n}]$$

dadurch ableiten, dass wir $e_2, e_3, \dots e_{2n}$ cyklisch unter einander vertauschen und das so oft wiederholen, als wir noch nicht wieder zu der ursprünglichen Reihenfolge gelangen. Entwickeln wir daher den Ausdruck $[C^{n-1} E_{1\nu}]$ in derselben Weise, wie vorhin den Ausdruck $[C^n e_1 \dots e_{2n}]$ und setzen wir dieses Verfahren fort, so finden wir schliesslich:

$$(5) \qquad [C^n e_1 \dots e_{2n}] = \frac{\Sigma [Ce_1 e_2][Ce_3 e_4] \dots [Ce_{2n-1} e_{2n}]}{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \,.\, 1}.$$

Hier besteht die Summe rechts aus allen den Gliedern, die man erhält, wenn man zuerst in dem hingeschriebenen Gliede die $2n-1$ letzten Indices $2, 3, \dots 2n$

gerade $(2n-1)$-mal cyklisch vertauscht, wenn man dann in allen so entstehenden Ausdrücken die $2n-3$ letzten Indices $(2n-3)$-mal cyklisch vertauscht, und so weiter.

Diese Vorschrift stimmt genau mit der überein, die Jacobi schon 1827 zur Bildung seines Symbols $(1, 2, \ldots 2n)$ gegeben hat (Crelles Journal, Bd. 2, S. 390 ff., ges. Werke, Bd. 4, S. 27 f.). Ist daher $Ce_i e_\varkappa = \gamma_{i\varkappa}$ und also nach der Jacobischen Bezeichnung:

$$[Ce_i e_\varkappa] = \frac{1}{2}(\gamma_{i\varkappa} - \gamma_{\varkappa i}) = \frac{1}{2}(i, \varkappa),$$

so wird:

$$[C^n e_1 \ldots e_{2n}] = \frac{(1, 2, \ldots, 2n)}{2^n . (2n-1)(2n-3) \ldots 3 . 1}. \tag{6}$$

Man vergleiche hierzu die auf S. 474 angeführte Abhandlung Cayleys, in der das Jacobische Symbol ganz ähnlich abgeleitet wird; in der Grassmannschen Bezeichnung wird jedoch Alles etwas übersichtlicher.

Ersetzen wir in der allgemeinen Formel (2) die Grösse a_1 durch $e_\varkappa$ und a_2, $\ldots a_{2n}$ durch die $2n-1$ Faktoren von E_μ, so müssen wir auf der rechten Seite a_ν und $A_{1\nu}$ durch e_ν und $E_{\mu\nu}$ $(\nu \gtrless \mu)$ ersetzen, denn für $\nu \gtrless \mu$ ist: $[e_\nu E_{\mu\nu}] = E_\mu$ und also $[e_\varkappa e_\nu E_{\mu\nu}] = [e_\varkappa E_\mu]$. Bedenken wir noch, dass $[Ce_\mu e_\mu] = 0$ ist, und setzen wir überdies fest, dass $E_{\mu\mu}$ und also nach Nr. 505 auch $[C^{n-1} E_{\mu\mu}]$ immer den Werth Null haben soll, so erhalten wir die Formel:

$$\left\{\begin{array}{l} [C^n e_\varkappa E_\mu] = \dfrac{1}{2n-1} \displaystyle\sum_1^{2n}{}_\nu [Ce_\varkappa e_\nu][C^{n-1} E_{\mu\nu}] \\ (\varkappa, \mu = 1, \ldots 2n). \end{array}\right. \tag{7}$$

Nun ist für $\varkappa \gtrless \mu$ stets $[e_\varkappa E_\mu] = 0$, demnach auch die linke Seite von (7) null, während $[e_\varkappa E_\varkappa] = [e_1 e_2 \ldots e_{2n}]$ ist, folglich können wir für (7) schreiben:

$$\varepsilon_{\varkappa\mu}[C^n e_1 \ldots e_{2n}] = \frac{1}{2n-1} \sum_1^{2n}{}_\nu [Ce_\varkappa e_\nu][C^{n-1} E_{\mu\nu}], \tag{8}$$

wo $\varepsilon_{\varkappa\mu}$ den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem $\varkappa \gtrless \mu$ oder $\varkappa = \mu$ ist. Wegen: $[e_\varkappa e_\nu] = -[e_\nu e_\varkappa]$ und $E_{\mu\nu} = -E_{\nu\mu}$ dürfen wir hierzu noch die Gleichungen:

$$\varepsilon_{\varkappa\mu}[C^n e_1 \ldots e_{2n}] = \frac{1}{2n-1} \sum_1^{2n}{}_\nu [Ce_\nu e_\varkappa][C^{n-1} E_{\nu\mu}] \tag{9}$$

fügen.

Ist nun insbesondere $[C^n e_1 \ldots e_{2n}] \gtrless 0$, so sagen (8) und (9) offenbar aus, dass von den beiden Gleichungensystemen:

$$\alpha_\nu = \sum_1^{2n}{}_\varkappa [Ce_\nu e_\varkappa] x_\varkappa \quad (\nu = 1, \ldots, 2n) \tag{10}$$

und:

$$[C^n e_1 \ldots e_{2n}] x_\mu = \frac{1}{2n-1} \sum_1^{2n}{}_\nu [C^{n-1} E_{\nu\mu}] \alpha_\nu \quad (\mu = 1, \ldots, 2n) \tag{11}$$

jedes die Auflösung des andern ist. Man vergleiche hiermit die Formeln, die sich ergeben, wenn man die Gleichungen (10) oder:

(10′)
$$\alpha_\nu = \frac{1}{2}\sum_1^{2n}{}^{\varkappa}(\nu, \varkappa)x_\varkappa \quad (\nu = 1, \ldots, 2n)$$

mit Hülfe des Jacobischen Symbols $(1, 2, \ldots, 2n)$ auflöst*). Man wird zugeben müssen, dass die Benutzung der Grassmannschen Bezeichnung gewisse Vorzüge hat, sie liefert etwas kürzere und auch übersichtlichere Formeln.

Bevor wir die Auflösung (11) der Gleichungen (10) mit der Auflösung durch Determinanten vergleichen, wollen wir noch Einiges einschalten.

Wenn man unter A einen Ausdruck mit einer Lücke versteht, der nach Ausfüllung dieser Lücke durch eine Grösse erster Stufe eine Zahlgrösse wird, so kann man setzen: $\alpha_\nu = Ae_\nu$ und also die Gleichungen (10) in der Form:

(12)
$$Ae_\nu = \sum_1^{2n}{}^{\varkappa}[Ce_\nu e_\varkappa]x_\varkappa \quad (\nu = 1, \ldots, 2n)$$

schreiben. Setzt man noch $\Sigma e_\varkappa x_\varkappa = x$, so ergeben sich die Gleichungen:

(12′)
$$Ae_\nu = [Ce_\nu x] \quad (\nu = 1, \ldots, 2n).$$

Aus (11) findet man dann:

(13)
$$[C^n e_1 \ldots e_{2n}]x_\varkappa = \frac{1}{2n-1}\sum_1^{2n}{}^{\nu} Ae_\nu[C^{n-1}E_{\nu\varkappa}] = -[AC^{n-1}E_\varkappa] \quad [509],$$

da $[e_\nu E_{\nu\varkappa}] = -[e_\nu E_{\varkappa\nu}] = -E_\varkappa$ ist, oder:

(13′)
$$[C^n e_1 \ldots e_{2n}]x = -\sum_1^{2n}{}^{\varkappa} e_\varkappa[AC^{n-1}E_\varkappa] = -2n[AC^{n-1}e_1 \ldots e_{2n}] \quad [504].$$

Versteht man endlich unter $c = \Sigma\varrho_\nu e_\nu$ eine ganz beliebige Grösse erster Stufe, so kann man die Gleichungen (12′) in die eine:

(12″)
$$Ac = [Ccx]$$

zusammenziehen, und kann sagen:

Satz 1. *Es sei A ein Ausdruck mit einer Lücke und C ein Ausdruck mit zwei Lücken und zwar derart, dass beide Ausdrücke Zahlgrössen werden, wenn man ihre Lücken durch solche Grössen erster Stufe ausfüllt, die aus den $2n$ Einheiten $e_1, \ldots e_{2n}$ abgeleitet sind; ausserdem möge noch vorausgesetzt werden, dass A und C beide von Null verschieden sind, dass also weder alle Ausdrücke Ae_μ noch alle Ausdrücke $Ce_\mu e_\nu$ verschwinden. Ist dann $[C^n e_1 \ldots e_{2n}] \gtrless 0$, so wird die Gleichung (12″) durch den aus (13′) folgenden Werth von x erfüllt, welche aus $e_1, \ldots e_{2n}$ ableitbare Grösse auch c sein mag.*

*) In der auf S. 364 angeführten Abhandlung hat Jacobi die Auflösung der Gleichungen (10′) für den Fall $n = 2$ und $n = 3$ vollständig angegeben, aber ohne Beweis. Cayley hat später (1860) den Beweis für die Jacobischen Formeln geliefert und diesen zugleich noch eine etwas elegantere Form gegeben („Démonstration d'un théorème de Jacobi par rapport au problème de Pfaff", Crelles Journal Bd. 57, S. 275, Mathematical papers Bd. IV, S. 361). Die Ausdehnung der Cayleyschen Formeln auf ein beliebiges n hat keine Schwierigkeit, man findet sie bei Mansion, Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Gand 1873, S. 105 f., in der deutschen Uebersetzung, Berlin 1892 auf S. 106 f. Vgl. auch Forsyth, Theory of differential equations, part I, Cambridge 1890, S. 95 f., in der deutschen Uebersetzung, Leipzig 1893, S. 105 f.

Ersetzt man hier A, C und x durch $\frac{1}{2}\lambda X$, $\frac{d}{dx}X$ und δx, so erhält man sämmtliche Ergebnisse von Nr. 515.

Wäre $[C^n e_1 \ldots e_{2n}] \gtrless 0$, verschwänden aber alle Ausdrücke $[A C^{n-1} E_\nu]$ $(\nu = 1, \ldots 2n)$, so würde aus (13) folgen: $x_1 = \cdots = x_{2n} = 0$, was nach (12) mit der Voraussetzung in Widerspruch steht, dass $A \gtrless 0$ sei. Also:

Satz 2. *Sind A und C Lückenausdrücke von der in Satz 1 angegebenen Beschaffenheit, so zieht das Verschwinden aller $2n$ Ausdrücke $[A C^{n-1} E_\nu]$ $(\nu = 1, \ldots, 2n)$ das Verschwinden von $[C^n e_1 \ldots e_{2n}]$ nach sich.*

Es ist das der Satz Nr. 518 in einer etwas verallgemeinerten Fassung.

Ist endlich $[C^n e_1 \ldots e_{2n}] = 0$, ohne dass alle Ausdrücke $[C^{n-1} E_{\mu\nu}]$ verschwinden, so zeigen die Gleichungen (8) immer noch, dass die Gleichungen:

$$0 = \sum_1^{2n} {}_\varkappa [C e_\nu e_\varkappa] x_\varkappa = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, 2n) \tag{14}$$

befriedigt werden, wenn man

$$x_\nu = \frac{1}{2n-1} \sum_1^{2n} {}_\varkappa [C^{n-1} E_{\nu\varkappa}] x_\varkappa' \quad (\nu = 1, \ldots, 2n) \tag{15}$$

setzt, unter den $x_\varkappa'$ beliebige Zahlgrössen verstanden. Demnach wird $x = \Sigma x_\nu e_\nu$ die Gleichung: $[Ccx] = 0$ erfüllen, welche aus $e_1, \ldots e_{2n}$ ableitbare Grösse auch c sein mag. Ist nun A ein nicht verschwindender Ausdruck mit einer Lücke, so können wir jedem $x_\varkappa'$ den Werth $\varrho \,.\, A e_\varkappa$ ertheilen, unter ϱ eine beliebige Zahlgrösse verstanden, und erhalten:

$$x_\nu = \frac{\varrho}{2n-1} \sum_1^{2n} {}_\varkappa A e_\varkappa [C^{n-1} E_{\nu\varkappa}] = \varrho [A C^{n-1} E_\nu] \qquad [509]$$

oder nach 504:

$$x = 2n\varrho [A C^{n-1} e_1 \ldots e_{2n}], \tag{16}$$

was natürlich nur dann ein brauchbarer Werth von x ist, wenn nicht alle Ausdrücke: $[A C^{n-1} E_\nu]$ verschwinden. Die x_ν genügen noch einer andern linearen homogenen Gleichung, es ist nämlich:

$$\sum_1^{2n} {}_\nu x_\nu \,.\, A e_\nu = A x = \varrho \sum_1^{2n} {}_\nu A e_\nu [A C^{n-1} E_\nu] =$$

$$= 2n\varrho [A A C^{n-1} e_1 \ldots e_{2n}] = 0 \qquad [509, 508].$$

Mit andern Worten:

Satz 3. *Haben A und C die in Satz 1 angegebene Bedeutung und ist $[C^n e_1 \ldots e_{2n}] = 0$, während nicht alle $[C^{n-1} E_{\mu\nu}]$ und auch nicht alle $[A C^{n-1} E_\nu]$ verschwinden, so kann man x derart bestimmen, dass es nicht bloss die Gleichung $[Ccx] = 0$ erfüllt, welche aus $e_1, \ldots e_{2n}$ ableitbare Grösse auch das c sein mag, sondern dass es auch noch die Gleichung $Ax = 0$ befriedigt; man hat zu diesem Zwecke nur x den Werth (16) zu ertheilen.*

In Nr. 516 ist dieses Ergebniss für den Fall abgeleitet, dass man A, C, x durch X, $\frac{d}{dx}X$, δx ersetzt.

Wir kehren jetzt zu den Gleichungen (8) und (10) zurück.

Setzen wir

$$[Ce_\varkappa e_\nu] = \frac{1}{2}(\gamma_{\varkappa\nu} - \gamma_{\nu\varkappa}) = \frac{1}{2}\beta_{\varkappa\nu}$$

und bezeichnen wir die Determinante der $\beta_{\varkappa\nu}$ mit $\varDelta$, so folgt aus (8) nach dem Multiplikationssatze der Determinanten:

$$[C^n e_1 \dots e_{2n}]^{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n-1)^{2n}}\varDelta \,.\, \text{Det.}\,[C^{n-1}E_{\mu\nu}].$$

Nun ist $\varDelta$ eine ganze Funktion $2n$-ten Grades der $\beta_{\varkappa\nu}$ und $[C^n e_1 \dots e_{2n}]$ eine ganze Funktion n-ten Grades, mithin kann die eben gefundene Gleichung nur bestehen, wenn sich $\varDelta$ von dem Quadrate von $[C^n e_1 \dots e_{2n}]$ nur durch einen Zahlfaktor unterscheidet. Da $\varDelta$ das Glied: $\beta_{12}^2\beta_{34}^2 \dots \beta_{2n-1,2n}^2$ enthält, so findet man, wenn man noch die Gleichung (5) berücksichtigt, dass

$$(17)\qquad [C^n e_1 \dots e_{2n}]^2 = \frac{\varDelta}{2^{2n}\,.\,[(2n-1)(2n-3)\dots 3\,.\,1]^2},$$

was mit der zuerst von Cayley bewiesenen Gleichung: $\varDelta = (1, 2, \dots, 2n)^2$ übereinstimmt (vgl. Gl (6) und die auf S. 474 angeführte Abhandlung von Cayley).

Löst man andrerseits die Gleichungen (10) durch Determinanten auf, so erhält man:

$$x_\varkappa = \frac{2}{\varDelta}\sum_1^{2n}{}_\nu \frac{\partial\varDelta}{\partial\beta_{\nu\varkappa}}\alpha_\nu,$$

woraus durch Vergleichung mit (11) und durch Benutzung von (17) folgt:

$$(18)\qquad \frac{\partial\varDelta}{\partial\beta_{\nu\varkappa}} = \mathfrak{a}[C^{n-1}E_{\nu\varkappa}][C^n e_1 \dots e_{2n}],$$

unter $\mathfrak{a}$ eine Zahl verstanden*). Dies zeigt, dass mit $[C^n e_1 \dots e_{2n}]$ zugleich alle $(2n-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $\varDelta$ verschwinden, eine Thatsache, die für das Verständniss des Satzes 3, S. 478 von Wichtigkeit ist.

Nr. **511.** S. 355. Es hätte hier bemerkt werden sollen, dass das Verfahren des Textes ohne Weiteres auch die Bedingung

$$\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1}\right] = 0$$

liefert, dass diese aber, wie sich später (in Nr. 518) herausstellt, eine Folge der Gleichung

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

ist.

Nr. **511,** Anm. S. 356, Z. 7 f. v. o. Ist nicht bloss x, sondern auch Xdx eine extensive Grösse, so ist die Gleichung $Xdx = 0$ gleichbedeutend mit einem Systeme von Pfaffschen Gleichungen:

$$(1)\qquad \sum_1^m{}_\mu X_{\varkappa\mu}dx_\mu = 0 \quad (\varkappa = 1, \dots h).$$

---

*) Die unbequemen Zahlenfaktoren, die in den Gleichungen (17) und (18) auftreten, sind eine Folge der in Nr. 504 getroffenen Bestimmung, wonach der Ausdruck $[C^n e_1 \dots e_{2n}]$ den Nenner $(2n)!$ bekommt. Es zeigt sich hier, dass diese Bestimmung für manche Zwecke unpraktisch ist.

Setzen wir nämlich $\Sigma x_\mu e_\mu = x$ und

$$X_\varkappa = \sum_1^m {}^\mu X_{\varkappa\mu}[l|e_\mu] \quad (\varkappa = 1, \ldots h),$$

so können wir das System (1) in der Form

$$(2) \qquad X_1 dx = 0, \ldots, X_h dx = 0$$

schreiben, wo $X_1 dx, \ldots, X_h dx$ Zahlgrössen sind; wenn wir daher noch:

$$e_1 X_1 + \cdots + e_h X_h = X$$

setzen, so wird das System (2) gleichbedeutend mit der Gleichung: $Xdx = 0$.

Soll nun das System (1) oder (2) auf ein System zurückführbar sein, in dem bloss $n < m$ Differentiale vorkommen, so muss es möglich sein die Grössen u_ν und $U_{\varkappa\nu}$ derart als Funktionen von $x_1, \ldots x_m$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, als Funktionen von x zu bestimmen, dass

$$(3) \qquad X_\varkappa dx = U_{\varkappa 1} du_1 + \cdots + U_{\varkappa n} du_n \quad (\varkappa = 1, \ldots h)$$

wird. Hieraus aber ergiebt sich:

$$(4) \qquad \begin{cases} X_\varkappa = \sum\limits_1^n {}^\nu U_{\varkappa\nu} \dfrac{d}{dx} u_\nu, \quad \dfrac{d}{dx} X_\varkappa = \sum\limits_1^n {}^\nu \left(\dfrac{d}{dx} U_{\varkappa\nu} \dfrac{d}{dx} u_\nu + U_{\varkappa\nu} \dfrac{d^2}{dx^2} u_\nu\right) \\ \qquad\qquad (\varkappa = 1, \ldots h), \end{cases}$$

und wenn man diese Gleichungen nach dem Vorbilde von Nr. 511 behandelt, erhält man als nothwendige Bedingungen für die Möglichkeit jener Zurückführung die folgenden:

$$(5) \qquad \left[X_1^{\varepsilon_1} X_2^{\varepsilon_2} \ldots X_h^{\varepsilon_h} \left(\frac{d}{dx} X_1\right)^{r_1} \cdots \left(\frac{d}{dx} X_h\right)^{r_h}\right] = 0,$$

wo jedes ε_i einen der Werthe 0 oder 1 und jedes r_i einen der Werthe $0, 1, \ldots, n+1$ hat, und wo man $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_h, r_1, \ldots r_h$ auf alle möglichen Weisen so zu wählen hat, dass

$$\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_h + r_1 + \cdots + r_h = n + 1$$

wird. Das sind offenbar die Bedingungen, die Grassmann im Sinne gehabt hat; möglicherweise hat er sie noch auf Gleichungen für die Grösse X allein zurückgeführt, etwa auf die Gleichungen:

$$(5') \qquad \left[X^\mu \left(\frac{d}{dx} X\right)^{n+1-\mu}\right] = 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots h),$$

wo der Ausdruck in der scharfen Klammer als ein algebraisches Produkt im Sinne von Nr. 364—371 aufzufassen ist.

Die Bedingungsgleichungen (5), deren Auftreten bisher noch gar nicht beachtet worden zu sein scheint, verdienten eine nähere Untersuchung; namentlich wäre es von Interesse zu wissen, ob sie auch im Falle $h > 1$ nicht bloss nothwendig, sondern auch hinreichend sind.

Nr. **512.** S. 357, Z. 8—4 v. u. Bei Jacobi ist der Ausdruck $(2, 3, \ldots, 2n+1)$ zunächst in etwas anderer Weise definirt (vgl. die Anmerkung zu Nr. 510, S. 475 f.).

Nr. **514.** S. 361, Z. 11 f. v. o. Es hätte gleich hier gesagt werden sollen, dass im Falle $\lambda = 0$ die Aufgabe gelöst ist, sobald es gelingt, δx so zu bestimmen, dass es die Gleichung:

$$\left[\frac{d}{dx} X \,.\, c \,.\, \delta x\right] = 0$$

für jeden Werth der Grösse c erfüllt und ausserdem auch noch die Gleichung: $X\delta x = 0$. Dadurch würde die Darstellung in Nr. 516 wesentlich gewonnen haben.

Nr. **515.** S. 362, Z. 13—16 v. o. Diese Zahlgleichungen lauten:

$$\lambda \,.\, Xe_\nu = 2\left[\frac{d}{dx}X \,.\, e_\nu \,.\, \delta x\right] = 2\sum_1^{2n}{}^{\varkappa}\left[\frac{d}{dx}X \,.\, e_\nu \,.\, e_\varkappa\right]\delta x_\varkappa \,.$$

Unter den hier gemachten Voraussetzungen kann man nach Anleitung von S. 476f. die Auflösung dieser Gleichungen sofort hinschreiben, und übersieht zugleich vollkommen, wie die Auflösung zu Stande kommt. In der Grassmannschen Darstellung dagegen beruht Alles auf einem Kunstgriff, der nur geeignet ist, das Verständniss zu erschweren. Die Anwendung dieses Kunstgriffs hat überdies den Nachtheil, dass Grassmann erst noch besonders nachweisen muss, dass der gefundene Werth von δx wirklich den gegebenen Gleichungen genügt.

Nr. **515,** Anm. S. 365, Z. 1—13. Man vgl. die Anmerkung zu Nr. 510, S. 479. Dass sich die in Nr. 515 angewandte Methode „von selbst darbiete", wird man kaum zugeben können. Dagegen muss man allerdings anerkennen, dass die Grassmannsche Symbolik unmittelbar zu den Ergebnissen von Nr. 515 führt.

Nr. **516.** S. 365f. Man vergleiche die Anmerkungen zu Nr. 514 und 510, S. 480f. und 478.

Nr. **518.** S. 368. Man vergleiche die Anmerkung zu Nr. 510, S. 478, Satz 2.

Nr. **519.** S. 371, Z. 18 v. o. Im Original steht: „zwischen 1 und $\frac{m-1}{2}$", was offenbar ein Druckfehler ist.

Nr. **519.** S. 371, Z. 1 v. u. bis S. 372, Z. 9 v. u. Setzt man für δx seinen Werth: $\delta x = \Sigma e_\mu \delta x_\mu$ ein, so erhalten die Gleichungen: $G_s = 0$ die Form:

$$G_s = 2\sum_1^{m}{}^{\mu}\left[\frac{d}{dx}X \,.\, e_s \,.\, e_\mu\right]\delta x_\mu - \lambda X e_s = 0 \quad (s = 1, \ldots m)$$

und der hier bewiesene Satz sagt einfach aus, dass in der Matrix, die zu diesen m linearen homogenen Gleichungen gehört, alle $(2n+1)$-reihigen Determinanten verschwinden, sobald die Gleichung (b) erfüllt ist. Beim Beweise wird stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass der Ausdruck:

$$\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_1 \ldots e_{2n}\right] \gtrless 0$$

ist, denn nur unter dieser Voraussetzung stellt die auf S. 372 abgeleitete Gleichung $\Sigma\alpha_a G_a = 0$ eine Zahlbeziehung dar, in der G_m wirklich vorkommt. Erst nachträglich (S. 372, Z. 2, 1 v. u. und S. 373, Z. 12—9 v. u.) macht Grassmann auf diese Voraussetzung aufmerksam.

Nr. **519.** S. 373, Z. 3 v. o. Es wäre besser gewesen, wenn diese Bedingung in der Form:

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} e_1 e_2 \ldots e_{2n}\right] \gtrless 0$$

geschrieben worden wäre.

Nr. **519.** S. 373, Z. 9—6 v. u. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass man nach S. 372, Z. 7—2 v. u. in den Gleichungen: $G_1 = 0, \ldots$ schon $\delta x_{2n+1}, \ldots \delta x_m$ gleich Null gesetzt hat.

Nr. 519. S. 374, Z. 8—16 v. o. Auch hier wird vorausgesetzt, dass gerade

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}e_1\ldots e_{2n}\right]\gtrless 0$$

ist; selbstverständlich ist diese Voraussetzung keine Beschränkung der Allgemeinheit, da ja von vornherein vorausgesetzt ist, dass

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$

nicht verschwindet.

Nr. 520, {Anm.}. S. 375. Dieser Zusatz ist gemacht worden, um zu erklären, warum Grassmann den Fall, wo $m = 2n - 1$ ist, gar nicht erwähnt. Es wäre ganz falsch, aus der Nichterwähnung dieses Falles zu folgern, dass Grassmann ihn ausgeschlossen habe, und es ist nicht recht verständlich, wie Forsyth*) behaupten kann: „It is assumed implicitly that, if the coefficients of an equation satisfy no characteristic condition, then the number of variables is even; so that Grassmann practically considers only the even classes of unconditioned equations." Grassmann sagt doch in Nr. 512, S. 356, Z. 7, 6 v. u. ausdrücklich, dass für $m < 2n + 1$, also insbesondere für $m = 2n - 1$ gar keine Bedingungsgleichung hervortritt, er war sich also vollständig darüber klar, dass die Gleichung: $X_1 dx_1 + \cdots + X_{2n-1}dx_{2n-1} = 0$ immer durch Vereine von n Gleichungen integrirt werden kann, mag nun

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$

gleich Null oder von Null verschieden sein.

Nr. 502—527. S. 345—379. Wir wünschen Grassmanns bisher so wenig beachtete Untersuchungen über das Pfaffsche Problem möglichst auch solchen zugänglich zu machen, die nicht gewillt sind, sich den Grassmannschen Kalkül anzueignen. Deshalb wollen wir jetzt versuchen, den Inhalt der Nrn. 502—527, soweit er sich auf das Pfaffsche Problem bezieht, in der Sprache der gewöhnlichen Analysis darzustellen. Wir benutzen dabei das Jacobische Symbol $(1, 2, \ldots, n)$ und zwar in der Weise, wie das Cayley gelehrt hat. Mit Hülfe dieses Symbols sind wir im Stande, alle Rechnungen und Ueberlegungen Grassmanns durch vollkommen aequivalente zu ersetzen.

Uebrigens beabsichtigen wir keineswegs Grassmann Schritt für Schritt zu folgen — das würde zu weitläufig werden —, wir wollen nur seinen Gedankengang möglichst vollständig wiedergeben, um zu zeigen, was Grassmann eigentlich geleistet hat.

In Nr. 502 zeigt Grassmann zunächst, dass die Gleichung:

$$X_1 dx_1 + \cdots + X_m dx_m = 0 \tag{1}$$

dann und nur dann durch einen Verein von n Gleichungen:

$$u_1(x_1, \ldots x_m) = \text{const.}, \ \ldots, \ u_n(x_1, \ldots x_m) = \text{const.} \tag{2}$$

integrirt werden kann, wenn der Ausdruck $\Sigma X_\mu dx_\mu$ auf die Form:

$$\sum_1^m{}^\mu X_\mu dx_\mu = \sum_1^n{}^\nu U_\nu(x_1, \ldots x_n) du_\nu \tag{3}$$

---

*) Theory of differential equations, Part I, Cambridge 1890, S. 83, in der deutschen Uebersetzung (Leipzig 1893) auf S. 92.

mit nur n Differentialen zurückführbar ist*). Der Beweis ist unmittelbar verständlich.

Soll $\Sigma X_\mu dx_\mu$ auf die Form (3) gebracht werden können, so müssen die Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} X_\mu = \sum_1^n {}^\nu U_\nu \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial X_\mu}{\partial x_\varkappa} = \sum_1^n {}^\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \sum_1^n {}^\nu U_\nu \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_\mu \partial x_\varkappa} \end{cases}$$

bestehen. Um hieraus die U und u zu eliminiren, bildet Grassmann den Ausdruck:

$$(5)\quad \sum \pm X_{\mu_1} \frac{\partial X_{\mu_2}}{\partial x_{\mu_3}} \cdots \frac{\partial X_{\mu_{2n}}}{\partial x_{\mu_{2n+1}}},$$

wo $\mu_1, \ldots \mu_{2n+1}$ irgend $2n+1$ unter den Zahlen $1, 2, \ldots m$ sind und wo die Summe in der Weise zu bilden ist, dass man $\mu_1, \ldots \mu_{2n+1}$ auf alle möglichen Arten permutirt und jeder geraden Permutation das Pluszeichen, jeder ungeraden das Minuszeichen giebt. Bei dieser Bildungsweise des Ausdrucks (5) fallen die zweiten Differentialquotienten der u_ν alle weg und es bleibt:

$$\sum_{\nu_1 \ldots \nu_{n+1}}^{1 \ldots n} U_{\nu_1} \sum \pm \frac{\partial u_{\nu_1}}{\partial x_{\mu_1}} \frac{\partial u_{\nu_2}}{\partial x_{\mu_2}} \frac{\partial U_{\nu_2}}{\partial x_{\mu_3}} \cdots \frac{\partial u_{\nu_{n+1}}}{\partial x_{\mu_{2n}}} \frac{\partial U_{\nu_{n+1}}}{\partial x_{\mu_{2n+1}}},$$

wo die innere Summe ebenso zu bilden ist wie bei (5). Da nun unter den $n+1$ Indices $\nu_1, \ldots \nu_{n+1}$ stets mindestens zwei gleiche vorkommen, so verschwindet die innere Summe identisch, und es ergiebt sich somit, dass alle Ausdrücke von der Form (5) den Werth Null haben müssen, wenn eine Gleichung von der Form (3) bestehen soll. Natürlich tritt diese Bedingung nur dann in Kraft, wenn $m \geqq 2n+1$ ist.

Das ist der Inhalt von Nr. 511. Die Ableitung der nothwendigen Bedingungen für das Bestehen von (3) ist vollständig Grassmanns Eigenthum und entschieden höchst beachtenswerth, zumal sie sich auch auf Systeme von Pfaffschen Gleichungen übertragen lässt (vgl. die Anmerkung zu Nr. 511 Anm. auf S. 479f.).

In Nr. 512 zeigt Grassmann, wie man die in Nr. 511 gefundenen Bedingungsgleichungen mit Hülfe des Jacobischen Symbols $(1, 2, \ldots 2n)$ schreiben kann. Indem er nämlich mit Jacobi:

$$(6)\quad \frac{\partial X_\mu}{\partial x_\varkappa} - \frac{\partial X_\varkappa}{\partial x_\mu} = (\mu, \varkappa)$$

setzt und jenes Symbol**) benutzt, bringt er die Gleichung, die durch Nullsetzen des Ausdrucks (5) entsteht, auf die Form:

*) Ueber Nr. 503 vgl. man die Anmerkung auf S. 472ff.

**) Dieses Symbol ist eine ganze Funktion n-ten Grades der Ausdrücke $(\mu, \varkappa)$ und ist durch die Recursionsformel:

$$(1, 2, \ldots, 2n) = \Sigma(1, 2)(3, 4, \ldots, 2n)$$

definirt, wo die Summe rechts aus allen Ausdrücken besteht, die man erhält, wenn man in dem hingeschriebenen Ausdrucke die Indices $2, 3, \ldots, 2n$ einmal, zweimal, …

(7) $$\Sigma X_{\mu_1}(\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{2n+1}) = 0,$$

wo jetzt die Summe aus allen den Ausdrücken besteht, die man aus den hingeschriebenen durch einmalige, zweimalige, ... $(2n+1)$-malige cyklische Vertauschung der Indices $\mu_1, \ldots, \mu_{2n+1}$ erhält.

Wir brauchen uns wohl mit der Begründung dieses Ergebnisses nicht aufzuhalten und wollen daher gleich einschalten, dass die Gleichung (7) mit Hülfe eines von Cayley herrührenden Kunstgriffs*) in einer sehr eleganten Form geschrieben werden kann, die uns nachher gute Dienste leisten wird. Setzen wir nämlich mit Cayley:

(6') $$(0, \mu) = X_\mu, \quad (\mu, 0) = -X_\mu,$$

so erhält (7) die Gestalt:

(7') $$(0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n+1}) = 0.$$

Wir kehren nach dieser kleinen Abschweifung zu Nr. 512 zurück.

Eigentlich hätte man alle Gleichungen (7) oder (7') zu bilden, die man erhält, wenn man für $\mu_1, \ldots, \mu_{2n+1}$ irgend $2n+1$ der Zahlen $1, 2, \ldots, m$ setzt. Grassmann beweist aber noch: *dass unter der Voraussetzung: $X_1 \gtrless 0$ diejenigen Gleichungen* (7) *oder* (7'), *in denen eine der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n+1}$ den Werth Eins hat, das Bestehen aller übrigen Gleichungen nach sich ziehen.*

Uebersetzen wir den Beweis Grassmanns in die hier gewählten Bezeichnungen, so kommt er einfach auf Folgendes hinaus: Die Gleichung:

$$(0, 0, 1, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n+1}) = 0$$

ist eine Identität, da das Jacobische Symbol auf der linken Seite zwei gleiche Indices enthält. Entwickelt man aber diese Gleichung nach der für das Jacobische Symbol geltenden Regel, so erhält man, da das erste Glied verschwindet:

$$(0, 1)(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n+1}, 0) + \sum_1^{2n+1}{}_{\varkappa} (0, \mu_\varkappa)(\mu_{\varkappa+1}, \ldots, \mu_{2n+1}, 0, 1, \mu_1, \ldots, \mu_{\varkappa-1}) = 0$$

und diese Gleichung ist gleichbedeutend mit der folgenden:

$$X_1(0, \mu_1, \ldots, \mu_{2n+1}) = \sum_1^{2n+1}{}_{\varkappa} (-1)^{\varkappa-1} X_\varkappa(0, 1, \mu_1, \ldots, \mu_{\varkappa-1}, \mu_{\varkappa+1}, \ldots, \mu_{2n+1}),$$

aus der der zu beweisende Satz unmittelbar folgt.

In Nr. 514 wird die Aufgabe behandelt, *die Gleichung:*

$$X_1 dx_1 + \cdots + X_m dx_m = 0$$

durch Einführung neuer Veränderlicher auf eine Gleichung zurückzuführen, in der bloss noch $m-1$ Veränderliche vorkommen. Analytisch kommt diese Aufgabe darauf hinaus, *den Ausdruck $\Sigma X_\mu dx_\mu$ durch Einführung neuer Veränderlicher $y_1, \ldots y_{m-1}, t$ auf die Form:*

$(2n-1)$-mal cyklisch vertauscht. (Vgl. hierzu die Entwickelung auf S. 475 f.) Es folgt dann leicht, dass der Ausdruck $(\mu_1, \ldots, \mu_{2n})$ bei Vertauschung zweier Indices und auch bei cyklischer Vertauschung aller $2n$ Indices sein Zeichen wechselt, und dass er verschwindet, wenn zwei der Indices gleich sind. Man vgl. die auf S. 474 genannte Abhandlung von Cayley.

*) Vgl. die auf S. 477 angeführte Abhandlung von Cayley.

(8) $$\sum_1^m {}^{\mu} X_\mu dx_\mu = \mathsf{N} \sum_1^{m-1} {}^{\nu} Y_\nu(y_1, \ldots y_{m-1}) dy_\nu$$

zu bringen, wo t nur in dem Faktor N *vorkommt.* Die ganze Aufgabe und das dabei benutzte Verfahren stammen von Pfaff*), der Inhalt von Nr. 514 ist daher im Wesentlichen nur eine Uebersetzung Pfaffscher Gedanken in Grassmannsche Sprache.

Die Aufgabe wird gelöst sein, wenn man die Gleichungen:

(9) $$\sum_1^m {}^{\mu} X_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mathsf{N}} \sum_1^m {}^{\mu} X_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial y_\nu}\right) = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, m-1)$$

befriedigt hat. Setzt man nun

(10) $$\frac{1}{\mathsf{N}} \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial t} = \lambda,$$

so erhält man durch Verbindung der Gleichungen (8) die folgenden:

(11) $$\lambda \sum_1^m {}^{\mu} X_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial y_\nu} = \sum_{\mu, \varkappa}^{1 \ldots m} \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_\varkappa} - \frac{\partial X_\varkappa}{\partial x_\mu}\right) \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} \frac{\partial x_\mu}{\partial y_\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, m-1),$$

die offenbar identisch erfüllt sind, wenn man die Gleichungen:

(12) $$\lambda(0, \mu) = \sum_1^m {}^{\varkappa} (\mu, \varkappa) \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} \quad (\mu = 1, \ldots m)$$

befriedigen kann, wo $(\mu, \varkappa)$ und $(0, \varkappa)$ die in (6) und (6′) angegebene Bedeutung haben.

Gelingt es nun umgekehrt, die $x_\varkappa$ derart als Funktionen von t und $y_1, \ldots y_{m-1}$ zu bestimmen, dass (12) erfüllt ist und dass λ nicht verschwindet, so wird augenscheinlich

(13) $$\sum_1^m {}^{\mu} (0, \mu) \frac{\partial x_\mu}{\partial t} = \sum_1^m {}^{\mu} X_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial t} = 0$$

und es bestehen zugleich die Relationen (11). Aus (13) und (11) folgen aber bei Benutzung von (10) die Gleichungen (9), also ist die Aufgabe gelöst.

Sind andrerseits die Gleichungen (12) so beschaffen, dass aus ihnen das Verschwinden von λ folgt, so muss man die $x_\varkappa$ so bestimmen, dass sie ausser den Gleichungen:

(12′) $$0 = \sum_1^m {}^{\varkappa} (\mu, \varkappa) \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} \quad (\mu = 1, \ldots m)$$

auch noch die Gleichung:

(13′) $$\sum_1^m {}^{\mu} (0, \mu) \frac{\partial x_\mu}{\partial t} = 0$$

erfüllen. Dann wird nämlich auch (11) erfüllt sein, wenn man $\lambda = 0$ setzt, und da die Gleichung (10) im Falle $\lambda = 0$ aussagt, dass N von t frei ist, so folgt

*) Vgl. die auf S. 471 angeführte Abhandlung.

aus (11) und (13′) oder (13) wieder das Bestehen der Gleichungen (9) und die Aufgabe ist gelöst*).

Der Fall, *dass m gerade ist,* wird jetzt in Nr. 515—517 unter gewissen Voraussetzungen vollständig erledigt.

Ist $m = 2n$, so folgt aus (12):

$$\lambda \sum^{(c)} (0, 1)(2, 3, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, 2n) =$$
$$= \sum_1^{2n}{}_{\varkappa} \sum^{(c)} (1, \varkappa)(2, 3, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, 2n) \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t},$$

wo $\sum^{(c)}$ andeutet, dass die Summe aller der Ausdrücke zu bilden ist, die aus dem hingeschriebenen durch ein-, zwei-, ... $(2n - 1)$-malige cyklische Vertauschung der Indices: $1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \mu + 2, \ldots, 2n$ entstehen. Die letzte Gleichung aber lässt sich schreiben:

$$\lambda(0, 1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, 2n) =$$
$$= -\sum_1^{2n}{}_{\varkappa} (\varkappa, 1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, 2n) \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t},$$

und da hier rechts alle Glieder verschwinden, in denen $\varkappa \gtrless \mu$ ist, so kommt:

$$(14) \quad \left\{ \lambda(0, 1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, 2n) = (-1)^\mu (1, 2, \ldots, 2n) \frac{\partial x_\mu}{\partial t} \right. \quad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Andrerseits ist:

$$(\varkappa, 0, 1, 2, \ldots, 2n) = 0,$$

welche unter den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 2n$ man auch für $\varkappa$ setzen mag, hieraus aber folgt, wenn man die linke Seite nach der Recursionsformel auf S. 483 entwickelt,

$$(\varkappa, 0)(1, 2, \ldots, 2n) + \sum_1^{2n}{}_{\mu} (\varkappa, \mu)(\mu + 1, \ldots, 2n, 0, 1, \ldots, \mu - 1) = 0$$

oder:

$$(15) \quad \left\{ \sum_1^{2n}{}_{\mu} (-1)^\mu (\varkappa, \mu)(0, 1, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, 2n) = (0, \varkappa)(1, 2, \ldots, 2n) \right. \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, 2n).$$

Sind daher nicht alle $2n$ Ausdrücke:

*) Der Fall $\lambda = 0$ wird allerdings erst in Nr. 516 berücksichtigt, doch ist es besser ihn gleich hier zu besprechen. Noch zweckmässiger wäre es natürlich, zu sagen, dass die Aufgabe gelöst ist, wenn man λ und $x_1, \ldots x_m$ derart als Funktionen von $y_1, \ldots y_{m-1}$ und t bestimmt hat, dass die Gleichungen:

$$\lambda(0, \mu) + \sum_1^m{}_{\varkappa} (\varkappa, \mu) \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} = 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots m)$$

identisch erfüllt sind; doch wäre das eine wirkliche Abweichung von dem Grassmannschen Gedankengange und wir erwähnen das hier nur, weil man daraus erkennt, dass die Cayleysche Bezeichnung: $X_\mu = (0, \mu)$ in der Natur der Sache begründet ist.

(16) $$(0, 1, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, 2n) \quad (\mu = 1, \ldots, 2n)$$

gleich Null und ist auch $(1, 2, \ldots, 2n) \gtrless 0$, so werden die Gleichungen (12) durch die aus (14) folgenden Werthe der Differentialquotienten von $x_1, \ldots x_{2n}$ befriedigt, ohne dass λ verschwindet, und zwar kann man, wenn etwa:

(17) $$(0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$$

von Null verschieden ist, $x_{2n} = t$ setzen, und erhält dann λ und die Differentialquotienten von $x_1, \ldots x_{2n-1}$ nach t als Funktionen von $x_1, \ldots x_{2n-1}$ und $x_{2n} = t$ dargestellt.

Wenn dagegen zwar nicht alle Ausdrücke (16) verschwinden, wohl aber $(1, 2, \ldots 2n)$, also wegen (14) auch λ gleich Null ist, so zeigen die Gleichungen (15), dass (12′) und (13′) identisch erfüllt werden, wenn man setzt:

(18) $$\frac{\partial x_\mu}{\partial t} = \varrho(-1)^\mu (0, 1, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, 2n),$$

unter ϱ eine beliebige Grösse verstanden. Wenn daher insbesondere der Ausdruck (17) von Null verschieden ist, so kann man wieder $x_{2n} = t$ setzen und erhält ϱ und die Differentialquotienten von $x_1, \ldots x_{2n-1}$ nach t durch $x_1, \ldots x_{2n-1}$ und $x_{2n} = t$ ausgedrückt.

Ist also $m = 2n$ und sind nicht alle Ausdrücke (16) gleich Null, so erhält man immer ein System von Gleichungen:

(19) $$\frac{\partial x_\mu}{\partial t} = \xi_\mu(x_1, \ldots x_{m-1}, t) \quad (\mu = 1, \ldots, m-1),$$

das zusammen mit: $x_m = t$ entweder die Gleichungen (12) bei nicht verschwindendem λ oder die Gleichungen (12′) und (13′) befriedigt; tritt der letztere Fall ein, so hat man $\lambda = 0$ zu setzen.

Die Differentialgleichungen (19) werden jetzt integrirt unter Zugrundelegung der Anfangsbedingungen*): $x_\nu = y_\nu$ für $t = 0$ $(\nu = 1, \ldots, m-1)$. Berechnet man ferner N aus Gleichung (10), so erfüllen $x_1, \ldots x_m$ als Funktionen von $y_1, \ldots y_{m-1}$ und t die Gleichungen (9) und es besteht daher eine Gleichung von der Form (8). Macht man endlich in (8) die Substitution: $t = x_{2n} = 0$, so erkennt man sofort, dass die Gleichung: $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ beim Uebergange zu den neuen Veränderlichen $y_1, \ldots y_{m-1}, t$ die Form:

(20) $$\sum_1^{m-1} X_\nu(y_1, \ldots y_{m-1}, 0) dy_\nu = 0$$

erhält.

Grassmann macht übrigens noch ausdrücklich darauf aufmerksam, dass in dem Falle, wo $(1, 2, \ldots, 2n)$ und also auch λ verschwindet, der Multiplikator N von t frei wird, dass also, sobald nicht alle Ausdrücke (16) null sind, die Gleichung $(1, 2, \ldots, 2n) = 0$ nothwendig und hinreichend ist, damit sich der Pfaffsche

---

*) Hierbei wird stillschweigend vorausgesetzt, dass die Funktionen $\xi_1, \ldots \xi_{m-1}$ für $t = 0$ endlich und stetig bleiben, eine Voraussetzung, auf die übrigens Grassmann selbst an einer späteren Stelle (S. 377, Z. 7 ff. v. o.) aufmerksam macht. Auch ist zu bemerken, dass Grassmann in Nr. 494 das *Vorhandensein* der Lösungen, die er hier benutzt, nicht wirklich bewiesen hat.

Ausdruck $\Sigma X_\mu dx_\mu$ durch Einführung neuer Veränderlicher $y_1, \ldots y_{m-1}, t$ in einen Ausdruck überführen lasse, der nur noch $m-1$ Veränderliche enthält.

Der Inhalt der Nrn. 515—517 ist zum grössten Theile nur eine Erweiterung und Vervollständigung Jacobischer Gedanken. Denn Jacobi hatte bereits auf die besonderen Eigenschaften der Gleichungen von der Form (12) aufmerksam gemacht und hatte auch gezeigt, dass man durch Einführung der Anfangswerthe die neue Form (20) der Pfaffschen Gleichung: $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ ohne Integration finden kann (s. Crelle Bd. 17, S. 157 ff., ges. Werke Bd. 4, S. 121 ff.).

Die allgemeine Erledigung der in Nr. 514 gestellten Aufgabe (s. S. 484 f.) bereitet Grassmann in Nr. 518 dadurch vor, dass er den Satz beweist:

Wenn alle Ausdrücke von der Form:

$$(0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n+1}) \tag{21}$$

verschwinden, so verschwinden auch alle Ausdrücke von der Form:

$$(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n+2}), \tag{22}$$

unter $\mu_1, \mu_2, \ldots$ *irgend welche der Zahlen:* $1, 2, \ldots m$ *verstanden.*

Der Grassmannsche Beweis dieses Satzes*) kommt auf die Bildung der Identität (15) hinaus, in der man nur n durch $n+1$ zu ersetzen hat; da man nämlich in dieser Identität den Zahlen $\varkappa, 1, 2, \ldots, 2n+2$ irgend welche Werthe aus der Reihe $1, 2, \ldots m$ ertheilen kann und da nicht alle $(0, \varkappa) = X_\varkappa$ verschwinden, so ergiebt sich die Richtigkeit des Satzes unmittelbar.

In Nr. 519 zeigt Grassmann jetzt, *dass zu jeder Pfaffschen Gleichung:* $X_1 dx_1 + \cdots + X_m dx_m = 0$ *ein ganz bestimmter Werth von* n *gehört, derart, dass alle Ausdrücke von der Form:*

$$(0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n+1}) \tag{21}$$

verschwinden, nicht aber alle Ausdrücke von der Form:

$$(0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n-1}). \tag{23}$$

Sind nämlich alle Ausdrücke von der Form (23) gleich Null, so verschwinden, wie soeben gezeigt worden ist, auch alle Ausdrücke: $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n})$ und damit auch alle Ausdrücke (21). Andrerseits hat für $2n+1 > m$ jeder Ausdruck von der Form (21) sicher den Werth Null, weil er dann zwei gleiche Indices enthält, während dagegen für $n = 1$ sicher nicht alle Ausdrücke (23), das heisst, nicht alle Grössen $X_1, \ldots X_m$ verschwinden.

Demnach wird es zwischen den Gränzen: $1 \leqq n \leqq \frac{1}{2}(m+1)$ einen ganz bestimmten Werth von n geben, der die verlangten Eigenschaften besitzt. Diesen Werth denkt sich Grassmann für n gewählt.

Nun ist die in Nr. 514 gestellte Aufgabe bereits in dem Falle erledigt, wo m gerade und $n = \frac{1}{2} m$ ist (s. Nr. 515—517 und S. 486 f.). Es bleiben also nur die beiden Fälle: $m = 2n - 1$ und $m > 2n$ übrig. Von diesen behandelt Grassmann in Nr. 519 nur den zweiten, und zwar mit gutem Grunde, denn in dem Falle $m = 2n - 1$ ist die gestellte Aufgabe überhaupt nicht lösbar. Grassmann erwähnt das zwar nicht ausdrücklich, aber es unterliegt keinem Zweifel, dass er sich vollständig darüber klar war.

*) Bei der hier angewandten Bezeichnungsweise erscheint dieser Satz als die unmittelbare Erweiterung eines in Nr. 512 bewiesenen Satzes (s. S. 484, Z. 14 ff. v. o.).

Es sei also $m > 2n$. Nach dem Früheren kommt Alles darauf an, die Gleichungen:

$$\lambda(0, \mu) = \sum_1^m {}^{\varkappa} (\mu, \varkappa) \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} \quad (\mu = 1, \ldots m) \tag{12}$$

zu befriedigen, und wenn das nur bei verschwindendem λ möglich sein sollte, ausserdem noch die Gleichung:

$$0 = \sum_1^m {}^{\mu} (0, \mu) \frac{\partial x_\mu}{\partial t}. \tag{13'}$$

Grassmann zeigt aber, dass sich diese Forderung auf den einfacheren schon früher erledigten Fall zurückführen lässt, wo $m = 2n$ ist.

Unter den gemachten Voraussetzungen sind alle Ausdrücke von der Form (21) gleich Null, dagegen nicht alle von der Form (23). Ferner wollen wir zunächst noch annehmen, dass nicht alle Ausdrücke von der Form: $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n})$ verschwinden, und zwar möge etwa

$$(1, 2, 3, \ldots, 2n) \tag{24}$$

von Null verschieden sein. Dann lässt sich, wie **Grassmann** zeigt, nachweisen, dass alle Gleichungen (12) eine Folge der $2n$ ersten unter ihnen sind.

In der That, setzen wir mit **Grassmann**:

$$G_\mu = \lambda(0, \mu) + \sum_1^m {}^{\varkappa} (\varkappa, \mu) \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t}$$

und verstehen wir unter $\sum^{(c)}$ die Summe aller Ausdrücke, die man erhält, wenn man die $2n + 1$ Indices $1, 2, \ldots, 2n, 2n + \nu$ einmal, zweimal, ... $(2n + 1)$-mal cyklisch vertauscht, so ergiebt sich

$$\sum^{(c)} G_1 (2, 3, \ldots, 2n, 2n + \nu) = \lambda \sum^{(c)} (0, 1)(2, 3, \ldots, 2n, 2n + \nu) +$$
$$+ \sum_1^m {}^{\varkappa} \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} \sum^{(c)} (\varkappa, 1)(2, 3, \ldots, 2n, 2n + \nu),$$

hier aber lässt sich die rechte Seite in der Form:

$$\lambda(0, 1, 2, \ldots, 2n, 2n + \nu) + \sum_1^m {}^{\varkappa} \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} (\varkappa, 1, 2, \ldots, 2n, 2n + \nu)$$

schreiben und dieser Ausdruck verschwindet identisch, da nach der Voraussetzung alle Ausdrücke (21) und demzufolge (s. die vorige Seite) auch alle Ausdrücke (22) verschwinden. Es ist somit:

$$\sum^{(c)} G_1 (2, 3, \ldots, 2n, 2n + \nu)$$

identisch null, und da hier der Faktor von $G_{2n+\nu}$ den Werth $(1, 2, \ldots, 2n)$ hat und also von Null verschieden ist, so ist hiermit bewiesen, dass die Gleichungen: $G_{2n+1} = 0, \ldots, G_m = 0$ sämmtlich eine Folge der Gleichungen: $G_1 = 0, \ldots, G_{2n} = 0$ sind.

Es ergiebt sich hieraus, dass wir, jedenfalls sobald $(1, 2, \ldots, 2n) \gtrless 0$ ist,

$m - 2n$ von den Grössen $\frac{\partial x_\mu}{\partial t}$ ganz willkürlich annehmen können, und zwar setzen wir mit **Grassmann**:

$$\text{(25)} \qquad \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial t} = \cdots = \frac{\partial x_m}{\partial t} = 0.$$

Dadurch reduciren sich aber die Gleichungen (12) nach Weglassung der überflüssigen Gleichungen: $G_{2n+1} = 0, \ldots, G_m = 0$ auf die folgenden:

$$\text{(12'')} \qquad \lambda(0, \nu) = \sum_1^{2n} {}_\varkappa (\nu, \varkappa) \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} \quad (\nu = 1, \ldots, 2n),$$

und wir erhalten wie auf S. 486:

$$\text{(26)} \qquad \left\{ \begin{array}{c} \lambda(0, 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, 2n) = (-1)^\nu (1, 2, \ldots, 2n) \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \\ (\nu = 1, 2, \ldots, 2n), \end{array} \right.$$

wo die Faktoren von λ auf der linken Seite sicher nicht alle verschwinden, weil sonst (nach S. 488) auch $(1, 2, \ldots, 2n)$ null sein müsste.

Damit ist gezeigt, dass, sobald $(1, 2, \ldots, 2n) \gtrless 0$ ist, die Gleichungen (12) identisch erfüllt werden können, ohne dass λ verschwindet.

Es bleibt nun noch der Fall zu erledigen, wo alle Ausdrücke $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n})$ verschwinden.

Bei diesem dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass nicht alle $2n$ Ausdrücke:

$$(0, 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, 2n) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n)$$

verschwinden. Machen wir dann in den Gleichungen (12) die Substitution (25), so lassen sich, wie aus (26) hervorgeht, die entstehenden Gleichungen sicher nicht befriedigen, ohne dass λ verschwindet. Dagegen können wir, ähnlich wie auf S. 487, erreichen, dass die Gleichungen (12) für $\lambda = 0$ erfüllt sind, und dass ausserdem (13') befriedigt wird.

In der That, setzen wir:

$$\text{(27)} \qquad \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial x_\nu}{\partial t} = \varrho(-1)^\nu (0, 1, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, 2n) \\ (\nu = 1, \ldots, 2n), \end{array} \right.$$

so wird für $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots m$:

$$\sum_1^{2n} {}_\nu (\varkappa, \nu) \frac{\partial x_\nu}{\partial t} = \varrho \sum_1^{2n} {}_\nu (\varkappa, \nu)(\nu + 1, \ldots, 2n, 0, 1, \ldots, \nu - 1)$$
$$= \varrho(\varkappa, 0, 1, \ldots, 2n) - \varrho(\varkappa, 0)(1, 2, \ldots, 2n),$$

also unter den gemachten Voraussetzungen gleich Null. Damit aber ist unsre Behauptung bewiesen*).

*) In den vorstehenden Betrachtungen (S. 489—490), die nur eine Uebertragung der **Grassmann**schen sind, steckt ein Satz über die schief-symmetrische Determinante:

$$\Delta = \left| (0, \mu)\ (1, \mu) \ldots (m, \mu) \right|_{(\mu = 0, 1, \ldots m)},$$

der Satz nämlich, dass das Verschwinden aller Ausdrücke von der Form

Um jetzt unsre Aufgabe vollständig zu erledigen, wollen wir annehmen, dass $(0, 1, 2, \ldots, 2n-1) \gtrless 0$ ist, was wir offenbar dürfen. Dann können wir $x_{2n} = t$ setzen und erhalten für $x_1, \ldots, x_{2n-1}$ unter allen Umständen Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial t} = \xi_\nu(x_1, \ldots, x_{2n-1}, t) \quad (\nu = 1, \ldots, 2n-1), \tag{28}$$

während $x_{2n+1}, \ldots x_m$ den Gleichungen (25) genügen müssen. Integriren wir die Gleichungen (28) unter Zugrundelegung der Anfangsbedingungen: $x_\nu = y_\nu$ für $t = 0$ und setzen wir überdies: $x_{2n+1} = y_{2n+1}, \ldots, x_m = y_m$, so erhalten wir $x_1, \ldots x_m$ als Funktionen von $y_1, \ldots, y_{2n-1}, t, y_{2n+1}, \ldots, y_m$ dargestellt, und es ergiebt sich genau so wie auf S. 487, dass die Gleichung: $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ in den neuen Veränderlichen die Form:

$$\sum_1^{2n-1}{}_\nu X_\nu(y_1, \ldots, y_{2n-1}, 0, y_{2n+1}, \ldots, y_m) dy_\nu +$$

$$+ \sum_1^{m-2n}{}_\varkappa X_{2n+\varkappa}(y_1, \ldots, y_{2n-1}, 0, y_{2n+1}, \ldots, y_m) dy_{2n+\varkappa} = 0$$

erhält.

Dies der Inhalt von Nr. 519. Er geht ganz wesentlich über das von Jacobi Geleistete hinaus und zeigt, dass Grassmann die Theorie der Gleichungensysteme von der Form (12) vollständig beherrschte.

In Nr. 520 und 521 wird auseinandergesetzt, in welchen Fällen die bisherigen Betrachtungen erlauben, die Pfaffsche Gleichung: $X_1 dx_1 + \cdots + X_m dx_m = 0$ auf eine Gleichung zwischen bloss $m - 1$ Veränderlichen zurückzuführen. Die betreffende Zurückführung ist nämlich immer dann möglich, wenn alle Ausdrücke von der Form

$$(0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n'+1}) \tag{29}$$

verschwinden und überdies $m \geqq 2n'$ ist, denn dann ist die auf S. 488 definirte Zahl*) $n \leqq n'$ und also auch $m \geqq 2n$. Für $m > 2n$ ist aber die Zurückführung in Nr. 519 geleistet und für $m = 2n$ in Nr. 515—517.

Insbesondere ist die Zurückführung immer dann möglich, wenn m gerade, $= 2n'$ ist, denn dann enthält jeder der Ausdrücke (29) zwei gleiche Indices und ist daher sicher null.

In Nr. 522 wird nunmehr der wichtige und vor Grassmann noch nicht bekannte Satz abgeleitet, *dass die Gleichung:* $X_1 dx_1 + \cdots + X_m dx_m = 0$ *stets*

$(0, \mu_1, \ldots, \mu_{2n+1})$ das Verschwinden aller $(2n+1)$-reihigen Unterdeterminanten von Δ nach sich zieht. Da jeder Ausdruck $(0, \mu_1, \ldots, \mu_{2n+1})$ die Quadratwurzel aus einer $(2n+2)$-reihigen Unterdeterminante von Δ ist (vgl. S. 479) und zwar aus einer Unterdeterminante, die gerade $2n+2$ Elemente der Diagonale von Δ enthält, so ist klar, dass wir es hier mit einem der bekannten Frobeniusschen Sätze über schief-symmetrische Determinanten zu thun haben (s. Crelle, Bd. 82, S. 242, Satz V, 1877).

*) Es ist ein Mangel in der Grassmannschen Darstellung, dass der Buchstabe n in verschiedenen Bedeutungen gebraucht wird. Wir bezeichnen daher nur die auf S. 488 definirte Zahl mit n und schreiben sonst n' an Stelle von n.

auf eine Gleichung zwischen bloss $2n' - 1$ Veränderlichen zurückführbar ist, sobald alle Ausdrücke (29) verschwinden.

Ist nämlich $m \geqq 2n'$, so kann man nach dem Früheren stets solche neue Veränderliche $y_1, \ldots, y_{m-1}, t$ einführen, dass die Gleichung: $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ die Form:

$$\sum_1^{m-1} {}_\nu X_\nu(y_1, \ldots, y_{m-1}, 0) dy_\nu = 0 \tag{30}$$

erhält. **Nun sind aber nach Voraussetzung alle Ausdrücke (29) gleich Null und bleiben somit auch gleich Null, wenn man in ihnen: $x_1 = y_1, \ldots, x_{m-1} = y_{m-1}$, und $x_m = 0$ setzt. Ist also noch $m - 1 \geqq 2n'$, so sind die Bedingungen erfüllt, unter denen die Gleichung (30) auf eine Gleichung zwischen bloss $m - 2$ Veränderlichen zurückgeführt werden kann. Indem man dieses Verfahren genügend oft wiederholt, erhält man schliesslich die Gleichung: $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ auf eine zwischen bloss $2n' - 1$ Veränderlichen zurückgeführt.**

Nunmehr kann in Nr. 524 und 525 der Nachweis geführt werden, dass die in Nr. 511 abgeleitete Bedingung nicht bloss nothwendig, sondern auch hinreichend ist, *dass sich also der Pfaffsche Ausdruck: $X_1 dx_1 + \cdots + X_m dx_m$ stets dann aber auch nur dann auf eine Form: $U_1 du_1 + \cdots + U_{n'} du_{n'}$ mit bloss n' Differentialen bringen lässt, wenn alle Ausdrücke* (29) *verschwinden.* Auch dieser Satz war zu Grassmanns Zeit neu.

Nach Nr. 511 (s. S. 483f.) ist die genannte Zurückführung sicher nur dann möglich, wenn alle Ausdrücke (29) verschwinden. Ist diese Bedingung erfüllt, so bringt man die Gleichung: $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ zunächst auf die Form einer Gleichung zwischen bloss $2n' - 1$ Veränderlichen, was nach dem Früheren sicher möglich ist. In dieser Gleichung wird, nach dem Vorgange von Pfaff, eine der Veränderlichen, sie heisse u_1, konstant gesetzt und dann die entstehende Gleichung zwischen $2n' - 2$ Veränderlichen auf eine zwischen $2n' - 3$ zurückgeführt. Von diesen $2n' - 3$ Veränderlichen wird wieder eine konstant gesetzt, die u_2 heisse, und so weiter. Hat man dieses Verfahren r-mal angewendet, so hat man r Funktionen $u_1, \ldots u_r$ der ursprünglichen Veränderlichen konstant gesetzt und hat noch eine Gleichung zwischen $2n' - 2r - 1$ Veränderlichen. Macht man daher $r = n' - 1$ und setzt man auch die letzte noch übrige Veränderliche $u_{n'}$ konstant, so ist augenscheinlich: $u_1 = \text{const.}, \ldots, u_{n'} = \text{const.}$ ein Verein, der die Gleichung: $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ integrirt. Nach Nr. 502 (s. S. 482 f.) muss daher sein:

$$\sum_1^m {}_\mu X_\mu dx_\mu = \sum_1^{n'} {}_\nu U_\nu du_\nu,$$

und der Satz ist demnach bewiesen. Zugleich ist klar, dass die Bestimmung eines jeden $u_\varkappa$ die Integration gewisser gewöhnlicher Differentialgleichungen erfordert, die man aufstellen kann, ohne vorher $u_1, u_2, \ldots, u_{\varkappa-1}$ bestimmt zu haben*).

Nr. 525–529. Aus dem eben bewiesenen Satze geht insbesondere hervor, dass ein Pfaffscher Ausdruck in $2n'$ Veränderlichen unter allen Umständen auf einen mit nur n' Differentialen zurückführbar ist, und hieraus folgt wiederum, dass die Gleichung: $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ niemals auf eine Gleichung zwischen weniger als $2n - 1$ Veränderlichen zurückführbar ist, *unter n die auf S.* 488 *definirte*

*) Grassmann sagt das zwar nicht ausdrücklich, es war ihm aber unzweifelhaft bekannt, wie aus der Bemerkung auf S. 377, Z. 18—17 v. u. hervorgeht.

Zahl verstanden. Liesse sich die Gleichung nämlich auch nur auf eine Gleichung zwischen $2n-2$ Veränderlichen zurückführen, so könnte man den Ausdruck: $\Sigma X_\mu dx_\mu$ auf einen Ausdruck mit bloss $n-1$ Differentialen zurückführen und es wären also nach Nr. 511 alle Ausdrücke:

$$(0, \mu_1, \ldots, \mu_{2n-1})$$

gleich Null, was der Definition der Zahl n widerspricht.

Endlich kann nunmehr auch die Integration der Gleichung: $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ geleistet werden, wenigstens wenn man sich auf integrirende Vereine von der Form: $u_1 = \text{const.}, \ldots, u_{n'} = \text{const.}$ beschränkt*). Ist nämlich n die auf S. 488 definirte Zahl, so giebt es keine integrirenden Vereine dieser Art, bei denen $n' < n$ ist, dagegen giebt es integrirende Vereine, bei denen $n' = n$ ist und nach Nr. 503 kann man alle diese integrirenden Vereine finden, sobald man den Ausdruck: $\Sigma X_\mu dx_\mu$ auf die Form: $U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$ gebracht hat.

Nachdem wir so die Untersuchungen Grassmanns über das Pfaffsche Problem kennen gelernt haben, wollen wir uns noch kurz vergegenwärtigen, was Grassmann zu den Leistungen seiner Vorgänger hinzugefügt hat.

Grassmanns Verdienst besteht zunächst darin, dass er — so können wir es heute ausdrücken — die Invariantentheorie einer beliebigen Pfaffschen Gleichung bis zu einem gewissen Grade vollständig entwickelt hat. Er zeigt nämlich, dass zu jeder vorgelegten Pfaffschen Gleichung $X_1 dx_1 + \cdots + X_m dx_m = 0$ eine gewisse ganze Zahl gehört, die für die Gleichung charakteristisch ist. Diese ganze Zahl liegt zwischen den Gränzen 1 und $\frac{1}{2}(m+1)$, die Gränzen mit eingeschlossen, und kann ohne Integration gefunden werden. Hat sie den Werth n, so kann die Gleichung: $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ durch Einführung neuer Veränderlicher auf eine Pfaffsche Gleichung in $2n-1$, nicht aber auf eine in weniger als $2n-1$ Veränderlichen zurückgeführt werden, und es kann ausserdem die linke Seite der Gleichung: $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$, also der Pfaffsche Ausdruck: $\Sigma X_\mu dx_\mu$ auf einen Ausdruck: $U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$ mit gerade n Differentialen, nicht aber auf einen mit weniger als n Differentialen zurückgeführt werden. Hiermit ist thatsächlich bewiesen, dass jede Pfaffsche Gleichung: $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$, deren charakteristische Zahl den Werth n besitzt, die Normalform:

$$y_1 dy_2 + y_3 dy_4 + \cdots + y_{2n-3} dy_{2n-2} + dy_{2n-1} = 0$$

erhalten kann, wo $y_1, \ldots y_{2n-1}$ von einander unabhängige Veränderliche bezeichnen, mit andern Worten, es ist bewiesen, dass die Zahl n die einzige Invariante der Pfaffschen Gleichung $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ ist. Zwar spricht Grassmann sein Ergebniss nicht in dieser Form aus und auch die soeben angeführte Normalform findet sich bei ihm nicht, aber trotzdem kann man mit Recht sagen, dass er die Kriterien angegeben hat, an denen man erkennen kann, auf welche Normalform eine vorgelegte Pfaffsche Gleichung gebracht werden kann.

Bei dem Pfaffschen *Ausdrucke:* $\Sigma X_\mu dx_\mu$ bleibt nun noch die Frage zu erledigen, ob die Form: $U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$, auf die er gebracht werden konnte, noch einer weiteren Vereinfachung fähig ist oder nicht, ob also der

*) Dass Grassmann thatsächlich nur die integrirenden Vereine von dieser Form berücksichtigt, ist in der Anmerkung zu Nr. 503 (s. S. 472f.) gezeigt.

Ausdruck: $\Sigma U_\nu du_\nu$ auf einen Ausdruck mit n Differentialen aber nur $2n-1$ Veränderlichen zurückgeführt werden kann oder nicht; denn die Zurückführung auf einen Ausdruck mit nur $2n-2$ Veränderlichen ist sicher unmöglich, weil sich sonst die Zahl der Differentiale auf $n-1$ herabdrücken liesse. Auch auf diese Frage findet man bei Grassmann die Antwort*): die Zurückführung auf einen Ausdruck in $2n-1$ Veränderlichen ist nämlich dann aber auch nur dann möglich, wenn für den gegebenen Ausdruck: $\Sigma X_\mu dx_\mu$ alle Ausdrücke von der Form: $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n})$ verschwinden, unter $\mu_1, \ldots \mu_{2n}$ Zahlen aus der Reihe 1, 2, ... m verstanden. Verschwinden diese Ausdrücke nicht alle, so kann $\Sigma X_\mu dx_\mu$ die Form:

$$y_1 dy_2 + \cdots + y_{2n-1} dy_{2n}$$

erhalten, verschwinden sie dagegen alle, so kann $\Sigma X_\mu dx_\mu$ die Form:

$$\varrho(y_1, \cdots y_{2n-1})(y_1 dy_2 + y_3 dy_4 + \cdots + y_{2n-3} dy_{2n-2} + dy_{2n-1})$$

erhalten, wo beide Male die y von einander unabhängige Veränderliche bezeichnen. Es fehlt also nur noch der Nachweis, dass der zuletzt geschriebene Ausdruck stets auf einen von derselben Form zurückgeführt werden kann, bei dem ϱ den Werth 1 hat; aber auch ohne diese Vereinfachung, deren Möglichkeit erst Clebsch erkannt hat**), bleibt das, was Grassmann für die Invariantentheorie eines Pfaffschen Ausdruckes geleistet hat, höchst beachtenswerth, denn im Grunde findet man bei ihm die Kriterien, an denen man erkennen kann, auf welche der beiden möglichen Normalformen ein vorgelegter Pfaffscher Ausdruck zurückführbar ist, und gerade in Bezug auf die Richtigkeit und Vollständigkeit der Kriterien steht Clebsch wesentlich hinter Grassmann zurück***).

Was die wirkliche Aufstellung der Normalform einer vorgelegten Pfaffschen Gleichung angeht, so hat Grassmann zwar gezeigt, dass sie durch Integration einer Reihe von gewöhnlichen Differentialgleichungen geleistet werden kann und dass alle diese Systeme ohne Integration angegeben werden können, aber man wird hierin, nach den Vorarbeiten Jacobis, keine besondere Leistung erblicken können. Die Frage, ob sich die Ordnung der erforderlichen Integrationen herabdrücken lässt, hat Grassmann überhaupt nicht behandelt; man wird daher in dieser Beziehung den nahezu gleichzeitigen Untersuchungen von Natani†) und Clebsch den Vorrang einräumen müssen, obwohl auch diese die Frage nicht zum Abschlusse gebracht haben, was erst dem folgenden Jahrzehnte vorbehalten war.

*) Ausdrücklich ausgesprochen hat er sie allerdings nur in dem Falle: $m = 2n$, siehe Nr. 516 Anm., vgl. auch S. 487, Z. 9 v. u.

**) S. dessen zwei Abhandlungen: „Ueber das Pfaffsche Problem", Crelle Bd. 60, S. 193—251 (1862, die Abhandlung ist vom 28. Sept. 1860 datirt) und Bd. 61, S. 146—179 (1863, datirt vom 25. Januar 1861), sowie eine kurze, vorläufige Mittheilung vom März 1861 ebenda Bd. 59, S. 190—192 (1861).

***) Darauf hat Lie zuerst hingewiesen und zugleich ausgesprochen, dass in der Aufstellung der richtigen Kriterien Grassmanns Hauptleistung für die Theorie des Pfaffschen Problems zu suchen ist. Vgl. den Nekrolog auf Grassmann, Math. Ann. Bd. 14, S. 28 (1879).

†) S. dessen vom Januar 1860 datirte Arbeit: „Ueber totale und partielle Differentialgleichungen", Crelle Bd. 58, S. 301—328, die aber erst 1861 erschienen ist und daher sicher keinen Einfluss auf Grassmann gehabt hat, ebensowenig wie die Arbeiten von Clebsch.

Nicht unterschätzen darf man dagegen, was Grassmann für die Theorie der Gleichungensysteme von der Form (12), S. 485 geleistet hat, und im Zusammenhange damit muss auch seine eigenthümliche Symbolik erwähnt werden, die der Jacobi-Cayleyschen vollständig ebenbürtig, ja sogar insofern überlegen ist, als die Grassmannschen Symbole immer unmittelbar an den Pfaffschen Ausdruck erinnern, aus dem sie gebildet sind, während das Symbol: $(1, 2, \ldots, 2n)$ als solches gar keine Beziehung zum Pfaffschen Probleme erkennen lässt. Deshalb ist auch die Grassmannsche Symbolik ohne Weiteres auf Systeme von Pfaffschen Gleichungen anwendbar, was bei der Jacobi-Cayleyschen nicht der Fall ist.

Sachregister

zur Ausdehnungslehre von 1862*).

---

*) Die Zahlen, vor denen kein S. steht, beziehen sich auf die Nummern der A_2. Bei den Kunstausdrücken der A_2, die schon in der Ausdehnungslehre von 1844 oder in der Selbstanzeige dieses Werkes oder in der geometrischen Analyse (diese Ausg. I, 1. S. 1—292, 297—312, 325—398) vorkommen, findet man immer einen darauf bezüglichen Vermerk. Solche Kunstausdrücke, die in den eben genannten Werken vorkommen, die aber Grassmann in der A_2 aufgegeben oder durch andere ersetzt hat, sind in scharfe Klammern eingeschlossen. In geschweifte Klammern { } ist Alles eingeschlossen, was sich auf die Zusätze und Anmerkungen der vorliegenden Ausgabe bezieht.





Berichtigungen und Nachträge.

Zum ersten Theile des ersten Bandes.

S. 8, Z. 2, 1 v. u. Der 2. Theil dieser Raumlehre hat den besonderen Titel: „Ebene räumliche Grössenlehre“ und es heisst auf S. 194 f. in einer Fussnote:

„Das Rechteck ist eigentlich selbst das *wahre geometrische Produkt,* und die Construktion desselben, wie sie § 53 gezeigt ist, *die eigentlich geometrische Multiplikation.* Nimmt man den Begriff des Produkts nämlich in seiner reinsten und allgemeinsten Bedeutung, so bezeichnet er das Ergebniss einer Construktion, welches aus einem schon Erzeugten (Construirten) auf gleiche Weise hervorgeht, als dieses Erzeugte aus den ursprünglich Erzeugenden, und die Multiplikation ist so nur eine Construktion in einer höheren Potenz. In der Geometrie ist der Punkt das ursprünglich „Erzeugende“; aus ihm geht durch jene Construktion die Linie hervor. Machen wir die begränzte Linie (als das durch die erste Construktion Erzeugte) zur Grundlage einer neuen Construktion, indem wir sie auf gleiche Weise behandeln, wie vorher den Punkt, so entsteht das Rechteck. Das Rechteck entsteht also aus der Linie ebenso, wie die Linie aus dem Punkte entstand.

„So verhält sichs nun auch in der Zahlenlehre. Hier ist das ursprünglich Erzeugende die Einheit, welche in Hinsicht auf die Zahl als schlechthin gegeben angesehen werden muss. Aus dieser geht durch das Zählen (die arithmetische Construktion) die Zahl hervor. Macht man diese nunmehr gebildete Zahl zur Grundlage eines neuen Zählens, indem man sie an die Stelle der Einheit setzt, so erhält man die arithmetische Verbindung zur Multiplikation, welche also nichts anders ist, als eine Zahl auf höherer Stufe, eine Zahl, deren Einheit auch eine Zahl ist. So könnte man etwa sagen, das Rechteck sei eine (begränzte) Linie, bei der an die Stelle des erzeugenden Punkts auch eine (begränzte) Linie getreten sei. Man würde dann die beiden vorstehenden Sätze auch so fassen können: *Rechtecke sind die geometrischen Produkte aus Grundseite und Höhe, und verhalten sich wie die arithmetischen.*“

In dem „Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie“ von J. G. Grassmann, Professor am Gymnasio zu Stettin, Berlin bei G. Reimer, 1835, liest man auf S. 10 in einer Fussnote Folgendes:

„Nimmt man den Begriff des Products in seiner reinsten und allgemeinsten Bedeutung, so bezeichnet er in der Mathematik das Ergebniss einer Synthesis, bei welcher das durch eine frühere Synthesis erzeugte, an die Stelle des ursprünglichen Elements gesetzt, und wie dieses behandelt wird. Das Product muss aus dem, was durch die erste Synthesis erzeugt ist, gerade ebenso hervorgehen, wie dieses aus dem ursprünglich erzeugenden. — In der Arithmetik ist die Einheit

das Element, die Synthesis das Zählen, das Erzeugniss die Zahl. Wird nun diese Zahl, als das Erzeugniss der ersten Synthesis, an die Stelle der Einheit gesetzt, und eben so behandelt, d. h. gezählt, so entsteht das arithmetische Product, welches als eine Zahl auf höherer Stufe, als eine Zahl, deren Einheit schon eine Zahl ist, betrachtet werden kann. — In der Geometrie ist der Punct das Element, die Synthesis die Fortbewegung des Punctes nach irgend einer Richtung, das Erzeugniss, der Weg des Punctes, die Linie. Wird nun diese Linie, als das Erzeugniss der ersten Synthesis, an die Stelle des Punctes gesetzt, und ebenso behandelt, d. h. nach einer andern Richtung fortbewegt, so entsteht die Fläche, als der Weg der Linie; sie ist daher das wahre geometrische Product zweier Linear-Factoren, und erscheint zunächst als ein Rechteck, sofern in jener zweiten Richtung nichts von der ersten enthalten ist. Wird die Fläche an die Stelle des Puncts gesetzt, so entsteht der geometrische Körper, als das Product dreier Factoren, womit es in der Geometrie, da der Raum nur drei Dimensionen enthält, sein Bewenden hat, während die Arithmetik in Ansehung der Anzahl der Factoren nicht beschränkt ist. Vergl. meine Raumlehre 2ter Th. Berlin 1824."

S. 35, Z. 9 v. o. Hier hätte „sind" für „ist" gesetzt werden sollen.

S. 54, Z. 11 v. u. ist der Strich nach „aus" zu tilgen.*)

S. 94. Varignon hat diesen Satz zuerst in den Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, Année 1719, S. 66 veröffentlicht (Paris 1721). In Varignons „Nouvelle mécanique ou statique", Paris 1725, steht er in Bd. 1, auf S. 84, Lemme XVI.

Die von Grassmann angegebene, allgemein gültige Fassung des Satzes findet sich übrigens schon in der Statik von Möbius § 34 (1837); s. die ges. Werke Bd. III, S. 51.

S. 195, Z. 8—11 v. o., 6—1 v. u. Auf diesen Punkt werden wir im zweiten Bande zurückkommen.

S. 330, Z. 19 v. u. lies: $a'x'$ s $b'x'$.

S. 366, Z. 1 v. o. Hier hätte für $q_1 \delta p_1$ und $q_2 \delta p_2$ gesetzt werden sollen $q_1 \times \delta p_1$ und $q_2 \times \delta p_2$.

S. 380, Z. 12, 16 v. o. Hier hätte für $2 r S \alpha a$ gesetzt werden sollen: $2 r \times S \alpha a$.

S. 407, Z. 18 v. u. lies: „und das ist noch nicht gleichbedeutend", und am Schlusse von Z. 17 v. u. füge man hinzu: In den Betrachtungen auf S. 124, Z. 3—14 v. o wird aber stillschweigend vorausgesetzt, dass C von $A \,.\, B$ unabhängig sei.

S. 409 f. Das Grassmannsche Doppelverhältniss von vier geraden Linien ist, wie der Unterzeichnete nachträglich erfahren hat, bereits von Herrn Voss in ähnlichem Sinne behandelt worden, wie in der Anmerkung auf S. 409—411 des ersten Theils dieser Ausgabe, allerdings ohne Bezugnahme auf Grassmann. (Math. Ann. Bd. 8 (1875) S. 60, Bd. 13 (1878) S. 168, 232; vgl. auch Sturm, Crelles Journal Bd. 86 (1879) S. 130 und Mehmke, Zeitschr. f. Math. Jahrg. 40 (1895), S. 227.)

Wir entnehmen diesen Untersuchungen noch den folgenden Satz, der ganz ähnlich bewiesen werden kann, wie die früher aufgestellten: „Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass vier gerade Linien A, B, C, D

*) Die Berichtigungen zu S. 54, 330, 366, 380, 421 Z. 8 v. u., 422 verdanke ich einer freundlichen Mittheilung von K. Zindler in Wien.



Tangenten von einer Raumcurve 3. O. (und folglich von ∞^1 solchen Curven) sind, ist

$$\sqrt[4]{\overline{AB}\,.\,\overline{CD}} + \sqrt[4]{\overline{AC}\,.\,\overline{DB}} + \sqrt[4]{\overline{AD}\,.\,\overline{BC}} = 0.\text{“} \;—$$

Auch die Gleichung

$$AB\,.\,CD + AC\,.\,DB + AD\,.\,BC = 0$$

hat eine einfache Bedeutung. Construirt man nämlich etwa in der durch B, C, D bestimmten Regelschaar die drei Strahlen B', C', D', die einzeln B, C, D zu je einer Gruppe von vier harmonischen Geraden ergänzen, so bilden die beiden Strahlen derselben Regelschaar, die A treffen, ein Strahlenpaar der durch A, A'; B, B'; C, C' bestimmten Involution. Oder anders ausgedrückt: Bringt man irgend eine Ebene Π mit den Strahlen B, C, D und der sie enthaltenden Fläche 2. O. zum Schnitt, so bestimmen das eingeschriebene Dreieck b, c, d des entstandenen Kegelschnitts und das zugehörige umschriebene Dreieck β, γ, δ einen Punkt p, den gemeinsamen Schnittpunkt von b , $c\gamma$, $d\delta$. Die Gleichung sagt aus, dass A ein Leitstrahl des durch die Zuordnung (Π, p) definirten Nullsystems ist. — Der Satz lässt sich auf den Fall ausdehnen, wo an Stelle von A, B, C,D beliebige lineare Complexe treten. Study.

S. 410, Z. 24 v. o. Statt: „Zahl“ lies: „Grösse“, denn ϱ ist zunächst ein gewisses Volumen und wird erst dann zu einer Zahl, wenn man eine Volumeneinheit festgesetzt hat.

S. 416, Z. 21f. v. o. Grassmann war durch Möbius (Brief vom 2. Februar 1845) auf die Preisaufgabe aufmerksam gemacht worden.

S. 416, Z. 22, 21 v. u. Mittlerweile habe ich auch dieses Gutachten selbst einsehen können. Dabei zeigt sich, dass Drobisch die Stellung der Preisaufgabe veranlasst hatte. Drobisch ist es auch, der, auf besonderen Wunsch von Möbius, zuerst sein Gutachten abgegeben hat. Das darauf folgende Gutachten von Möbius ist sehr ausführlich und enthält unter Anderm die auf S. 424, Z. 14 — 6 v. u. angeführten Aeusserungen fast wörtlich. Ich kann mir nicht versagen, den Schluss dieses Gutachtens mitzutheilen; es heisst da: „Zudem wünsche ich um so mehr, dass der deutsche Geometer, welcher die grossartige von einem der ausgezeichnetsten deutschen Heroen der Wissenschaft ausgegangene Idee einer geometrischen Analysis mit Erfolg zu verwirklichen gesucht hat, öffentliche Anerkennung finde, als erst voriges Jahr ein französischer Mathematiker (de Saint-Venant) auf einige dieser neuen Rechnungsarten, wie es scheint, für sich gekommen ist, und es dann, wie schon manchmal, auch hier geschehen könnte, dass deutsche Verdienste über denen von Ausländern vergessen würden.“

S. 417, Z. 6 v. o. lies: „merkwürdigen“.

S. 421, Z. 15 v. o. lies: „Bolyai“.

S. 421, Z. 8 v. u. lies: „a, b, c', d'.“

S. 422, Z. 13 v. o. lies: $\asymp \delta p_1$ statt: δp_1.

S. 424, Z. 19, 18 v. u. Das Möbiusarchiv befindet sich jetzt in den Sitzungsräumen der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig.

S. 429, rechts, Z. 17 v. u. Statt: 383 lies: *383*.

S. 433, rechts, Z. 7 v. o. Statt (295) lies: [295].

Zum zweiten Theile des ersten Bandes.

S. 25, in der Kopfüberschrift lies: „Gleichungen", ausserdem füge man noch hinzu: „— Zurückleitung".

S. 35, Z. 18 v. o. lies: „und, indem".

S. 87, Z. 18 v. u. lies: „Multiplikationsgattung".

S. 52, Z. 15 v. u. Statt $-a'$ lies: $(-a')$.

S. 58 fehlt links von Z. 5 v. o. die Seitenzahl: 53.

S. 96, Z. 13 v. u. lies: „und, wenn".

S. 106, Z. 9 v. u. hätte gesetzt werden sollen: „in den Gleichungen".

S. 106, Z. 7 v. u. Statt: $\beta_1^{(1)}$ lies: $\beta^{(1)}$.

S. 181, Z. 2 v. u. lies: Fig. 11.

S. 213, Z. 1 v. u. lies: „*angenommenen*".

S. 261, Z. 16 v. u. hätte für: „α_1 und α_2" gesetzt werden sollen: „a_1 und a_2".

S. 277, Z. 6 v. o. lies: „syncyklisch".

S. 281, Z. 18 v. o. lies: „Quadratwurzel".

S. 298, Z. 19 v. u. hätte nach: $+\cdots$, noch hinzugefügt werden sollen: „$\cdots$,".

S. 330, Z. 18 v. u. muss es heissen: „eine mit x null werdende Funktion".

S. 338, Z. 14 v. u. und 339, Z. 16 v. u. lies: „Differenzialgleichung".

S. 365, Z. 6 v. o. lies: „der Brüche für $\delta x_1, \ldots \delta x_{2n}$".

S. 397, Z. 6 v. o. Im Möbiusarchive befindet sich ein Brief Grassmanns, aus dem hervorgeht, dass am 31. Oktober 1861 ein Exemplar der A_2 an Möbius abgegangen ist.

S. 403, Z. 14 v. u. bis 404, Z. 19 v. o. Kürzer ist ein Beweis, den ich einer brieflichen Mittheilung von Study verdanke. Nimmt man nämlich an, dass A_2 das Glied $[e_{n-1}e_n]$ enthält, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, so kann A_2 in der Form:

$$A_2 = \lambda\{[e_{n-1}e_n] + [e_{n-1}b] + [ae_n]\} + B_2$$

geschrieben werden, wo die Zahlgrösse $\lambda \gtrless 0$ ist und wo a, b, B_2 dem Gebiete $e_1, \ldots e_{n-2}$ angehören. Demnach wird:

$$A_2 = \lambda\,[(e_{n-1} + a)\,(e_n + b)] + B_2 - \lambda\,[ab].$$

Bildet man nun die Gleichung $[A_2A_2] = 0$ und von dieser Gleichung die Zurückleitung auf das Gebiet $e_1, \ldots e_{n-2}$ unter Ausschluss des Gebietes: $e_{n-1} + a$, $e_n + b$, so erkennt man (s. Nr. 130 u. 131), dass sich $[A_2A_2] = 0$ in zwei Gleichungen zerlegt, von denen die eine so lautet:

$$\left[(e_{n-1} + a)\,(e_n + b)\,(B_2 - \lambda\,[ab])\right] = 0,$$

aus dieser aber folgt nach Nr. 81, dass $B_2 - \lambda\,[ab] = 0$ ist, also ist A_2 sicher einfach, sobald $[A_2A_2]$ verschwindet.

S. 409, Z. 1—3 v. o. Ebenfalls einer brieflichen Mittheilung von Study verdanke ich ein anderes Kriterium für die Einfachheit einer Grösse m-ter Stufe, jedenfalls das einfachste Kriterium, das sich überhaupt denken lässt. Ist nämlich A_m eine Grösse m-ter Stufe in dem Hauptgebiete n-ter Stufe: $e_1, \ldots e_n$ und ist B_{n-m+1} irgend eine einfache Grösse $(n - m + 1)$-ter Stufe, so ist das regressive Produkt $[A_m B_{n-m+1}]$ eine Grösse erster Stufe; ist A_m insbesondere



einfach, so ist $[A_m B_{n-m+1}]$ der Grösse A_m untergeordnet und also das Produkt: $[A_m B_{n-m+1} \cdot A_m]$ gleich Null. Das Kriterium sagt nun aus, dass auch umgekehrt A_m dann einfach ist, wenn das Produkt $[A_m B_{n-m+1} \cdot A_m]$ verschwindet, welche einfache Grösse $(n-m+1)$-ter Stufe B_{n-m+1} auch sein mag. Da aber jede einfache Grösse $(n-m+1)$-ter Stufe aus den Einheiten von der betreffenden Stufe numerisch ableitbar ist und da diese Einheiten einfache Grössen sind, so genügt es, wenn die angegebene Bedingung für alle Einheiten $(n-m+1)$-ter Stufe erfüllt ist, und wir können daher mit Study den Satz aussprechen:

Eine Grösse A_m von m-ter Stufe im Hauptgebiete n-ter Stufe ist dann und nur dann einfach, wenn sie der Gleichung:

$$(1) \qquad [A_m E_{n-m+1} \cdot A_m] = 0$$

genügt, welche Einheit $(n-m+1)$-ter Stufe man auch für E_{n-m+1} setzen mag.

Beweis. Dass die Bedingung des Satzes nothwendig ist, ergiebt sich aus dem vorhin Gesagten. Um zu zeigen, dass sie auch hinreichend ist, wollen wir, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist, annehmen, dass A_m, als Vielfachensumme der Einheiten m-ter Stufe dargestellt, ein Glied von der Form $[e_1 \ldots e_m]$ enthält, so dass es also die Form hat:

$$A_m = \lambda [e_1 \ldots e_m] + \sum_1^m {}^{\mu} \sum_1^{n-m} {}^{\varkappa} \alpha_{\mu\varkappa} [e_1 \ldots e_{\mu-1} e_{\mu+1} \ldots e_m e_{m+\varkappa}] + \sum_i \beta_i E_m^{(i)},$$

wo λ eine von Null verschiedene Zahl ist und wo jede der Einheiten m-ter Stufe $E_m^{(i)}$ höchstens $m-2$ von den Einheiten $e_1, \ldots e_m$ als Faktoren enthält. Setzt man dann:

$$E_{n-m+1}^{(\mu)} = [e_\mu e_{m+1} \ldots e_n] \quad (\mu = 1, \ldots m),$$

so wird nach Nr. 55, 94, 108 und 109:

$$\left[A_m E_{n-m+1}^{(\mu)}\right] = \lambda e_\mu + (-1)^{m-\mu} \sum_1^{n-m} {}^{\varkappa} \alpha_{\mu\varkappa} e_{m+\varkappa} = u_\mu \quad (\mu = 1, \ldots m).$$

Ist nun die Gleichung (1) für jede Einheit $(n-m+1)$-ter Stufe erfüllt, so verschwinden alle Produkte $[u_1 A_m], \ldots, [u_m A_m]$, und da $u_1, \ldots u_m$ augenscheinlich in keiner Zahlbeziehung stehen, so ist A_m nach Nr. 84 dem äusseren Produkte $[u_1 \ldots u_m]$ kongruent und somit sicher eine einfache Grösse. Das aber war zu beweisen.

Das hiermit bewiesene Kriterium liefert unmittelbar die Relationen zweiten Grades, die zwischen den Ableitungszahlen einer Grösse m-ter Stufe bestehen müssen, wenn diese Grösse einfach sein soll, während die Aufstellung dieser Relationen auf Grund des Kriteriums auf S. 409 praktisch undurchführbar ist; doch behält das Kriterium auf S. 409 auch neben dem andern sein Interesse.

Erwähnt sei noch, dass man in dem Studyschen Satze die Einheiten $(n-m+1)$-ter Stufe auch durch solche $(n-m-1)$-ter Stufe ersetzen kann, und dass der dem Satze zu Grunde liegende Gedanke noch allgemeinere Sätze derselben Art liefert.

S. 431, Z. 18 v. o. Der Zähler des zweiten Bruches für $\cos \angle AA'$ muss lauten:

$$\left[A\left(|B(|A\|B)\right)\right].$$

